Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 33, 139–154 (1975)
© by Springer-Verlag 1975

Processus de Markov associé a une forme de Dirichlet non symétrique

Santiago Carrillo Menendez*
Université de Paris VI, Lab. de Probabilités
Tour 56, 4 Place Jussieu, F-75230 Paris Cedex 05, France

The purpose of the present paper is the probabilistic interpretation of potential theory associated with a Dirichlet form on a functional space. We generalise the works of M. Fukushima to unsymmetric forms using a new method based on the utilisation of quasi continuous representation of functions belonging to the Dirichlet space and a Ray Knight compactification.

Il s'agit ici de généraliser au cas non symétrique les travaux de M. Fukushima relatifs aux processus de Markov associès à une forme de Dirichlet (cf. [10,13]).

Le problème est le suivant: étant donné une forme de Dirichlet **a** sur un espace fonctionnel H, il existe une résolvante d'opérateurs sur H associée à la forme **a**, et une théorie du potentiel dans H (cf. I); peut-on considérer que la résolvante associée à a est la résolvante d'un bon processus de Markov?

Nous montrons, sous des hypothèses de régularité raisonnable, que la réponse est oui: cette résolvante est en fait la résolvante d'un processus de Hunt. Pour le montrer nous construisons une résolvante de noyaux à partir de la résolvante d'opérateurs et nous construisons ensuite le processus associé.

Nous utilisons, pour ce faire, l'existence de représentants quasi-continus qui permet d'obtenir un «relèvement» de l'espace de Dirichlet et une méthode de compactification du type Ray-Knight.

On donnera aussi (cf. III) un critère de continuité des trajectoires au moyen de la forme **a**.

Pour ce qui est de la théorie des espaces de Dirichlet nous renvoyons à l'excellent exposé de J. Deny (cf. [8]), pour l'extension de ces résultats au cas non symétrique, voir A. Ancona ([1]).

Notations

X est un espace topologique L.C.D. non compact et ∂ est le point à l'infini de X dans la compactification d'Alexandrov.

* Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 224.

$\mathcal{M}_+(X)$ est le cône des mesures de Radon positives sur X. Si μ appartient à $\mathcal{M}_+(X)$ supp μ désigne le support de μ. Si de plus A est une partie de X, $\mu_{|A}$ est la restriction de μ à A et $A' = \operatorname{supp} \mu_{|A}$ lorsque cette écriture à un sens.

ε_x désigne la masse unité en x.

m est un élément de $\mathcal{M}_+(X)$ fixé une fois pour toutes.

$\mathscr{C}_k(X)$ est l'espace des fonctions définies sur X, continues et à support compact, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact; $\mathscr{C}_0(X)$ est la fermeture de $\mathscr{C}_k(X)$.

$\mathscr{L}^p(X, m)$, $L^p(X, m)$ désignent les espaces usuels des fonctions et des classes de fonctions mesurables dont la puissance p-ième est intégrable.

(f, g) est le produit scalaire de f et g dans $L^2(X, m)$.

$f \vee g$ est le sup de f et g et $f \wedge g$ est l'inf.

$\mathscr{B}$ est la tribu borélienne de X et B est l'espace vectoriel des fonctions $\mathscr{B}$ mesurables bornées. Si Y est un borélien de X, $\mathscr{B}(Y)$ est la tribu trace de $\mathscr{B}$ sur Y et $B(Y)$ est l'espace des fonctions définies sur Y, $\mathscr{B}(Y)$ mesurables et bornées.

Si A est une partie de X, A^c est le complémentaire de A.

$\bar{A}$ est l'adherence de A. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ désignent les ensembles arithmétiques usuels.

I. Théorie du potentiel associée a une forme de Dirichlet

1. *Espaces fonctionnels et formes de Dirichlet*

I.1.1. Définition

(i) Nous appellerons espace fonctionnel de base (X, m) un sous espace H de $L^2(X, m)$, muni d'une structure hilbertienne, coréticulé dans $L^2(X, m)$, tel que si f est dans H, $f \wedge 1$ soit dans H et tel que l'injection de H dans $L^2(X, m)$ soit continue.

(ii) Un espace fonctionnel H, de base (X, m), est dit régulier si $H \cap \mathscr{C}_k(X)$ est dense dans H et dans $\mathscr{C}_k(X)$.

Dans la suite $\|\cdot\|$ est une norme sur H, compatible avec la structure hilbertienne et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé.

I.1.2. Définition

(i) Soit $\mathbf{a}$ une forme bilinéaire définie sur $H \times H$. Nous dirons que la contraction fondamentale opère pour $\mathbf{a}$ si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée pour tout f de H, où $Uf = f^+ \wedge 1$.

(I.1) $\mathbf{a}(f + Uf - Uf) \geqq 0$; $\mathbf{a}(Uf, f - Uf) \geqq 0$; $\mathbf{a}(f \wedge c, [f - c]^+) \geqq 0 \ \forall c \in \mathbb{R}_+$.

(ii) Une forme de Dirichlet sur H est une forme bilinéaire $\mathbf{a}$ définie sur $H \times H$, continue et coercive, pour laquelle la contraction fondamentale opère.

I.1.3. Etant donnée une forme de Dirichlet $\mathbf{a}$ sur H nous pouvons lui associer une famille de formes de Dirichlet $(\mathbf{a}_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ en posant $\mathbf{a}_\lambda(f, g) = \mathbf{a}(f, g) + \lambda(f, g)$ et $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}$. Nous avons alors le

I.1.3. Théorème. *Soit* **a** *une forme de Dirichlet sur un espace fonctionnel H de base* (X, m). *Il existe une unique résolvante* $(V_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ *d'opérateurs continus sur* $L^2(X, m)$ *ayant les propriétés suivantes:*

a) $0 \leqq f \leqq 1 \Rightarrow 0 \leqq \lambda V_\lambda f \leqq 1$.

b) $\operatorname{Im} V_\lambda$ *est une partie de H partout dense dans H.*

c) Pour tous f de $L^2(X, m)$, *g de H et* λ *de* $\mathbb{R}_+$, $\mathbf{a}_\lambda(V_\lambda f, g) = (f, g)$.

d) La résolvante est fortement continue sur H.

e) Si $(A, \mathscr{D}(A))$ *est le générateur infinitésimal de la résolvante, dans* $L^2(X, m)$, *alors* $\mathscr{D}(A) \subset H$ *et pour tous f de* $\mathscr{D}(A)$, *g de H nous avons:* $\mathbf{a}(f, g) = (-Af, g)$.

I.1.4. *Remarques.* Nous écrivons V au lieu de V_0 l'opérateur terminal de la résolvante. D'autre part, de la troisième expression donnée en *(I.1)* il vient que $\mathbf{a}(f, g) \leqq 0$ pour f et g étrangers

2. Cône de potentiels dans un espace fonctionnel régulier

Dans toute une suite de cet article nous supposons donnés un espace fonctionnel régulier H, de base (X, m) et une forme de Dirichlet **a** sur H.

Il est facile de voir qu'une conséquence de l'hypothèse de régularité est la forte continuité sur L^2 (X, m) de la résolvante construite au théorème I.1.3. Nous noterons $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ le semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur $L^2(X, m)$ qui lui est associé.

I.2.1. *Définition.* Nous appellerons potentiel un élément du cône

$$\mathscr{P} = \{p \in H / \mathbf{a}(p, f) \geqq 0 \ \forall f \in H_+\}$$

le cône $\mathscr{P}$ ainsi défini a les propriétés suivantes:

(P.1) *Soit* $p \in H$; *il est équivalent de dire que p est un potentiel ou qu'il existe une mesure de Radon positive* μ *telle que pour toute f de* $H \cap \mathscr{C}_k(X)$ *on ait* $\mathbf{a}(p, f) = \int f \, d\mu$. *On écrit alors* $p = V^\mu$.

(P.2) $\mathscr{P}$ *est la fermeture dans H du cône* $V(L^2_+(X, m))$.

(P.3) $\mathscr{P}$ *est inf-stable et si p est dans* $\mathscr{P}$, $p \wedge 1$ *y est aussi.*

(P.4) *Si* Γ *est un convexe fermé non vide de H, héréditaire croissant* (i.e. $\{f \in \Gamma, g \in H$ *et* $f \leqq g\} \Rightarrow \{g \in \Gamma\}$) *alors la* **a**-*projection de* 0 *sur* Γ *est le plus petit potentiel de* Γ.

Le lecteur pourra consulter l'exposé de J. Deny ([8], chap. 4) ou celui d'A. Ancona ([1], chap. 5) pour plus de renseignements sur le lien entre les potentiels et les mesures dites d'énergie finie.

I.2.2. Proposition

(i) *Soit f dans H. Il est équivalent de dire que f appartient à* $\mathscr{P}$ *ou que* $\lambda V_\lambda f \leqq f$ *pour tout* λ *de* $\mathbb{R}_+$.

(ii) *Soit f une fonction définie presque partout sur X, positive* ($m-$pp), *majorée par une fonction g de* H_+ *et telle que* $\lambda V_\lambda f \leqq f$ *dans* L^2 *pour tout* λ *de* $\mathbb{R}_+$. *Alors f est un potentiel et* $\mathbf{a}(f, f) \leqq M^2 \mathbf{a}(g, g)$ (*M est la norme de* **a**).

La démonstration des cette proposition repose sur le résultat suivant:

Lemme. *Soit* $\alpha_\lambda(f,g)=\lambda(f-\lambda V_\lambda f,g)$ *définie pour* f *et* g *dans* $L^2(X,m)$.

(i) *Soit* f *dans* $L^2(X,m)$; f *est dans* H *si et seulement si* $\sup_\lambda \alpha_\lambda(f,f)<\infty$.

(ii) *Pour* f *et* g *dans* H *nous avons* $\mathbf{a}(f,g)=\lim_{\lambda\to\infty}\alpha_\lambda(f,g)$.

3. *Potentiels capacitaires*

I.3.1. *Définition.* Soient A une partie de X, f un élément de H et c une constante. Nous dirons que f majore c sur A au sens de H ($f\geqq_H c$) s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans H, convergent vers f et telle que chaque f_n majore c presque partout sur un voisinage de A.

Nous définissons alors $\Pi(X)=\{A\in X/\exists f\in H$ et $f\geqq_H 1$ sur $A\}$ et pour A dans $\Pi(X)$ soit e_A la **a**-projection de 0 sur le convexe fermé $\Gamma_A=\{f\in H/f\geqq_H 1$ sur $A\}$; e_A est le potential capacitaire de A; il définit une capacité fonctionnelle c'est-à-dire que nous avons les propriétés suivantes:

(C.1) *L'application* $A\mapsto e_A$ *de* $\Pi(X)$ *dans* H *est croissante.*

(C.2) *Si une suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $\Pi(X)$ *croit vers un élément* A *de* $\Pi(X)$ *alors* $e_A=\lim_{n\to\infty}e_{A_n}=\sup_n e_{A_n}$ *(dans* H*).*

(C.3) *Si* A *est dans* $\Pi(X)$ *et si* $\mathscr{F}$ *désigne le filtre des ouverts (non vides) contenant* A, alors $e_A=\lim\{e_\omega/\omega\in\mathscr{F}\}=\inf\{e_\omega/\omega\in\mathscr{F}\}$ *(dans* H*).*

(C.4) *Si* ω *est un ouvert de* X *appartenant à* $\Pi(X)$ *et si* $\mathscr{F}$ *désigne le filtre des compacts contenus dans* ω *nous avons:* $e_\omega=\lim\{e_K/K\in\mathscr{F}\}=\sup\{e_K/K\in\mathscr{F}\}$.

(C.5) *Si* A *est un élément de* $\Pi(X)$, *alors nous avons:* $0\leqq e_A\leqq 1\,m-\mathrm{pp}$ *et* $e_A=1\,m-\mathrm{pp}$ *sur* A.

I.3.2. *Définition.* Un élément A de $\Pi(X)$ sera dit polaire si son potentiel capacitaire est nul.

On montre que tout borélien polaire est m-négligeable (cf. [1], V. Th. 12).

4. *Fonctions quasi-continues*

I.4.1. *Définition.* Une fonction réelle f, définie sur X, sera dite quasi-continue s'il existe une suite décroissante $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts dans $\Pi(X)$ telle que:

1. f est continue sur ω_n^c pour tout n.
2. e_{ω_n} tend vers 0 dans H.

Les principaux résultats sur la quasi-continuité sont rassemblés dans le

I.4.2. Théorème.

(i) *Une fonction quasi-continue positive presque partout est positive quasi partout* (i.e. *sauf sur un ensemble polaire*).

(ii) *Tout élément* f *de* H *admet un représentant quasi-continu* $\tilde{f}$.

(iii) *Si la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* f *dans* H *et si* $\tilde{f}_n$ *et* $\tilde{f}$ *sont des représentants quasi-continus, respectivement de* f_n *et de* f, *il existe une sous-suite* $(\tilde{f}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *qui converge quasi partout vers* $\tilde{f}$.

5. *Emboitement régulier*

Les notions introduites ici sont dues à M. Fukushima ([11]).

I.5.1. *Définition.*

(i) Un fermé F de X sera dit $(m-)$ régulier si $F=F'$.

(ii) Un emboitement est une suite croissante de fermés F_k, $(k\in\mathbb{N})$ telle que $\omega_k=X-F_k$ soit dans $\Pi(X)$ pour tout k et tel que e_{ω_k} tend vers 0 (dans H) lorsque k tend vers l'infini. Si chaque fermé F_k est régulier, on dit que l'emboitement est régulier.

Etant donné un emboitement régulier $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ nous posons $Y=\bigcup\limits_{0}^{\infty} F_k$ et nous définissons $\mathscr{C}(\{F_k\})=\{f\colon Y\mapsto\mathbb{R}/\sup\limits_{x\in Y}|f(x)|<\infty\,;\, f_k=f_{|F_k}$ est continue sur F_k et se prolonge continûment à $F_k\cup\{\partial\}$ en posant $f_k(\partial)=0\}$.

I.5.2. Théorème. *Soit L un ensemble dénombrable de fonctions quasi-continues bornées. Il existe un emboitement régulier* $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tel que L soit contenu dans* $\mathscr{C}(\{F_k\})$.

I.5.3. *Remarque.* La démonstration de ce résultat est la même que pour le cas symétrique; on la trouvera dans l'article déjà cité de M. Fukushima [11].

II. Construction d'un processus de Hunt

1. Introduction

Nous supposons donnés un espace fonctionnel régulier H, de base (X, m) et une forme de Dirichlet $\mathbf{a}$ sur H.

II.1.1. Soit $\mathscr{M}=\{\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_t, X_t,\theta_t, P_x\}$ un processus de Markov d'espace d'états $(Y,\mathscr{B}(Y))$ où Y est un borélien de X (cf. [21], chap. XIV). Nous adjoignons à Y le «cimetière» ∂ en considérant $Y\cup\{\partial\}$ comme un sousespace topologique du compactifié d'Alexandrov $X\cup\{\partial\}$. Soient $(P_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $(G_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ le semi-groupe et la résolvante associés à $\mathscr{M}$.

II.1.1. *Définition.* Nous dirons que le processus $\mathscr{M}$ est proprement associé à la forme $\mathbf{a}$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

1. Y^c est polaire (au sense de I.3.2).
2. Pour toute fonction f borélienne, bornée et de carré intégrable et tout λ de $\mathbb{R}_+$, $G_\lambda f$ est un représentant quasi-continu de $V_\lambda f$.

Ils s'agit ici de démontrer le résultat suivant:

II.1.2. Théorème. *Il existe un processus de Hunt proprement associé à* $\mathbf{a}$.

2. Démonstration du théorème

Elle va se faire en plusieurs étapes.

II.2.1. *Les opérateurs intégraux* $\tilde{V}_\lambda$. Puisque $H\cap\mathscr{C}_k(X)$ est uniformément dense dans $\mathscr{C}_0(X)$ nous pouvons trouver dans $H\cap\mathscr{C}_k(X)$ un ensemble dénombrable C ayant les propriétés suivantes:

1. *C est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Q}$;*
2. *C est uniformément dense dans $\mathscr{C}_0(X)$;*
3. *C est inf-stable et si f est dans C il en est de même de $f \wedge 1$.*

Soit $I = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{Q}_+} V_\lambda(C)$ et soit $\tilde{I}$ l'ensemble formé par le choix d'un représentant quasi-continu $\tilde{f}$ pour chaque élément f de I. Les théorèmes I.4.2 et I.5.2 permettent de démontrer la

II.2.1. Proposition. *Il existe un emboitement régulier $\{F_k^1\}_{k \in \mathbb{N}}$ tel que si nous posons $Y_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k^1$ nous ayons:*

(i) *$\tilde{I}$ est contenu dans $\mathscr{C}(\{F_k^1\})$.*

(ii) $\widetilde{V_\lambda(f+g)}(x) = \widetilde{V_\lambda f}(x) + \widetilde{V_\lambda g}(x)$ *pour tous* $\lambda \in \mathbb{Q}_+$, $f, g \in C$, $x \in Y$.

(iii) $\widetilde{V_\lambda(pf)}(x) = p\,\widetilde{V_\lambda f}(x)$ *pour tous* $\lambda \in \mathbb{Q}_+$, $p \in \mathbb{Q}$, $f \in C$, $x \in Y$.

(iv) $0 \leqq f \leqq 1 \Rightarrow 0 \leqq \lambda \widetilde{V_\lambda f}(x) \leqq 1$ *pour tous* $\lambda \in \mathbb{Q}_+$, $f \in C$, $x \in Y$.

(v) *Il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels positifs telle que $\lambda_n \widetilde{V_{\lambda_n} f}(x)$ tende verse $f(x)$ lorsque n tend vers l'infini, pour tout f de C et tout x de Y.*

Des (ii), (iii) et (iv) nous déduisons l'existence d'une famille de sous probabilités $\lambda \tilde{V}_\lambda(x, \cdot)$ définies sur $\mathscr{B}$ pour λ dans $\mathbb{Q}_+$ et x dans Y_1 telles que pour tout x dans Y_1 tout λ dans $\mathbb{Q}_+$ et tout f dans C nous ayons $\widetilde{V_\lambda f}(x) = \int_X f(y) V_\lambda(x, dy)$. Nous prolongeons alors les $\tilde{V}_\lambda$ en noyaux sur $(X, \mathscr{B})$ en posant $\tilde{V}_\lambda(x, \cdot) = 0$ lorsque x appartient à Y_1^c.

II.2.2. Proposition. *Pour toute fonction borélienne positive f, de carré intégrable, et pour tout λ de $\mathbb{Q}_+$, $\tilde{V}_\lambda f$ est un représentant quasi continu de $V_\lambda f$.*

Ce resultat est une conséquence immédiate du lemme suivant (cf. [11], lemme 3.1).

Lemme. *Soit J un ensemble de fonctions réelles, définies sur X et vérifiant:*

1. $\mathscr{C}_k^+(X) \subset J$;

2. $f_1, f_2 \in J$ et $c_1 f_1 + c_2 f_2 \geqq 0 \Rightarrow c_1 f_1 + c_2 f_2 \in J$ pour tout couple $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$;

3. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de J et si f_n croit vers f appartenant à $L^2(X, m)$ alors f est dans J.

Alors J continent toutes les fonctions boréliennes positives de $L^2(X, m)$.

II.2.3. Un cône de fonctions surmédianes. Soient $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base d'ouverts relativement compacts de la topologie de X et $\mathscr{U}(X)$ l'ensemble des réunions finies de ces ouverts. Alors $\mathscr{U}(X)$ est contenu dans $\Pi(X)$. Pour tout A de $\mathscr{U}(X)$ soit $\tilde{e}_A$ un représentant quasi continu fixé de e_A et soit D l'ensemble de ces représentants.

Soit alors S le plus peit $\mathbb{Q}$-cône ayant les propriétés suivantes:

1. S est inf-stable et si f est dans S, $f \wedge 1$ y est aussi;

2. S est stable par $\tilde{V}_\lambda$ pour λ dans $\mathbb{Q}_+$;

3. S contient les $\tilde{V}_\lambda(C_+ \cup D)$ pour λ dans $\mathbb{Q}_+$, et D.

De la proposition II.2.1. (v) et des propriétés de C il vient que S sépare les points de Y_1. On peut donner une construction de S analogue à celle faite en [15] ou [29].

II.2.3. Proposition. *Il existe un emboitement régulier $\{F_k^2\}_{k\in\mathbb{N}}$ tel que si nous posons $Y_2=\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k^2$ nous ayons:*

(i) $S\subset\mathscr{C}(\{F_k^2\})$, $F_k^2\subset F_k^1$ $\forall k\in\mathbb{N}$

(ii) *pour tout A de $\mathscr{U}(X)$: $0\leqq\tilde{e}_A(x)\leqq 1$ $\forall x\in Y_2$ et $\tilde{e}_A(x)=1$ $\forall x\in A\cap Y_2$*

(iii) *pour tous A, B de $\mathscr{U}(X)$ tels que $A\subset B$: $\tilde{e}_A(x)\leqq\tilde{e}_B(x)$ $\forall x\in Y_2$*

(iv) *pour tous A de $\mathscr{U}(X)$ et λ de $\mathbb{Q}_+$: $\lambda\tilde{V}_\lambda\tilde{e}_A(x)\leqq\tilde{e}_A(x)$ $\forall x\in Y_2$*

(v) *pour tous f de S, λ,μ de $\mathbb{Q}_+$, x de Y_2: $\tilde{V}_\lambda f(x)=\tilde{V}_\mu f(x)+(\mu-\lambda)\tilde{V}_\lambda\tilde{V}_\mu f(x)$*

(vi) *il existe une suite $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de rationnels positifs telle que $\lambda_m\tilde{V}_{\lambda_m}f(x)$ tende vers $f(x)$ lorsque m tend vers l'infini, pour tous f de S et x de Y_2.*

Nous allons nous placer sur $Y_2\cup\{\partial\}$ et considérer les ensembles de fonctions définis jusqu'à présent comme des ensembles de fonctions définies sur $Y_2\cup\{\partial\}$, étant entendu que les fonctions définies sur X sont étendues à $X\cup\{\partial\}$ en leur donnant la valeur 0 en ∂. De même la résolvante $(\tilde{V}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{Q}_+}$ est considérée comme résolvante markovienne sur $Y_2\cup\{\partial\}$ muni de la tribu trace de la tribu borélienne de $X\cup\{\partial\}$.

Soit alors J le $\mathbb{Q}$ cône de fonctions (sur $Y_2\cup\{\partial\}$) engendré par S et 1. Il est clair que J sépare les points de $Y_2\cup\{\partial\}$, qu'il est dénombrable et contenu dans $\mathscr{C}(\{F_k^2\})$. De plus, comte tenu du (iv) de la proposition précédente on montre comme en [29] que les «fonctions de J sont surmédianes»:

$$\text{(II.1.)}\quad \forall f\in J,\ \exists p\in\mathbb{Q}_+\quad\text{tel que}\quad \lambda\tilde{V}_{\lambda+p}f\leqq f\ \ \forall\lambda\in\mathbb{Q}_+.$$

II.2.4. *Une compactification et la résolvante de Ray associée.* En reprenant une démonstration analogue à celle exposée en [15] ou en [29] on montre le résultat suivant:

II.2.4. Proposition. *Soit $\hat{Y}$ le complété de $Y_2\cup\{\partial\}$ pour la structure uniforme la moins fine rendant continus les éléments de J. Alors $\hat{Y}$ est compact, métrisable, et il existe sur $\hat{Y}$ une résolvante de Ray, $(\hat{V}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ telle que, pour tout λ de $\mathbb{Q}_+$, toute f de $\mathscr{C}(\hat{Y})$ et tout x de $Y_2\cup\{\partial\}$ nous ayons $\hat{V}_\lambda f(x)=\tilde{V}_\lambda(f_{|Y_2\cup\{\partial\}})(x)$.*

II.2.5. Remarque. J est contenu dans $\mathscr{C}(\{F_k^2\})$, de là que sur F_k^2 et sur $F_k^2\cup\{\partial\}$, ($k\in\mathbb{N}$), la topologie initiale (induite par $X\cup\{\partial\}$) coïncide avec la topologie induite par $\hat{Y}$. Cette propriété sera utile par la suite pour l'étude des limites à gauche du processus associé à la résolvante $(\hat{V}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$. De plus nous n'aurons pas de problème de mesurabilité: Y_2 et $Y_2\cup\{\partial\}$ apparaissent comme des K_σ de $\hat{Y}$.

II.2.6. *Processus de Ray associé et ensemble de branchement.* Les résultats de cette section sont démontrés dans [18] et dans [24].

A. Pour tout x de $\hat{Y}$ les mesures $\lambda\hat{V}_\lambda(x,\cdot)$ convergent vaguement, lorsque λ tend vers l'infini, vers une mesure markovienne $\mu(x,\cdot)$. L'ensemble $\hat{B}=\{x\in\hat{Y}/\mu(x,\cdot)\neq\varepsilon_x\}$ des points de branchement est un K_σ et $\mu(x,\hat{B})=0$ pour tout x de $\hat{Y}$. De plus, de la proposition II.2.4. (vi) il vient qu'il n'y a pas de points de branchement dans Y_2.

B. Il existe une fonction de transition markovienne $(\hat{P}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ unique sur $\hat{Y}$ telle que pour tout f de $\mathscr{C}(\hat{Y})$ et tout x de $\hat{Y}$, l'application $t\mapsto \hat{P}_t f(x)$ soit continue à droite et de transformée de Laplace $\hat{V}_\lambda f(x)$. De plus, lorsque t tend vers 0 la famille des mesures $\hat{P}_t(x,\cdot)$ converge vaguement vers $\mu(x,\cdot)$ pour tout x de $\hat{Y}$ et $\hat{P}_t(x,\hat{B})=0$ pour tout t de $\mathbb{R}_+$ et x de $\hat{Y}$.

C. Il existe un processus fortement markovien, d'espaces d'états $\hat{Y}$ muni de sa tribu borélienne et de semi-groupe $(\hat{P}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$: nous prendrons comme tel la réalisation canonique du semi-groupe, soit $\mathscr{M}=\{\hat{\Omega},\hat{\mathscr{A}}^0,\hat{\mathscr{A}}_t^0,\hat{X}_t,\hat{P}_x\}$; c'est à dire que $\hat{\Omega}$ est l'ensemble des trajectoires $\hat{\omega}$: $[0,\infty[\mapsto \hat{Y}$ continues à droite et pourvues de limites à gauche en tout point, mourrant en ∂; ζ est la durée de vie du processus. On écrit $\hat{X}_t(\hat{\omega})$ et $\hat{X}_{t-}(\hat{\omega})$ pour $\hat{\omega}(t)$ et $\hat{\omega}(t-)$. $\hat{\mathscr{A}}_t^0=\tau(\hat{X}_s; s\leqq t)$ et $\hat{\mathscr{A}}^0=\bigvee_t \mathscr{A}_t^0\cdot P_x$ est l'unique probabilité sur $\hat{\mathscr{A}}^0$ qui vérifie, pour $0<t_1<\dots<t_n$ et E_i, $i=1\dots n$, boréliens de $\hat{Y}$:

$$\hat{P}_x(\hat{X}_{t_1}\in E_1 \dots \hat{X}_{t_n}\in E_n)=\int_{E_1}\dots\int_{E_n}\hat{P}_{t_1}(\hat{x},d\hat{y}_1)\dots\hat{P}_{t_n}(\hat{y}_{n-1},d\hat{y}_n).$$

Le processus de Ray $\hat{\mathscr{M}}$ ainsi obtenu a les propriétés suivantes:

(M.1) $\hat{P}_x(\hat{X}_0\in E)=\mu(x,E)$ *pour tout x et tout borélien E de $\hat{Y}$.*

(M.2) *Soient $\hat{\mathscr{A}}^\mu$ la tribu complétée de $\hat{\mathscr{A}}^0$ pour P_μ où μ est une loi sur $\hat{Y}$ et $\hat{\mathscr{A}}_t^\mu$ la tribu obtenue en adjoignant à $\hat{\mathscr{A}}_t^0$ tous les éléments P_μ-négligeables de $\hat{\mathscr{A}}^\mu$. Posons $\hat{\mathscr{A}}=\bigcap_\mu \hat{\mathscr{A}}^\mu$, $\hat{\mathscr{A}}_t=\bigcap_\mu \hat{\mathscr{A}}_t^\mu$ où μ parcourt l'ensemble des lois sur $\hat{Y}$. Le processus est encore fortement markovien par rapport aux tribus ainsi complétées.*

(M.3) *Le processus est quasi-continu à gauche en un sens restreint: si $(T_n)_{n\in N}$ est une suite de temps d'arrêt (relatifs aux tribus complétées) croissant vers T, $\hat{X}_{T_n}$ tend vers $\hat{X}_T$ $\hat{P}_x$-presque sûrement sur l'ensemble*

$$\{T<\infty, \lim \hat{X}_{T_n}\in\hat{Y}-B\}$$

pour tout x de $\hat{Y}$.

(M.4) $P_x(\{\forall t\geqq 0, \hat{X}_t\in\hat{Y}-\hat{B}\})=1$ *pour tout x de $\hat{Y}$.*

II.2.7. Restriction de l'espace d'états. Pour toute partie A de $\hat{Y}$ nous notons D_A le début de A; il est connu que si A est une partie analytique de $\hat{Y}$, D_A est un temps d'arrêt du processus ([4], chap. I.10).

Dans ce qui suit nous désignons par ω_k et $\hat{\omega}_k$ les complémentaires de F_k^2 respectivement dans X et dans $\hat{Y}$ et nous écrirons D_k pour $D_{\hat{\omega}_k}$ nous avons alors la

II.2.7. Proposition. *La restriction à Y_2 de la fonction $\phi_k(x)=P_x(D_k<\infty)$ définit un représentant quasi-continu de $e_{\omega k}$.*

Preuve. Commençons par construire un représentant quasi-continu $\tilde{e}_{\omega_k}$ de e_{ω_k}. Soint $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{U}(X)$ croissant vers ω_k et soient $\tilde{e}_{A_n}$ les éléments de D correspondant: ce sont des fonctions surmédianes continues sur $\hat{Y}$. Du théorème I.4.2. (iii) il vient que la restriction à Y_2 de la fonction surmédiane définie sur $\hat{Y}$ par $\tilde{e}_{\omega_k}=\sup_n \tilde{e}_{A_n}$ est un représentant quasi-continu de e_{ω_k}.

De la proposition I.2.2. (ii) il vient que $\phi_k \wedge \tilde{e}_{\omega_k}$ est un potentiel, de I.2.1. (P.4) il vient alors que $\phi_k \wedge \tilde{e}_{\omega_k} = \tilde{e}_{\omega_k}$ q.p. i.e. $\phi_k \geqq \tilde{e}_{\omega_k}$ q.p.

Pour démontrer l'inégalité contraire considérons la fonction surmédiane suivante:

$$\phi'_k(x) = \begin{cases} \tilde{e}_{\omega_k}(x) & \text{si} \quad x \in Y_2 \cup \{\partial\} \\ 1 & \text{si} \quad x \notin Y_2 \cup \{\partial\}. \end{cases}$$

Il est facile de voir que ϕ'_k vaut 1 sur $\hat{\omega}$ et 0 en ∂. Pour toute partie finie S de $\mathbb{Q}_+$ soit $\sigma_s = \inf\{t \in S / \hat{X}_t \in \hat{\omega}_k\}$ ($\sigma_s = +\infty$ si $\forall t \in S$, $\hat{X}_t \notin \hat{\omega}_k$) c'est un temps d'arrêt relatif aux $(\hat{\mathscr{A}}_t)_{t\in S}$ et le théorème d'arrêt appliqué à la surmatingale $\{\phi'_k(\hat{X}_t)\}_{t\in S}$ (cf. [20], T.9) nous donne

$$P_x(\{\sigma_s < \infty\}) = E_x[\phi'_k(\hat{X}_{\sigma_s})] \leqq \phi'_k(\hat{X}_0) = \phi'_k(x) = \tilde{e}_{\omega_k}(x)$$

pour tout x de Y_2. De là le résultat.

Corollaire 1. *Pour quasi tout x de Y_2 nous avons*

$$\hat{P}_x(\{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \hat{X}_t \in Y_2 \text{ et } \hat{X}_{t-} \in Y_2\}) = 1.$$

Corollaire 2. *Il existe un borélien Y de X, contenu dans Y_2, de complémentaire polaire et tel que pour tout x de Y nous ayons*

$$\hat{P}_x(\{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \hat{X}_t \in Y \text{ et } \hat{X}_{t-} \in Y\}) = 1$$

(*on peut toujours supposer que Y est un F_σ de X: cf. 1.3.1.* (C.4)).

II.2.8. Le processus de Hunt proprement associé à **a**. Soit $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fermés telle que $Y = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$. Du corollaire 2 il vient que $\lim_{k\to\infty} D_{\hat{y}-F_k} = +\infty\ \hat{P}_x$ p.s. pour tout x de Y. Soient alors $\Omega = \{\omega \in \hat{\Omega} / \lim_{k\to\infty} D_{\hat{y}-F_k} = +\infty\}$ et $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}_t$ les tribus trace respectivement de $\hat{\mathscr{A}}$ et $\hat{\mathscr{A}}_t$ sur Ω. P_x désigne, pour x appartenant à Y, la restriction à $\mathscr{F}$ de $\hat{P}_x$ et pour ω dans Ω on écrit $X_t(\omega)$ au lieu de $\hat{X}_t(\omega)$.

On vérifie alors aisément que le processus $\mathscr{M} = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P_x)$ d'espace d'état $(Y, \mathscr{B}(Y))$ est un processus de Hunt. Notamment, le fait que sur Y on puisse garder la topologie initiale provient de la remarque II.2.5. De plus, de la proposition II.2.2. il vient que le processus est proprement associé à la forme de Dirichlet **a**.

II.2.9. Interprétation probabiliste de la notion de polaire. En remarquant que tout polaire est contenu dans un G_δ polaire (cf. I.3.1; (C.4)) et en faisant un raisonnement analogue à celui qui donne le corollaire 2 (cf. [11], théorème 3.9) nous obtenons le

II.2.9. Théorème. *Si B est un polaire de Y, il existe un polaire B' contenant B et tel que $P_x(\{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ X_t \text{ et } X_{t-} \in Y - B') = 1$ pour tout x de $Y - B'$.*

III. Continuité des trajectoires

1. Définitions et résultat fondamental

Dans tout ce chapitre nous supposons donnés un espace fonctionnel régulier H de base (X, m) et une forme de Dirichlet **a** sur H. $\mathscr{M} = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \theta_t, P_x)$ est un processus de Hunt, proprement associé à la forme **a**, d'espace d'états $(Y, \mathscr{B}(Y))$, de semi-groupe $(P_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de résolvante $(G_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$.

III.1.1. Définition.

(i) Etant donné un élément f de $L^2_+(X, m)$ nous définissions supp $[f]$ comme étant le support de la measure f.m.

(ii) La forme **a** est dite locale si $\mathbf{a}(f, g)=0$ dès que supp $[f]$ et supp $[g]$ sont des compacts disjoints.

III.1.2. Théorème. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

a) la forme est locale,

b) il existe un processus proprement associé à **a** *dont les trajectoires sont continues.*

Ce résultat a été démontré par M. Fukushima dans le cas où la forme est symétrique en utilisant une caractérisation relative au semi-groupe (cf. [13]).

2. Les opérateurs P_U

III.2.1. Pour tout ouvert relativement compact U et tout élément f de H soit $P_U f$ la **a**-projection de 0 sur le convexe fermé $\Gamma_{U,f}=\{g\in H/g=f$ q.p. sur $U^c\}$ nous avons la

III.2.1. Proposition

(i) *$f-P_U f$ est la* **a***-projection de f sur le sous espace fermé de $H, H_U=\{g\in H/g=0$ q.p. sur $U^c\}$.*

(ii) *Pour toute fonction g de H_U nous avons $\mathbf{a}(P_U f, g)=0$.*

Démonstration. Le (i) est immédiat et le (ii) provient de ce que $P_U f+tg$ appartient à $\Gamma_{U,f}$ pour tout t de $\mathbb{R}$.

III.2.2. Proposition. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

a– la forme **a** *est locale.*

b– pour tout ouvert relativement compact U tout f de H tel que supp $[f]$ *est contenu dans $X-\bar{U}$ nous avons $P_U f=f$.*

Démonstration. Sous les hypothèses de b nous avons, pour g dans $\Gamma_{U,f}$, supp $[f]\cap$ supp $[g-f]=\varnothing$ ce qui implique $\mathbf{a}(f, g-f)=0$ si la forme est locale donc $f=P_U f$ d'après l'unicité de la projection.

Réciproquement soient f et g tels que supp $[f]\cap$ supp $[g]=\varnothing$ et U un ouvert tel que supp $[f]\subset U$ et $U\cap$ supp $[g]=\varnothing$ nous avons alors $\mathbf{a}(g,f)=\mathbf{a}(P_U g, f)=0$ d'après la proposition III.2.1. (ii).

III.2.3. Pour toute partie A de X et tout élément f de H, soit $R^A f$ la **a**-projection de 0 sur le convexe fermé $\Gamma_{A,f}=\{g\in H/g\geqq f$ q.p. sur $A\}$ c'est un potentiel dit «réduite de f sur A» et la mesure qui lui est associée (cf. I.2.1; (P.1)) est portée par $\bar{A}$.

III.2.4. Proposition. *Soient U un ouvert de X, F son complémentaire et f un potentiel. Alors $P_U f = R^F f$.*

Démonstration. $\mathbf{a}(P_U f, P_U f - R^F f) = 0$ d'après III.2.1 parce que $P_U f = R^F f = f$ q.p. sur F et, d'autre part, $\mathbf{a}(R^F f, P_U f - R^F f) \geqq 0$ par définition de $R^F f$. De là le résultat.

III.2.5. Remarque. Il est clair que ces résultats restent vrais si l'on remplace P_U et R^F par P_U^λ et $R_\lambda^F (\lambda > 0)$ définis de manière similaire à partir des $\mathbf{a}_\lambda$ (cf. I.1.3). D'autre part la proposition III.2.4 peut être considérée comme version hilbertienne du théorème de Hunt.

3. Interprétation probabiliste

Etant donné que les résultats énoncés ici sont vrais à un polaire près, nous utiliserons la même lettre pour dèsignér une partie de X ou sa trace sur Y.

III.3.1. Etant donné un ouvert U de X, σ_U désigne le temps de sortie de U et nous définissons, pour toute fonction f borélienne et tout λ positif

$$\Pi_U^\lambda f(x) = E_x \left[e^{-\lambda \sigma_U} f \circ X_{\sigma_U}\right] G_\lambda^U f(x) = E_x \left[\int_0^{\sigma_U} e^{-\lambda t} f \circ X_t dt\right].$$

Les Π_U^λ (on écrit Π_U au lieu de Π_U^0) définissent les opérateurs de balayage associés au processus et $(G_\lambda^U)_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ est la résolvante du processus tué en sortant de U.

III.3.2. Proposition. *Pour tout λ de $\mathbb{R}_+$, Π_U^λ définit un opérateur continu de H dans H qui coïncide avec P_U^λ.*

Démonstration. Soit f une différence de deux λ-potentiels. Compte tenu de la remarque I.1.4 et de la proposition I.2.2(ii), $\Pi_U^\lambda f$ est encore un λ-potentiel et $\|\Pi_U^\lambda f\| \leqq K_\lambda \|f\|$. On conclut en remarquant que $\mathscr{P}_\lambda - \mathscr{P}_\lambda$ est dense dans H.

Pour démontrer la seconde assertion il suffit de remarquer que P_U^λ et Π_U^λ coïncident sur $\mathscr{P}_\lambda$: c'est une conséquence de III.2.4 et du théorème de Hunt (si f est λ-excessive et U ouvert, de complémentaire F, $\Pi_U^\lambda f$ est la plus petite fonction λ-excessive qui majore f sur F).

Corollaire 1. *Pour tout ouvert U, H_U, muni des structures hilbertiennes et latticielles induites par H, est un espace de Dirichlet régulier de base $(U, m_{|U})$. La restriction de $\mathbf{a}$ à H_U est encore une forme de Dirichlet et la résolvante sur $L^2(U, m_{|U})$ définie par $(G_\lambda^U)_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$ est la résolvante construite en* I.1.3 *associée.*

Démonstration. Le seul point délicat est la dernière assertion. Soit donc h un élément de H_U; nous avons $\mathbf{a}_\lambda(G_\lambda f - G_\lambda^U f, h) = \mathbf{a}_\lambda(P_U^\lambda G_\lambda f, h) = 0$ (cf. IV.2.1(ii) et III.3.2). De là que $\mathbf{a}_\lambda(G_\lambda f, h) = \mathbf{a}_\lambda(G_\lambda^U f, h)$ ce qui équivaut au résultat annoncé.

Corollaire 2. *Soient f un élément borné de H et $\tilde{f}$ un représentant quasi continu de f. Alors $\Pi_U^\lambda \tilde{f}$ est, pour tout ouvert U relativement compact, un représentant quasi continu de $P_U^\lambda f$.*

4. Démonstration du théorème III.1.2

Supposons le processus $\mathscr{M}$ à trajectoires continues. Alors les mesures $\Pi_U^\lambda(x,\cdot)$ sont portées par ∂U pour tout ouvert U relativement compact ([22], lemme 1.2.3). Des propositions III.2.2 et III.3.2 il vient que la forme est locale.

Réciproquement, supposons la forme locale. Du corollaire 2 précédent et tu théorème II.2.9, nous déduisons l'existence d'un borélien polaire B de Y tel que $P_x(\{\forall\, t\in\mathbb{R}_+, X_t$ et $X_{t-}\in Y-B\})=1$ pour tout x de $Y-B$ et tel que $\Pi_{A_n}^\lambda(x,\cdot)$ soit portée par ∂A_n pour tout x de $Y-B$, tout λ de $\mathbb{R}_+$, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ désignant une base dénombrable d'ouverts relativement compacts de Y. On restreint alors l'espace d'états à $Y-B$ (cf. II.2.8) et en reprenant la démonstration du lemme de P. Courrège et P. Priouret déjà cité on montre que le processus est à trajectoires continues.

IV. Generalisations et exemples

1. Formes de Dirichlet générales et processus associés

IV.1.1. Remarque. Soient H un espace fonctionnel régulier de base (X,m) et $\mathbf{a}$ une forme bilinéaire, définie positive et continue sur $H\times H$, telle que la contraction fondamentale opère pour $\mathbf{a}$. Si nous supposons que chaque $\mathbf{a}_\lambda$ $(\lambda>0)$ est coercive nous obtenons un résultat identique à II.1.2 à ceci près que la résolvante n'a pas de noyau terminal.

IV.1.2. Définition. Soient H un espace fonctionnel régulier, de base (X,m) et $\mathbf{a}$ une forme bilinéaire sur $H\times H$. Nous dirons que $\mathbf{a}$ est une forme de Dirichlet générale si elle vérifie les deux conditions suivantes:

(D.1) La contraction fondamentale opère sur $\mathbf{a}$ i.e. pour tout f de H et tout c de $\mathbb{R}_+$ l'une des trois relations (équivalentes) suivantes est vérifiée:

$$\mathbf{a}(f+Uf, f-Uf)\geqq -\beta_0\|f-Uf\|_{L^2}^2; \qquad \mathbf{a}(Uf, f-Uf)\geqq 0;$$
$$\mathbf{a}(f\wedge c, [f-c]^+)\geqq 0 \qquad \forall\, c\in R_+$$

(D.2) Il existe β_0 dans $\mathbb{R}_+$ tel que la forme $\mathbf{a}_{\beta_0}$ soit continue et coercive.

IV.1.3. Théorème. *Soient H un espace fonctionnel régulier de base (X,m) et* $\mathbf{a}$ *une forme de Dirichlet générale sur H.*

1. *Il existe une résolvante $(V_\lambda)_{\lambda\geqq\beta_0}$ d'opérateurs continus sur $L^2(X,m)$ ayant les propriétés suivantes:*

a) $0\leqq f\leqq 1 => 0\leqq \lambda V_\lambda f\leqq 1$ *pour* $\lambda\geqq\beta_0$;

b) $\operatorname{Im} V_\lambda$ *est une partie partout dense de H pour $\lambda\geqq\beta_0$;*

c) *pour tous f de $L^2(X,m)$, g de H et $\lambda\geqq\beta_0$,* $\mathbf{a}_\lambda(V_\lambda f, g)=(f,g)$;

d) *la résolvante est fortement continue sur H;*

e) *si $(A,\mathscr{D}(A))$ est le générateur infinitésimal de la résolvante, dans $L^2(X,m)$, alors $\mathscr{D}(A)\subset H$ et pour tous f de $\mathscr{D}(A)$ et g de H nous avons* $\mathbf{a}(f,g)=(-Af,g)$.

2. *Il existe un semi-groupe fortement continu* $(T_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *d'opérateurs sous markoviens sur* $L^2(X,m)$ *tel que* $\|T_t\| \leqq e^{\beta_0 t}$ *vérifiant, dans* $L^2(X,m)$:

$$\text{(IV.1)} \quad V_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f \, dt \quad \lambda \geqq \beta_0 .$$

Ce résultat, qui généralise I.1.3 est dû à H. Kunita (cf. [16]).

IV.1.4 Remarque. Du fait de la sous markoviennité de l'opérateur $T_t(t \geqq 0)$, la transformée de la place de $T_t f$ peut encore être définie pour toute f de $L^\infty(X,m)$ et est aussi dans $L^\infty(X,m)$ lorsque $\lambda < \beta_0$. Il est clair que l'équation résolvante est vérifiée avec $\mathbb{R}_+$ comme ensemble d'indices bien que les $V_\lambda(\lambda \geqq 0)$ ne soient plus nécessairement des opérateurs continus de $L^2(X,m)$ dans H.

IV.1.5. Théorème. *Etant donnés un espace fonctionnel régulier H, de base (X,m) et une forme de Dirichlet générale* **a** *sur H, il existe un processus de Hunt proprement associé à* **a** *au sens de* II.1.1.

Démonstration. Soit $\mathcal{M}_{\beta_0} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P_x)$ un processus de Hunt proprement associé à la forme $\mathbf{a}_{\beta_0}$, d'espace d'états $(Y, \mathcal{B}(Y))$, de fonction de transition $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et considérons semi groupe de noyaux défini sur $(Y, \mathcal{B}(Y))$ par $P_t = e^{\beta_0 t} Q_t$ pour tout t de $\mathbb{R}_+$. Du théorème IV.1.3(2.) il vient que les P_t sont encore sous markoviens. Soit donc $(G_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ la résolvante associée. Pour toute fonction f borélienne bornée et de carré intégrable et pour tout $\lambda \geqq \beta_0$, $G_\lambda f$ est un représentant quasi continu de $V_\lambda f$. Compte tenu de l'équation résolvante et de la densité de $L_b^2(X,m)$ dans $L^\infty(X,m)$ on en déduit que pour toute fonction f borélienne bornée, et pour tout $\lambda > 0$, $G_\lambda f$ est un représentant quasi continu de $V_\lambda f$. Reste à voir que $(G_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ est la résolvante d'un processus de Hunt, dont l'espace d'états est un F_λ de X de complémentaire. Pour ce faire on reprend la démonstration de II en compactifiant par rapport à la nouvelle résolvante.

2. *L'hypothèse de dualité*

IV.2.1. Définition. Nous dirons qu'une forme de Dirichlet **a** définie sur un espace fonctionnel H de base (X,m) vérifie l'hypothèse de dualité si sa transposée $\hat{\mathbf{a}}$ est elle aussi une forme de Dirichlet.

IV.2.2. Si une forme de Dirichlet **a** sur H vérifie l'hypothèse de dualité nous désignons par $(\hat{V}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ la résolvante sous markovienne associée à $\hat{\mathbf{a}}$. Il est facile de voir qu'alors les résolvantes $(V_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ et $(\hat{V}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ sont en dualité dans $L^2(X,m)$. D'autre part, nous avons (cf. [3]):

IV.2.2. Proposition. *Si* **a** *est une forme de Dirichlet* (*sur un espace fonctionnel régulier H, de base (X,m)*) *vérifiant l'hypothèse de dualité les ensembles polaires coïncident avec les copolaires* (i.e. *les ensembles polaires relativement à* $\hat{\mathbf{a}}$).

Nous aurons donc le

IV.2.3. Théorème. *Sous les mêmes hypothèses il existe deux processus de Hunt, $\mathcal{M}$ et $\hat{\mathcal{M}}$ proprement associés à* **a** *et* $\hat{\mathbf{a}}$, *ayant le même espace d'états et dont les résolvantes sont en dualité dans $L^2(X,m)$.*

3. Exemples de formes de Dirichlet

IV.3.1. Cadre et notations. Dans tout ce paragraphe Ω désigne un ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^n$ et dx désigne la restriction à Ω de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. $\mathscr{D}(\Omega)=\mathscr{D}$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω et $\mathscr{D}'=\mathscr{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω. Nous écrivons L^2 pour $L^2(\Omega, dx)$. Nous désignons par $H_0^1=H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $\mathscr{D}(\Omega)$ relativement à la norme définie par

$$\|f\|^2=\sum_1^n \|\frac{\partial f}{\partial x_i}\|_{L^2}^2+\|f\|_{L^2}^2$$

H_0^1 est un espace fonctionnel régulier relativement à (Ω, dx).

IV.3.2. Un exemple de forme non locale. $(a_{ij}(x))$ désigne une matrice $n\times n$ uniformément elliptique de fonctions boréliennes bornées définies sur Ω. Soit ϕ une fonction continue strictement positive à support compact définie sur $\Omega\times\Omega$ et soit c la function définie par $c(x)=\int\limits_\Omega \phi(x,y)\,dy$. Pour toute f de $\mathscr{D}(\Omega)$ nous définissons Lf, au sens des distributions, par

$$Lf=\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)+\int\limits_\Omega \phi(x,y)f(y)\,dy-c(x)f(x)$$

Posons alors, pour f, g dans $\mathscr{D}$, $\mathbf{a}(f,g)=-(Lf,g)_{\mathscr{D}'\times\mathscr{D}}$. Il est aisé de vérifier que $\mathbf{a}$ se prolonge en une forme bilinéaire, continue sur $H'_0\times H'_0$ pour laquelle la contraction fondamentale opère. Montrons que $\mathbf{a}$ est une forme de Dirichlet générale.

Posons $\lambda=\beta+\mu$ (β et μ positifs); nous avons

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_\lambda(f,f)=\sum_{i,j}\int\limits_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx+\beta\int\limits_\Omega f^2(x)\,dx+\int\limits_\Omega [c(x)+\mu]\,f^2(x)\,dx\\ -\int\limits_{\Omega\times\Omega}\phi(x,y)f(x)f(y)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Il existe un β_1 tel que pour $\beta>\beta_1$ nous ayons (cf. [27] [28])

$$\sum_{ij}\int\limits_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial xj}\,dx+\beta\int\limits_\Omega f^2(x)\,dx\geqq v\|f\|^2 \qquad (v\ \textit{constante})$$

d'autre part, il existe un μ_1 ne dépendant que de ϕ et de Ω tel que pour $\mu>\mu_1$ nous ayons, pour tout f de H_0^1:

$$\int [c(x)+\mu]\,f^2(x)\,dx-\int \phi(x,y)f(x)f(y)\,dx\,dy\geqq 0.$$

De là que $\mathbf{a}$ est bien une forme de Dirichlet générale ($\beta_0=\mu_1+\beta_1$).

IV.3.3. Une forme locale et l'hypothèse de dualité. L'exemple suivant repose sur les travaux de G. Stampacchia ([27, 28]). Nous supposons $n>2$; $(a_{i,j})$ est définie comme précédemment; $(b_1\dots b_n)$ et $(d_1\dots d_n)$ sont deux fonctions vectorielles de Ω dans $\mathbb{R}^n$ telles que chacune de leurs composantes soient des fonctions boréliennes de $\mathscr{L}^n(\Omega, dx)$; c est une fonction borélienne de $\mathscr{L}^{n/2}(\Omega, dx)$. Pour toute f de

$\mathscr{D}(\Omega)$ nous définissons Lf, au sens des distributions, par

$$Lf=\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_i a_{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}+d_j f\Big)+\sum_i b_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+\text{c.f.}$$

On définit $\mathbf{a}$ à partir de L comme précédemment: c'est une forme bilinéaire continue et il existe un β_0 dans $\mathbb{R}_+$ tel que pour $\lambda>\beta_0$ les $\mathbf{a}_\lambda$ soient coercive. De plus si $c-\sum_j \frac{\partial d_j}{\partial x_j}$ $\left(\text{resp. } c+\sum_j \frac{\partial b_j}{\partial x_j}\right)$ est une distribution négative alors la contraction fondamentale opère pour $\mathbf{a}$ (resp. pour $\hat{\mathbf{a}}$).

IV.3.3. Remarque. Il est plus facile de voir que la forme associée à L est locale H. Kunita a étudié les diffusions associées (cf. [17]); on peut, comme précédemment, obtenir une forme non locale en rajoutant un noyau de Lévy.

Références

1. Ancona, A.: Théorie du potentiel dans les espaces fonctionnels à forme coercive. Paris, secrétariat de l'équipe d'Analyse et de Théorie du potentiel
2. Beuerling, A., Deny, J.: Dirichlet spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **45**, 208–215 (1959)
3. Bliedtner, J.: "Functional spaces and their exceptional sets" et "Dirichlet forms on regular functional spaces". Sem. on pot. theory II. Lecture Notes in Math. **226**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1971
4. Blumenthal, R.M., Getoor, R.K.: Markov processes and potential theory. New York: Academic Press 1968
5. Carrillo-Menendez, S.: Note aux C.R.Acad. Sci. Paris Sér. A-B, **279**, 615–618 (1974)
6. Deny, J.: Principle complet du maximum et contractions. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **15**, 259–272 (1965)
7. Deny, J.: Théorie de la capacité dans les espaces fonctionnels. Séminaire Brelot-Choquet-Deny, 9ème année (1964–65), exposé 1
8. Deny, J.: Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel. C.I.M.E. 1969, Vol. 1C. Rome: Ed. Cremonese
9. Forst, G.: Symmetric harmonic groups and translation invariant Dirichlet spaces. Invent. Math. **18**, 143–182 (1972)
10. Fukushima, M.: Regular representation of Dirichlet spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **155**, 455–473 (1971)
11. Fukushima, M.: Dirichlet spaces and strong Markov processes. Trans. Amer. Math. Soc. **162**, 185–224 (1971)
12. Fukushima, M.: On the generation of Markov processes by symmetric forms. Proc. Sec. Japan USSR, Symp. Probab. Theory. Lecture Notes in Math. **330**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1973
13. Fukushima, M.: Local property of Dirichlet forms and continuity of sample paths. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **29**, 1–6 (1974)
14. Ikeda, N., Watanabe, S.: The local structure of a class of diffusions and related problems. Proc. Sec. Japan USSR Symp. Probab. Theory. Lecture Notes in Math. **330**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1973
15. Knight, F.: Note on regularization of Markov processes. Illinois J. Math. **9**, 548–552 (1965)
16. Kunita, H.: Sub Markov semi-groups in Banach lattices. Proc. Int. Conf. functional Analysis and related topics, Tokyo 1969
17. Kunita, H.: General boundary conditions for multi-dimensional diffusion processes. J. Math. Kyoto Univ. **10**, 273–335 (1970)
18. Kunita, H., Watanabe, T.: Some theorems concerning resolvents over locally compact spaces. Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. Probab., Univ. Calif. 1965/66. Vol. II: Contributions to Probability theory, part 2; University of California Press, 1967

19. Mokobodzki, G.: Compactification associée à une résolvante. Séminaire Goulaouic Schwartz, 1971 – 72
20. Meyer, P. A.: Probabilités et potentiels. Paris: Hermann 1966
21. Meyer, P. A.: Processus de Markov. Lecture Notes in Math. **26**, Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1967
22. Priouret, P., Courrege, Ph.: Axiomatique du problème de Dirichlet et processus de Markov. Séminaire Brelot-Choquet-Deny 8ème année, Paris (1963 – 64)
23. Neveu, J.: Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités. Paris: Masson 1970
24. Ray, D.: Resolvents, transition function, and strongly Markovian processes. Ann. Math. **70**, 43 – 72 (1959)
25. Silverstein, M. L.: Dirichlet spaces and random time charge. Illinois J. Math. **17**, 1 – 72 (1973)
26. Shiga, T., Watanabe, T.: On Markov chains similar to the reflecting barrier brownian motion. Osaka J. Math. **5**, 1 – 38 (1968)
27. Stampacchia, G.: Equations elliptiques du second ordre à coëfficients discontinuous. Montréal: Presses de l'Université 1965
28. Stampacchia, G.: Ann. Inst. Fourier **15**, 189 – 259 (1965)
29. Walsh, J. B., Meyer, P. A.: Quelques applications des résolvantes de Ray. Invent. Math. **14**, 143 – 166 (1971)

Reçu le 29 Mai 1975