

## Rechnergestütztes Aufstellen der Bewegungsgleichungen gewöhnlicher Mehrkörpersysteme

W. Schiehlen und E. Kreuzer, München

**Übersicht:** Bei der dynamischen Untersuchung von Mehrkörpersystemen, aufgebaut aus starren Körpern, Federn, Dämpfern, Stellmotoren und Lagern, besitzen die algebraisch aufgestellten Bewegungsgleichungen im Vergleich zu den numerischen Formalismen den Vorteil geringerer Rechenzeiten und höherer Genauigkeit. Es wird gezeigt, daß sich auch Bewegungsgleichungen großer Systeme durch Rechnerunterstützung in übersichtlicher Weise algebraisch aufstellen lassen. Dazu wird das d'Alembertsche Prinzip auf die Newton-Eulerschen Gleichungen des betrachteten Mehrkörpersystems angewandt. Die auftretenden, umfangreichen Matrizenoperationen werden mit Hilfe der Indexcodierung algebraisch auf dem Digitalrechner ausgeführt. Als Ergebnis erhält man die Bewegungsgleichungen gewöhnlicher Mehrkörpersysteme in der Form einer nichtlinearen oder linearisierten Vektordifferentialgleichung zweiter Ordnung.

**Summary:** The dynamical investigation of multibody systems consisting of rigid bodies, springs, dashpots, servomotors and bearings based on algebraic equations of motion results in shorter computation time and higher accuracy compared with investigations based on numerical formalisms. It is shown that the algebraic equations of motion of large systems can be clearly found by computer aid. For this purpose d'Alembert's principle is applied to the Newton-Euler equations of the considered multibody system. The extensive matrix operations are performed algebraically on the digital computer using index coding. Finally the equations of motion of ordinary multibody systems are presented by one nonlinear or linearized vector differential equation of second order.

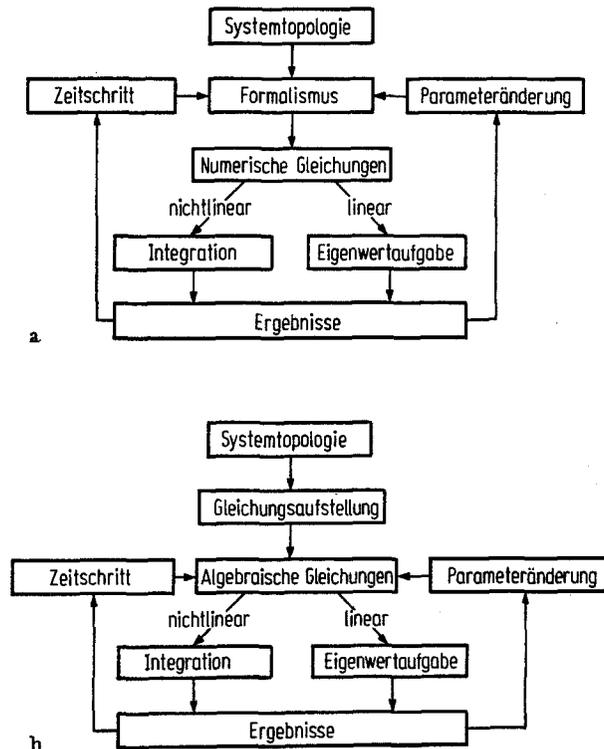
### 1. Einleitung

Zur dynamischen Untersuchung werden mechanische Systeme häufig durch Mehrkörpersysteme modelliert. Mehrkörpersysteme haben sich im Apparate- und Getriebebau, im Motoren- und Fahrzeugbau und in der Raumfahrttechnik seit langem bewährt. Die zunehmenden Anforderungen an die Genauigkeit der Modellierung ergeben aber immer größere und komplexere Mehrkörpersysteme, bei denen bereits die Aufstellung der Bewegungsgleichungen erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Die im allgemeinen verwendeten Lagrangeschen Gleichungen führen bei einer zunehmenden Anzahl von starren Körpern zu unübersichtlichen Energieausdrücken. Bei den Differentiationen von kinetischer und potentieller Energie entstehen leicht Fehler, die sich nur durch umfangreiche Kontrollrechnungen vermeiden lassen. Deshalb sind in den letzten Jahren numerische Formalismen zur automatischen Berechnung der Bewegungsgleichungen entwickelt worden.

Die ersten Formalismen über die numerische Berechnung der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen veröffentlichten Hooker und Margulies [1] und Roberson und Wittenburg [2]. In beiden Formalismen wurde vorausgesetzt, daß die Teilkörper gegeneinander nur Rotationsbewegungen ausführen können und daß das Gesamtsystem eine offene Baumstruktur aufweisen muß. Diese einschränkenden Voraussetzungen wurden in den neueren Formalismen von Ossenbergs [3], Gupta [4] und Fleischer und Likins [5] weitgehend überwunden. Die Formalismen liefern jedoch die Bewegungsgleichungen nur in numerischer Form und für einen festen Parametersatz, der z. B. durch die Massen, die Feder- und Dämpferkonstanten be-

stimmt wird. Aus den numerischen Bewegungsgleichungen lassen sich dann bei linearen, zeit-invarianten Systemen die gewünschten Ergebnisse durch Integration oder Eigenwertberechnung für einen festen Parametersatz gewinnen. Werden die Lösungen für verschiedene Parameterwerte benötigt, so muß für jede Parameteränderung der gesamte Formalismus von neuem durchlaufen werden. Bei linearen, zeitvarianten und bei nichtlinearen Systemen liegen die Verhältnisse noch ungünstiger. In diesem Fall muß nicht nur bei jeder Parameteränderung, sondern bereits bei jedem Integrationssschritt der gesamte Formalismus durchlaufen werden. Dies bedeutet einen großen Aufwand an Rechenzeit und eine zusätzliche Verminderung der Genauigkeit der Ergebnisse.

Die Verwendung algebraisch aufgestellter Bewegungsgleichungen ergibt bei der dynamischen Untersuchung von mechanischen Systemen im Vergleich zum Einsatz numerischer Formalismen den Vorteil geringerer Rechenzeiten und höherer Genauigkeiten. Es soll in dieser Arbeit gezeigt werden, daß sich die Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen in algebraischer Form mit Rechnerunterstützung in übersichtlicher Weise aufstellen lassen. Dazu ist es erforderlich, die Bewegungsgleichungen in einer rechnergerechten Form darzustellen und die verbleibenden Operationen auf dem Rechner algebraisch zu verarbeiten. Die Lagrange'schen Gleichungen sind durch die zahlreichen Differentiationen wenig rechnerfreundlich und kommen für die gestellte Aufgabe nicht in Frage. Es ist vielmehr zweckmäßig, auf die Newton'sche und die Eulersche Gleichung für jeden Teilkörper des Systems zurückzugehen. Man erhält dann durch eine geeignete Zusammenfassung der Teilkörpergleichungen die Newton-Eulerschen Gleichungen des Systems. Mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips lassen sich die Newton-Eulerschen Gleichungen auf die Bewegungsgleichungen reduzieren, die bei gewöhnlichen Mehrkörpersystemen stets als eine Vektordifferentialgleichung zweiter Ordnung geschrieben werden können. Die dabei auftretenden mathematischen Operationen sind hauptsächlich durch Matrizenadditionen und -multiplikationen gekennzeichnet. Diese, bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden umfangreichen Matrizenoperationen, können jedoch durch eine geeignete Codierung algebraisch mit einem Rechner ausgeführt werden. Damit stehen die Bewegungsgleichungen für die weiteren dynamischen Untersuchungen in algebraischer Form zur Verfügung. Im besonderen kann dem Rechner auch die Linearisierung der Bewegungsgleichungen übertragen werden.



**Bild 1.** Dynamische Untersuchung mechanischer Systeme

Ein Schema für die dynamische Untersuchung mechanischer Systeme ist in Bild 1 zusammenfassend dargestellt. Der Einsatz numerischer Formalismen, Bild 1 a, führt zu einem höheren Aufwand an Rechenzeit und einem Verlust an Genauigkeit. Die algebraischen, rechnergestützt aufgestellten Bewegungsgleichungen, Bild 1 b, vermeiden die Nachteile der Formalismen.

## 2. Elemente von Mehrkörpersystemen

Ein Mehrkörpersystem ist gegeben, wenn die Bauteile des betrachteten technischen Systems durch starre Körper, masselose Federn, masselose Dämpfer und masselose Stellmotoren ersetzt werden können, Bild 2. Die einzelnen starren Körper, die auch zu Massenpunkten entarten können, sollen durch ideale, unnachgiebige Lager miteinander und mit ihrer Umgebung verbunden sein.

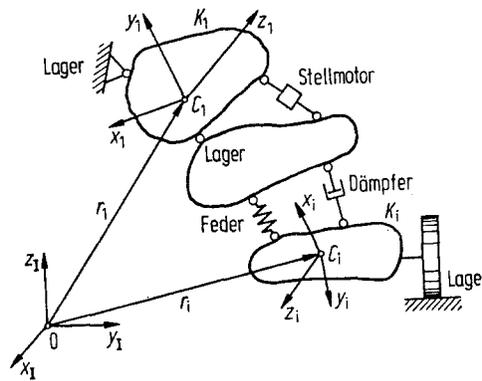


Bild 2. Mehrkörpersystem

Das gegebene Mehrkörpersystem soll aus  $p$  starren Körpern  $K_i$ ,  $i = 1(1)p$ , aufgebaut sein. Die Lage jedes starren Teilkörpers läßt sich bezüglich des Inertialsystems  $x_I, y_I, z_I$  durch den  $3 \times 1$ -Ortsvektor

$$\mathbf{r}_i = [r_{xi} \ r_{yi} \ r_{zi}]^T, \quad i = 1(1)p, \quad (1)$$

des Massenmittelpunkts  $C_i$  und die  $3 \times 3$ -Drehungsmatrix

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{S}_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i), \quad i = 1(1)p, \quad (2)$$

zwischen dem Inertialsystem  $x_I, y_I, z_I$  und dem körperfesten System  $x_i, y_i, z_i$  beschreiben. Die Drehungs- oder Transformationsmatrix  $\mathbf{S}_i$  hängt von höchstens drei verallgemeinerten Koordinaten ab, z. B. den Kardanwinkeln  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ , siehe Magnus [6]. Durch Differenzieren erhält man aus (1) den  $3 \times 1$ -Geschwindigkeitsvektor

$$\mathbf{v}_i = [\dot{r}_{xi} \ \dot{r}_{yi} \ \dot{r}_{zi}]^T, \quad i = 1(1)p, \quad (3)$$

des Massenmittelpunkts und nach den Gesetzen der Drehbewegung findet man aus (2) den schiefsymmetrischen  $3 \times 3$ -Winkelgeschwindigkeitstensor

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i = \dot{\mathbf{S}}_i \mathbf{S}_i^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{zi} & \omega_{yi} \\ \omega_{zi} & 0 & -\omega_{xi} \\ -\omega_{yi} & \omega_{xi} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

der in den  $3 \times 1$ -Winkelgeschwindigkeitsvektor umgeschrieben werden kann,

$$\boldsymbol{\omega}_i = [\omega_{xi} \ \omega_{yi} \ \omega_{zi}]^T. \quad (5)$$

Unter Berücksichtigung des Schnittprinzips gilt für jeden Teilkörper  $K_i$  die Newtonsche Gleichung

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{f}_i^e + \mathbf{f}_i^r, \quad i = 1(1)p, \quad (6a)$$

und die Eulersche Gleichung

$$\mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{l}_i^e + \mathbf{l}_i^r, \quad i = 1(1)p, \quad (6b)$$

die bezüglich des Massenmittelpunktes  $C_i$  und im Inertialsystem  $x_I, y_I, z_I$  angeschrieben werden sollen. Dabei ist  $m_i$  die Masse und  $\mathbf{I}_i$  der  $3 \times 3$ -Trägheitstensor des Körpers  $K_i$  im Inertialsystem, der durch den konstanten  $3 \times 3$ -Trägheitstensor  ${}_i\mathbf{I}_i$  im körperfesten System  $x_i, y_i, z_i$  mit der Transformation

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{S}_i {}_i\mathbf{I}_i \mathbf{S}_i^T \quad (7)$$

bestimmt wird. Weiterhin ist in (6a) die Summe aller äußeren Kräfte in den  $3 \times 1$ -Vektor  $\mathbf{f}_i^e$  der eingepprägten Kräfte und den  $3 \times 1$ -Vektor  $\mathbf{f}_i^r$  der Reaktionskräfte aufgeteilt. Ebenso ist in (6b) die Summe aller äußeren Momente in den  $3 \times 1$ -Vektor  $\mathbf{l}_i^e$  der eingepprägten Momente und den  $3 \times 1$ -Vektor  $\mathbf{l}_i^r$  der Reaktionsmomente aufgeteilt. Die Reaktionskräfte und -momente werden durch die Lager und die sonstigen Bindungen des Systems hervorgerufen.

### 3. Newton-Eulersche Gleichungen

Die Bewegungsfreiheit von Mehrkörpersystemen wird durch die Bindungen (Zwangsbedingungen) eingeschränkt, siehe z. B. [7]. Unter der Voraussetzung von  $q$  holonomen, rheonomen Bindungen beträgt die Zahl  $f$  der Freiheitsgrade der Lage eines Systems mit  $p$  Körpern

$$f = 6p - q. \quad (8)$$

Zur eindeutigen Beschreibung der Lage eines Mehrkörpersystems genügen daher  $f$  verallgemeinerte Koordinaten, die zu einem  $f \times 1$ -Lagevektor  $\mathbf{y}(t)$  zusammengefaßt werden können. Damit lauten der Ortsvektor und die Drehungsmatrix

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{S}_i = \mathbf{S}_i(\mathbf{y}, t), \quad i = 1(1)p, \quad (9)$$

wobei die explizite Abhängigkeit von der Zeit  $t$  im Falle holonomer, skleronomer Bindungen verschwindet. Die Geschwindigkeiten lassen sich nun stets in der Form

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}_i &= \mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{y}, t) \dot{\mathbf{y}}(t) + \bar{\mathbf{v}}_i(\mathbf{y}, t), \\ \boldsymbol{\omega}_i &= \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{y}, t) \dot{\mathbf{y}}(t) + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{y}, t), \end{aligned} \right\} i = 1(1)p, \quad (10)$$

darstellen, wobei die  $3 \times f$ -Jacobi-Matrix der Translation

$$\mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial \mathbf{r}_i(\mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{y}}, \quad (11)$$

und die  $3 \times f$ -Jacobi-Matrix der Rotation

$$\mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial \mathbf{s}_i(\mathbf{y}, t)}{\partial \mathbf{y}} \quad (12)$$

eingeführt wurden. Der  $3 \times 1$ -Vektor  $\partial \mathbf{s}_i$  der infinitesimalen Drehung wird entsprechend (4, 5) aus dem  $3 \times 3$ -Tensor der infinitesimalen Drehung

$$\partial \tilde{\mathbf{s}}_i = \partial \mathbf{S}_i \mathbf{S}_i^T \quad (13)$$

bestimmt. Weiterhin treten in (10) die „lokalen“ Geschwindigkeitsvektoren

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial \mathbf{r}_i(\mathbf{y}, t)}{\partial t}, \quad \bar{\boldsymbol{\omega}}_i(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial \mathbf{s}_i(\mathbf{y}, t)}{\partial t} \quad (14)$$

auf.

Durch die holonomen Bindungen des Mehrkörpersystems wird auch die virtuelle Bewegung des  $i$ -ten Körpers eingeschränkt, die durch die virtuelle Verschiebung  $\delta \mathbf{r}_i$  und die virtuelle Drehung  $\delta \mathbf{s}_i$  gegeben ist,

$$\delta \mathbf{r}_i = \mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{y}, t) \delta \mathbf{y}, \quad \delta \mathbf{s}_i = \mathbf{J}_{Ri}(\mathbf{y}, t) \delta \mathbf{y}, \quad (15)$$

wobei  $\delta \mathbf{y}$  eine beliebige, infinitesimale Änderung des Lagevektors darstellt.

Die Art eines Mehrkörpersystems wird durch die Bindungen und die eingepprägten Kräfte bestimmt, siehe [7]. Unter der Voraussetzung von holonomen Bindungen und proportional-differentialen eingepprägten Kräften ist ein gewöhnliches Mehrkörpersystem gegeben. Die eingepprägten Kräfte und Momente lauten in diesem Fall

$$\mathbf{f}_i^e = \mathbf{f}_i^e(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t), \quad \mathbf{l}_i^e = \mathbf{l}_i^e(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t), \quad i = 1(1)p. \quad (16)$$

Die Reaktionskräfte und -momente lassen sich andererseits durch den  $q \times 1$ -Vektor  $\mathbf{g}$  der verallgemeinerten Zwangskräfte ausdrücken,

$$\mathbf{f}_i' = \mathbf{F}_i(\mathbf{y}, t) \mathbf{g}, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{L}_i(\mathbf{y}, t) \mathbf{g}, \quad i = 1(1)p, \quad (17)$$

wobei die  $3 \times q$ -Verteilungsmatrix  $\mathbf{F}_i(\mathbf{y}, t)$  und die  $3 \times q$ -Verteilungsmatrix  $\mathbf{L}_i(\mathbf{y}, t)$  auftreten, die die verallgemeinerten Zwangskräfte den einzelnen Teilkörpern zuordnen.

Setzt man nun (10), (16) und (17) in (6) ein, so findet man die Newton-Eulerschen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} m_i \mathbf{J}_{T_i} \ddot{\mathbf{y}} + m_i \mathbf{K}_{T_i} \dot{\mathbf{y}} + m_i \bar{\mathbf{a}}_i &= \mathbf{f}_i^e + \mathbf{F}_i \mathbf{g}, \\ \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{R_i} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{I}_i \mathbf{K}_{R_i} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{I}_i \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i + (\mathbf{J}_{R_i} \dot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i) \mathbf{I}_i (\mathbf{J}_{R_i} \dot{\mathbf{y}} + \bar{\boldsymbol{\omega}}_i) &= \mathbf{v}_i + \mathbf{L}_i \mathbf{g}, \end{aligned} \right\} i = 1(1)p. \quad (18)$$

Dabei treten die  $3 \times f$ -Matrix (Translationsbeschleunigung)

$$\mathbf{K}_{T_i}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \frac{\partial(\mathbf{J}_{T_i} \dot{\mathbf{y}})}{\partial \mathbf{y}} + 2 \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_i}{\partial \mathbf{y}}, \quad (19)$$

die  $3 \times f$ -Matrix (Rotationsbeschleunigung)

$$\mathbf{K}_{R_i}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \frac{\partial(\mathbf{J}_{R_i} \dot{\mathbf{y}})}{\partial \mathbf{y}} + 2 \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}_i}{\partial \mathbf{y}} \quad (20)$$

und die „lokalen“ Beschleunigungen

$$\bar{\mathbf{a}}_i(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial t^2}, \quad \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_i(\mathbf{y}, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{s}_i}{\partial t^2} \quad (21)$$

auf. Mit den Newton-Eulerschen Gleichungen sind  $6p$  Gleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten  $y_j$ ,  $j = 1(1)f$  und die verallgemeinerten Zwangskräfte  $g_k$ ,  $k = 1(1)q$ , gegeben. Dies wird noch deutlicher, wenn man (18) zu einer  $6p \times 1$ -Vektorgleichung zusammenfaßt:

$$\bar{\mathbf{M}}(\mathbf{y}, t) \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \bar{\mathbf{q}}^e(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) + \bar{\mathbf{Q}}(\mathbf{y}, t) \mathbf{g}, \quad (22)$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m_1 \mathbf{J}_{T_1} \\ \vdots \\ m_p \mathbf{J}_{T_p} \\ \mathbf{I}_1 \mathbf{J}_{R_1} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_p \mathbf{J}_{R_p} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{q}}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^e \\ \vdots \\ \mathbf{f}_p^e \\ \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_p \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_p \\ \mathbf{L}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_p \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Die  $6p \times f$ -Massenmatrix  $\bar{\mathbf{M}}$  beschreibt die Massenwirkungen, der  $6p \times 1$ -Vektor  $\bar{\mathbf{k}}$  stellt eine Abkürzung für die Kreisel- und Zentrifugalkräfte dar, der  $6p \times 1$ -Vektor  $\bar{\mathbf{q}}^e$  beinhaltet die eingepprägten Kräfte und Momente und die  $6p \times q$ -Matrix  $\bar{\mathbf{Q}}$  beschreibt die Verteilung der verallgemeinerten Zwangskräfte.

#### 4. Bewegungsgleichungen in verallgemeinerten Koordinaten

Die Bewegungsgleichungen für die verallgemeinerten Koordinaten  $y_j$ ,  $j = 1(1)f$ , erhält man aus den Newton-Eulerschen Gleichungen durch die Anwendung des d'Alembertschen Prinzips. Danach gilt, daß die virtuelle Arbeit der Reaktionskräfte und -momente verschwindet,

$$\delta W^r = \delta \mathbf{y}^T \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{q}}^r = \delta \mathbf{y}^T \bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{g} = 0, \quad (24)$$

wobei die globale Jacobi-Matrix des Gesamtsystems

$$\bar{\mathbf{J}} = [\mathbf{J}_{T_1}^T \cdots \mathbf{J}_{T_p}^T \mathbf{J}_{R_1}^T \cdots \mathbf{J}_{R_p}^T]^T \quad (25)$$

auftritt. Unter Berücksichtigung von (15) folgt aus (24) die wichtige Beziehung

$$\bar{\mathbf{J}}^T \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}, \quad (26)$$

d. h. die Matrizen  $\bar{\mathbf{J}}$  und  $\bar{\mathbf{Q}}$  sind orthogonal.

Multipliziert man nun (22) von vorn mit der transponierten, globalen Jacobi-Matrix (25), so ergeben sich unmittelbar die Bewegungsgleichungen in der Form einer  $f \times 1$ -Vektordifferentialgleichung zweiter Ordnung,

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}, t) \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = \mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t). \quad (27)$$

Die  $f \times f$ -Massenmatrix

$$\mathbf{M}(\mathbf{y}, t) = \bar{\mathbf{J}}^T \text{diag} \{m_1 \dots m_p \mathbf{I}_1 \dots \mathbf{I}_p\} \bar{\mathbf{J}} \quad (28)$$

ist symmetrisch und positiv definit. Der  $f \times 1$ -Vektor  $\mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$  beschreibt die verallgemeinerten Kreisel- und Zentrifugalkräfte und der  $f \times 1$ -Vektor  $\mathbf{q}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t)$  beinhaltet alle verallgemeinerten eingepprägten Kräfte des Mehrkörpersystems. Ist die Lösung der Bewegungsgleichungen (27) bekannt, so kann (22) mit Hilfe der verallgemeinerten inversen Matrix von  $\bar{\mathbf{Q}}$  nach den verallgemeinerten Zwangskräften aufgelöst werden,

$$\mathbf{g} = ((\bar{\mathbf{Q}}^T \bar{\mathbf{Q}})^{-1} \bar{\mathbf{Q}}^T) [\bar{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{k}} - \bar{\mathbf{q}}], \quad (29)$$

womit sämtliche Unbekannten bestimmt sind.

Werden die Bewegungsgleichungen (27) linearisiert, oder liegt ein lineares mechanisches System vor, so nehmen die Bewegungsgleichungen im zeitinvarianten Fall die Form

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}}(t) + (\mathbf{D} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{y}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{N}) \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t) \quad (30)$$

an. Neben der symmetrischen, positiv definiten Massenmatrix  $\mathbf{M}$  treten jetzt die symmetrischen  $f \times f$ -Matrizen  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{K}$  auf, welche die Dämpfungs- und Steifigkeitswirkungen kennzeichnen, und die schiefsymmetrischen  $f \times f$ -Matrizen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{N}$ , welche die Kreiselwirkungen und die Einflüsse nichtkonservativer Lagekräfte beschreiben. Der  $f \times 1$ -Vektor  $\mathbf{h}(t)$  beinhaltet die äußeren Erregungen.

Werden für eine dynamische Untersuchung nur die linearisierten Bewegungsgleichungen (30) und nicht auch die nichtlinearen Bewegungsgleichungen (27) benötigt, so führt man im allgemeinen die Linearisierung bereits bei den Ansätzen der Kinematik und der eingepprägten Kräfte und Momente durch. Dadurch wird viel Rechenarbeit, und im Falle der rechnergestützten Aufstellung von Bewegungsgleichungen, viel Speicherplatz eingespart.

## 5. Rechnergestütztes Aufstellen

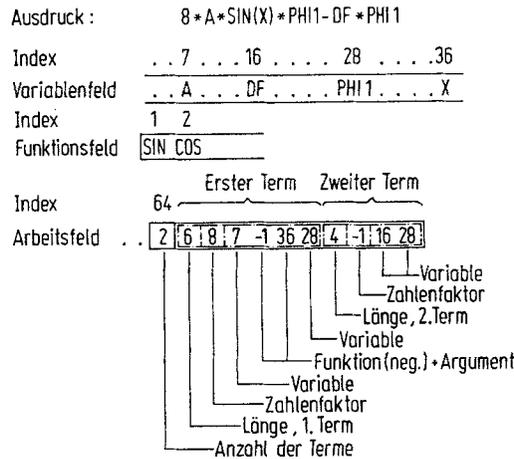
Während die Newton-Eulerschen Gleichungen schrittweise für jeden Teilkörper angeschrieben werden können, erfordert ihre Zusammenfassung zu den Bewegungsgleichungen nach dem d'Alembertschen Prinzip sehr umfangreiche Matrizenoperationen. Deshalb wird man in einem ersten Schritt des rechnergestützten Aufstellens von Bewegungsgleichungen die Matrizenadditionen und -multiplikationen und gegebenenfalls den Linearisierungsprozeß dem Rechner übertragen.

Zum algebraischen Rechnen mit dem Digitalrechner bieten sich nach [8] zunächst die besonderen Programmiersprachen für das analytische Rechnen an. Es zeigt sich jedoch, daß der Interpreter für solche Sprachen nur auf großen Digitalrechnern untergebracht werden kann und daß hohe Rechenzeiten anfallen. Damit wird das rechnergestützte Aufstellen algebraischer Bewegungsgleichungen wieder sehr aufwendig und die Vorteile gegenüber den numerischen Formalismen gehen verloren. Deshalb ist eine problemorientierte Programmierung von algebraischen Matrizenoperationen erforderlich.

Die Indexcodierung, dargestellt in der weit verbreiteten Programmsprache FORTRAN IV, ist nach [8] und [9] eine zeit- und speicherplatzgünstige Lösung für die algebraischen Matrizenoperationen Addition, Subtraktion und Multiplikation.

Bei der Indexcodierung werden die Variablennamen und die Funktionsnamen in der Reihenfolge ihres Auftretens in je einem Feld gespeichert. Die Codierung erfolgt nun dadurch, daß die Indizes der Namen in den Feldern verwendet werden. Als Codenummern (Indizes) werden die positiven Integerzahlen (Variable) und die negativen Integerzahlen (Funktionen) herangezogen. Beschränkt man sich auf die oben genannten Grundrechnungsarten, so entfällt deren Codierung unter den folgenden Voraussetzungen:

1. Das Vorzeichen eines Terms — aufgebaut aus einem Zahlenfaktor, gefolgt von beliebig vielen Variablen und Funktionen — ist durch das Vorzeichen seines Zahlenfaktors bestimmt.
  2. Die Elemente eines Terms sind durch Multiplikationszeichen verknüpft.
- Zur Speicherung und zur Verarbeitung von Ausdrücken — aufgebaut aus mehreren additiv oder subtraktiv verknüpften Termen — wird ein Arbeitsfeld verwendet, in dem Ausdrücke in der in Bild 3 gezeigten Form dargestellt werden. Nach der Eingabe eines Ausdrucks können Variable und Funktionen im Term in beliebiger Reihenfolge angeordnet sein.



**Bild 3.** Darstellung und Codierung eines Ausdrucks

Für verschiedene Rechenoperationen, wie z. B. für das Vergleichen von Termen oder Vereinfachen von Ausdrücken, ist es zweckmäßig, in den einzelnen Termen ein Ordnungsprinzip anzuwenden. Das Ordnen wird bezüglich der Codenummern in fallender Folge vorgenommen, d. h. die Variable mit der höchsten Codenummer steht am Anfang und die Funktion mit der niedrigsten Codenummer steht am Ende des Terms. Beim Ordnen der Terme eines Ausdrucks wird deren Lage im Arbeitsfeld nicht geändert. Außerdem bleiben dadurch Zahlenfaktor und Länge unverändert. Das Ordnen beansprucht relativ lange Rechenzeiten. Deshalb wird bei der Ausführung jeder Grundoperation das Ordnungsprinzip berücksichtigt.

Bei der Addition bzw. Subtraktion werden zwei Ausdrücke dadurch miteinander verknüpft, daß die Anzahl der Terme addiert und abgespeichert wird. Anschließend werden die Terme der beiden Ausdrücke hintereinander geschrieben.

Bei der Multiplikation von zwei Ausdrücken wird die Anzahl der Terme multipliziert und dann werden die Terme paarweise multiplikativ verknüpft. Die Multiplikation zweier Terme beinhaltet die Multiplikation der Zahlenfaktoren und das Aneinanderfügen der Termglieder unter Berücksichtigung des Ordnungsprinzips.

Weiterhin werden nach jeder der drei Grundoperationen Addition, Subtraktion und Multiplikation mögliche Vereinfachungen, wie das Zusammenfassen von Termen, die bis auf den Zahlenfaktor gleich sind, oder Linearisierungen vorgenommen. Bei der Linearisierung werden Terme, die mindestens zwei Variable enthalten, die klein von erster Ordnung sind, Null gesetzt.

Bei der Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen müssen die einzelnen Matrixelemente — aufgebaut aus jeweils einem Ausdruck — gekennzeichnet werden. Die Stellung der einzelnen Matrixelemente wird durch die Reihenfolge des Einlesens bestimmt und kann beim Rechnen daher nur durch umfangreiche Indexrechnungen ermittelt werden. Für die zeitoptimale Weiterverarbeitung wird deshalb parallel zu den Codenummern im Arbeitsfeld ein Hilfsfeld aufgebaut, in dem die Anfangsindizes der Elemente (Ausdrücke) festgehalten werden.

Das Programm zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen wird zur Erhöhung der Zuverlässigkeit aus einer Vielzahl von Unterprogrammen aufgebaut. Für die Matrizenoperationen bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen werden unter anderem die folgenden Unterprogramme benötigt:

Die Multiplikation einer Matrix mit einer Variablen,  
 die Matrizenaddition und -subtraktion,  
 das Vektorprodukt,  
 die Matrizenmultiplikation,  
 die Transponierung von Matrizen.

Dabei werden zunächst die termbezogenen Operationen programmiert. Die termbezogenen Operationen werden zum Aufbau der ausdrucks- bzw. elementbezogenen Programme verwendet. Diese bilden wiederum die Grundlage der Matrizenprogramme. Mit den Matrizenprogrammen wird dann das Fertigprogramm zur Berechnung der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen formuliert. Codierungs- und Decodierungsprogramme ergänzen die Rechenprogramme.

## 6. Beispiel

Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen für Mehrkörpersysteme macht insbesondere im Falle höherer Systemordnung Schwierigkeiten. Dies wurde z. B. bei der Untersuchung eines elastisch gelagerten Rotors mit acht Freiheitsgraden in der Arbeit [10] sehr deutlich. Die Bewegungsgleichungen dieses Rotors, Bild 4, sollen deshalb auch mit dem in [9] zur Verfügung gestellten Fertigprogramm bestimmt werden. Der Lagevektor wird durch die Horizontalauslenkungen der oberen Lagermasse  $m_1$ , des Rotorschwerpunkts  $C_2$ , der unteren Lagermasse  $m_3$  und durch die Kardanwinkel des Rotors bestimmt:

$$\mathbf{y} = [x_1 y_1 x_2 y_2 \alpha \beta x_3 y_3]^T.$$

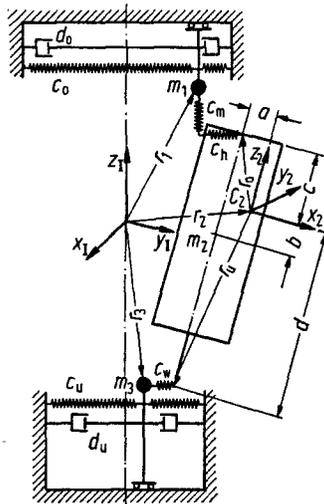


Bild 4. Elastisch gelagerter Rotor

Die Jacobimatrizen der Translation lauten für die obere Lagermasse

$$\mathbf{J}_{T_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

für den Rotor

$$\mathbf{J}_{T_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -ad & -\alpha-\beta d & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

und für das untere Lager

$$\mathbf{J}_{T_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Jacobimatrix der Rotation errechnet sich zu

$$J_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

wobei  $\Omega$  die konstante Rotordrehzahl darstellt. Die Matrizen der Translationsbeschleunigung sind nicht besetzt,  $K_{Ti} = \mathbf{0}$ ,  $i = 1(1)3$ , während man für die Matrix der Rotationsbeschleunigung des Rotors

$$K_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\Omega \sin \Omega t & -\Omega \cos \Omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Omega \cos \Omega t & -\Omega \sin \Omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

erhält. Die lokalen Translationsbeschleunigungen verschwinden für alle Massen, d. h. es ist  $a_i = \mathbf{0}$ ,  $i = 1(1)3$ . Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit des Rotors ergibt sich zu

$$\bar{\omega}_2 = [0 \quad 0 \quad \Omega]^T,$$

woraus sich für die Winkelbeschleunigung  $\dot{\bar{\omega}}_2 = \mathbf{0}$  errechnet.

RM(1,1)=RM1	Q(6,1)=-CK*CH+COS(OT)
RM(2,2)=RM1	Q(6,2)=-CK*CH*SIN(OT)
RM(3,3)=RM2	Q(6,3)=CK*CH+COS(OT)-CW*DK+COS(OT)
RM(4,4)=RM2	Q(6,4)=CK*CH*SIN(OT)-CW*DK*SIN(OT)
RM(5,5)=A+*COS(OT)+*COS(OT)+A+SIN(OT)*SIN(OT)	Q(6,5)=-RM2*DK*GE+DK*RN+C*OM*OM*SIN(OT)*SIN(OT)-A*OM
RM(6,6)=A+SIN(OT)*SIN(OT)+A+*COS(OT)+*COS(OT)	Q(6,6)=OM*SIN(OT)*SIN(OT)+CK*CK*CH+SIN(OT)*SIN(OT)+
RM(7,7)=RM3	Q(6,7)=OM*SIN(OT)*SIN(OT)+CW*DK*DK+SIN(OT)*SIN(OT)+
RM(8,8)=RM3	Q(6,8)=OM*OM*SIN(OT)*SIN(OT)-A*OM*OM*SIN(OT)+
P(1,1)=DO	Q(6,9)=COS(OT)+CK*CK*CH+*COS(OT)*COS(OT)+RN*CK
P(2,2)=DO	Q(6,10)=COS(OT)+COS(OT)+CW*DK*DK+SIN(OT)*COS(OT)
P(5,6)=-2.*A*OM+*COS(OT)+*COS(OT)+C*OM+*COS(OT)+*COS(OT)-2.*	Q(6,11)=CW*DK+*COS(OT)
*A*OM+SIN(OT)*SIN(OT)+C*OM+SIN(OT)*SIN(OT)	Q(6,12)=CW*DK*SIN(OT)
P(6,5)=2.*A*OM+SIN(OT)*SIN(OT)-C*OM+SIN(OT)*SIN(OT)+2.*	Q(7,3)=-CW
*A*OM+*COS(OT)+*COS(OT)-C*OM+*COS(OT)+*COS(OT)	Q(7,5)=CW*DK+SIN(OT)
P(7,7)=DU	Q(7,6)=CW*DK+*COS(OT)
P(8,8)=DU	Q(7,7)=CU+CW
Q(1,1)=CO+CH	Q(8,4)=-CW
Q(1,3)=-CH	Q(8,5)=-CW*DK+*COS(OT)
Q(1,5)=-CK*CH*SIN(OT)	Q(8,6)=CW*DK+SIN(OT)
Q(1,6)=-CK*CH+*COS(OT)	Q(8,8)=CU+CW
Q(2,2)=CO+CH	H(1,1)=-CH*AK+*COS(OT)
Q(2,4)=-CH	H(2,1)=-CH*AK+SIN(OT)
Q(2,5)=CK*CH+*COS(OT)	H(3,1)=CH*AK+*COS(OT)+CW*AK+*COS(OT)
Q(2,6)=-CK*CH+SIN(OT)	H(4,1)=CH*AK+SIN(OT)+CW*AK+SIN(OT)
Q(3,1)=-CH	H(5,1)=-OM*OM+*COS(OT)+*COS(OT)-OM*OM+D+SIN(OT)
Q(3,3)=CH+CW	*SIN(OT)
Q(3,5)=CK*CH+SIN(OT)-CW*DK+SIN(OT)	H(6,1)=RM2*GE+AK-RN*AK+OM*OM+*SIN(OT)*SIN(OT)+CK*CH
Q(3,6)=CK*CH+*COS(OT)-CW*DK+*COS(OT)	*AK+SIN(OT)*SIN(OT)+RN*AK+SIN(OT)*SIN(OT)-CW
Q(3,7)=-CW	*DK+AK+SIN(OT)*SIN(OT)+OM*OM+*SIN(OT)*COS(OT)+
Q(4,2)=-CH	CK*CH+AK+*COS(OT)+*COS(OT)+RN*AK+*COS(OT)+*COS(OT)-
Q(4,4)=CH+CW	CW*DK+AK+*COS(OT)+*COS(OT)
Q(4,5)=-CK*CH+*COS(OT)+CW*DK+*COS(OT)	H(7,1)=-CW*AK+*COS(OT)
Q(4,6)=CK*CH+SIN(OT)-CW*DK+SIN(OT)	H(8,1)=-CW*AK+SIN(OT)
Q(4,8)=-CW	
Q(5,1)=-CK*CH+SIN(OT)	
Q(5,2)=CK*CH+*COS(OT)	
Q(5,3)=CK*CH+SIN(OT)-CW*DK+SIN(OT)	
Q(5,4)=-CK*CH+*COS(OT)+CW*DK+*COS(OT)	
Q(5,5)=-RM2*DK*GE+DK*RN+C*OM*OM+*COS(OT)+*COS(OT)-A*OM	
*OM+*COS(OT)+*COS(OT)+CK*CK*CH+*COS(OT)+*COS(OT)+	
RN*CK+*COS(OT)+*COS(OT)+CW*DK*DK+*COS(OT)+*COS(OT)+	
C*OM*OM+SIN(OT)*SIN(OT)-A*OM*OM+SIN(OT)	
*SIN(OT)+CK*CK*CH+SIN(OT)*SIN(OT)+RN*CK	
+SIN(OT)*SIN(OT)+CW*DK+DK+SIN(OT)*SIN(OT)*SIN(OT)	
Q(5,7)=CW*DK+SIN(OT)	
Q(5,8)=-CW*DK+*COS(OT)	

Zuordnung der Variablenamen:

a	→	AK	m <sub>1</sub>	→	RM1	d <sub>u</sub>	→	DU
d	→	DK	m <sub>2</sub>	→	RM2	d <sub>o</sub>	→	DO
c	→	CK	m <sub>3</sub>	→	RM3	c <sub>o</sub>	→	CO
g	→	GE	A	→	A	c <sub>h</sub>	→	CH
Ω	→	OM	C	→	C	c <sub>w</sub>	→	CW
Ωt	→	OT	D	→	D	c <sub>u</sub>	→	CU
						N	→	RN

Bild 5. Protokollausdruck

Der Trägheitstensor für den Rotor ist in [10, (2.30)] angegeben, ebenso wie die eingepprägten Kräfte und Momente [10, (2.17) bis (2.22)]. Nach der Eingabe der oben zusammengestellten Matrizen und Vektoren liefert das Fertigprogramm die Systemmatrizen  $\mathbf{M} = \mathbf{RM}$ ,  $(\mathbf{D} + \mathbf{G}) = \mathbf{P}$ ,  $(\mathbf{K} + \mathbf{N}) = \mathbf{Q}$  und den Erregervektor  $\mathbf{h} = \mathbf{H}$  der linearisierten Bewegungsgleichungen (30), die in Bild 5 als Protokoll ausgedruckt sind, wobei auf die Angabe von Nullelementen aus Platzgründen verzichtet wurde. Dieses Ergebnis stimmt erwartungsgemäß mit (2.36) in [10] überein.

Durch das rechnergestützte Aufstellen der Bewegungsgleichungen wird nicht nur der Arbeits- und Zeitaufwand erheblich verringert, sondern es werden auch viele Fehlermöglichkeiten ausgeschlossen.

## 7. Zusammenfassung

Die Bewegungsgleichungen gewöhnlicher Mehrkörpersysteme führen stets auf eine Vektordifferentialgleichung zweiter Ordnung. Diese Vektordifferentialgleichung läßt sich aus den Newton-Eulerschen Gleichungen nach dem d'Alembertschen Prinzip durch eine Matrizenmultiplikation mit der globalen Jacobi-Matrix des Mehrkörpersystems gewinnen. Die Newton-Eulerschen Gleichungen werden schrittweise für jeden einzelnen Teilkörper bestimmt. Dann werden die Matrizenoperationen mit Hilfe der Indexcodierung am Digitalrechner algebraisch durchgeführt. Damit stehen die Bewegungsgleichungen in algebraischer Form zur Verfügung, wobei sowohl lineare als auch nichtlineare Mehrkörpersysteme zugelassen sind. Die Programmierungsarbeiten werden mit dem Ziel fortgesetzt, auch die Newton-Eulerschen Gleichungen mit dem Digitalrechner zu bestimmen.

## Literatur

1. Hooker, W. W.; Margulies, G.: The Dynamical Attitude Equations for an n-Body Satellite. *J. Astron. Sci.* 12 (1965) No. 4, 123–128
2. Roberson, R. E.; Wittenburg, J.: A Dynamical Formalism for an Arbitrary Number of Interconnected Rigid Bodies, with Reference to the Problem of Satellite Attitude Control. *Proc. 3rd Congress Int. Fed. Auto. Control*, London 1966
3. Ossenberg-Franzes, F. W.: Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen unter Berücksichtigung translatorischer und rotatorischer Differenzbewegungen. *Dissertation, TU München* 1973
4. Gupta, V. K.: Dynamic Analysis of Multi-Rigid-Body Systems. *ASME Paper No. 73-WA/DE-12*, New York 1973
5. Fleischer, G. E.; Likins, P. W.: Attitude Dynamics Simulation Subroutines for Systems of Hinge-Connected Rigid Bodies. *TR-1592, JPL, Pasadena*, 1974
6. Magnus, K.: *Kreisel, Theorie und Anwendungen*. Berlin-Heidelberg-New York, 1971
7. Schiehlen, W.: Zur Klassifizierung von Mehrkörpersystemen. *Deutsche Luft- und Raumfahrt, Forschungsbericht 75-32*, 1975, 254–269
8. Kreuzer, E. J.: Rechnergestütztes Aufstellen der Bewegungsgleichungen linearer Mehrkörpersysteme. *Diplomarbeit, Lehrstuhl B für Mechanik, TU München*, 1976
9. Kreuzer, E.; Lautenschlager, R.; Sandweg, G.: NEWEUL, ein Programmpaket für die rechnergestützte Aufstellung der Bewegungsgleichungen linearer Mehrkörpersysteme. *Lehrstuhl B für Mechanik, Bericht 37, TU München*, 1976
10. Schweitzer, G.; Schiehlen, W.; Müller, P. C.; Hübner, W.; Lückel, J.; Sandweg, G.; Lautenschlager, R.: Kreiselverhalten eines elastisch gelagerten Rotors. *Ingenieur-Archiv* 41 (1972) 110–140

Eingegangen am 15. Juli 1976

Dr.-Ing. W. Schiehlen  
Dipl.-Ing. E. Kreuzer

Lehrstuhl B für Mechanik  
Technische Universität München  
Arcisstraße 21  
D-8000 München 2  
Bundesrepublik Deutschland