Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
57, 213–221 (1981)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

La τ-régularité des mesures Gaussiennes

Michel Talagrand

Equipe d'Analyse, Université Paris VI, Tour 46; 4 ème étage, 4, place Jussieu,
F-75230 Paris Cedex 05, France

Summary. We give a simple proof of the fact that a Radon gaussian measure on a locally convex vector space is carried by a countable union of metrisable compact sets. We show that a separable centered gaussian process with continuous covariance which is defined on a Polish space X, and is a.e. unbounded on any open set, has a.e. dense trajectories in $X \times \mathbb{R}$. These results allow us to show that for any set I, any gaussian measure on $\mathbb{R}^I$ is τ-smooth.

I. Introduction

Soit X un espace topologique. On désigne par $Ba(X)$ la tribu de Baire sur X, c'est-à-dire la tribu engendrée par les fonctions continues sur X. Soit μ une mesure de probabilité sur $Ba(X)$. On dira [7] que μ est τ-régulière si pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ filtrante croissante d'ouverts de $Ba(X)$, dont X soit la réunion, on a $\sup_{i\in I} \mu(U_i)=1$.

Soit X un espace vectoriel localement convexe et X' l'ensemble des formes linéaires continues sur X. Comme dans [2] il est possible de montrer que $Ba(X)$ est la tribu engendrée par X'. Soit μ une mesure de probabilité sur $Ba(X)$. On dira que μ est *gaussienne* si la loi de tout $x' \in X'$ est gaussienne. Si $X = \mathbb{R}^I$, alors $X' = \mathbb{R}^{(I)}$, et $Ba(X)$ est la tribu engendrée pour les fonctions coordonnées. Une mesure gaussienne sur $\mathbb{R}^I$ est alors une mesure telle que la loi conjointe toute famille finie de fonctions coordonnées soit gaussienne.

Le but premier de ce travail est de montrer que toute mesure gaussienne sur $\mathbb{R}^I$ est τ-régulière. Un des aspects les plus marquants de ce résultat est qu'il semble très abstrait, mais qu'il dépend de façon déterminante de propriétés en dimension finie. Un long travail d'approche est toutefois nécessaire. Les résultats obtenus lors de cette approche ont un intérêt en soi. Le paragraphe 2 regroupe ceux qui s'appliquent aux mesures gaussiennes de Radon, et le paragraphe 3 ceux qui se rapportent aux processus gaussiens non bornés. Le paragraphe 4 donne l'assaut final.

0044-3719/81/0057/0213/$01.80

La conjecture que toute mesure gaussienne sur $\mathbb{R}^I$ est τ-régulière est due à A. Tortrat il y a quelques années (communication orale). Nous remercions chaleureusement celui-ci de nous avoir interessé à ce problème, ce qui a été le point de départ de nos travaux sur les mesures gaussiennes. Les progrès cruciaux sur ce problème ont été acquis lors d'une visite à l'Université de Fukuoka. Nous remercions H. Sato d'avoir arrangé cette visite et pour la stimulation considérable qu'il nous a apporté. Nous le remercions également de nous avoir fourni, alors que ce travail était déjà réalisé, un préprint de [5], dont les idées nous ont permis de reformuler la proposition 1 de façon élégante.

II. Structure des processus bornés

Les résultats de cette partie sont essentiellement contenus dans [6]. Toutefois, comme nous les avons obtenus indépendamment, et avec des preuves bien plus directes, nous les donnerons pour la commodité du lecteur.

Soit T un ensemble. Un processus gaussien centré sur T est une application Z de T dans $L^2(P)$, où (Ω, Σ, P) est un espace probabilisé, tel que la loi conjointe de toute famille finie de $Z(t)$, $t\in T$ soit gaussienne centrée. On dira que Z est *borné* si la condition suivante est vérifiée:
«Pour tout $\varepsilon>0$, il existe $A\in\Sigma$, avec $P(A)\geqq 1-\varepsilon$, et $M>0$ tels que pour tout $t\in T$ on ait

$$\omega\in A \overset{\text{p.s}}{\Longrightarrow} |Z(t)(\omega)|\leqq M. \text{ »}$$

Il est classique (loi $0-1$) que cette condition est vérifiée dès qu'il existe A avec $P(A)>0$ et $M>0$ tel que pour $t\in T$ on ait $\omega\in A \overset{\text{p.s}}{\Longrightarrow} |Z(t)(\omega)|\leqq M$.

On dit qu'une application $\tilde{Z}$ de T dans $\mathscr{L}^2(P)$ est une version de Z si pour tout $t\in T$, $\tilde{Z}(t)$ appartient à la classe de $Z(t)$.

Proposition 1. *Soit Z un processus borné sur T. Il existe alors une quasi-distance d' sur T, telle que l'espace (T,d') soit séparable, une version $\tilde{Z}$ de Z, et des ensembles mesurables H_p de Ω, avec $P(H_p)\geqq 1-2^{-p}$ tels que les ensembles $(\tilde{Z}(.)(\omega))_{\omega\in H_p}$ soient équicontinus sur (T,d').*

On peut bien sûr supposer que pour $t\neq t'$, on a $Z(t)\neq Z(t')$, et donc que l'application Z est injective. Soit d la distance sur T définie par cette injection et la norme de $L^2(P)$. On muni T de la topologie induite par d. L'ensemble $Z(T)$ est un CB-ensemble au sens de [1]. Il s'ensuit donc qu'il est *séparable* pour d. (Il est même précompact, mais cela ne nous sera pas utile.)

Disons qu'un sous-ensemble A de T possède la propriété (S_p) s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense D, tel que la condition suivante soit satisfaite:

$$\forall\varepsilon>0, \quad \exists\alpha>0,$$

$$P(\{\omega;\ k,l\in D, d(k,l)<\alpha \Rightarrow |Z(k)(\omega)-Z(l)(\omega)|\leqq 2^{-p}\})\geqq 1-\varepsilon.$$

Il est facile de voir que cette condition ne dépend pas de l'ensemble dense D choisi.

1 ère Etape. On va prouver que pour chaque p, T est réunion dénombrable d'ensembles ayant la propriété (S_p).

Soit U la réunion de tous les ouverts de T qui sont réunions dénombrables d'ensembles ayant la propriété (S_p). Il suffit de prouver que $U = T$. Dans le cas contraire, soit $T' = T \setminus U$, et D un sous-ensemble dense de T'.
Pour un ouvert V de T', soit

$$\alpha(V)(\omega) = \limsup_{\substack{d(k,l)\to 0 \\ k,l\in D\cap V}} |Z(k)(\omega) - Z(l)(\omega)|.$$

On voit comme dans la preuve du théorème 3.3.2 de [3] qu'il existe $\alpha(V)$ tel que $\alpha(V)(\omega) = \alpha(V)$ p.s. Si on avait $\alpha(V) \geqq 2^{-p}$ pour tout ouvert de T', alors en tout point t de T' l'oscillation de $Z(k)(\omega)$ pour $k \to t$, $k \in D$, serait p.s. $\geqq 2^{-p}$, donc infinie d'après le corollaire 2 p. 43 de [3].

Donc, il existe un ouvert non vide V de T' tel que

$$P\Big(\bigcup_n \{\omega;\, k, l \in D,\ d(k,l) < n^{-1} \Rightarrow |Z(k)(\omega) - Z(l)(\omega)| \leqq 2^{-p}\}\Big) = 1.$$

Mais alors $U \cup V$ est plus grand que U, et est réunion dénombrable d'ensembles possèdant la propriété (S_p), ce qui est absurde.

2ème Etape. Pour chaque p, on peut donc écrire $T = \bigcup_n A_n^p$, où A_n^p possède la propriété (S_p) et où les ensembles $(A_n^p)_n$ sont deux à deux disjoints. On peut également supposer que pour $p' \geqq p$ chaque $A_n^{p'}$ est contenu dans A_m^p.

Pour $p \geqq 1$, t, $u \in T$, soit $\delta^p(t,u) = 0$ si t, u appartiennent au même ensemble A_n^p, et $\delta^p(t,u) = 1$ sinon. Posons:

$$d'(t,u) = d(t,u) + \sum_{p \geqq 1} 2^{-p} \delta^p(t,u)$$

Alors l'espace (T, d') est séparable. En effet, une partie D' de T qui est dense pour d dans chaque A_n^p est dense dans (T, d').

Pour $l \in D'$, fixons $\bar{Z}(l) \in \mathscr{L}^2(P)$ dans la classe de $Z(l)$. Pour chaques entiers n, p, soit $\alpha(n,p) > 0$ tel que $P(H_{n,p}) > 1 - 2^{-n-p-1}$, où

$$\begin{aligned} H_{n,p} = \{\omega;\, & k, l \in D' \cap A_n^p,\ d(k,l) < \alpha(n,p) \\ & \Rightarrow |\bar{Z}(k)(\omega) - \bar{Z}(l)(\omega)| \leqq 2^{-p}\}. \end{aligned}$$

Posons $H_p = \bigcap_n H_{n,p}$. Ainsi $P(H_p) \geqq 1 - 2^{-p}$. Soit $t \in T$. Pour chaque p, soit $n(p)$ avec $t \in A_{n(p)}^p$.

Soit $l \in D' \cap A_{n(p)}^p$, avec $2\,d(t,l) < \alpha(n(p), p)$.
Puisque $H_p \subset H_{n(p),p}$, on a p.s.

$$\omega \in H_p \Rightarrow |Z(t)(\omega) - Z(l)(\omega)| \leqq 2^{-p}$$

(En effet, $Z(t)$ est limite en mesure d'une suite $Z(k)$ où $k \in D' \cap A_{n(p)}^p$ et $d(k,l) < \alpha(n(p), p)$).

Pour $t \in T$, posons $\tilde{Z}(t) = \limsup_{l \in D,\, d'(t,l) \to 0} \bar{Z}(l)$.

Pour $d'(t,l) \leqq 2^{-p}$, on a $l \in A^p_{n(p)}$. Ce qui précède montre donc que $\tilde{Z}(t)$ est dans la classe de $Z(t)$. Cela montre aussi que pour $u \in T$, avec $d'(t,u) \leqq \operatorname{Inf}(2^{-p}, \alpha(n(p),p))$ on a $|\tilde{Z}(t)(\omega) - \tilde{Z}(u)(\omega)| \leqq 2^{-p}$ pour $\omega \in H_p$. La démonstration est terminée.

Corollaire 2. *Si Ω est un espace topologique, et P une probabilité de Radon, l'ensemble des $Z(t)$ est uniformément Lusin-mesurable, au sens qu'il existe une suite croissante de compacts (L_p) de Ω tels que $P(\bigcup_p L_p) = 1$ et que chaque $Z(t)$ soit presque surement égal à une fonction continue sur chaque L_p.*

Preuve. Soit D dense dans (T, d'). Il suffit de prendre un compact $L_p \subset H_p$ tel que chaque $\tilde{Z}(l)$, $l \in D$ soit continu sur L_p et que $P(L_p) \geqq 1 - 2^{-p+1}$.

Corollaire 3. *Soit Ω un espace topologique, et P une probabilité de Radon sur Ω. Supposons qu'il existe un ensemble $T \subset \mathscr{C}(\Omega, \mathbb{R})$ possèdant les propriétés suivantes:*

a) *T sépare Ω.*

b) *La loi conjointe de toute partie finie de T est gaussienne centrée.*

c) *Le processus sur T défini par l'injection canonique de T dans $L^2(P)$ est borné.*

Alors il existe des compacts métrisables L_p avec $P(\bigcup_p L_p) = 1$.

Preuve. Soient (H_p) les ensembles donnés par la proposition 1. Soit D dense dans (T, d'), et un compact $L_p \subset H_p$ tel que chaque $d \in D$ soit continue sur L_p et que $P(L_p) \geqq 1 - 2^{-p+1}$. On peut supposer de plus que L_p est le support de la restriction de P à lui-même. Chaque $t \in T$ est sur L_p égal presque surement à une limite uniforme de d, $d \in D$. Puisque t et cette limite uniforme sont tous deux continus, ils coincident sur L_p. Ainsi les $d \in D$ séparent L_p, qui est donc métrisable.

Théorème 4. *Soit X un espace vectoriel localement convexe, et μ une mesure gaussienne de Radon sur X. Alors μ est portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables.*

Preuve. D'après un résultat de C. Borell, on peut supposer μ centrée, c'est-à-dire que la loi de tout $x' \in X'$ soit centrée. Soit K un compact de X tel que $\mu(K) > 0$. Soit T le polaire de K dans X'. T est absorbant, donc vérifie a) et b) du corollaire précédent. De plus T vérifie c) car tout $t \in T$ est borné par 1 sur K.

III. Processus non bornés

Soit T un ensemble. On définira un processus gaussien n-dimensionel centré sur T comme dans le cas 1-dimensionel, en remplaçant $L^2(\Omega)$ par $L^2_n(\Omega) = L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$, et on étendra la définition des processus borné de la façon évidente. On va supposer que T est muni d'une distance d qui en fait un espace métrique séparable, et que $Z\colon T \to L^2_n(\Omega)$ est continue pour d.

Soit D une partie dénombrable dense de T. Pour $t \in T$ et $\omega \in \Omega$ soit $A_t(\omega)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $Z(k)(\omega) - Z(t)(\omega)$ pour $k \in D$, $k \to t$. Pour chaque ouvert U, l'évènement $A_t(\omega) \cap U = \emptyset$ est asymptotique, donc de probabilité 0 où 1. Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base d'ouverts de $\mathbb{R}^n$, $I = \{i, P(A_t(\omega) \cap U_i) = 0\}$. On a presque surement $A_t(\omega) = A_t = \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i \in I} U_i$.

Théorème 6. *Si A_t est borné le processus est borné dans un voisinage de t. (c'esta-dire que sa restriction à ce voisinage est bornée).*

Preuve. On muni $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque $\|.\|$. Soit $a > 0$ tel que $u \in A_t \Rightarrow \|u\| \leqq \frac{a}{2}$. Posons, pour $k \in D$, $Y(k) = Z(k) - Z(t)$. Il existe un voisinage V de t tel que

$$P(\{\omega;\, \exists k \in D \cap V,\, \|Y(k)(\omega)\| \in [a, 7a]\}) \leqq \tfrac{1}{12} \tag{1}$$

et

$$\forall k \in D \cap V,\, P(\{\omega;\, \|Y(k)(\omega)\| \leqq a\}) \geqq \tfrac{2}{3} \tag{2}$$

On va montrer que l'on a

$$P(\{\omega;\, \forall k \in D \cap V,\, \|Y(k)(\omega)\| \leqq a\}) \geqq \tfrac{3}{4}.$$

Sinon il existe une partie finie F de $D \cap V$ telle que

$$P(\{\omega;\, \forall k \in F,\, \|Y(k)(\omega)\| \leqq a\}) < \tfrac{3}{4}.$$

Soit $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$P(\{\omega;\, \forall k \in F,\, \|Y(k)(\omega)\| \leqq r\}) = \tfrac{3}{4}.$$

On a donc $r \geqq a$. D'autre part, il est montré dans [3], 1.3 que

$$P(\{\omega;\, \exists k \in F,\, \|Y(k)(\omega)\| \geqq 3r\}) \leqq \tfrac{1}{12}.$$

On a donc

$$P(\{\omega;\, \exists k \in F,\, r \leqq \|Y(k)(\omega)\| \leqq 3r\}) \geqq \tfrac{1}{6}. \tag{3}$$

Soit $B \subset \Omega^2$ donné par

$$B = \{(\omega, \omega');\, \exists k \in F,\, r \leqq \|Y(k)(\omega)\| \leqq 3r,\, \|Y(k)(\omega')\| \leqq a\}.$$

De (2), (3) résulte que $P \otimes P(B) \geqq \frac{1}{9}$.

Soit maintenant $\alpha, \beta \geqq 0$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ et $r\alpha - a\beta = a$. Il est aisé de vérifier que les variables aléatoires $Y'(k)$ sur Ω^2 données par $Y'(k)(\omega, \omega') = \alpha Y(k)(\omega) + \beta Y(k)(\omega')$ ont les même lois conjointes que les variables $Y(k)$. Pour $(\omega, \omega') \in B$, si $k \in F$ est tel que

$$r \leqq \|Y(k)(\omega)\| \leqq 3r, \qquad \|Y(k)(\omega')\| \leqq a$$

on a

$$a = r\alpha - a\beta \leqq \|\alpha Y(k)(\omega) + \beta Y(k)(\omega')\| \leqq 3\alpha r + a\beta \leqq 3a + 4a\beta \leqq 7a.$$

On a donc

$$P(\{\omega; \exists k \in F; \|Y(k)(\omega)\| \in [a, 7a]\}) \geqq \tfrac{1}{9}$$

ce qui contredit (1) et termine la démonstration.

Pour appliquer ce résultat à pleine force, le lemme suivant sera utile.

Lemme 7. *Soit $t \in T$ et $x \in \mathbb{R}^n$ avec $x \in A_t$. Alors $[-x, x] = \{\alpha x; \alpha \in [-1, 1]\} \subset A_t$.*

Preuve. Pour $k \in D$, posons $Y(k) = Z(k) - Z(t)$. On muni Ω^2 de $P \otimes P$. Pour $(\omega, \omega') \in \Omega^2$, soit $B(\omega, \omega')$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(Y(k)(\omega), Y(k)(\omega'))$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ pour $k \to t$. Cet ensemble n'est pas aléatoire. (Ce résultat a déjà été utilisé; ici on est dans le cas d'un processus $2n$-dimensionel.) Soit $B \subset \mathbb{R}^{2n}$ tel que p.s. $B(\omega, \omega') = B$. Une application du théorème de Fubini montre que si $x \in A_t$, alors $(x, 0) \in B$. (En effet, si $Y(k_n)(\omega) \to a \in A_t$, alors p.s. en ω', 0 est valeur d'adhérence de $Y(k_n)(\omega')$.) Si maintenant on a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, les variables aléatoires $Y'(k)(\omega, \omega') = \alpha Y(k)(\omega) + \beta Y(k)(\omega')$ on la même loi conjointe que les variables $Y(k)$. On en déduit que $A_t \supset \theta(B)$, où θ: $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ est donnée par $\theta(x, y) = \alpha x + \beta y$. On a donc $\alpha x \in A_t$ pour tout $\alpha \in [-1, 1]$.

Remarque. En général toutefois A_t n'est pas convexe.

Corollaire 8. *Supposons $n = 1$ et que Z ne soit borné sur aucun ouvert de T. Alors p.s. l'ensemble $\{(k, Z(k)(\omega));\ k \in D\}$ est dense dans $T \times \mathbb{R}$.*

Preuve. D'après le théorème 6, aucun A_t n'est borné. D'après le lemme 7, on a $A_t = \mathbb{R}$ pour tout t. On a donc p.s. $\forall k \in D$, $\{k\} \times \mathbb{R} \subset \overline{\{(l, Z(l)(\omega));\ l \in D\}}$ ce qui suffit.

Corollaire 9. *Supposons que $n = 1$, et qu'il existe $a < b$ et $B \in \Sigma$ avec $P(B) > 0$ tels que pour $t \in T$ on ait p.s.*

$$\omega \in B \Rightarrow Z(t)(\omega) \notin [a, b]$$

Alors Z est borné sur T.

Preuve. On se rammène tout d'abord au cas où la distance sur T est celle définie par Z et la norme de $L^2(P)$, et où T est complet pour cette distance. Comme dans [1], on montre T est compact. D'après le théorème 6 et le lemme 7, il suffit de montrer que $A_t \neq \mathbb{R}$ pour $t \in T$. Soit $c = \dfrac{b-a}{2}$. Il existe a' avec $P(C) > 0$, où

$$C = \{\omega \in B;\ Z(t)(\omega) \in [a', a' + c]\}.$$

Pour $\omega \in C$ et $k \in T$, on a

$$Z(k)(\omega) - Z(t)(\omega) \in]a - a', b - a' - c[\Rightarrow Z(k)(\omega) \in]a, b[.$$

Ce n'est donc presque jamais le cas, ce qui montre que p.s. pour $\omega \in C$ on a $]a - a', b - a' - c[\cap A_t(\omega) = \emptyset$, et termine la preuve puisque $A_t(\omega) = A_t$ p.s. donc $]a - a', b - a' - c[\cap A_t = \emptyset$.

IV. Coda

On muni $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne. On désigne par $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des projections orthogonales de $\mathbb{R}^n$ sur un sous-espace de dimension $n - 1$.

Un ouvert *basique* de $\mathbb{R}^I$ *dépendant de n fonctionnelles* sera un ensemble de la forme

$$\{\omega\in\mathbb{R}^I;\ \|(Z_i(\omega))_{i\leqq n}-a\|<2^{-p}\}$$

où $a\in\mathbb{R}^n$, $p\in\mathbb{N}$, $Z_i\in\mathbb{R}^{(I)}$ pour $i\leqq n$.

Soit μ une mesure gaussienne sur $\mathbb{R}^I$. Supposons que μ ne soit pas τ-régulière. Il existe alors une famille filtrante croissante $(U_i)_{i\in J}$ d'ouverts de $Ba(\mathbb{R}^I)$, recouvrant $\mathbb{R}^I$, et α tel que $\forall i$, $\mu(U_i)\leqq\alpha<1$. Soit $D\subset J$ une partie dénombrable telle que $\mu(\bigcup_{i\in D} U_i)$ soit le plus grand possible. Bien sur $\mu(\bigcup_{i\in D} U_i)\leqq\alpha<1$, la famille étant filtrante croissante. Posons $A=\mathbb{R}^I\setminus\bigcup_{i\in D} U_i$. Alors $\mu(A)>0$, et pour tout $i\in J$, on a $\mu(A\cap U_i)=0$.

On considérera $\mathbb{R}^{(I)}$ comme inclus dans $L^2(\mu)$. Pour $n,p\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{Q}^n$, soit $B(n,p,a)$ l'ensemble des n-uples $Z=(Z_1,\dots,Z_n)\in(\mathbb{R}^{(I)})^n$ vérifiant les conditions suivantes:

(4) $\qquad \forall i\leqq n,\quad \|Z_i\|_2\leqq 1,$

(5) $\qquad \mu(\{\omega\in A;\ \|Z(\omega)-a\|<2^{-p}\})=0,$

(6) $\qquad \forall M\in\mathcal{M}_n,\quad \mu(\{\omega\in A;\ \|M(Z(\omega))-M(a)\|\leqq 2^{-p}\})>0.$

Posons

$$A(n,p,a)=\{\omega\in A;\ \exists Z\in B(n,p,a),\ \|Z(\omega)-a\|<2^{-p}\}.$$

1ère Etape. On montre que $A\subset\bigcup_{n,p,a} A(n,p,a)$, où la réunion est prise sur tous les choix possibles $n,p\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{Q}^n$. Pour $\omega\in A$, soit n_ω le plus petit entier n tel que ω appartienne à un ensemble basique U dépendant de n fonctionnelles et tel que $\mu(A\cap U)=0$. (Un tel entier existe, car il existe $i\in J$ avec $\omega\in U_i$, $\mu(A\cap U_i)=0$.) Il existe donc $Z\in(\mathbb{R}^{(I)})^n$, $p\in\mathbb{N}$ et $a\in\mathbb{Q}^n$ avec $\|Z(\omega)-a\|<2^{-p}$ tels que

$$\mu(\{\omega\in A;\ \|Z(\omega)-a\|\leqq 2^{-p}\})=0.$$

Le fait que $Z\in B(n_\omega,p,a)$ résulte sans peine de la minimalité de n_ω. On fixe, n,p,a, et on va étudier $B=B(n,p,a)$.

2ème Etape. B est séparable dans $(L^2(\mu))^n$.

Pour tout ensemble dénombrable $D\subset B$, soit

$$L_D=\{\omega\in\mathbb{R}^I;\ \forall Z\in D,\ \|Z(\omega)-a\|\geqq 2^{-p}\}.$$

On a $A\setminus L_D$ négligeable, donc $\mu(L_D)>0$. Choisissons D de sorte que $\mu(L_D)$ soit le plus petit possible.

Soit p_i la projection de rang $i\leqq n$ de $(L^2(\mu))^n$ sur $L^2(\mu)$, et soit H l'espace engendré par $\bigcup_{i\leqq n} p_i(D)$. On va montrer que $B\subset H^n$. Sinon il existe $Z\in B$ avec par exemple $Z_1\notin H$. Ecrivons $Z_i=X_i+Y_i$ avec $X_i\in H^\perp$, $Y_i\in H$, pour $i\leqq n$. Soit $D'=D\cup\{Z\}$. Le choix de D montre que p.s. $\omega\in L_D\Rightarrow\|X(\omega)-a\|\geqq 2^{-p}$.

Soit E le plus petit sous-espace de $\mathbb{R}^n$ tel que $X\in E$ p.s. Puisque $X\neq 0$, on a $\dim E>0$. Pour chaque ouvert U de E, $\mu(\{\omega;\ X(\omega)\in U\})>0$. Soit

$$L=\{\omega\in L_D;\ d(Z(\omega),a+E)<2^{-p}\}.$$

On a $\mu(L \triangle L')=0$, où

$$L'=\{\omega \in L_D;\ d(Y(\omega), a+E)<2^{-p}\}.$$

Si $\mu(L')>0$, il existe $b \in a+E$ et $c<2^{-p}$ tels que si

$$L''=\{\omega \in L_D;\ \|Y(\omega)-b\|<c\}$$

on ait $\mu(L'')>0$. Si $N=\{\omega \in \mathbb{R}^I;\ \|X(\omega)+b-a\|<2^{-p}-c\}$, on a $\mu(N)>0$. Puisque L'' et N sont indépendants, on a $\mu(L'' \cap N)>0$. Mais pour $\omega \in L'' \cap N$, on a $\|Z(\omega)-a\|<2^{-p}$, ce qui est absurde puisque $(L'' \cap N)\setminus A$ est négligeable.

On a donc $\mu(L)=0$. Soit $M \in \mathcal{M}_n$, avec $\operatorname{Ker} M \subset E$. On a p.s.:

$$\omega \in A \Rightarrow \|M(Z(\omega))-M(a)\| \geqq 2^{-p}.$$

Mais ceci est absurde d'aprés la condition (6).

3ème Etape. On fixe une partie dense dénombrable D de B. Pour $t \in B$, on désigne par A_t l'ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui est p.s. l'ensemble des valeurs d'adhérence de $k(\omega)$ pour $k \in D$, $k \to t$. On va montrer que A_t est borné pour tout t. Si ce n'est pas le cas, le lemme 7 montre qu'il existe un sous-espace E de dimension 1 inclus dans A_t. Pour $\omega \in A$, $x \in A_t$, p.s. x est valeur d'adhérence de $k(\omega)-t(\omega)$ pour $k \to t$. Mais puisque p.s. $\|k(\omega)-a\| \geqq 2^{-p}$, on a $\|x+t(\omega)-a\| \geqq 2^{-p}$. On a ainsi p.s. $\omega \in A \Rightarrow d(t(\omega), E+a) \geqq 2^{-p}$. Si $M \in \mathcal{M}_n$ est tel que $\operatorname{Ker} M=E$, alors p.s. sur A, on a $\|M\,t(\omega)-M\,a\| \geqq 2^{-p}$, ce qui contredit la condition (6).

Ainsi, le théorème 6 montre que B est réunion dénombrable d'ensembles sur lesquels le processus défini par l'injection dans $L^2(\mu)$ est borné.

4ème Etape. A l'aide de la proposition 1, on a en particulier la situation suivante: il existe un ensemble $H \in Ba(\mathbb{R}^I)$, une famille $(U_i)_{i \in J}$ d'ouverts basiques de $\mathbb{R}^I$ et une partie dénombrable D de $\mathbb{R}^{(I)}$, de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées:

$$H \in \bigcup_{i \in J} U_i, \qquad \forall i \in J, \qquad \mu(H \cap U_i)=0, \qquad \mu(H)>0. \tag{7}$$

(8) "Tout élément de N est presque surement égal sur H à une limite uniforme d'éléments de D, oû N désigne l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^{(I)}$ servant à définir l'un des U_i."

Soit $I' \subset I$ une partie dénombrable, telle que H ne dépende que des coordonnées dans I', et que I' contienne le support de tout élément de D. On peut supposer que si une fonction continue ne dépends que des coordonnées dans I', et est nulle p.s. sur H, elle est nulle sur H. (En effet, la topologie définie par les coordonnées dans I' possède une base dénombrable d'ouverts.) Ainsi pour $t \in N$, il existe une unique fonction $\varphi(t)$ qui soit limite uniforme sur H d'éléments de D, et qui coincide p.s. sur H avec t. Naturellement $\varphi(t)$ ne dépends que des coordonnées de I'. Soit $\omega \in H$, et identifions $\mathbb{R}^{(I')}$ de façon naturelle à un sous-espace de $\mathbb{R}^{(I)}$. Soit $t_1, \ldots, t_n \in N$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^{(I')}$. Si on a $u+\sum_{i \leqq n} \alpha_i t_i=0$, alors sur H la fonction $u+\sum_{i \leqq n} \alpha_i \varphi(t_i)$ est égale p.s. à zéro, est continue, et ne dépend que de coordonnées dans I', donc est nulle. Ainsi $u(\omega)$

$+\sum_{i\leq n}\alpha_i\varphi(t_i)(\omega)=0$. Puisque $\mathbb{R}^I$ est le dual algébrique de $\mathbb{R}^{(I)}$, il existe $\omega'\in\mathbb{R}^I$ avec $t(\omega')=\varphi(t)(\omega)$ pour $t\in N$ et $u(\omega')=u(\omega)$ pour $u\in\mathbb{R}^{(I')}$. Cette dernière condition montre que ω et ω' ont mêmes coordonnées pour les indices dans I'. Ceci montre que $\omega'\in H$, et que $t(\omega')=\varphi(t)(\omega')$ pour $t\in N$, puisque $\varphi(t)(\omega)=\varphi(t)(\omega')$. Supposons maintenant qu'il existe $n,p\in\mathbb{N}$, $t=(t_1,\ldots,t_n)\in N^n$, $a\in\mathbb{Q}^n$ avec

$$\omega'\in U=\{\omega;\ \|t(\omega)-a\|<2^{-p}\}\quad\text{et}\quad \mu(U\cap H)=0.$$

Soit $U'=\{\omega;\ \|\varphi(t)(\omega)-a\|<2^{-p}\}$. On a $\omega'\in U'$. Mais U' ne dépends que des coordonnées dans I', donc $\mu(U'\cap H)>0$. Mais puisque $t(\omega)=\varphi(t)(\omega)$ p.s. sur H, ceci contredit le fait que $\mu(U\cap H)=0$. La situation décrite par les conditions (7) et (8) est donc impossible. On a donc montré:

Théorème 10. *Toute mesure gaussienne sur $\mathbb{R}^I$ est τ-régulière.*

Désignons par $\bar{\mathbb{R}}$ le compactifié usuel de $\mathbb{R}$. Une probabilité μ sur $\mathbb{R}^I$ induit une probabilité de Radon $\bar{\mu}$ sur $\bar{\mathbb{R}}^I$. Le théorème 10 affirme que si μ est gaussienne, $\mathbb{R}^I$ est de mesure extérieure 1 pour $\bar{\mu}$.

On trouvera dans [4] un exemple de mesure gaussienne non τ-régulière sur un espace de Banach.

Bibliographie

1. Dudley, R.M.: The Sizes of Compact Subsets of Hilbert Space and Continuity of Gaussian Processes. J. Funct. analysis **1**, 290–330 (1967)
2. Edgar, G.A.: Measurability in a Banach Space. Indiana Univ. Math. J. **26**, 219–242 (1977)
3. Fernique, X.M.: Regularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes, Ecole d'Eté de Probabilités IV. Lecture Notes in Math. Number **480**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer
4. Fremlin, D.H., Talagrand, M.: A Gaussian measure on l^∞. Annals of Probabilities **8**, 213–216 (1980)
5. Sato, H.: Souslin support and Fourier expansion of a gaussian Radon measure, à paraitre dans "Proceedings of third international conference on Probabilities in Banach space, Medford, 1980"
6. Tsirel'son: Natural modification of stochastic processes, and its applications to series of stochastic functionals and Gaussian measures (in Russian). Zapiski Nautchni Seminarov. LOMI vol. **55**, (1976)
7. Varadarajan, V.S.: Measures on topological spaces. Amer. Math. Soc. Transl. (2) **48**, 161–228 (1965)

Reçu le 6 Novembre 1980; en forme révisée le 8 Fevriér 1981

Note Added in Proof

La méthode de la proposition 1 permet également de montrer qu'un processus gaussien borné à covariance continue, défini sur un espace polonais, possède une version dont les trajectoires sont p.s. de première classe de Baire.