Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik.

Von **H. Ziegler.**

1. Einleitung. In der Kinetik wird die Gleichgewichtslage eines Systems als stabil bezeichnet wenn sich dieses unter dem Einfluß hinreichend kleiner, im übrigen aber beliebiger Störungen nur wenig von ihr entfernt (und damit eine kleine Schwingung um sie ausführt). Auf dieser Definition beruht das Verfahren der kleinen Bewegungen, das nur die Linearisierbarkeit der Bewegungsdifferentialgleichungen voraussetzt und im Falle konstanter Beiwerte auf dem Wege über den Exponentialansatz, die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sowie die *Routh-Hurwitz*-Kriterien[1] die Stabilität eines Systems zu beurteilen gestattet.

In der Elastomechanik besteht das Stabilitätsproblem darin, die kritische Belastung zu bestimmen, unter der eine ursprünglich stabile Gleichgewichtslage instabil wird. Bei seiner Lösung kann man sich unmittelbar auf die Definition der Stabilität berufen und erhält damit das voraussetzungslos gültige

> kinetische Stabilitätskriterium: Die kritische ist die kleinste Belastung, unter der eine geeignete Störung zu einer nicht in der nächsten Umgebung der Gleichgewichtslage verlaufenden Bewegung führt.

In der Praxis wird diesem kinetischen meist das bereits von *L. Euler* verwendete, in der Handhabung wesentlich einfachere, aber nicht ohne weiteres mit ihm gleichwertige

> statische Stabilitätskriterium: Die kritische ist die kleinste Belastung, unter der neben der ursprünglichen (trivialen) erstmals eine weitere (nichttriviale) Gleichgewichtslage existiert

und in neuerer Zeit auch das

> energetische Stabilitätskriterium: Die kritische ist die kleinste Belastung, unter der die gesamte potentielle Energie des Körpers nicht mehr positiv definit ist

vorgezogen.

Die Erfolge, die mit den zuletzt genannten Kriterien erzielt worden sind, haben die Frage nach ihrer Legitimität in den Hintergrund gedrängt und zu einer rein statischen Konzeption des seinem Wesen nach kinetischen Stabilitätsproblems geführt. Damit, d. h. mit der relativen Seltenheit nichtkonservativer Probleme, bei denen diese Konzeption zu Irrtümern führt, erklärt sich, daß — um nur ein großes Beispiel zu nennen — *S. Timoshenko* in seinem berühmten Standardwerk[2] ausschließlich — und ohne kinetische Begründung — die beiden letzten Kriterien verwendet.

A. Pflüger hat in seinem Buche über Stabilitätsprobleme der Elastostatik[3] — freilich ohne Beweis und ohne die Konsequenzen aus dieser Bemerkung zu ziehen[4] — darauf hingewiesen, daß bei nichtkonservativen Systemen nur das erste Kriterium in Frage kommt. Seither hat der Verfasser[5] nachgewiesen, daß beispielsweise das Knick- und das Drehzahlproblem der fliegenden, durch ein axiales Moment auf Torsion beanspruchten Welle nichtkonservativ ist und daß hier das bisher verwendete statische Stabilitätskriterium versagt.

Angesichts dieser Sachlage drängt sich die Frage auf, ob es nicht möglich sei, das statische oder das energetische Kriterium durch Umformulierung auch für nichtkonservative Systeme zu legitimieren. Zweck dieser Arbeit ist die Beantwortung dieser Frage, und zwar im negativen Sinne.

2. Das kinetische Kriterium. Ein typisches (eindimensionales, nichtgyroskopisches[6] und konservatives) Stabilitätsproblem ist die *Euler*sche Knickaufgabe für den (beliebig, nach Abb. 1

---

[1] *E. J. Routh*, Advanced Rigid Dynamics, 6. Aufl., S. 228; London 1930; *A. Hurwitz*, Math. Ann. **46** (1895), S. 273.
[2] *S. Timoshenko*, Theory of Elastic Stability, New York u. London 1936.
[3] *A. Pflüger*, Stabilitätsprobleme der Elastostatik, S. 67. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.
[4] Trotz seiner Bemerkung auf S. 67 behandelt er auf S. 217 ein nichtkonservatives (auch bei *L. Collatz*, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, S. 41, Leipzig 1949 zitiertes) Problem mit dem statischen Kriterium.
[5] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Phys. 2 (1951), S. 265.
[6] Vgl. *H. Ziegler*, Zum Begriff des konservativen Systems, Elem. der Math., erscheint demnächst.

etwa beidseitig gelenkig gelagerten) Stab mit der Masse $\mu(x)$ je Längeneinheit und der Biegesteifigkeit $\alpha(x)$. Seine Bewegungsenergie ist

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \mu\, \dot{y}^2\, dx,$$

und die potentielle Energie setzt sich gemäß

$$V = U - P W_0, \qquad U = \frac{1}{2}\int_0^l \alpha y''^2\, dx, \qquad W_0 = \frac{1}{2}\int_0^l y'^2\, dx \tag{2.1}$$

aus der Formänderungsenergie und dem Potential der axialen Druckkraft zusammen. Ist $y_k(x)$ die zur Eigenkreisfrequenz σ_k gehörige k-te normierte Eigenfunktion des unbelasteten, querschwingenden Stabes, so kann man die Schwingungen unter der Druckkraft P in der Form

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\, \varphi_k(x)$$

darstellen und die q_k als Lage-, für $P = 0$ als Normalkoordinaten deuten. In ihnen drücken sich die drei Bestandteile der Gesamtenergie in der Gestalt

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \dot{q}_k^2, \qquad U = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 q_k^2, \qquad W_0 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{\infty} q_i q_k \int_0^l \varphi_i' \varphi_k'\, dx$$

aus; das kinetische Potential ist mithin

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (\dot{q}_k^2 - \sigma_k^2 q_k^2) + \frac{1}{2} P \sum_{i,k=1}^{\infty} q_i q_k \int_0^l \varphi_i' \varphi_k'\, dx,$$

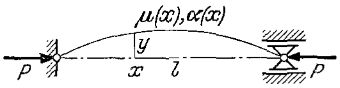

Abb. 1. Konservatives Problem: Axial gedrückter, beidseitig gelenkig gelagerter Stab.

und die Lagrangeschen Beziehungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

führen auf die Bewegungsdifferentialgleichungen

$$\ddot{q}_k + \sigma_k^2 q_k - P \sum_{i=1}^{\infty} q_i \int_0^l \varphi_i' \varphi_k'\, dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.3}$$

Im Falle des prismatischen, homogenen und beidseitig gelenkig gelagerten Stabes ist

$$\sigma_k^2 = \frac{k^4 \pi^4}{l^4}\frac{\alpha}{\mu}, \qquad \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\mu l}}\sin\frac{k\pi x}{l},$$

und da hier neben den Eigenfunktionen φ_k auch ihre Ableitungen φ_k' im Intervall $0 \ldots l$ orthogonal sind, zerfällt das simultane System (2.3) in die unabhängigen Differentialgleichungen

$$\ddot{q}_k + \left(\frac{k^4 \pi^4}{l^4}\frac{\alpha}{\mu} - \frac{k^2 \pi^2}{\mu l^2} P\right) q_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.4}$$

Die Eigenkreisfrequenzen unter der Belastung P sind mithin durch

$$\sigma_k'^2 = \frac{k^2 \pi^2}{\mu l^2}\left(\frac{k^2 \pi^2 \alpha}{l^2} - P\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

gegeben, und die Forderung, daß sie sämtlich reell seien, führt auf die *Euler*sche Knicklast

$$P_k = \frac{\pi^2 \alpha}{l^2}. \tag{2.5}$$

Das kinetische Stabilitätskriterium gilt, da es unmittelbar auf der Definition der Stabilität beruht, voraussetzungslos. In der Tat ist leicht einzusehen, daß sich das hier verwendete Verfahren ohne weiteres auf mehrdimensionale Aufgaben und dadurch, daß man die rechten Seiten der *Lagrange*schen Gleichungen (2.2) durch verallgemeinerte Kräfte Q_k ergänzt, auch auf gyroskopische und nichtkonservative Probleme übertragen läßt. Da aber das simultane System (2.3) nur ausnahmsweise zerfällt, ist die Methode im allgemeinen umständlich.

3. Das energetische Kriterium. Werden die Lagekoordinaten eines konservativen elastischen Systems von der trivialen Gleichgewichtslage (d. h. derjenigen des unbelasteten Systems) aus gemessen und die potentielle Energie in dieser Lage Null gesetzt, so gelten die Beziehungen

$$V(0, \ldots) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_k}(0, \ldots) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.1}$$

Nach dem Satz von der Erhaltung der Energie nimmt die Bewegungsenergie T mit zunehmender Entfernung von der Gleichgewichtslage mit Sicherheit oder bestenfalls unter Umständen ab, je nachdem $V(q_1, q_2, \ldots)$ positiv definit ist oder nicht. Bei konservativen Systemen kann also das kinetische durch das energetische Kriterium ersetzt werden.

Oft läßt sich die potentielle Energie in der Umgebung der Gleichgewichtslage durch die abgebrochene Potenzreihe

$$V(q_1, q_2, \ldots) = V(0, \ldots) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial q_k}(0, \ldots)\, q_k + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k}(0, \ldots)\, q_i\, q_k \tag{3.2}$$

darstellen, und da hier zufolge (3.1) neben dem ersten Term auch der zweite, nämlich die erste Variation von V verschwindet, kann das energetische Kriterium auch dahin formuliert werden, daß der dritte Term, der — vom Faktor 1/2 abgesehen — als zweite Variation von V bezeichnet wird, positiv definit sein muß, wenn das System stabil sein soll.

Im Beispiel von Abschn. 2 ist die potentielle Energie $V = U - PW_0$ nur für genügend kleine Werte von P positiv definit. Beim prismatischen, homogenen und beidseitig gelenkig gelagerten Stab folgt aus (2.4), daß die q_k auch für den belasteten Stab Normalkoordinaten sind, und die Bedingung, daß

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k'^2\, q_k^2$$

positiv definit, die $\sigma_k'^2$ mithin sämtlich größer als Null seien, führt wieder auf die *Euler*sche Knicklast (2.5).

Der Gültigkeitsbereich des energetischen Kriteriums ist offensichtlich insofern enger als derjenige des kinetischen, als es die Existenz einer stationären, eindeutigen potentiellen Energie voraussetzt. Es bleibt indessen denkbar, daß es sich für nichtkonservative Systeme durch eine andere Überlegung statischer Natur, z. B. eine Arbeitsbetrachtung ersetzen läßt.

4. Das statische Kriterium. Läßt die potentielle Energie eines konservativen Systems die abgebrochene Entwicklung (3.2) zu, so kann sie, indem man die Darstellung (2.1) durch Einführung eines für die Belastung charakteristischen Parameters λ verallgemeinert und (3.1) sowie (3.2) beizieht, in einer der Formen

$$V = U - \lambda W_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{\infty} c_{ik}(\lambda)\, q_i\, q_k \tag{4.1}$$

dargestellt werden; zudem ist sie mit der Energie U der inneren Kräfte für genügend kleine Werte von λ positiv definit. Wenn man jetzt statt T und V die quadratischen Formen U und W_0 auf Hauptachsen transformiert, erhält man an Stelle der q_k neue Normalkoordinaten p_k, in denen sich U und W_0 durch

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2, \qquad W_0 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, p_k^2 \tag{4.2}$$

ausdrücken. Es ist daher

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda a_k) p_k^2, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_k} = (1 - \lambda a_k) p_k \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Solange λ genügend klein ist, sind die Klammerausdrücke in diesen Beziehungen sämtlich positiv, und da die Relationen

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = (1 - \lambda a_k) p_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4.3}$$

die Gleichgewichtsbedingungen des Systems darstellen, existiert keine nichttriviale Gleichgewichtslage. Wird andererseits mit zunehmendem λ erstmals eine der Klammern Null, so verliert V seinen positiv definiten Charakter; gleichzeitig läßt aber (4.3) eine nichttriviale Lösung zu.

Beim prismatischen, homogenen und beidseitig gelenkig gelagerten Stab von Abschn. 2 fallen die Normalkoordinaten p_k mit den q_k zusammen. Die nichttrivialen Gleichgewichtslagen sind durch das Verschwinden der Klammern in (2.4) gekennzeichnet, und durch Nullsetzen der kleinsten erhält man wieder die *Euler*sche Knicklast (2.5).

Diesen Überlegungen zufolge gilt das statische Stabilitätskriterium für konservative Systeme, deren potentielle Energie sich gemäß (4.1) bzw. (4.2) darstellen läßt. Es bleibt aber denkbar, daß sich sein Gültigkeitsbereich — unter Umständen sogar auf nichtkonservative Systeme — erweitern läßt.

5. Nichtkonservative Probleme. Schwingungsfähige Systeme sind schon mit Rücksicht auf die stets vorhandene, vom Bewegungszustand abhängige Dämpfung nicht konservativ. Im allgemeinen kommt man bei Vernachlässigung der Dämpfung auf ein konservatives System zurück, das sich mit jedem der drei Kriterien behandeln läßt. Daneben kommt es indessen — und dieser Fall soll hier allein untersucht werden — vor, daß ein elastisches System bei der Belastung seinen konservativen Charakter deshalb verliert, weil sich die vom Bewegungszustand unabhängigen Lasten nicht von einem stationären, eindeutigen Potential ableiten lassen. Hierher gehört der von *A. Pflüger*[1] angeführte Stab, der eine stetige, in die Tangente der elastischen Linie fallende, bei der Deformation in dieser verbleibende Belastung trägt, ferner die vom Verfasser[2] behandelte, am freien Ende durch einen axialen Momentvektor belastete fliegende Welle. Der Grund für dieses anormale Verhalten liegt darin, daß weder die mit einem Körper starr verbundene (mithin an seiner Drehung teilnehmende) Kraft mit konstantem Betrag noch der konstante Momentvektor konservativ ist[3].

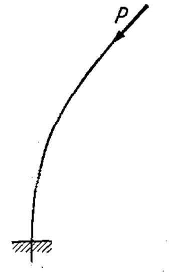

Abb. 2. Nichtkonservatives Problem: Tangential gedrückter, einseitig eingespannter Stab.

Als Musterbeispiel für diese Problemklasse, die zwar nicht sehr umfangreich, aber praktisch doch von Bedeutung ist, kann der einseitig eingespannte, homogene und prismatische, am freien Ende durch eine tangentiale Einzelkraft P belastete Stab (Abb. 2) betrachtet werden. Die bei der Verschiebung in die (triviale) Gleichgewichtslage von P geleistete Arbeit hängt von der Art ab, wie diese Verschiebung vorgenommen wird; die Last P ist also nicht konservativ. Das energetische Kriterium versagt in der in Abschn. 1 gegebenen Form, und da man mühelos zeigen kann, daß keine nichttriviale Gleichgewichtslage existiert, müßte mit dem statischen Kriterium auf eine unbegrenzte Stabilität des Stabes geschlossen werden.

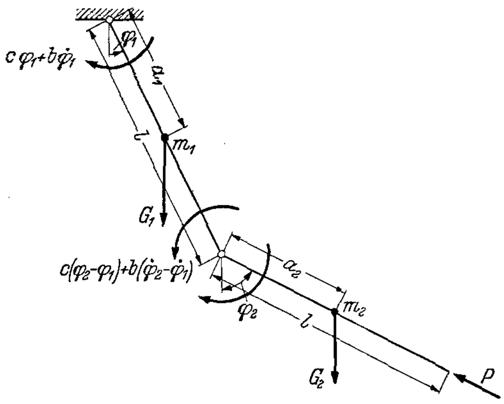

Abb. 3. Doppelpendel als zweigliedriges Modell des elastischen Stabes nach Abb. 2.

Die in Abschn. 3 und 4 offen gebliebene Frage, ob sich das statische oder das energetische Kriterium so modifizieren lasse, daß es auch auf nichtkonservative Systeme anwendbar wird, läßt sich schon an einfachen Beispielen beantworten, so etwa an einer Gelenkstabkette, die nach *K. Marguerre*[4] als vereinfachtes Modell des elastischen Stabes (Abb. 2) dienen kann.

6. Ein Modell. Abb. 3 zeigt ein Doppelpendel mit den (als klein vorausgesetzten) Drehwinkeln φ_1, φ_2, bestehend aus zwei starren Stäben der Länge l, deren Massen m_1, m_2 in den Abständen a_1, a_2 von den Gelenken konzentriert gedacht sind. In m_1, m_2 greifen zwei vertikale Kräfte G_1, G_2 an, die als Gewichte interpretiert werden können, am freien Ende des zweiten Stabes die axiale Kraft P und in den Gelenken die Rückstellmomente $c\varphi_1$, $c(\varphi_2 - \varphi_1)$ sowie die Dämpfungsmomente $b\dot\varphi_1$, $b(\dot\varphi_2 - \dot\varphi_1)$.

Die gesamte Bewegungsenergie ist bis auf Größen zweiter Ordnung genau

$$T = \frac{1}{2}\left[(m_1 a_1^2 + m_2 l^2)\,\dot\varphi_1^2 + 2\, m_2\, l\, a_2\, \dot\varphi_1\, \dot\varphi_2 + m_2\, a_2^2\, \dot\varphi_2^2\right],$$

[1] *A. Pflüger*, a. a. O., S. 41.
[2] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Phys. 2 (1951), S. 279.
[3] Vgl. *H. Ziegler*, Zum Begriff des konservativen Systems, a. a. O.
[4] *K. Marguerre*, Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs, S. 211. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.

die potentielle Energie der Kräfte G_1, G_2 sowie der Rückstellmomente

$$V = \frac{1}{2}\left[(G_1 a_1 + G_2 l + 2c)\varphi_1^2 - 2c\,\varphi_1\varphi_2 + (G_2 a_2 + c)\varphi_2^2\right],$$

und die verallgemeinerten nichtkonservativen Kräfte (die von P und den Dämpfungsmomenten herrühren) berechnen sich zu

$$Q_1 = Pl(\varphi_1 - \varphi_2) - b(2\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2), \qquad Q_2 = b(\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2).$$

Die *Lagrange*schen Relationen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi_k} = Q_k \qquad (L = T - V, \quad k = 1, 2)$$

führen auf die Bewegungsdifferentialgleichungen

$$\begin{aligned}(m_1 a_1^2 + m_2 l^2)\ddot\varphi_1 + m_2 l a_2 \ddot\varphi_2 + b(2\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2) + [G_1 a_1 + (G_2 - P)l + 2c]\varphi_1 + (Pl - c)\varphi_2 &= 0,\\ m_2 l a_2 \ddot\varphi_1 + m_2 a_2^2 \ddot\varphi_2 - b(\dot\varphi_1 - \dot\varphi_2) \qquad - c\varphi_1 + (G_2 a_2 + c)\varphi_2 &= 0,\end{aligned}$$

und der Exponentialansatz

$$\varphi_k = A_k e^{\lambda t} \qquad (k = 1, 2) \tag{6.1}$$

auf die charakteristische Gleichung

$$p_0\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4 = 0, \tag{6.2}$$

deren Beiwerte durch

$$\left.\begin{aligned}p_0 &= m_1 m_2 a_1^2 a_2^2,\\ p_1 &= [m_1 a_1^2 + m_2(l^2 + 2la_2 + 2a_2^2)]\,b,\\ p_2 &= (m_1 a_1^2 + m_2 l^2)(G_2 a_2 + c) + m_2 a_2^2[G_1 a_1 + (G_2 - P)l + 2c] - m_2 l a_2 (Pl - 2c) + b^2,\\ p_3 &= [G_1 a_1 + G_2(l + 2a_2) + 2c]\,b,\\ p_4 &= [G_1 a_1 + (G_2 - P)l + 2c](G_2 a_2 + c) + (Pl - c)\,c\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

gegeben sind.

Das Doppelpendel ist solange stabil, als sämtliche Wurzeln $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ der charakteristischen Gleichung nichtpositive Realteile aufweisen. Dann und nur dann bleibt nämlich die allgemeinste Bewegung, die sich aus vier Lösungen der Form (6.1) zusammensetzt, beschränkt.

Sind — wie dies im folgenden mehrfach zutreffen wird — je zwei Wurzeln entgegengesetzt gleich (etwa $\lambda_2 = -\lambda_1, \lambda_4 = -\lambda_3$), dann ist der Schwinger solange stabil, als die Werte $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$, $\lambda_3^2 = \lambda_4^2$ negativ oder Null sind.

Verschwindet eine der Wurzeln, so existiert nach (6.1) eine Lösung mit konstanten, nicht gleichzeitig verschwindenden Winkeln φ_1, φ_2, d. h. eine nichttriviale Gleichgewichtslage. Umgekehrt verlangt die Existenz einer nichttrivialen Gleichgewichtslage das Verschwinden einer dieser Wurzeln.

7. Folgerungen. a) Setzt man $b = 0$, $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $a_1 = a_2 = l$, $G_1 = G_2 = 0$, so läßt sich das Pendel der Abb. 3 als zweigliedriges Modell des (um π gedrehten) Stabes von Abb. 2 auffassen, wobei die Masse auf die Knoten verteilt und das Eigengewicht samt der Dämpfung vernachlässigt ist. Die charakteristische Gleichung geht dann mit

$$p_0 = 2m^2 l^4, \qquad p_2 = ml^2(7c - 2Pl), \qquad p_4 = c^2 \tag{7.1}$$

in die biquadratische Gleichung

$$p_0\lambda^4 + p_2\lambda^2 + p_4 = 0 \tag{7.2}$$

mit der Diskriminante

$$\Delta = p_2^2 - 4p_0 p_4 = m^2 l^4(41c^2 - 28Plc + 4P^2 l^2) \tag{7.3}$$

über.

Für $P = 0$ sind die Wurzeln $\lambda_1^2 = \lambda_2^2, \lambda_3^2 = \lambda_4^2$ der charakteristischen Gleichung, da neben der Diskriminante (7.3) alle Beiwerte (7.1) positiv sind, kleiner als Null (Abb. 4). Die allgemeinste Bewegung ist mithin beschränkt und setzt sich in bekannter Weise aus den beiden Normalschwingungen zusammen. Läßt man P anwachsen, so nimmt Δ ab und wechselt für $P = (7/2 - \sqrt{2})\,c/l = P_k$ das Vorzeichen. Die Wurzeln λ_1^2, λ_3^2 nähern sich daher mit zunehmendem P, allen für $P = P_k$ zusammen, und da sie für größere Werte von P konjugiert komplex werden, ist

$$P_k = (7/2 - \sqrt{2}) \frac{c}{l} = 2{,}086 \frac{c}{l} \tag{7.4}$$

die kritische Belastung.

Da nach (7.1) $p_4 > 0$ ist, sind die Wurzeln von (7.2) für beliebige Werte von P von Null verschieden; es gibt mithin — wie man übrigens auch durch Betrachtung des Kräftespiels in Abb. 3 bestätigt — keine nichttriviale Gleichgewichtslage. Damit folgt schon aus diesem einfachen Beispiel

Satz 1: Bei nichtkonservativen Systemen kann das statische Stabilitätskriterium versagen.

Man könnte aber noch vermuten, daß es nur bei Abwesenheit einer nichttrivialen Gleichgewichtslage versage.

b) Modifiziert man das Beispiel durch Berücksichtigung des Eigengewichtes, indem man statt $G_1 = G_2 = 0$ jetzt $G_1 = 2\,G$, $G_2 = G$ setzt, so erhält man statt (7.1)

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= 2\,m^2 l^4, \qquad p_2 = m\,l^2 (7\,c - 2\,Pl + 6\,Gl), \\ p_4 &= c^2 + 5\,c\,Gl - PGl^2 + 3\,G^2 l^2 \end{aligned}\right\} \tag{7.5}$$

und an Stelle von (7.3)

$$\Delta = m^2 l^4 \left[41\,c^2 - 4\,c\,(7\,P - 11\,G)\,l + 4\,P^2 l^2 - 16\,PGl^2 + 12\,G^2 l^2\right]. \tag{7.6}$$

Für $P = 0$ sind die Wurzeln $\lambda_1^2 = \lambda_2^2, \lambda_3^2 = \lambda_4^2$ von (7.2) wieder negativ, das Pendel also erwartungsgemäß stabil. Läßt man P anwachsen, so geht die Stabilität verloren, sobald (Abb. 4) entweder $\lambda_1^2 = 0$ oder $\lambda_1^2 = \lambda_3^2$ wird, denn dann verläßt mindestens λ_1^2 die negative reelle Achse. Die kritische Belastung bestimmt sich daher aus der schärferen unter den beiden Forderungen

$$p_4 = 0, \qquad \Delta = 0, \tag{7.7}$$

von denen die erste gleichzeitig die Bedingung für die Existenz einer nichttrivialen Gleichgewichtslage ist. Führt man (7.7) vermittelst (7.5) und (7.6) aus, so erhält man auf Grund der statischen Stabilitätsbedingung allein die kritische Belastung

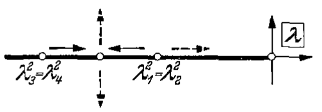

Abb. 4. Verschiebung der Wurzeln der charakteristischen Gleichung mit zunehmender Belastung.

$$P'_k = 5\,\frac{c}{l} + 3\,G + \frac{c^2}{l^2} \cdot \frac{1}{G},$$

der kinetischen zufolge aber zusätzlich

$$P_k = \frac{7}{2}\,\frac{c}{l} + 2\,G - \sqrt{2\,\frac{c^2}{l^2} + 3\,\frac{c}{l}\,G + G^2}.$$

Da $P'_k > 0$ ist, gibt es eine Belastung, für die eine nichttriviale Gleichgewichtslage existiert. Da indessen $P_k < P'_k$ ist und P'_k für $G \to 0$ über alle Grenzen wächst, ist aber P_k und nicht die vom statischen Kriterium gelieferte, unter Umständen sehr viel größere Belastung P'_k die kritische. Es gilt mithin

Satz 2: Das statische Stabilitätskriterium kann auch bei Vorhandensein einer nichttrivialen Gleichgewichtslage versagen (und unter Umständen eine viel zu hohe kritische Belastung liefern).

Mit diesem Satze ist die Unbrauchbarkeit des statischen Kriteriums nach Abschn. 1 für nichtkonservative Systeme nachgewiesen; die Frage nach der Möglichkeit, P_k auf anderem, rein statischem Wege — z. B. durch eine Betrachtung der Arbeiten — zu bestimmen, bleibt indessen noch offen.

c) Vernachlässigt man mit $b = 0$, $G_1 = G_2 = 0$ die Dämpfung und das Eigengewicht, so erhält man mit $m_1 = m_2 = m$, $a_1 = a_2 = l/2$ ein zweigliedriges Modell des (um π gedrehten) Stabes von Abb. 2, das dem unter (a) besprochenen gleichwertig ist und sich nur darin von ihm unterscheidet, daß jetzt die Masse nicht in den Knoten, sondern in den Mittelpunkten der Stäbe konzentriert gedacht ist. Die charakteristische Gleichung ist auch hier (7.2), wobei aber (7.1) und

(7.3) durch

$$p_0 = \frac{1}{16} m^2 l^4, \qquad p_2 = \frac{1}{4} m l^2 (11\,c - 3\,Pl), \qquad p_4 = c^2,$$

$$\Delta = \frac{3}{16} m^2 l^4 (39\,c^2 - 22\,c\,P\,l + 3\,P^2 l^2)$$

zu ersetzen sind.

Da wieder $p_4 > 0$ ist, erhält man die kritische Belastung durch Nullsetzen von Δ, und zwar ergibt sich mit

$$P_k = 3\,\frac{c}{l}$$

ein wesentlich höherer Wert, als er mit (7.4) im Falle (a) erhalten wurde. Es gilt also

Satz 3: Bei nichtkonservativen Systemen hängt die kritische Belastung bei sonst gleichen Verhältnissen (unter Umständen sehr stark) von der Masseverteilung ab.

Bei der Vereinfachung solcher Systeme ist mithin Vorsicht geboten.

Da die Masse in statische Untersuchungen nicht eingeht, folgt aus Satz 3

Satz 4: Nichtkonservative Stabilitätsprobleme lassen sich auf statischem Wege nicht lösen.

Damit ist gezeigt, daß sich auch das energetische Kriterium nach Abschn. 1 für nichtkonservative Systeme nicht legitimisieren läßt. Mit der Feststellung, daß nur das kinetische Kriterium anwendbar bleibt, rückt aber die Frage nach dem Einfluß der Dämpfung in den Vordergrund.

d) Mit $G_1 = G_2 = 0$, $m_1 = 2\,m$, $m_2 = m$, $a_1 = a_2 = l$ erhält man ein zweigliedriges Modell des Stabes von Abb. 2, bei dem auch die innere Dämpfung berücksichtigt ist. Die charakteristische Gleichung hat die Form (6.2), wobei die Koeffizienten durch

$$\left.\begin{array}{ll} p_0 = 2\,m^2 l^4, & p_1 = 7\,m l^2 b, \\ p_2 = m l^2 (7\,c - 2\,Pl) + b^2, & p_3 = 2\,c\,b, \\ p_4 = c^2 & \end{array}\right\} \tag{7.8}$$

gegeben sind. Da die Gleichung (6.2) im Gegensatz zu (7.2) nicht mehr quadratisch ist, empfiehlt sich die Verwendung der *Routh-Hurwitz*-Kriterien[1], und diesen zufolge ist das System jedenfalls stabil, solange die Ausdrücke

$$p_0, \quad p_1, \quad p_2 - \frac{p_0 p_3}{p_1}, \quad p_3 - \frac{p_1^2 p_4}{p_1 p_2 - p_0 p_3}, \quad p_4$$

das gleiche Vorzeichen besitzen. Setzt man hier die Werte (7.8) ein, so kommt man auf die Stabilitätsbedingungen

1. $b > 0$,
2. $P < \frac{45}{14}\frac{c}{l} + \frac{1}{2}\frac{b^2}{m l^3}$,
3. $P < \frac{41}{28}\frac{c}{l} + \frac{1}{2}\frac{b}{m l^3}$,
4. $c^2 > 0$,

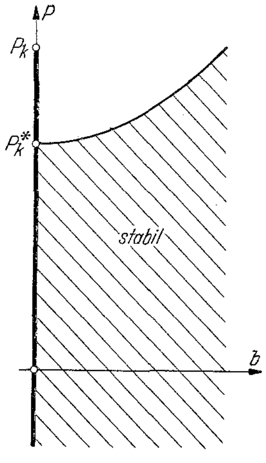

Abb. 5. Stabilitätsbereich des Modells bei Berücksichtigung der Dämpfung (b Dämpfung, P Belastung).

von denen die vierte auf alle Fälle erfüllt ist. Aus der ersten schließt man, daß das System für negative Dämpfungen (Abb. 5) instabil ist; aus der dritten, die schärfer als die zweite ist, ergibt sich für positive Dämpfung die kritische Belastung

$$P_k = \frac{41}{28}\frac{c}{l} + \frac{1}{2}\frac{b}{m l^3},$$

und diese geht für $b \to 0$ nicht gegen (7.4), sondern gegen

$$P_k^* = 1{,}464\,\frac{c}{l}. \tag{7.9}$$

[1] A. a. O. zitiert.

Mathematisch läßt sich die Diskrepanz zwischen P_k und P_k^* damit verstehen, daß die *Routh-Hurwitz*-Kriterien die Bedingungen für Abklingen der allgemeinsten Lösung darstellen, die stationären Schwingungen unter der Belastung $P_k^* < P < P_k$ im Sinne dieser Kriterien also bereits als instabil gelten können. Dem entspricht die mechanische Feststellung, daß stets mit einer — wenn auch noch so geringen — Dämpfung zu rechnen ist, und da diese im Intervall $P_k^* < P < P_k$ abilisierend wirkt, muß vom physikalischen Standpunkte aus auch für das praktisch ungedämpfte System P_k^* als kritische Belastung angesehen werden. Man hat also

Satz 5: Bei nichtkonservativen Systemen kann die Dämpfung labilisierend wirken,

sowie schließlich

Satz 6: Bei nichtkonservativen Systemen kann die geringste Dämpfung die kritische Belastung erheblich modifizieren.

Systeme der hier betrachteten Art lassen sich also nur mit dem kinetischen Stabilitätskriterium behandeln. Dieses ist in der Anwendung wesentlich umständlicher als die beiden anderen und wird mit der als notwendig erkannten Berücksichtigung der Dämpfung noch schwerfälliger. Die sich hieraus ergebenden Komplikationen dürften sich indessen kaum umgehen lassen. Sie liegen wohl in der Natur des Problems, und zwar in der Tatsache begründet, daß die Energieaufnahme des nichtkonservativen Systems durch geringe Variationen im Bewegungsablauf empfindlich beeinflußt werden kann.

(Eingegangen am 28. Juli 1951.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *H. Ziegler*, Rüschlikon bei Zürich, Weierweg 6.