

Wärmespannungen in Hohlzylindern mit temperaturabhängigen Stoffwerten

Von R. Trostel

1. Allgemeines. Mit dem vorliegenden Aufsatz soll ein Beitrag zum Thema Wärmespannungen im Bereich höherer Temperaturen geliefert werden, wo man von der Temperaturabhängigkeit der Materialwerte nicht mehr absehen kann. Eine allgemeine geschlossene Lösung dieses Problemkreises gelingt nur für den Spezialfall elastisch-inkompressiblen Materials ($\nu = 1/2$), der nachfolgend behandelt wird. Er erlaubt eine verhältnismäßig einfache und übersichtliche explizite Darstellung der Spannungen durch Integrale, die sich gegebenenfalls, wie die unter Ziff. 4 behandelten Beispiele zeigen, geschlossen, im allgemeinen aber sehr bequem numerisch bewältigen lassen. Auch der für die Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Materialwerte charakteristische Sachverhalt, daß die aus einer rein mechanischen Belastung herrührenden Spannungen von der Verteilung eines gleichzeitig vorhandenen ungleichmäßigen Temperaturfeldes abhängig sind, läßt sich gut erkennen.

In Ziff. 2 wird unter der Voraussetzung elastisch-inkompressiblen Materials der Spannungszustand für ein beliebiges ebenes achsensymmetrisches Temperaturfeld $\vartheta(r)$ und für einen beliebig mit ϑ veränderlichen Elastizitätsmodul $E(\vartheta)$ und Wärmeausdehnungskoeffizienten $\alpha_t(\vartheta)$ angegeben. In Ziff. 3 folgt die Bestimmung einer allgemeinen Lösung für das Temperaturfeld unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit. Die Berechnung eines Wärmespannungsproblems geht dann, wie in den unter Ziff. 4 abgehandelten Beispielen gezeigt wird, folgendermaßen vor sich.

Nach Ermittlung des Temperaturfeldes $\vartheta = \vartheta(r)$ sind bei Vorgabe der Temperaturabhängigkeiten $E = E(\vartheta)$ bzw. $\alpha_t = \alpha_t(\vartheta)$ die Funktionen $E(\vartheta(r)) = E(r)$ sowie $\alpha_t(\vartheta(r)) = \alpha_t(r)$ gegeben. Sie können nunmehr, zusammen mit $\vartheta(r)$ in die für die Spannungen unter Ziff. 2 gefundenen expliziten Integralösungen eingesetzt werden, womit nach Integration dann die Spannungen folgen. In den in Ziff. 4 behandelten Beispielen wurde der Wärmespannungszustand in einem Stahlrohr untersucht, wobei jedoch auf den Umstand, daß hier die Querdehnung nicht $1/2$ ist, keine Rücksicht genommen werden konnte. Trotzdem erlauben diese Beispiele im Vergleich ihrer Ergebnisse mit denjenigen, die sich nach der üblichen Theorie unveränderlicher Materialwerte unter Verwendung von $\nu = 1/2$ ergeben, eine Aussage über den Einfluß der Temperaturabhängigkeit der Materialwerte generell zu machen. In diesem Sinne kommt man an Hand eines Vergleiches der in Abb. 5 dargestellten Kurven zu dem Resultat, daß die Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Werkstoffwerte bei Stahlrohren auf größere Wärmespannungen führt, als sie sich unter Verwendung unveränderlicher Materialwerte ergeben. Die Unterschiede zwischen den Spannungen sind jedoch gering, wenn bei dem zugehörigen Temperaturfeld die Randtemperaturen vorgegeben sind. In diesem Falle ergibt nämlich die genauere Berechnung des Temperaturfeldes gegenüber einer Rechnung mit konstanter Wärmeleitfähigkeit einen nur kaum merkbaren Unterschied, so daß die Veränderungen der Spannungsbilder praktisch allein von der Veränderlichkeit von E und α_t herrühren. Diese sind jedoch nicht erheblich. Die Verhältnisse können sich jedoch erheblich ändern, wenn für das Temperaturfeld eine andere Randwertaufgabe vorgelegt ist (z. B. Wärmeübergang am Außenrande), so daß die genauere Temperaturverteilung von der mit konstanter Wärmeleitfähigkeit bestimmten bereits merklich abweicht. Hier zeigt sich an Hand der Abb. 6, daß man mit der üblichen Theorie unveränderlicher Materialwerte schon merklich kleinere Wärmespannungen ermittelt, und daß man nur noch dann mit den Ergebnissen der üblichen Theorie unveränderlicher Werte E und α_t auskommt, wenn man wenigstens dem tatsächlichen Temperaturverlauf Rechnung trägt.

2. Ermittlung des Spannungsfeldes. Wir betrachten den mittleren Teil eines sehr langen Hohlzylinders, in dem ein ebenes rotationssymmetrisches Temperaturfeld herrsche und an dessen Mantelflächen $r = r_i$ bzw. $r = r_a$ die Drücke p_i bzw. p_a wirken mögen (Abb. 1). Die Rotationssymmetrie der Belastung und des Temperaturfeldes bedingt dann das Entstehen eines achsensymmetrischen Spannungszustandes, der darüber hinaus im mittleren Rohrbereich von der Zylinderachsenordinate z unabhängig sein muß. Sämtliche Spannungsgrößen, und damit im Sinne des *Hookeschen* Gesetzes

auch sämtliche Verzerrungskomponenten, können daher nur von r abhängig sein. Insbesondere erhält man also für die Axialdehnungen

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = f(r) \quad (1a)$$

und nach Integration

$$w = w(r, z) = z f(r) + g(r). \quad (1b)$$

Nun ist jedoch im mittleren Bereich eines sehr langen Rohres kein Rohrquerschnitt $z = \text{konst.}$ vor einem anderen ausgezeichnet. Daher müssen diese Rohrquerschnitte während der Deformation eben bleiben (Abb. 2), womit

$$f(r) = \text{konst.} = A_1, \quad g(r) = \text{konst.} = A_2 \quad (1c)$$

verbunden ist und aus (1b)

$$w = w(z) = A_1 z + A_2 \quad (1d)$$

hervorgeht. Die Konstanten A_1 und A_2 können aus den Lagerungsbedingungen des Zylinders an seinen Enden bestimmt werden.

Nach dieser vorbereitenden Betrachtung gehen wir zur Berechnung des Spannungszustandes über, der im mittleren Rohrbereich und wegen der Rotationssymmetrie des Problems allein durch

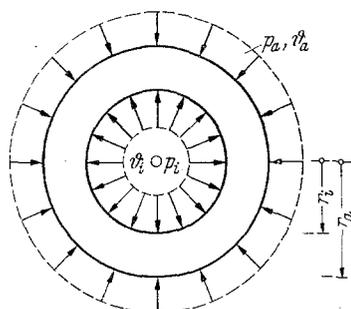


Abb. 1.

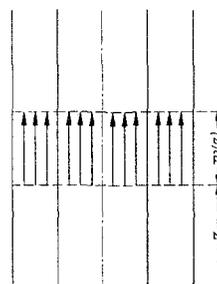


Abb. 2.

Radialspannungen $\sigma_r = \sigma_r(r)$ Ringspannungen $\sigma_\varphi = \sigma_\varphi(r)$ und Achsialspannungen $\sigma_z = \sigma_z(r)$ charakterisierbar ist. Zu ihrer Ermittlung stehen die Gleichgewichtsbedingung für das Körperelement in Radialrichtung zur Verfügung

$$\frac{d}{dr} (r \sigma_r) - \sigma_\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi), \quad (2)$$

sowie die durch die Wärmeausdehnungsglieder verallgemeinerten Hookeschen Gesetze, die mit $\nu = 1/2$ die Gestalt

$$\varepsilon_r = \frac{dv}{dr} = \frac{1}{E(\vartheta)} \left[\sigma_r - \frac{1}{2} (\sigma_\varphi + \sigma_z) \right] + \int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T) dT, \quad (3a)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{v}{r} = \frac{1}{E(\vartheta)} \left[\sigma_\varphi - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_r) \right] + \int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T) dT, \quad (3b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = A_1 = \frac{1}{E(\vartheta)} \left[\sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\varphi) \right] + \int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T) dT \quad (3c)$$

haben, wenn mit $\vartheta(r)$ die Temperatur gegenüber dem spannungslosen Ausgangszustand (dessen überall gleiche Temperatur wir mit Null annehmen wollen) bezeichnet wird.

Zunächst erhält man nach Addition von (3a) bis (3c)

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = \frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} + A_1 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v) + A_1 = 3 \int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T) dT$$

woraus nach Integration mit der Integrationskonstanten C_1

$$v = v(r) = \frac{3}{r} \int r \left(\int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t dT \right) dr - A_1 \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \quad (4)$$

hervorgeht. Beachtet man nun noch, daß aus (3c)

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\varphi) + A_1 E(\vartheta) - E(\vartheta) \int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T) dT \tag{5a}$$

folgt, so gewinnt man schließlich aus (3a) oder (3b) mit (4) und (5a)

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = 2 E \int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T) dT - \frac{4 E}{r^2} \int r \left(\int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t dT \right) dr - \frac{4}{3} C_1 \frac{E}{r^2} = 2 \frac{E}{r^2} \int r^2 \alpha_t(\vartheta) \frac{d\vartheta}{dr} dr - \frac{4}{3} C_1 \frac{E}{r^2}. \tag{5b}$$

Hiermit und mit der Gleichgewichtsbedingung (2) folgert man somit für σ_r die Differentialgleichung

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{r^3} \left[\frac{4}{3} C_1 - 2 \int r^2 \alpha_t(\vartheta) \frac{d\vartheta}{dr} dr \right],$$

deren Lösung mit der Integrationskonstanten C_2

$$\sigma_r = C_2 + \int \left[\frac{E}{r^3} \left(\frac{4}{3} C_1 - 2 \int r^2 \alpha_t(\vartheta) \frac{d\vartheta}{dr} dr \right) \right] dr \tag{6}$$

lautet. Die Konstanten C_1 und C_2 werden aus den Randbedingungen

$$\sigma_r(r = r_i) = -p_i \quad \text{und} \quad \sigma_r(r = r_a) = -p_a \quad \text{zu}$$

$$\frac{4}{3} C_1 = \frac{p_i - p_a}{\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3} dr} + 2 \frac{\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3} \left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr} dr \right) dr}{\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3} dr}, \tag{7a}$$

$$C_2 = -p_i + 2 \left[\int \frac{E}{r^3} \left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr} dr \right) dr \right]_{r=r_i} - \frac{4}{3} C_1 \left[\int \frac{E}{r^3} dr \right]_{r=r_i} \tag{7b}$$

bestimmt, so daß letztlich für die Radialspannungen

$$\sigma_r = -p_i + (p_i - p_a) \frac{\int_{r_i}^r \frac{E}{r^3} dr}{\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3} dr} + 2 \int_{r_i}^r \frac{E}{r^3} \left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr} dr \right) dr \frac{\left[\int_{r_i}^r \frac{E}{r^3} dr \quad \int_{r_i}^r \frac{E}{r^3} \left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr} dr \right) dr \right]}{\left[\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3} dr \quad \int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3} \left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr} dr \right) dr \right]} \tag{8a}$$

und damit aus (5b) für die Ringspannungen

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi = \sigma_r - 2 \frac{E}{r^2} \int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr} dr + \frac{4}{3} C_1 \frac{E}{r^2} = -p_i + (p_i - p_a) \frac{\frac{E}{r^2} + \int_{r_i}^r \frac{E}{r^3} dr}{\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3} dr} + \\ + 2 \int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3} \left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr} dr \right) dr \frac{\left[\frac{E}{r^2} + \int_{r_i}^r \frac{E}{r^3} dr \quad \frac{E}{r^2} \int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr} dr + \int_{r_i}^r \frac{E}{r^3} \left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr} dr \right) dr \right]}{\left[\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3} dr \quad \int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3} \left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr} dr \right) dr \right]} \end{aligned} \tag{8b}$$

hervorgeht¹. Sowohl in (8a) als auch in (8b) ist die Konstante A_1 nicht mehr enthalten. Auch bei

¹ Für eine numerische Integration sind die in den Doppelintegralen auftretenden inneren Integrale jeweils als bestimmte Integrale in den Grenzen $r_i \dots r$ aufzufassen.

dieser Betrachtung zeigt sich also, daß die Lagerungsverhältnisse des Zylinders an seinen Enden auf die Radial- und Ringspannungen keinen Einfluß haben, sondern sich nur auf die Achsialspannungen σ_z auswirken. Für diese folgt nämlich aus (5a) mit (8a) und (8b)

$$\sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\varphi) - E \int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T) dT + EA_1 = EA_1 - E \int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T) dT - p_i + (p_i - p_a) \frac{\frac{E}{2r^2} + \int_{r_i}^r \frac{E}{r^3} dr}{\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3} dr} +$$

$$+ 2 \int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3} \left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr} dr \right) dr \left[\frac{\frac{E}{2r^2} + \int_{r_i}^r \frac{E}{r^3} dr}{\int_{r_i}^{r_a} \frac{E}{r^3} dr} \frac{E}{2r^2} \int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr} dr + \int_{r_i}^r \frac{E}{r^3} \left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr} dr \right) dr \right] \quad (8c)$$

und man kann nun zwei Fälle behandeln:

1) Das Rohr ist zwischen zwei starren Wänden gemäß Abb.3 eingeklemmt. In diesem Falle liegt ein ebener Verzerrungszustand mit

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = A_1 = 0 \quad (8d)$$

vor.

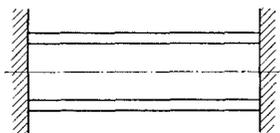


Abb. 3.

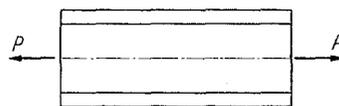


Abb. 4.

2) Die Ausdehnung der Zylinderenden werde in Achsialrichtung durch eine, auf die Zylinderenden wirkende resultierende Kraft P gemäß Abb.4 behindert. In diesem Falle müssen die in einem Rohrquerschnitt $z = \text{konst.}$ wirkenden Achsialspannungen die Resultierende P haben. Demnach folgt A_1 hierfür aus der Gleichung

$$\int_{r_i}^{r_a} r \sigma_z dr = \frac{P}{2\pi}.$$

Nach Einsetzen von (8c) folgt hieraus mit Beachtung von

$$\int_{r_i}^{r_a} r (\sigma_r + \sigma_\varphi) dr = \int_{r_i}^{r_a} r \sigma_r dr + \int_{r_i}^{r_a} r \sigma_\varphi dr = \int_{r_i}^{r_a} r \sigma_r dr + \int_{r_i}^{r_a} r \frac{d}{dr} (r \sigma_r) dr$$

$$= \int_{r_i}^{r_a} r \sigma_r dr + r^2 \sigma_r \Big|_{r_i}^{r_a} - \int_{r_i}^{r_a} r \sigma_r dr = p_i r_i^2 - p_a r_a^2$$

schließlich

$$A_1 = \frac{1}{\int_{r_i}^{r_a} r E dr} \left(\frac{P}{2\pi} + \frac{1}{2} (p_a r_a^2 - p_i r_i^2) + \int_{r_i}^{r_a} r E \left(\int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_t(T) dT \right) dr \right). \quad (8e)$$

3. Das Temperaturfeld. Unter Verwendung des *Fourierschen* Wärmeleitungstheorems ($q = -\lambda \nabla \vartheta$) liefert die Wärmemengenbilanz am Körperelement im stationären Falle, sofern keine Wärmequellen vorhanden sind,

$$\nabla q = -\nabla(\lambda \nabla \vartheta) = 0, \quad \text{also} \quad \nabla(\lambda \nabla \vartheta) = \nabla \lambda \nabla \vartheta + \lambda \Delta \vartheta = 0$$

bzw. im vorliegenden rotationssymmetrischen Falle

$$\frac{d\lambda}{dr} \cdot \frac{d\vartheta}{dr} + \lambda \left(\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda \frac{d\vartheta}{dr} \right) = 0$$

woraus

$$r \lambda \frac{d\vartheta}{dr} = C_1 \quad \text{bzw.} \quad \lambda(\vartheta) d\vartheta = \frac{C_1}{r} dr$$

und nach Trennung der Veränderlichen und Integration

$$\int \lambda(\vartheta) d\vartheta = C_1 \ln r + C_2 \tag{9}$$

folgt. Bei Vorgabe der Temperaturabhängigkeit $\lambda = \lambda(\vartheta)$ der Wärmeleitzahl ist Gleichung (9) integrierbar, und die Konstanten werden aus den Randbedingungen des Problems bestimmt.

4. Beispiele. a) Wir betrachten ein Stahlrohr mit freien Enden, dessen Mantelflächen $r = r_i = 12$ cm bzw. $r = r_a = 18$ cm die Temperaturen $\vartheta_i = 350^\circ$ C bzw. $\vartheta_a = 280^\circ$ C gegenüber der Temperatur $\vartheta = 0^\circ$ C des spannungslosen Ausgangszustandes besitzen sollen. Die Temperaturabhängigkeit der Materialkonstanten kann im Bereich bis etwa 400° C nach dem „Werkstoff-Handbuch für Stahl und Eisen“, 3. Aufl., Düsseldorf 1953 mit genügender Genauigkeit durch

$$\lambda(\vartheta) = \lambda_0 - \lambda_1 \vartheta, \tag{10a}$$

$$\alpha_i(\vartheta) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1} \vartheta, \tag{10b}$$

$$E(\vartheta) = E_0 - E_1 \vartheta^2 \tag{10c}$$

approximiert werden, wobei z.B. für einen unlegierten Stahl an Hand des in diesem Buche gegebenen Kurvenmaterials

$$\lambda_0 = \lambda(\vartheta = 0^\circ \text{ C}) = 0,12 \text{ [cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}], \quad \lambda_1 = 0,000,07 \text{ [cal cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}],$$

$$\alpha_{i0} = \alpha_i(\vartheta = 0^\circ \text{ C}) = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ [}^\circ\text{C}^{-1}], \quad \alpha_{i1} = 0,001 \cdot 10^{-5} \text{ [}^\circ\text{C}^{-2}],$$

$$E_0 = E(\vartheta = 0^\circ \text{ C}) = 2,1 \cdot 10^6 \text{ [kgcm}^{-2}], \quad E_1 = 3,2 \text{ [kgcm}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}]$$

abzulesen sind.

Zunächst folgt mit (10 a) aus (9) nach Integration

$$\lambda_0 \vartheta - \frac{\lambda_1}{2} \vartheta^2 = C_1 \ln r + C_2 \quad \text{bzw.} \quad \vartheta(r) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^2 - \frac{2}{\lambda_1} (C_1 \ln r + C_2)}.$$

Die Integrationskonstanten ergeben sich aus den Randbedingungen $\vartheta(r=r_i) = \vartheta_i$ und $\vartheta(r=r_a) = \vartheta_a$ zu

$$C_1 = -\frac{\lambda_1}{2} \frac{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_a\right)^2 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_i\right)^2}{\ln \frac{r_a}{r_i}}, \quad C_2 = -C_1 \ln r_i + \frac{\lambda_1}{2} \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^2 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_i\right)^2 \right],$$

so daß letztlich für das Temperaturfeld

$$\vartheta(r) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_i\right)^2 \frac{\ln \frac{r_a}{r}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_a\right)^2 \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}}} \tag{11}$$

hervorgeht.

Selbstverständlich erhält man für $\lambda_1 \rightarrow 0$, d. h. für $\lambda_0/\lambda_1 \rightarrow \infty$ aus (11) die Lösung für das Temperaturfeld bei konstanter Wärmeleitzahl, indem man zunächst (11) mit $x_1 = \lambda_0/\lambda_1$ bzw. $x_2 = x_1 - \lambda_0/\lambda_1$ in der Form

$$\vartheta(r_1 x_1 - \vartheta_i, x_2 - \vartheta_a) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \sqrt{\left(x_1 - \vartheta_i\right)^2 \frac{\ln \frac{r_a}{r}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} + \left(x_2 - \vartheta_a\right)^2 \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}}}$$

schreibt, und nunmehr für $x_1 \gg \vartheta_i$ bzw. $x_2 \gg \vartheta_a$ das Temperaturfeld $\vartheta(r, x_1 - \vartheta_i, x_2 - \vartheta_a)$ nach Maßgabe der Taylorsche Formel in der Form

$$\vartheta(r; x_1 - \vartheta_i; x_2 - \vartheta_a) \approx \vartheta(r, x_1, x_2) - \vartheta_i \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} \right|_{r, x_1, x_2} - \vartheta_a \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} \right|_{r, x_1, x_2}$$

approximiert. Man erhält wegen

$$\vartheta(r, x_1, x_2) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^2 \frac{\ln \frac{r_a}{r}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^2 \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}}} \equiv 0$$

sowie

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} \right|_{r, x_1, x_2} = - \frac{\ln \frac{r_a}{r}}{\ln \frac{r_a}{r_i}}, \quad \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x_2} \right|_{r, x_1, x_2} = - \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$$

schließlich für das Temperaturfeld bei konstanter Wärmeleitzahl die bekannte Relation

$$\vartheta_0(r) = \frac{\vartheta_i \ln \frac{r_a}{r} + \vartheta_a \ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \tag{12}$$

Ein Vergleich von (11) und (12) für die vorliegenden Zahlenwerte zeigte, daß die genauere Berechnung des Temperaturfeldes bei vorgegebenen Randtemperaturen kaum nennenswerte Abweichungen gegenüber der Näherungslösung $\vartheta_0(r)$ für konstante Wärmeleitzahl λ_0 ergibt. Die Ergebnisse können jedoch recht verschieden sein, wenn man nicht die Randtemperaturen, sondern z. B. eine Aussage über die durchfließende Wärmemenge vorgibt (siehe hierzu das nächste Beispiel b).

Mit Rücksicht auf die geringen Unterschiede zwischen (11) und (12) benutzen wir für das folgende die Näherungslösung $\vartheta_0(r)$ für das Temperaturfeld, womit die Möglichkeit einer geschlossenen Integration der in (8) auftretenden Integrale gegeben ist. Nachdem man (12) sowie (10a) bis (10c) in (8a) und (8b) eingesetzt hat, gewinnt man mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(r) &= \int_{r_i}^r \frac{E}{r^3} dr = \frac{E_0}{2 r_i^2} \left\{ 1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 - \frac{E_1 \vartheta_i^2}{E_0} \left[1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \left(\frac{\vartheta_i}{\vartheta_0} \right)^2 - \frac{1 - \frac{\vartheta_a}{\vartheta_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \left(1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \frac{\vartheta_0}{\vartheta_i} - \frac{1 - \frac{\vartheta_a}{\vartheta_i}}{2 \ln \frac{r_a}{r_i}} \left[1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right] \right) \right] \right\}, \\ \Phi_2(r) &= \frac{E}{r^2} \int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr} dr = - E_0 \alpha_{t_0} \vartheta_i \frac{1 - \frac{\vartheta_a}{\vartheta_i}}{2 \ln \frac{r_a}{r_i}} \left[1 - \frac{E_1 \vartheta_i^2}{E_0} \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_i} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{\alpha_{t_1} \vartheta_i}{\alpha_{t_0}} \left(\frac{1 - \frac{\vartheta_a}{\vartheta_i}}{2 \ln \frac{r_a}{r_i}} + \frac{\vartheta_0}{\vartheta_i} \right) \right], \\ \Phi_3(r) &= \int_{r_i}^r \frac{E}{r^3} \left(\int r^2 \alpha_t \frac{d\vartheta}{dr} dr \right) dr = \int_{r_i}^r \frac{1}{r} \Phi_2(r) dr = \\ &= - E_0 \alpha_{t_0} \vartheta_i \frac{1 - \frac{\vartheta_a}{\vartheta_i}}{2 \ln \frac{r_a}{r_i}} \left\{ \left(1 + \frac{\alpha_{t_1} \vartheta_i}{2 \alpha_{t_0}} \frac{1 - \frac{\vartheta_a}{\vartheta_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \right) \left(\ln \frac{r}{r_i} - \frac{E_1 \vartheta_i^2}{E_0} \frac{\ln \frac{r_a}{r_i}}{3 \left(1 - \frac{\vartheta_a}{\vartheta_i} \right)} \left[1 - \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_i} \right)^3 \right] \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_{t_1} \vartheta_i}{2 \alpha_{t_0}} \frac{\ln \frac{r_a}{r_i}}{1 - \frac{\vartheta_a}{\vartheta_i}} \left(\left[1 - \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_i} \right)^2 \right] - \frac{E_1 \vartheta_i^2}{2 E_0} \left[1 - \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_i} \right)^4 \right] \right) \right\} \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

für die Radial- und Ringspannungen mit $p_i = p_a = 0$

$$\sigma_r(r) = 2 \Phi_3(r_a) \left[\frac{\Phi_1(r)}{\Phi_1(r_a)} - \frac{\Phi_3(r)}{\Phi_3(r_a)} \right], \tag{14a}$$

$$\sigma_\varphi(r) = 2 \Phi_3(r_a) \left[\frac{\frac{E}{r^2} + \Phi_1(r)}{\Phi_1(r_a)} - \frac{\Phi_2(r) + \Phi_3(r)}{\Phi_3(r_a)} \right], \tag{14b}$$

während man für die Achsialspannungen nach (8c)

$$\sigma_z(r) = -E \int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_i(T) dT + A_1 E + 2 \Phi_3(r_a) \left[\frac{E}{2r^2} + \Phi_1(r) \frac{1}{\Phi_1(r_a)} - \frac{1}{2} \frac{\Phi_2(r) + \Phi_3(r)}{\Phi_2(r_a)} \right] \quad (14c)$$

erhält. Die Konstante A_1 ist im Falle des ebenen Verzerrungszustandes Null und folgt für den Fall freier Zylindenden, wenn die resultierende Achsialkraft P sowie Innen- und Außendruck p_i und p_a Null sind

$$A_1 = \frac{\int_{r_i}^{r_a} r E \left(\int_{T=0}^{\vartheta(r)} \alpha_i(T) dT \right) dr}{\int_{r_i}^{r_a} r E dr} = \alpha_{i0} \frac{J_1 + \frac{\alpha_{i1}}{2\alpha_{i0}} J_2 - \frac{E_1}{E_0} J_3 - \frac{E_1 \alpha_{i1}}{2 E_0 \alpha_{i0}} J_4}{J_0 - \frac{E_1}{E_0} J_2}, \quad (14d)$$

wobei für die Integrale J_k mit $J_0 = \int_{r_i}^{r_a} r \cdot dr = \frac{1}{2} (r_a^2 - r_i^2)$ die Rekursionsformel

$$J_k = \int_{r_i}^{r_a} r \vartheta_0^k(r) dr = \left[\frac{r^2}{2} \vartheta_0^k(r) \right]_{r=r_i}^{r=r_a} + \frac{k}{2} \frac{\vartheta_i - \vartheta_a}{\ln \frac{r_a}{r_i}} J_{k-1}$$

gilt.

Aus (14) erhält man mit $E_1 = \alpha_{i1} = 0$, also für $E = E_0$, $\alpha_i = \alpha_{i0}$ die aus der üblichen Theorie mittels unveränderlicher Materialwerte für $\nu = 1/2$ folgenden Relationen

$$\sigma_r(r) = -E_0 \alpha_{i0} (\vartheta_i - \vartheta_a) \left[\frac{1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2} - \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \right], \quad (15a)$$

$$\sigma_\varphi(r) = -E_0 \alpha_{i0} (\vartheta_i - \vartheta_a) \left[\frac{1 + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2}{1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2} - \frac{1 + \ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \right], \quad (15b)$$

$$\sigma_z(r) = -2 E_0 \alpha_{i0} (\vartheta_i - \vartheta_a) \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{r_i}{r_a}\right)^2} - \frac{\frac{1}{2} + \ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \right]. \quad (15c)$$

Die Auswertung der sieben Gleichungen (14) und (15) für die Zahlenwerte des gewählten Beispiels ergaben die in Abb. 5 dargestellten Kurven. Dabei wurden die nach der üblichen Theorie gemäß (15a) bis (15c) ermittelbaren Spannungen gestrichelt dargestellt. Die ausgezogenen Linien geben den genaueren Spannungsverlauf nach den Gln. (14) an, und man erkennt, daß die tatsächlichen Wärmespannungen sogar größer sind als die in üblicher Weise berechneten Werte. Die Unterschiede sind jedoch nur geringfügig, so daß man sich also im allgemeinen, sofern die Randtemperaturen vorgegeben sind, mit der üblichen Theorie, auch im Bereich höherer Temperaturen, begnügen können wird.

b) Als weiteres Beispiel betrachten wir dasselbe Rohr wie unter a) mit derselben Innentemperatur $\vartheta_i = 350^\circ\text{C}$, jedoch soll nunmehr am Außenrande Wärmeübergang in Luft der Temperatur $\vartheta_L = 20^\circ\text{C}$ stattfinden, die das Rohr quer mit einer Geschwindigkeit $w = 20\text{ m/sec}$ anströmt. Die Randbedingung am Außenrande lautet dann unter Heranziehung des Newtonschen Abkühlungstheorems

$$q_r(r=r_a) = -\lambda \frac{d\vartheta}{dr} \Big|_{r=r_a} = -\alpha [\vartheta_L - \vartheta(r_a)], \quad \text{also} \quad \vartheta(r_a) + \frac{\lambda}{\alpha} \frac{d\vartheta}{dr} \Big|_{r=r_a} = \vartheta_L, \quad (16)$$

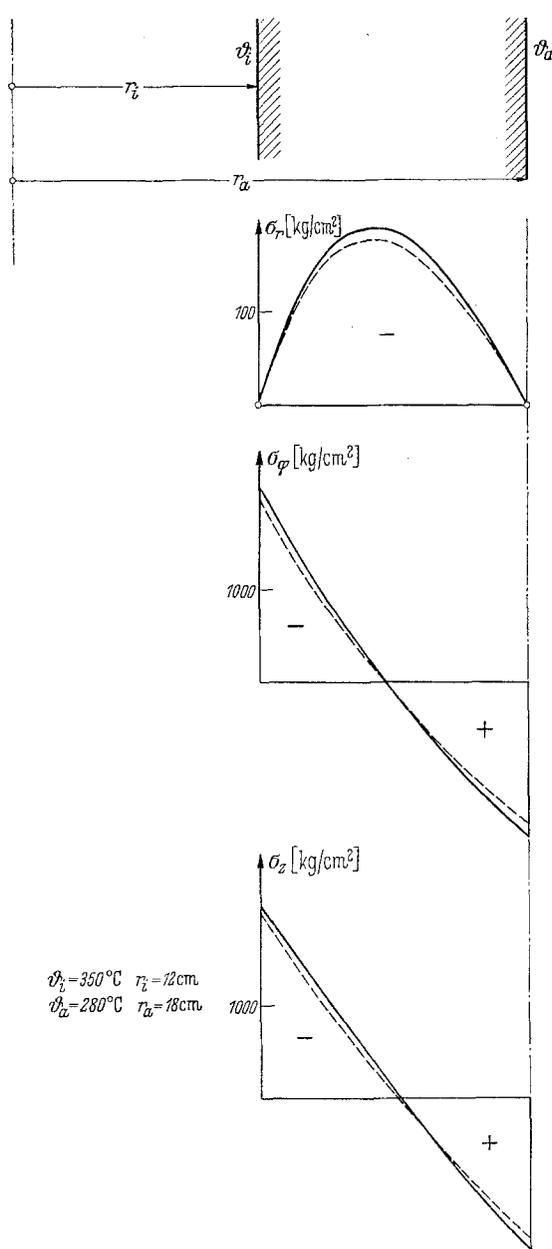
wobei $\vartheta(r_a) = \vartheta_a$ die Randtemperatur des Rohres und α die sog. Wärmeübergangszahl bedeuten. Diese folgt z. B. nach Merkel zu

$$\alpha = 0,092 \sqrt[4]{\frac{\lambda_L}{2 r_a} c_{pL}^3 \gamma_L^3 w^3}. \quad (17)$$

Es ergibt sich, wenn in erster Näherung $\vartheta_a = 310^\circ\text{C}$ gesetzt wird,

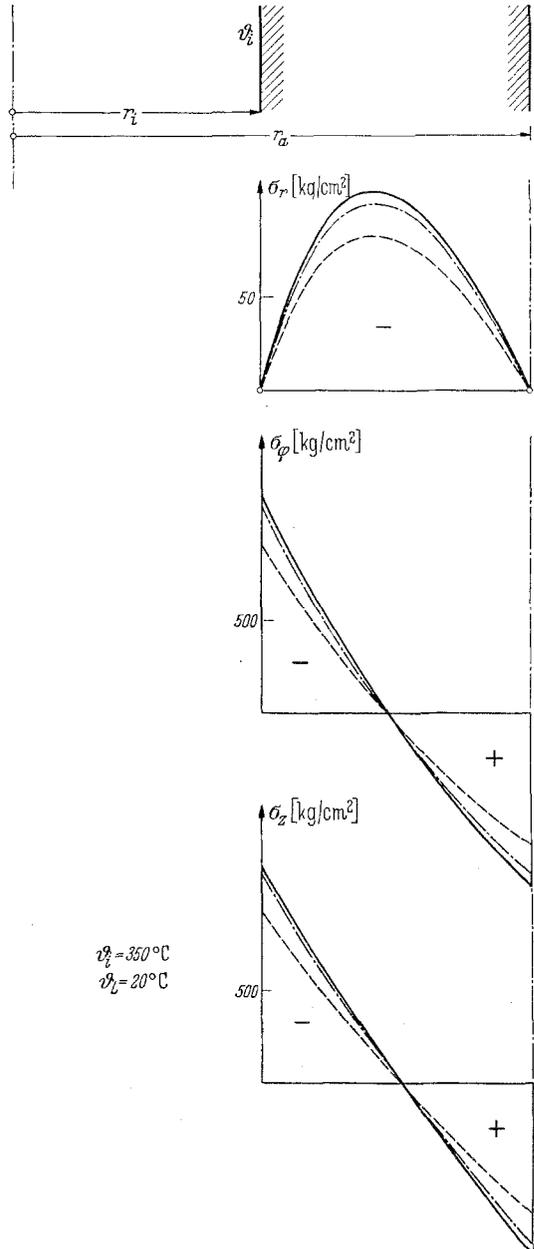
$$\alpha \approx 1,8 \cdot 10^{-3} [\text{cal cm}^{-2} \text{sec}^{-1} \text{C}^{-1}].$$

* Hierin sind: λ_L die Wärmeleitzahl, c_{pL} die spezifische Wärmemenge und γ_L das spezifische Gewicht der Luft für die mittlere Temperatur $\vartheta_M = (\vartheta_a + \vartheta_L)/2$.



$p_i = 350^\circ\text{C}$ $r_i = 12\text{ cm}$
 $p_a = 280^\circ\text{C}$ $r_a = 18\text{ cm}$

Abb. 5. Wärmespannungen zu Beispiel a:
 ————— genauere Theorie;
 - - - - - übliche Theorie.



$p_i = 350^\circ\text{C}$
 $p_a = 20^\circ\text{C}$

Abb. 6. Wärmespannungen zu Beispiel b: — — — übliche Theorie unter Verwendung des genauen Temperaturfeldes; ————— genaue Theorie; - - - - - übliche Theorie.

Mit $\lambda(\vartheta_a) = \lambda_0 - \lambda_1 \vartheta_a$ erhält man damit aus (16)

$$\vartheta_a + \frac{\lambda_0 - \lambda_1 \vartheta_a}{\alpha} \frac{d\vartheta}{dr} \Big|_{r=r_a} = \vartheta_L,$$

woraus mit (11) schließlich die Relation

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_a\right)^2 + 2 \frac{\alpha}{\lambda_1} r_a \ln \frac{r_a}{r_i} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_a\right) = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_i\right)^2 + 2 \frac{\alpha}{\lambda_1} r_a \ln \frac{r_a}{r_i} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_L\right)$$

mit der Lösung

$$\vartheta_a = \vartheta_{aI} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} + \frac{\alpha}{\lambda_1} r_a \ln \frac{r_a}{r_i} - \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\lambda_1} r_a \ln \frac{r_a}{r_i}\right)^2 + 2 \frac{\alpha}{\lambda_1} r_a \ln \frac{r_a}{r_i} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_L\right) + \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \vartheta_i\right)^2} = 310,5^\circ\text{C} \quad (18a)$$

hervorgeht. Bei Zugrundelegung einer konstanten Wärmeleitfähigkeit $\lambda = \lambda_0$ erhält man dagegen aus (16)

$$\vartheta_a = \vartheta_{aII} = \vartheta_i \frac{\frac{\lambda_0}{\alpha}}{r_a \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{\lambda_0}{\alpha}} + \vartheta_L \frac{r_a \ln \frac{r_a}{r_i}}{r_a \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{\lambda_0}{\alpha}} = 317,5^\circ \text{ C.} \quad (18b)$$

Hier liegt also in den Randtemperaturen eine Differenz von 7° C vor, die bereits erhebliche Unterschiede in der Größe der Wärmespannungen nach sich zieht. Da die Wärmespannungen nach der üblichen Theorie unveränderlicher Materialwerte bekanntlich proportional der Temperaturdifferenz $\Delta\vartheta = \vartheta_i - \vartheta_a$ sind, ein Umstand, der auch bei der genaueren Rechnung noch annähernd erhalten bleibt, bedeuten die 7° C Unterschied in der Außentemperatur bereits eine um

$$\frac{\Delta\vartheta_I}{\Delta\vartheta_{II}} = \frac{\vartheta_i - \vartheta_{aI}}{\vartheta_i - \vartheta_{aII}} = \frac{350 - 310,5}{350 - 317,5} = \frac{39,5}{32,5} = 1,22 \text{ fache}$$

Steigerung der Wärmespannungen nach der üblichen Theorie. Diese Steigerung erhöht sich noch etwas, da die Berücksichtigung der Veränderlichkeit von E und α_i (siehe Beispiel a) eine Vergrößerung der Wärmespannungen gegenüber der Theorie unveränderlicher Materialwerte ergibt. Diesen Sachverhalt zeigen die Kurven von Abb. 6, worin die gestrichelten Linien die Wärmespannungen nach der üblichen Theorie unter Heranziehung des sich für konstantes $\lambda = \lambda_0$ ergebenden Temperaturfeldes

$$\vartheta_{II}(r) = \frac{\vartheta_i \ln \frac{r_a}{r} + \vartheta_{aII} \ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \quad (19a)$$

bedeuten. Die strichpunktierten Linien stellen die Wärmespannungen nach der üblichen Theorie unveränderlicher Werte E und α_i unter Verwendung des genauen Temperaturfeldes dar, das wieder im Sinne des Beispiels a) nahezu exakt durch

$$\vartheta_I(r) = \frac{\vartheta_i \ln \frac{r_a}{r} + \vartheta_{aI} \ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_a}{r_i}} \quad (19b)$$

approximierbar ist. Die ausgezogenen Linien sind die Wärmespannungen die sich bei Berücksichtigung der Veränderlichkeit von E und α_i mit dem genaueren Temperaturverlauf (19b) ergeben. Man erkennt nun sehr gut, daß die größeren Abweichungen durch die Abweichungen im Temperaturfeld bedingt sind. Benutzt man also in der üblichen Theorie konstanter Werte E und α_i das genauere, die Veränderlichkeit der Wärmeleitfähigkeit enthaltende Temperaturfeld, so erhält man bei Stahlrohren auch im Bereich höherer Temperaturen eine noch zufriedenstellende Übereinstimmung der errechneten Wärmespannungen mit den tatsächlichen Gegebenheiten. In einer weiteren Arbeit wird demnächst über eine allgemeine Behandlung stationärer Wärmespannungsprobleme bei beliebiger Temperaturabhängigkeit von E , α_i und λ sowie für beliebige, jedoch konstante Querkontraktionswerte ν berichtet.

(Eingegangen am 14. Juni 1957.)

Anschrift des Verfassers: Doz. Dr.-Ing. Rudolf Trostel, Technische Universität Berlin, Lehrstuhl f. Mechanik (Prof. Dr. Ing. J. Szabo) Berlin-Charlottenburg 2, Hardenbergstr. 34.