Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 10, 198—202 (1968)

Une démonstration unifiée des théorèmes de sections de P. A. Meyer

A. Cornea et Gabriela Licea

Reçu le 2 Novembre, 1967

Summary. In this note we get a simplified and unified proof of Meyer's section theorems by introducing a convenient paving which generates the σ-field of well measurable sets and using only elementary results from the theory of analytic sets and capacity.

Dans [1], P. A. Meyer a introduit sur un espace produit $\Omega \times R_+$ la notion d'ensemble bien-mesurable, associée à un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ muni d'une famille croissante $(\mathscr{F}_t)_{t\in R_+}$ de sous-σ-algèbres de $\mathscr{F}$ et a demontré un important théorème de section: pour tout ensemble bien-mesurable A et tout $\varepsilon > 0$, il existe un temps d'arrêt T dont le graphe est contenu dans A, tel que

$$P(\operatorname{pr} A - \{T < \infty\}) < \varepsilon .$$

Plus récemment ([2] et [3]), il a demontré que si A possède des propriétés suplémentaires de mesurabilité, le temps d'arrêt T peut être choisi accessible ou même prévisible. Dans ces deux derniers cas, sa démonstration s'appuie seulement sur la théorie de l'analyticité et de la capacité.

Dans cette note, en choisissant un pavage convenable qui engendre la σ-algèbre des ensembles bien-mesurables, nous montrons qu'on peut appliquer la même méthode de démonstration aussi pour le premier cas.

Nous allons emprunter à [2] des notations, des définitions, ainsi que les principaux résultats concernant la théorie de l'analyticité, de la capacité, et des résultats élémentaires de la théorie des temps d'arrêt.

Soit $\{\Omega, \mathscr{F}, P\}$ un espace de probabilité complet, $(\mathscr{F}_t)_{t\in R_+}$ une famille croissante de sous-σ-algèbres de $\mathscr{F}$ telle que $\mathscr{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s$, et que $\mathscr{F}_0$ contienne tous les ensembles P-négligeables de $\mathscr{F}$. Un temps d'arrêt T est dit totalement inaccessible, si $P\{T > 0\} = 1$, $P\{T < \infty\} > 0$ et si pour toute suite croissante de temps d'arrêt $(S_n)_{n\in N}$, on a

$$P\left\{\lim_{n\to\infty} S_n = T < \infty, S_n < T \text{ pour tout } n \in N\right\} = 0 .$$

Un temps d'arrêt T est dit accessible, si pour tout temps d'arrêt totalement inaccessible S, on a

$$P\{T = S < \infty\} = 0 .$$

Un temps d'arrêt T est dit prèvisible s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $(S_n)_{n\in N}$, telle que

$$T = \lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{et} \quad \{0 < T < \infty\} \subset \bigcap_n \{S_n < T\}$$

(voir [2], VII, 42).

Soient S, T deux temps d'arrêt arbitraires tels que $S \leqq T$. Nous désignerons par $[S, T/$ l'ensemble $[S, T_A] \cap [S, T_{A'})$, où $\{A, A'\}$ est une partition de $\{T < \infty\}$ telle que T_A soit accessible et $T_{A'}$ soit totalement inaccessible ou p.s. égal à $+\infty$ (voir [2], VII, 44), et où les notations $[U, V]$, $[U, V)$, où U, V sont deux temps d'arrêt tels que $U \leqq V$, désignent les intervalles stochastiques introduits en [2], VIII, 13.

Soit $\mathscr{J}$ (respectivement $\mathscr{J}'$, respectivement $\mathscr{J}''$) le pavage formé des intervalles stochastiques $[S, T/$ (respectivement $[S, T]$ où S est accessible, respectivement $[S, T]$ où S est prévisible). La σ-algèbre $\mathscr{T}(\mathscr{J}'')$ engendrée par $\mathscr{J}''$ est constituée par les ensembles prévisibles ([3], 203), et de même $\mathscr{T}(\mathscr{J}')$ est formée des ensembles accessibles ([3], 202). Montrons que $\mathscr{T}(\mathscr{J})$ est la σ-algèbre des ensembles bien-mesurables: comme tout élément de $\mathscr{J}$ est évidemment un ensemble bien-mesurable, il suffit de montrer ([3], 201) que tout intervalle stochastique $[S, T]$, où S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leqq T$, appartient à $\mathscr{T}(\mathscr{J})$, et cela est évident, car

$$[S, T] = \bigcap_n \left[S, T + \frac{1}{n}\right].$$

Si A est un sous-ensemble de $\Omega \times R_+$, nous désignerons par $\operatorname{pr} A$ la projection de A sur Ω. Cet ensemble est $\mathscr{F}$-mesurable si A appartient à la σ-algèbre $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(R_+)$ (voir [2], III, 9, et [2], III, 24).

Lemme 1. *Pour tout élément A de $\mathscr{J}$ (respectivement $\mathscr{J}'$, respectivement $\mathscr{J}''$) le complémentaire de A est un ensemble analytique par rapport à $\mathscr{J}$ (respectivement à $\mathscr{J}'$, respectivement à $\mathscr{J}''$).*

Démonstration. Pour tout temps d'arrêt T, l'égalité

$$(T, \infty) = \bigcup_{n \in N} \left[T + \frac{1}{n}, \infty\right]$$

et le fait que, pour tout n, $T + \frac{1}{n}$ est prévisible, montre que l'ensemble (T, ∞) est analytique par rapport à chacun des trois pavages.

Si T est prévisible, il existe uns suite croissante $(T_n)_{n \in N}$ de temps d'arrêt telle que l'on ait $\lim T_n = T$, $T_n < T$ pour tout n sur l'ensemble $\{T > 0\}$. Posons $U_n = 0$ si $T_n > 0$, $U_n = +\infty$ si $T_n = 0$, et de même $V_n = T_n$ si $T_n > 0$, $V_n = +\infty$ si $T_n = 0$. On vérifie aussitôt que U_n, V_n sont des temps d'arrêt tels que $U_n \leqq V_n$, que U_n est prévisible, et que $[0, T) = \bigcup_n [U_n, V_n]$; $[0, T)$ est donc $\mathscr{J}''$-analytique.

Soit maintenant T un temps d'arrêt accessible. Il axiste une suite de suites croissantes $((S_n^p)_{n \in N})$ de temps d'arrêt, telle que, si l'on pose $S^p = \lim_{n \to \infty} S_n^p$ et

$$K_p = \{S^p = T < \infty, S_n^p < S^p \text{ pour tout } n \in N\},$$

on ait

$$\{0 < T < \infty\} = \bigcup_{p \in N} K_p$$

(voir la démonstration du théoréme 44, VII, [2]). Soit

$$B_p = \{\text{pour tout } n \in N, S_n^p < S^p\} \cap (\Omega - K_p) \quad \text{et} \quad C_p = \Omega - B_p \cup K_p.$$

Evidemment, $B_p \in \mathscr{F}_{S^p}$, $C_p \in \mathscr{F}_{S^p}$ et le temps d'arrêt $S^p_{B_p}$ est accessible. On a

$$[0, T_{K_p}) = \bigcup_{n \in N} [0, S^p_n] \cup [S^p_{B_p}, \infty) \cup (S^p_{C_p}, \infty),$$

donc cet ensemble est $\mathscr{J}'$-analytique. Il est aussi $\mathscr{J}$-analytique puisque les ensemble

$$[0, S^p_n] = \bigcap_{m \in N} \left[0, S^p_n + \frac{1}{m}\right]$$

le sont. Posons $U = 0$ si $T > 0$, et $U = +\infty$ si $T = 0$. Alors $[U, \infty] \in \mathscr{J}''$. De l'égalité

$$[0, T) = \bigcap_{p \in N} [0, T_{K_p}) \cap [U, \infty)$$

on déduit que cet ensemble est à la fois $\mathscr{J}$ et $\mathscr{J}'$-analytique.

De ces considérations le lemme pour $\mathscr{J}'$ et $\mathscr{J}''$ est immédiat. Soient $[S, T/ \in \mathscr{J}$, $\{A, A'\}$ et $\{B, B'\}$ les partitions de $\{T < \infty\}$, respectivement $\{S < \infty\}$, du théorème 44, VII [2]. De l'égalité

$$C([S, T/) = ([0, S_B) \cap [0, S_{B'})) \cup (T_A, \infty) \cup [T_{A'}, \infty)$$

résulte l'assertion du lemme pour le pavage $\mathscr{J}$.

Lemme 2. *Soit $(H_n)_{n \in N}$ une suite décroissante d'ensembles de $\Omega \times R_+$ telle que H_1 soit contenu dans un intervalle stochastique de la forme $[0, \alpha]$, où α est une constante positive, et que chaque H_n soit une réunion finie d'éléments de $\mathscr{J}$. Alors l'ensemble*

$$\bigcap_{n \in N} \operatorname{pr} H_n - \operatorname{pr} \bigcap_{n \in N} H_n$$

est de probabilité P nulle.

Démonstration. Soit $H = \bigcap_{n \in N} H_n$ et pour entier n, soit S_n le temps d'arrêt qui est le début de H_n (voir [2], IV 51). On a $S_n \leqq S_{n+1}$. Posons $S = \lim_{n \to \infty} S_n$. Alors

$$\operatorname{pr} H_n = \{S_n < \infty\} = \{S_n \leqq \alpha\}$$

et

$$\bigcap_{n \in N} \operatorname{pr} H_n = \bigcap_{n \in N} \{S_n < \infty\} = \{S < \infty\}.$$

Soit $H_n = \bigcup_{i \in I_n} [U_i, V_i/$ (où I_n est un ensemble fini d'indices) une représentation de H_n, soit A'_i le sous ensemble maximal de $\{V_i < \infty\}$ pour lequel $V_{iA'i}$ est totalement inaccessible ([2], VII, 44). Alors, d'après la définition de $\mathscr{J}$, pour tout ω, la coupe $H_n(\omega)$ de H_n par ω est la réunion d'un nombre fini d'intervalles dont les extrémités sont $U_i(\omega)$, $V_i(\omega)$, fermés à gauche et ouverts ou fermés à droite, selon que ω appartient à A'_i ou ne lui appartient pas.

Soit $\omega \in \{S < \infty\} - \operatorname{pr} H$. Comme on a $S_p(\omega) \in H_n(\omega)$ pour tous les entiers n, p, tels que $n \leqq p$, le nombre $S(\omega)$ est un point limite de $H_n(\omega)$. La relation

$\omega \notin \operatorname{pr} H$ implique qu'il existe un entier n_ω, tel que, pour tout $n \geqq n_\omega$, $S(\omega) \notin H_n(\omega)$. Il résulte de ces considérations, d'une part que $S_n(\omega) < S(\omega)$ pour tout n, et d'autre part, en tenant compte de la forme de $H_n(\omega)$, qu'il existe un n, et un $i \in I_n$ tel que

$$\omega \in A_i', \quad S(\omega) = V i_{A'i}(\omega).$$

Alors

$$\{S < \infty\} - \operatorname{pr} H \subset \left(\bigcup_{\substack{i \in \bigcup I_n \\ n \in N}} \{S = V i_{A'i} < \infty\} \right) \cap \bigcap_n \{S_n < S\}.$$

Les temps d'arrêt $V i_{A'i}$ étant par définition totalement inaccessibles, cet ensemble a une probabilité nulle et la démonstration est achevée.

Théorème (P. A. MEYER). *Soient A un ensemble de $\mathscr{T}(\mathscr{J})$ (respectivement $\mathscr{T}(\mathscr{J}')$, respectivement $\mathscr{T}(\mathscr{J}'')$) et ε un nombre réel positif. Il existe un temps d'arrêt (respectivement temps d'arrêt accessible, respectivement temps d'arrêt prévisible) T, tel que*

$$[T, T] \subset A$$
$$P(\operatorname{pr} A - \operatorname{pr}[T, T]) < \varepsilon.$$

Démonstration. La démonstration suit exactement la méthode utilisée par P. A. MEYER pour les cas $\mathscr{J}'$, $\mathscr{J}''$ ([2], VIII, 21). Soit $\mathscr{K}$ (respectivement $\mathscr{K}'$, respectivement $\mathscr{K}''$) le pavage formé des réunions finies d'ensembles de la forme $J \cap [0, \alpha]$ où α est une constante et $J \in \mathscr{J}$ (respectivement $\mathscr{J}'$, respectivement $\mathscr{J}''$). Il est facile de voir que les ensembles $\mathscr{J}$ (respectivement $\mathscr{J}'$, respectivement $\mathscr{J}''$) analytiques, sont aussi $\mathscr{K}$ (respectivement $\mathscr{K}'$, respectivement $\mathscr{K}''$) analytiques. Donc, utilisant le lemme 1 et [2], III, 12, on déduit que A est $\mathscr{K}$ (respectivement $\mathscr{K}'$, respectivement $\mathscr{K}''$) analytique.

Soit Γ la fonction d'ensemble sur $\Omega \times R_+$, définie par

$$\Gamma(H) = P^*(\operatorname{pr} H).$$

En utilisant le lemme 2 pour le pavage $\mathscr{K}$, [2], III, 6 pour les pavages $\mathscr{K}'$, $\mathscr{K}''$, et [2], III, 9, [2], III, 24, on déduit que Γ est une capacité de Choquet par rapport à chacun des pavages $\mathscr{K}$ (respectivement $\mathscr{K}'$, respectivement $\mathscr{K}''$). Du théorème de CHOQUET ([2], III, 19) on déduit qu'il existe un élément H appartenant à $\mathscr{K}_\delta$ (respectivement $\mathscr{K}'_\delta$, respectivement $\mathscr{K}''_\delta$) tel que

$$H \subset A \quad \text{et} \quad \Gamma(H) \geqq \Gamma(A) - \varepsilon,$$

donc

$$P(\operatorname{pr} A - \operatorname{pr} H) \leqq \varepsilon.$$

Soit T le début de H. Du fait que, pour chaque ω, $H(\omega)$ est fermé à gauche et contient les limites des suites décroissantes contenues dans $H(\omega)$, on a

$$[T, T] \subset H \subset A$$

et, comme $\operatorname{pr}[T, T] = \operatorname{pr} H$, on a $P(\operatorname{pr} A - \operatorname{pr}[T, T]) \leqq \varepsilon$.

Si $H \in \mathscr{K}'$ (respectivement $\mathscr{K}''$), le temps d'arrêt T est accessible (respectivement prévisible) comme limite d'une suite croissante de temps d'arrêt accessibles (respectivement prévisible) (voir [3], 111).

Bibliographie

1. MEYER, P. A.: Une présentation de la théorie des ensembles sous-liniens. Application aux processus stochastiques. Séminaire de Théorie du Potentiel, dirigé par Brelot, Choquet, Deny. Institut Henri Poincaré, Paris, 7e, année, p. 201, 218.
2. — Probability and potentiels, Toronto, London, Waltham, Mass.: Blaisdell Publishing Company 1966.
   — Probabilités et potentiels. Boston: Blaisdell Publ. Co.; Paris: Hermann 1966.
3. — Guide détaillé de la théorie "générale" des processus. Séminaire de Probabilités, Université de Strasbourg.

Dr. A. CORNEA et GABRIELA LICEA
Académie de la République
Socialiste de Roumanie
Institut de Mathématique
rue M. Eminescu 47
Bucarest 9, Roumanie