

## Vergleichende Untersuchung von Fahrzeugschwingungen an räumlichen Ersatzmodellen

E. Kreuzer und G. Rill, Stuttgart

**Übersicht:** Eine genaue Simulation von Fahrzeugschwingungen kann nur mit Hilfe räumlicher Ersatzmodelle vorgenommen werden. In dieser Arbeit werden vier unterschiedlich komplizierte Fahrzeugmodelle untersucht, die durch eine entsprechend räumlich modellierte Fahrbahn stochastisch erregt werden. Es wird gezeigt, wie sich Variationen bei der Modellierung auf die Ergebnisse von Beurteilungskriterien für Fahrkomfort und Fahrsicherheit auswirken.

### Comparative Investigation of Vehicle Vibrations on Three-dimensional Vehicle Models

**Summary:** An exact simulation of vehicle vibrations can only be done with three-dimensional models. In this paper four vehicle models of different complexity and excited stochastically by means of an appropriate modelled three-dimensional roadway are investigated. It is shown, how variations in modelling produce difference in ride comfort and ride safety criteria.

### 1 Einleitung

Erhöhte Ansprüche an den Komfort und die Fahrsicherheit von Kraftfahrzeugen verlangen in steigendem Maße genaue schwingungstechnische Untersuchungen bereits in der Konstruktionsphase. Häufig beschränkt man sich dabei auf ebene Ersatzmodelle. Das ist zwar wirtschaftlich, doch die daraus gewonnenen Ergebnisse müssen stets unter der nur begrenzt gültigen Aussagekraft für reale Systeme gesehen werden. Für genauere Untersuchungen sind räumliche Ersatzmodelle notwendig. Die Arbeit von Voy [1] zeigt, daß nur mit Hilfe von räumlichen Ersatzmodellen ein sinnvoller Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Meßwerten am realen Fahrzeug möglich ist.

Eine Schwingungsuntersuchung ist nur so gut oder schlecht wie das zugrunde gelegte Ersatzmodell. Die Aufteilung eines realen Fahrzeugs in Hub-, Wank- und Nickmodelle führt sicherlich nur zu groben Näherungswerten für das dynamische Verhalten des Fahrzeugs. Darüber hinaus ist es sicher fragwürdig, Teilsysteme eines Fahrzeugs, z. B. die Auspuffanlage, sehr genau zu modellieren, dabei aber die restlichen Systemkomponenten, z. B. die Radaufhängung, nur sehr grob anzunähern. Neben einer räumlichen Fahrzeugmodellierung müssen jedoch auch geeignete räumliche Fahrbahnmodelle betrachtet werden. So konnte in [2] nachgewiesen werden, daß die Beschreibung einer realen Fahrbahn durch Weißes Geschwindigkeitsrauschen im räumlichen Fall nicht zur vollständigen Information über die Systemantwort führt.

In dieser Arbeit wird gezeigt, wie sich Variationen bei der Modellierung auf die Ergebnisse der Beurteilungskriterien bei stochastischer Fahrbahnerregung auswirken. Dazu werden im Kap. 2 vier lineare räumliche Fahrzeugmodelle mathematisch beschrieben. Im Kap. 3 wird eine Modellierung räumlicher Fahrbahnen im Orts- und Zeitbereich vorgenommen. Nach der Erläuterung der charakteristischen Beurteilungsgrößen bei stochastischer Fahrbahnerregung im Kap. 4 werden im Kap. 5 die verschiedenen Fahrzeugmodelle an Hand der Simulationsergebnisse verglichen.

## 2 Räumliche Fahrzeugmodelle

Ein reales Fahrzeug ist ein kompliziertes System aus elastischen und elastisch aufgehängten Bauteilen. Ein solches System kann nicht in allen konstruktiven Einzelheiten mathematisch beschrieben werden. Die dynamische Untersuchung beruht daher stets auf vereinfachten Ersatzmodellen der realen Systeme. Heute werden als Modelle Mehrkörpersysteme, Finite-Element-Systeme, kontinuierliche Systeme und Mischformen dieser Systeme, sogenannte hybride Systeme, benutzt.

Die Berechnungen sollen außerdem mit vertretbarem Aufwand durchgeführt werden. Das Ersatzsystem soll deshalb so einfach wie möglich sein, muß jedoch die wesentlichen Eigenschaften des Fahrzeugs und die äußeren Einflüsse, denen es ausgesetzt ist, in ausreichendem Maße wiedergeben. Die Wahl des Ersatzsystems wird also vor allem durch die jeweilige Aufgabenstellung gestimmt. Bei der Untersuchung von Fahrzeugschwingungen im Frequenzbereich bis ca. 30 Hz kann die tragende Struktur, die Karosserie (Wagenkasten), als starr betrachtet werden. Die Karosserie, der Antrieb und die Radaufhängung können dann mit hinreichender Genauigkeit durch ein Mehrkörpersystem modelliert werden. Eine ausführliche Beschreibung der Modellierung mit Mehrkörpersystemen ist bei Schiehlen und Kreuzer [3, 4] sowie in [5] zu finden. Als Modellkörper werden Massenpunkte und Starrkörper verwendet. Der Starrkörper dient als Modell für all die Bauteile des Fahrzeugs, für die die Drehträgheit berücksichtigt werden soll. Im einzelnen gilt für diese Arbeit die in Tabelle 1 angegebene Zuordnung von Bauteil und Modellkörper.

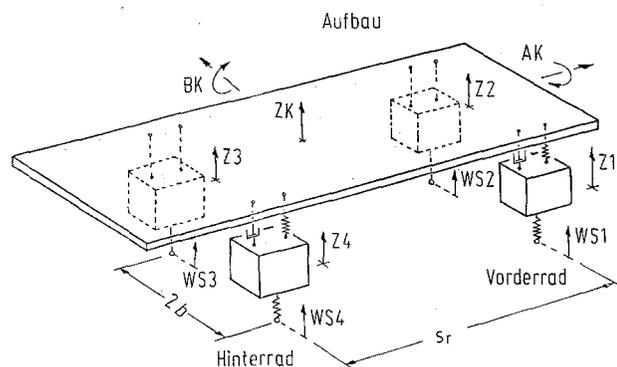
**Tabelle 1.** Zuordnung von Bauteilen und Modellkörpern

Bauteil	Modellkörper
Karosserie/Aufbau	Starrkörper
Motor	Starrkörper
Achsträger	Starrkörper
Schräglenker	Starrkörper
Gelenkwelle	Starrkörper
Einzelrad	Massenpunkt
Auspuff	Massenpunkt
Fahrer	Massenpunkt

Die Körper sind durch passive oder aktive Elemente verknüpft. Außerdem sind die Körper häufig zusätzlich durch Gelenke kinematisch verbunden. Die passiven mechanischen Verbindungselemente werden durch Federn und Dämpfer gebildet, während die aktiven Bauelemente durch Stellmotoren repräsentiert werden.

### 2.1 Modell aus fünf Massen

Das einfachste räumliche Fahrzeugmodell wird aus einem Starrkörper und vier Massenpunkten aufgebaut, Bild 1. Mit dem Aufbau (Starrkörper) sind die vier Räder (Massenpunkte) über parallelgeschaltete Federn und Dämpfer verbunden. Die Elastizität der Reifen wird durch Federn berücksichtigt.

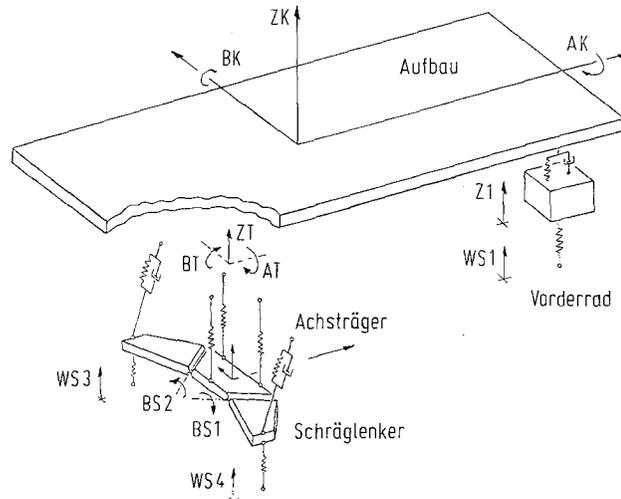


**Bild 1.** Einfaches räumliches Ersatzmodell

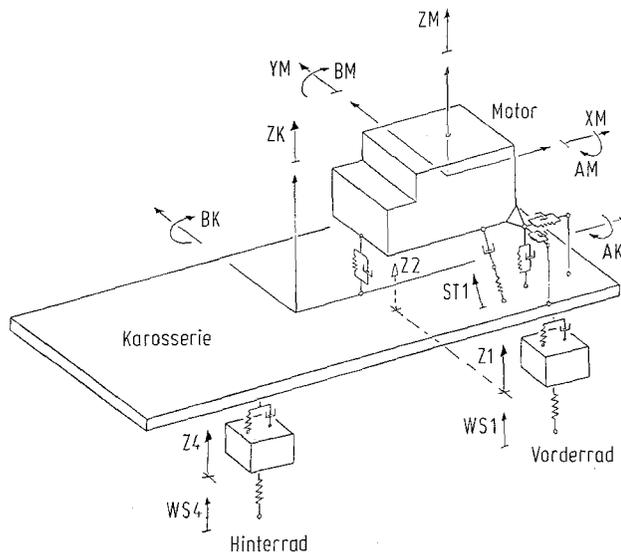
Obwohl dieses Modell sicher nur einer sehr groben Idealisierung eines realen Fahrzeugs entspricht, werden damit jedoch bereits Koppelwirkungen zwischen rechten und linken Rädern bzw. von Vorder- und Hinterrädern berücksichtigt. Zudem ist dadurch die Beurteilung der Wankbewegung des Fahrzeugs möglich.

## 2.2 Modelle aus sechs Massen

Eine Verbesserung der Modellierung des einfachsten räumlichen Fahrzeugmodells wird nun auf zwei Arten vorgenommen. Zum einen wird eine möglichst wirklichkeitsnahe Idealisierung einer dem heutigen Stand der Fahrzeugtechnik entsprechenden Schräglenkerhinterachse vorgenommen, Bild 2. Zum anderen wird der Motor mitsamt seiner aufwendigen Lagerung in der Karosserie berücksichtigt, Bild 3. Beide Modelle bestehen aus sechs Massen.



**Bild 2.** Ersatzmodell mit Schräglenkerhinterachse



**Bild 3.** Ersatzmodell mit Motor

Die im Bild 2 angegebene Modellierung einer Schräglenkerhinterachse liefert eine wesentlich genauere Nachbildung einer modernen Radaufhängung. Am Hinterachsträger sind die beiden Schräglenker in Achsgelenken gelagert. Die Hinterachskonstruktion ist an der Karosserie elastisch montiert.

Bei dem in Bild 3 dargestellten Modell werden zur Lagerung des Motors neben Gummipuffern auch elastische Dämpfer benutzt. Die Gummipuffer werden durch jeweils drei aufein-



**Tabelle 2.** Einteilung der Fahrzeugmodelle an Hand der Freiheitsgrade

Modell	Freiheitsgrade	Verallgemeinerte Koordinaten (Lagevektor)
5 Massenmodell: F 7 (Bild 1)	7	$y_7 = [Z 1, Z 2, Z 3, Z 4, ZK, AK, BK]^T$
6 Massenmodell: F 10 (Bild 2)	10	$y_{10} = [Z 1, Z 2, ZT, AT, BT, BS 1, BS 2, ZK, AK, BK]^T$
6 Massenmodell: F 12 (Bild 3)	12	$y_{12} = [y_7^T, XM, YM, ZM, AM, BM]^T$
Komplexes Modell F 19 (Bild 4)	19	$y_{19} = [y_{10}^T, XM, YM, ZM, AM, BM, ZG, BG, ZF, ZA]^T$

Ist nun  $m_i$  die Körpermasse,  $\mathbf{I}_i$  der  $3 \times 3$ -Trägheitstensor des Körpers  $i$  bezüglich seines Massenmittelpunktes,  $\mathbf{f}_i$  der Vektor der äußeren Kräfte und  $\mathbf{l}_i$  der Vektor der äußere Moment bezüglich des Massenmittelpunktes, so gelten die Newtonschen Gleichungen

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{f}_i, \quad i = 1(1) n; \quad (2.3)$$

und die Eulerschen Gleichungen

$$\mathbf{I}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{l}_i, \quad i = 1(1) n, \quad (2.4)$$

wobei alle Größen in Koordinaten eines raumfesten Bezugssystems anzugeben sind. Die Bewegungsgleichungen des Mehrkörpersystems werden aus den Newton-Eulerschen Gleichungen der einzelnen Körper durch Elimination der Zwangskräfte ermittelt. Die Zwangskräfte brauchen also zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen nicht explizit angegeben zu werden.

Die Bestimmung der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen mit mehreren Freiheitsgraden ist oft schwierig, zeitintensiv und mit Fehlern behaftet. Für größere Systeme ist die Ermittlung der Bewegungsgleichungen mit Papier und Bleistift oft nicht mehr möglich. Zur Berechnung symbolischer Bewegungsgleichungen mit dem Digitalrechner steht jedoch das Programmsystem NEWEUL [5] zur Verfügung.

Von diesem Programmsystem werden aus der Lagebeschreibung (2.1) und (2.2), den massengeometrischen Größen  $m_i$  und  $\mathbf{I}_i$  sowie den eingepprägten Kräften und Momenten durch Anwendung des d'Alembertschen Prinzips auf die Newton-Eulerschen Gleichungen (2.3), (2.4) die Bewegungsgleichungen berechnet. Es können sowohl um eine Gleichgewichtslage linearisierte als auch nicht-lineare Bewegungsgleichungen bestimmt werden. Vom sehr benutzerfreundlichen Programmsystem werden außerdem auch die Transformation von Vektoren und Trägheitstensoren übernommen. Die Berechnung der eingepprägten Kräfte und Momente von Federn, Dämpfern und Stellmotoren kann ebenfalls dem Programm übertragen werden.

Für den Fall linearer Mehrkörpersysteme liefert das Programm die Bewegungsgleichung als  $f \times 1$ -Vektordifferentialgleichung zweiter Ordnung

$$\mathbf{M}(t) \ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{P}(t) \dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{Q}(t) \mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t). \quad (2.5)$$

Die Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , die Matrix der geschwindigkeitsabhängigen Kräfte  $\mathbf{P}$ , die Matrix der Lagekräfte  $\mathbf{Q}$  sowie der Erregervektor  $\mathbf{h}$  sind durch die symbolischen Systemparameter bestimmt. Der Vorteil der symbolischen Gleichungen liegt auf der Hand. Sie sind für jeden beliebigen Satz von Zahlenwerten gültig. Die Bewegungsgleichungen brauchen für ein Fahrzeugmodell, im Gegensatz zu den numerischen Formalismen, nur einmal berechnet werden. Außerdem kann der Einfluß durch Änderungen von Systemparametern unmittelbar aus den symbolischen Ausdrücken abgelesen werden.

Für den Fall, daß im Fahrzeugmodell auch elastische Dämpfer auftreten, wird das dynamische Verhalten durch die Bewegungsgleichungen nicht vollständig beschrieben. Es müssen vielmehr noch die für die nachgiebigen Dämpfer geltenden Kraftgesetze berücksichtigt werden. Für solche allgemeine Mehrkörpersysteme findet man aus der symbolischen Bewegungsgleichung (2.5)

durch Aufspalten des Vektors  $\mathbf{h}$  die Bewegungsgleichung in der Form

$$\mathbf{M}(t) \ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{P}(t) \dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{Q}(t) \mathbf{y}(t) = \mathbf{R}(t) \mathbf{w}(t) + \mathbf{h}_y(t). \quad (2.6)$$

Gegenüber (2.5) treten zusätzlich die  $f \times h$ -Matrix  $\mathbf{R}$  und der  $h \times 1$ -Vektor  $\mathbf{w}$  der Kraftgesetze auf. Zur vollständigen Beschreibung des allgemeinen MKS sind noch die Gleichungen für die Kraftgesetze zu berücksichtigen,

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{W}_y(t) \mathbf{y}(t) + \mathbf{W}_\dot{y}(t) \dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{W}_w(t) \mathbf{w}(t) + \mathbf{h}_w(t). \quad (2.7)$$

Darin treten die quadratische  $h \times h$ -Matrix  $\mathbf{W}_w$ , die  $f \times h$ -Matrizen  $\mathbf{W}_y$  und  $\mathbf{W}_\dot{y}$  sowie der  $h \times 1$ -Vektor  $\mathbf{h}_w$  auf.

Zur numerischen Integration der Bewegungsgleichungen und für die Anwendung der Matrizenverfahren aus der linearen Systemtheorie ist die Zustandsraumdarstellung von Vorteil. Mit dem  $p \times 1$ -Zustandsvektor für gewöhnliche Mehrkörpersysteme

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{y}^T(t) \mid \dot{\mathbf{y}}^T(t)]^T, \quad p = 2f \quad (2.8)$$

und für allgemeine Mehrkörpersysteme

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{y}^T(t) \mid \dot{\mathbf{y}}^T(t) \mid \mathbf{w}^T(t)]^T, \quad p = 2f + h \quad (2.9)$$

erhält man die lineare, i. a. zeitvariante Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{y}_e(t). \quad (2.10)$$

Die  $p \times p$ -Systemmatrix  $\mathbf{A}$  und die  $p \times r$ -Erregermatrix  $\mathbf{B}$  sind im Falle der hier betrachteten räumlichen Modelle zeitinvariant. Der  $r \times 1$ -Erregervektor  $\mathbf{y}_e$  gibt die Fahrzeugerregung durch die Fahrbahn an. Der Aufbau der Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  ist für gewöhnliche bzw. allgemeine Mehrkörpersysteme unterschiedlich. Er kann jedoch leicht unter Berücksichtigung der Zustandsvektoren (2.8) bzw. (2.9) vorgenommen werden.

### 3 Räumliche Fahrbahnmodelle

Messungen von Bormann [6] zeigen, daß die Korrelation zwischen linker und rechter Fahrspur bei genaueren Untersuchungen nicht vernachlässigt werden kann. Für die Behandlung räumlicher Fahrzeugmodelle bei stochastischer Erregung durch Fahrbahnunebenheiten ist es deshalb notwendig, die gegebenenfalls bestehende Korrelation zwischen linker und rechter Fahrspur zu berücksichtigen. Als Beurteilungskriterium für die Korrelation zweier Zufallsprozesse  $\xi_r$ ,  $\xi_l$  werden im Spektralbereich die Kohärenzfunktion

$$\gamma(\Omega) = \frac{|S_{rl}(\Omega)|}{\sqrt{S_r(\Omega) S_l(\Omega)}} \quad (3.1)$$

und der Phasenwinkel

$$\varphi(\Omega) = \arctan \frac{\text{Im } S_{rl}(\Omega)}{\text{Re } S_{rl}(\Omega)} \quad (3.2)$$

verwendet, wobei  $\Omega$  die Wegkreisfrequenz ist. Die Messungen von Bormann [6] für den Phasenwinkel  $\varphi(\Omega)$  ergaben je nach Straßentyp eine mehr oder weniger starke Schwankung um die Nulllage. Für die weiteren Überlegungen wird

$$\varphi(\Omega) = 0 \quad (3.3)$$

vorausgesetzt. Wegen (3.2) ist die Forderung (3.3) gleichbedeutend mit

$$\text{Im } S_{rl}(\Omega) = 0, \quad (3.4)$$

d. h., die Kreuzspektraldichte  $S_{rl}(\Omega)$  wird als reell angenommen. Diese Annahme entspricht auch den Ansätzen von Dodds und Robson [7], Kamash und Robson [8] sowie von Parkhilovski [9]. Es sei jedoch erwähnt, daß die folgenden Überlegungen auf nichtverschwindende Phasenwinkel  $\varphi(\Omega) \neq 0$  erweitert werden können.

### 3.1 Beschreibung im Ortsbereich

Für die mathematische Beschreibung regelloser Fahrbahnunebenheiten im Ortsbereich wird das in Bild 5 skizzierte Modell zugrunde gelegt. Die mittleren Fahrbahnunebenheiten werden durch den Zufallsprozeß  $\xi_M$  und die Unebenheiten der linken und rechten Fahrspur werden durch die Zufallsprozesse  $\xi_l$  und  $\xi_r$  charakterisiert. Die Unebenheiten der linken und rechten Fahrspur werden jedoch im allgemeinen von der mittleren Fahrbahnunebenheit abweichen. Dem Ansatz von Parkhilovski [9] entsprechend erhält man mit der Ortskoordinate  $s$  als unabhängige Koordinate

$$\xi_r(s) = \xi_M(s) + b\vartheta(s), \quad (3.5)$$

$$\xi_l(s) = \xi_M(s) - b\vartheta(s). \quad (3.6)$$

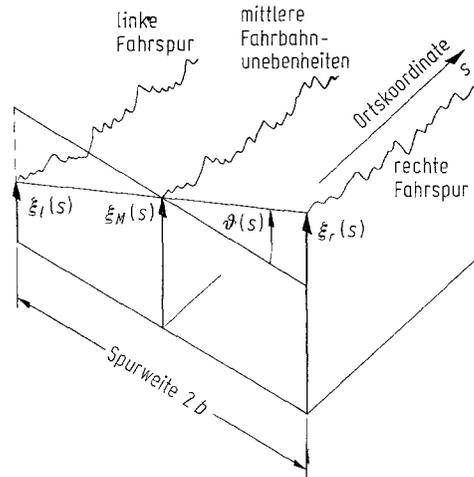


Bild 5. Räumliches Fahrbahnmodell

Die Abweichungen  $\vartheta(s)$  werden in der Regel ebenfalls stochastischer Natur sein. Die Prozesse  $\xi_M(s)$  und  $\vartheta(s)$  seien unkorreliert, d. h., die Kreuzkorrelationsfunktion und die Kreuzspektraldichte verschwinden

$$E\{\xi_M(s_1) \vartheta(s_2)\} = 0, \quad (3.7)$$

$$S_{\xi_M \vartheta}(\Omega) = 0. \quad (3.8)$$

Mit (3.5–3.7) erhält man

$$S_l(\Omega) = S_r(\Omega) = S_M(\Omega) + b^2 S_\vartheta(\Omega), \quad (3.9)$$

$$S_{rl}(\Omega) = S_{lr}(\Omega) = S_M(\Omega) - b^2 S_\vartheta(\Omega). \quad (3.10)$$

Ersetzt man in (3.5)  $b$  durch  $b_1$  und in (3.6)  $b$  durch  $b_2$ , dann ergeben sich für  $b_1 \neq b_2$  unterschiedliche Spektraldichten für die linke und rechte Fahrspur  $S_l(\Omega) \neq S_r(\Omega)$ .

Mit den Spektraldichten

$$S_M(\Omega) = \frac{S_1}{\Omega^2 + \beta_1^2}, \quad (3.11)$$

$$S_\vartheta(\Omega) = \frac{S_2}{\Omega^2 + \beta_2^2}, \quad (3.12)$$

findet man nach einigen Umrechnungen aus (3.9), (3.10) und (3.1) die folgenden charakteristischen Größen:

$$S_l(\Omega) = S_r(\Omega) = S_0 \frac{\Omega^2 + \frac{\beta_2^2 + \alpha\beta_1^2}{1 + \alpha}}{\Omega^4 + (\beta_1^2 + \beta_2^2)\Omega^2 + \beta_1^2\beta_2^2}, \quad (3.13)$$

$$\gamma(\Omega) = \frac{(1 - \alpha)\Omega^2 + \beta_2^2 - \alpha\beta_1^2}{(1 + \alpha)\Omega^2 + \beta_2^2 + \alpha\beta_1^2}, \quad (3.14)$$

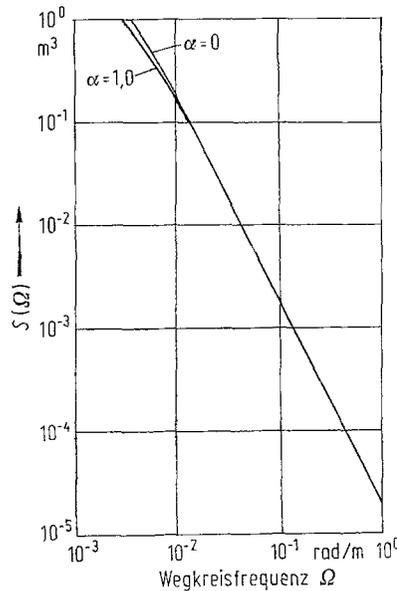
Durch geeignete Wahl der Bezugsspektraldichte

$$S_0 = S_1 + b^2 S_2, \quad (3.15)$$

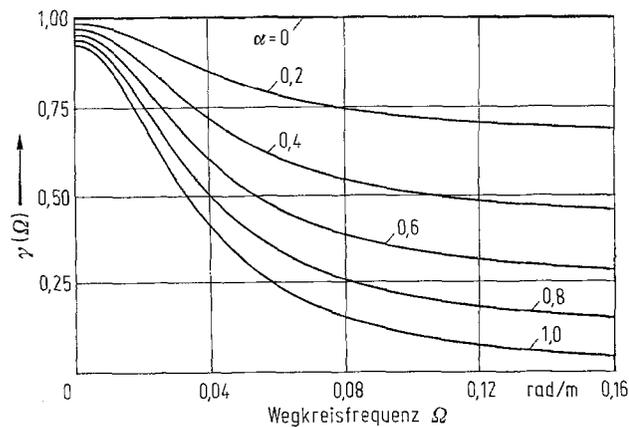
des Korrelationsparameters

$$\alpha = b^2 \frac{S_2}{S_1} \quad (3.16)$$

und der Parameter  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  können nun gemessene Spektraldichten und Kohärenzfunktionen approximiert werden.



**Bild 6.** Wegspektraldichte gemäß (3.13) bei  $S_0 = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ ,  $\beta_1 = 0,01 \text{ m}^{-1}$ ,  $\beta_2 = 0,05 \text{ m}^{-1}$



**Bild 7.** Kohärenzfunktionen für verschiedene Korrelationsparameter  $\alpha$  bei  $\beta_1 = 0,01 \text{ m}^{-1}$ ,  $\beta_2 = 0,05 \text{ m}^{-1}$

Die Bilder 6 und 7 zeigen, daß der Korrelationsparameter  $\alpha$  im wesentlichen nur die Kohärenzfunktion  $\gamma(\Omega)$  beeinflusst. Für Korrelationsparameter  $0,6 \leq \alpha \leq 1,0$  werden die von Bormann [6] gemessenen Kohärenzfunktionen für verschiedene Straßentypen recht gut angenähert.

### 3.2 Beschreibung im Zeitbereich

Bei konstanter Fahrzeuggeschwindigkeit  $v$  gilt zwischen der Wegkreisfrequenz  $\Omega$  [rad/m] und der Kreisfrequenz  $\omega$  [rad/s] der Zusammenhang

$$\omega = v\Omega. \quad (3.17)$$

Gemäß Müller, Popp, Schiehlen [10] gilt dann für die Spektraldichte

$$S(\omega) = \frac{1}{v} S(\Omega). \quad (3.18)$$

Mit (3.17) und (3.18) erhält man aus (3.11) und (3.12)

$$S_M(\omega) = \frac{vS_1}{\omega^2 + v^2\beta_1^2}, \quad (3.19)$$

$$S_\vartheta(\omega) = \frac{vS_2}{\omega^2 + v^2\beta_2^2}. \quad (3.20)$$

Zufallsprozesse  $\xi_M(t)$ ,  $\vartheta(t)$  mit den Spektraldichten (3.19), (3.20) können über Formfilter 1. Ordnung aus weißen Rauschprozessen  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$  erzeugt werden:

$$\dot{\xi}_M(t) = -\beta_1 v \xi_M(t) + g_1 w_1(t), \quad (3.21)$$

$$\dot{\vartheta}(t) = -\beta_2 v \vartheta(t) + g_2 w_2(t). \quad (3.22)$$

Die weißen Rauschprozesse seien unkorreliert und werden durch verschwindende Mittelwerte

$$E\{w_i(t)\} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.23)$$

durch die Korrelationsfunktionen

$$E\{w_i(t_1) w_j(t_2)\} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ Q_{w_i} \delta(t_1 - t_2), & i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \quad (3.24)$$

oder durch die konstanten Spektraldichten

$$S_{w_i}(\omega) = S_{w_i} = \frac{1}{2\pi} Q_{w_i} = \text{const}, \quad i = 1, 2 \quad (3.25)$$

charakterisiert. Die Spektraldichten der Zufallsprozesse  $\xi_M(t)$ ,  $\vartheta(t)$  gemäß (3.21), (3.22) sind durch

$$S_M(\omega) = \frac{g_1^2 S_{w_1}}{\omega^2 + v^2 \beta_1^2}, \quad (3.26)$$

$$S_\vartheta(\omega) = \frac{g_2^2 S_{w_2}}{\omega^2 + v^2 \beta_2^2}, \quad (3.27)$$

bestimmt. Der Vergleich von (3.19) mit (3.26) sowie (3.20) mit (3.27) ergibt unter Berücksichtigung von (3.25)

$$g_1^2 Q_{w_1} = 2\pi v S_1, \quad (3.29)$$

$$g_2^2 Q_{w_2} = 2\pi v S_2. \quad (3.30)$$

Für beliebig gewählte Intensitäten, z. B.  $Q_{w1} = Q_{w2} = 1$ , sind damit die Parameter  $g_1, g_2$  über (3.15) und (3.16) aus der Spurweite  $2b$ , der Bezugsspektraldichte  $S_0$  und dem Korrelationsparameter  $\alpha$  berechenbar. Die Größen  $S_0$  und  $\alpha$  werden dabei durch Approximation gemessener Wegspektraldichten  $S(\Omega)$  bzw. Kohärenzfunktionen  $\gamma(\Omega)$  bestimmt.

Die Erregerprozesse der linken und der rechten Fahrspur werden dann entsprechend (3.5), (3.6) durch

$$\xi_r(t) = \xi_M(t) + b\vartheta(t), \quad (3.31)$$

$$\xi_l(t) = \xi_M(t) - b\vartheta(t), \quad (3.32)$$

beschrieben. In vektorieller Darstellung mit

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_r(t) \\ \xi_l(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \xi_M(t) \\ \vartheta(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}$$

lauten (3.21), (3.22), (3.31), (3.32) wie folgt:

$$\xi(t) = \mathbf{H}\mathbf{u}(t), \quad (3.33)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}\mathbf{w}(t). \quad (3.34)$$

Die  $2 \times 2$ -Matrizen  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{G}$  folgen aus dem Vergleich von (3.31) bzw. (3.32) mit (3.33) und (3.21) bzw. (3.22) mit (3.34). Mit der Darstellung (3.33), (3.34) können die Erregerprozesse der linken und der rechten Fahrspur  $\xi_l(t)$ ,  $\xi_r(t)$  über die Verteilungsmatrix  $\mathbf{H}$  und die Formfilterbeziehung (3.34) auf den Prozeß des weißen Rauschens zurückgeführt werden. Durch geeignete Wahl der Parameter  $\beta_1, \beta_2, g_1, g_2$  können über (3.29), (3.30) sowie (3.15) und (3.16) regellose Fahrbahnen mit mehr oder weniger starker Korrelation zwischen den Fahrspuren im Zeitbereich beschrieben werden.

#### 4 Beurteilungsgrößen bei stochastischer Fahrbahnerregung

Bei der Untersuchung stochastisch erregter Fahrzeuge sollen im allgemeinen die Fragen nach Fahrkomfort und Fahrsicherheit beantwortet werden. Zur Beurteilung der Fahrsicherheit wird die Standardabweichung der dynamischen Radlasten herangezogen. Als Maß für den Fahrkomfort eines Fahrzeugs werden in erster Linie die Standardabweichungen der vertikalen Karosseriebeschleunigungen verwendet. Zur subjektiven Komfortbeurteilung ist gemäß der VDI-Richtlinie 2057 Bl. 2 das spezielle Frequenzempfinden des Menschen mit zu berücksichtigen.

Für den Vergleich der verschiedenen Fahrzeugmodelle bezüglich Fahrkomfort und Fahrsicherheit werden hier die dynamischen Radlasten und die vertikalen Karosseriebeschleunigungen herangezogen.

##### 4.1 Stochastische Systemantwort

Wie in Kap. 2 gezeigt wurde, kann das dynamische Verhalten linearer Fahrzeugmodelle durch die Zustandsgleichung (2.10) mit zeitinvarianten Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  beschrieben werden. Bei gradliniger Fahrt mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  über eine harte Fahrbahn muß der zeitliche Versatz zwischen den Erregerprozessen an der Vorder- und Hinterachse berücksichtigt werden, siehe z. B. Müller, Popp, Schiehlen [10]. Faßt man die Erregerprozesse an der Vorderachse  $WS 1$ ,  $WS 2$  und an der Hinterachse  $WS 3$ ,  $WS 4$  in  $2 \times 1$ -Vektoren zusammen, dann gilt, siehe z. B. Bild 1,

$$\begin{bmatrix} WS 1 \\ WS 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_r(t) \\ \xi_l(t) \end{bmatrix} = \xi(t), \quad (4.1)$$

$$\begin{bmatrix} WS 4 \\ WS 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_r(t - \Delta t) \\ \xi_l(t - \Delta t) \end{bmatrix} = \xi(t - \Delta t). \quad (4.2)$$

Die Zeitverschiebung  $\Delta t$  wird durch die Fahrzeuggeschwindigkeit  $v$  und den Radstand  $s_r$  bestimmt:

$$\Delta t = \frac{s_r}{v}. \quad (4.3)$$

Der Erregerprozeß  $\xi(t)$  kann durch (3.33), (3.34) auf das weiße Rauschen zurückgeführt werden. Mit

$$\mathbf{B}y_s(t) = [\mathbf{B}_1 | \mathbf{B}_2] \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \xi(t - \Delta t) \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

können (2.10), (3.33), (3.34) in Form einer erweiterten Zustandsgleichung angeschrieben werden

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\bar{\mathbf{u}}}(t) \\ \dot{\bar{\mathbf{u}}}(t - \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \mathbf{H} & \mathbf{B}_2 \mathbf{H} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \\ \bar{\mathbf{u}}(t) \\ \bar{\mathbf{u}}(t - \Delta t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{G} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{w}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \mathbf{w}(t - \Delta t), \quad (4.5)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{G}}_1 \mathbf{w}(t) + \bar{\mathbf{G}}_2 \mathbf{w}(t - \Delta t). \quad (4.6)$$

Die stationäre stochastische Systemantwort der Zustandsgleichung (4.6) wird gemäß Müller, Popp [11] durch einen verschwindenden Mittelwertvektor

$$\mathbf{m}_{\bar{\mathbf{x}}}(t \rightarrow \infty) = E\{\bar{\mathbf{x}}(t \rightarrow \infty)\} = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

und die konstante Kovarianzmatrix

$$\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}}(t \rightarrow \infty) = \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}} = E\{[\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{m}_{\bar{\mathbf{x}}}] [\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{m}_{\bar{\mathbf{x}}}]^T\} \quad (4.8)$$

charakterisiert. Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}}$  genügt dabei der Ljapunovschen Matrixengleichung

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}} + \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}}\bar{\mathbf{A}}^T + \mathbf{G}_1 \mathbf{Q}_w \bar{\mathbf{G}}_1^T + \bar{\mathbf{G}}_2 \mathbf{Q}_w \bar{\mathbf{G}}_2^T \\ + e^{\bar{\mathbf{A}}\Delta t} \bar{\mathbf{G}}_2 \mathbf{Q}_w \bar{\mathbf{G}}_1 + \bar{\mathbf{G}}_1 \mathbf{Q}_w \bar{\mathbf{G}}_2^T e^{\bar{\mathbf{A}}^T \Delta t} = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

wobei die  $2 \times 2$ -Intensitätsmatrix  $\mathbf{Q}_w$  durch (3.24) bestimmt ist.

Zur numerischen Lösung von (4.9) steht mit dem Smith-Verfahren [12] ein schnell konvergierendes Iterationsverfahren zur Verfügung. Zur Berechnung der Fundamentalmatrix  $e^{\bar{\mathbf{A}}\Delta t}$  kann z. B. eine endliche Approximation der Matrizenexponentialreihe herangezogen werden, siehe auch Müller, Schiehlen [13].

Die erweiterte Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}}$  enthält entsprechend der Aufteilung von  $\bar{\mathbf{x}}$  und  $\mathbf{x}$  als Submatrizen die Lage- und Geschwindigkeitskovarianzmatrix  $\mathbf{P}_y$  bzw.  $\mathbf{P}_{\dot{y}}$ .

#### 4.2 Beschleunigungsvarianzen und Varianz der dynamischen Radlasten

Die dynamischen Radlasten können bei räumlichen Fahrzeugmodellen mit vier Radstandspunkten im allgemeinen bei vernachlässigbarer Reifendämpfung nur aus den Verschiebungsgrößen am Reifen und der Reifensteifigkeit bestimmt werden, [2].

Die Varianzen der dynamischen Radlasten  $P_{R_i}$ ,  $i = 1(1) 4$  können über  $1 \times n$ -Transformationsmatrizen  $\mathbf{T}_{R_i}$  aus der erweiterten Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}}$  berechnet werden

$$P_{R_i} = \mathbf{T}_{R_i} \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{T}_{R_i}^T, \quad i = 1(1) 4. \quad (4.10)$$

Die Transformationsmatrizen  $\mathbf{T}_{R_i}$  ergeben sich aus den gewählten Formfilterbeziehungen (3.33, 3.34), den Reifensteifigkeiten  $CR_i$  sowie aus der Topologie des Fahrzeugmodells

Zur Berechnung der  $f \times f$ -Beschleunigungskovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{\dot{y}}$  wird die Zustandsgleichung (2.10) mit (4.4) und (3.33, 3.34) herangezogen. Gemäß der Aufteilung des Zustandsvektors  $\mathbf{x}$  für gewöhnliche Mehrkörpersysteme erhält man

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \dot{\bar{\mathbf{y}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \bar{\mathbf{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1^* \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2^* \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t - \Delta t). \quad (4.11)$$

Liegt ein allgemeines Mehrkörpersystem vor, dann muß (4.11) entsprechend erweitert werden. Aus (4.11) folgt

$$\ddot{\mathbf{y}}(t) = [-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} \mid -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} \mid \mathbf{B}_1^*\mathbf{H} \mid \mathbf{B}_2^*\mathbf{H}] \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{u}(t - \Delta t) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\ddot{\mathbf{y}}}\bar{\mathbf{x}}(t), \quad (4.12)$$

und für die Beschleunigungskovarianzmatrix gilt dann

$$\mathbf{P}_{\ddot{\mathbf{y}}} = \mathbf{T}_{\ddot{\mathbf{y}}}\mathbf{P}_x\mathbf{T}_{\ddot{\mathbf{y}}}^T. \quad (4.13)$$

Aus der Beschleunigungskovarianzmatrix können dann die Varianzen und Standardabweichungen der vertikalen Karosseriebeschleunigungen ermittelt werden.

## 5 Vergleich der Fahrzeugmodelle

Bei der Modellierung des realen Fahrzeugs wurde, ausgehend vom einfachsten räumlichen Ersatzmodell F 7, zu einen die Hinterachse aufwendiger modelliert (F 10), zum anderen der Aufbau in Karosserie und Motor (F 12) unterteilt. Die Zusammenfassung beider Modellierungsvarianten führt dann zum komplexen Modell F 19, wo neben Hinterachse und Motor auch noch die Gelenkwelle, der Auspuff und der Fahrer berücksichtigt wurden. In Bild 8 sind die Fahrzeugmodelle nochmals zusammengestellt. Die Systemparameter wurden so gewählt, daß alle 4 Modelle ein reales Fahrzeug beschreiben. In Bild 8 sind außerdem als charakteristische Größen zur Kennzeichnung der Eigendynamik die Eigenfrequenzen der Karosserie angegeben. Die nur geringen Unterschiede lassen auf ähnliche Eigendynamik der Modelle schließen.

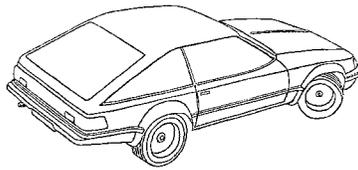
Bei der geradlinigen Fahrt über eine Fahrbahn stehen die Fragen nach dem Komfort und der Sicherheit des Fahrzeugs im Vordergrund. Die mathematische Beschreibung realer Fahrbahnen führt jedoch auf stochastische Erregerprozesse

Wie in Kap. 4 angegeben, sind die charakteristischen Beurteilungsgrößen bei stochastischer Fahrbahnerregung durch die Standardabweichung der Karosseriebeschleunigung und die Standardabweichung der dynamischen Radlasten gegeben. Diese Beurteilungsgrößen sind in Bild 9 für alle Fahrzeugmodelle aufgetragen. Es zeigt sich, daß die unterschiedliche Modellierung des Aufbaus und der Radaufhängung keinen Einfluß auf die dynamischen Radlasten zur Folge hat. Kennzeichnend für die Zwischenmodelle F 10 bzw. F 12 sind die gegenüber dem Modell F 19 zu geringen bzw. zu hohen Karosseriebeschleunigungswerte. Bemerkenswert ist die, im Bereich der Fahrgastzelle, gute Übereinstimmung des einfachen F 7-Modells mit dem komplexen F 19-Modell. Die starre Koppelung von Motor und Karosserie führt beim F 7- und F 10-Modell im vorderen Karosseriebereich zu etwas zu niedrigen Beschleunigungswerten. Die aufwendige Modellierung der Hinterachse allein, Modell F 10, hat im gesamten Karosseriebereich große Abweichungen gegenüber dem F 19-Modell zur Folge.

## 6 Zusammenfassung

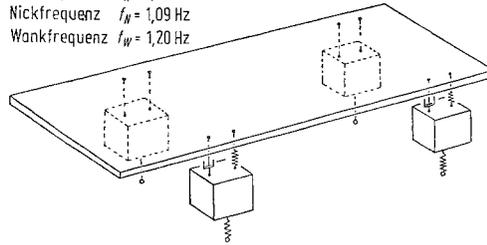
Ziel dieser Arbeit war es, am Beispiel räumlicher Fahrzeugmodelle die Aussagekraft verschieden komplizierter Ersatzmodelle hinsichtlich der Ergebnisse bei stochastischer Fahrbahnerregung zu untersuchen. Dabei wurde zunächst ein reales Fahrzeug durch unterschiedlich feine Diskretisierung in vier räumliche Ersatzsysteme (Mehrkörpersysteme) übergeführt. Für diese Mehrkörpersysteme wurde dann die mathematische Systembeschreibung erläutert. Mit einem Programmsystem wurden die linearen Bewegungsgleichungen in symbolischer Form erstellt. Die räumlichen Fahrzeugmodelle wurden durch räumliche Fahrbahnmodelle ergänzt. Zur Beurteilung der Fahrsicherheit und des Fahrkomforts wurden die Standardabweichungen der vertikalen Karosseriebeschleunigungen und die Standardabweichungen der dynamischen Radlasten berechnet. Die Simulationsergebnisse wurden für alle vier Modelle übersichtlich zusammengestellt.

Die vorliegenden Untersuchungen lassen erkennen, daß eine verfeinerte Modellierung, die sich auf Teilkomponenten, wie z. B. die Hinterachsaufhängung oder die Motorlagerung beschränkt,



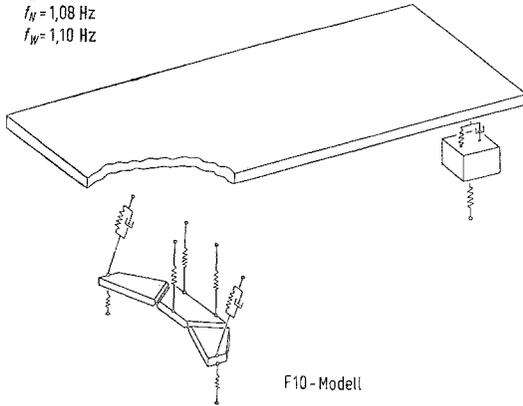
Reales Fahrzeug

Hubfrequenz  $f_H = 0,75$  Hz  
 Nickfrequenz  $f_N = 1,09$  Hz  
 Wankfrequenz  $f_W = 1,20$  Hz



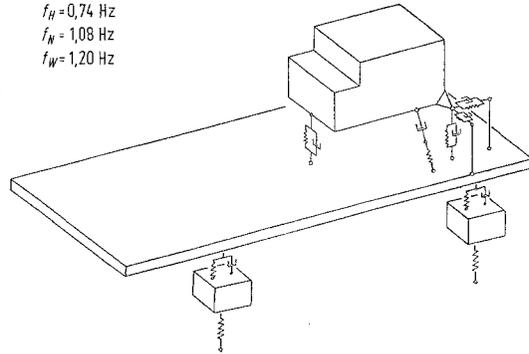
F7-Modell

$f_H = 0,75$  Hz  
 $f_N = 1,08$  Hz  
 $f_W = 1,10$  Hz



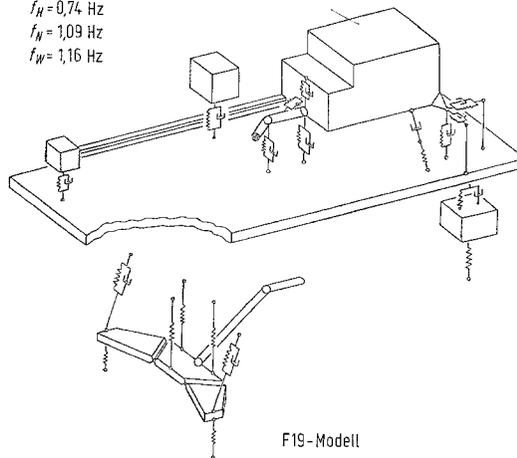
F10-Modell

$f_H = 0,74$  Hz  
 $f_N = 1,08$  Hz  
 $f_W = 1,20$  Hz



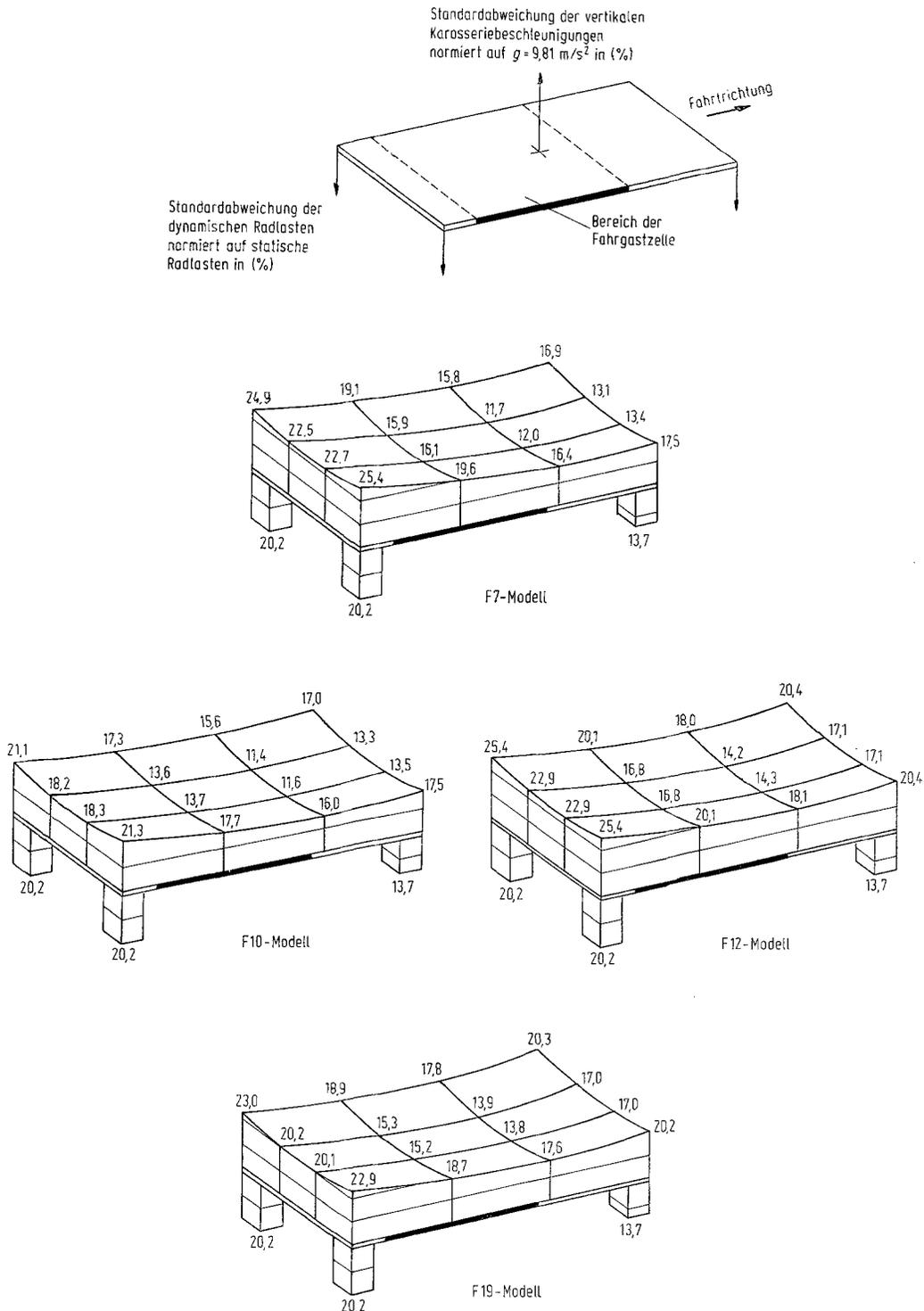
F12-Modell

$f_H = 0,74$  Hz  
 $f_N = 1,09$  Hz  
 $f_W = 1,16$  Hz



F19-Modell

Bild 8. Fahrzeugmodelle mit Aufbaueigenfrequenzen



**Bild 9.** Standardabweichungen für Fahrgeschwindigkeit  $v = 25 \text{ m/s}$ , Fahrbahn mittlerer Qualität:  $S_0 = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ ,  $\beta_1 = 0,01 \text{ m}^{-1}$ ,  $\beta_2 = 0,05 \text{ m}^{-1}$ ,  $\alpha = 0,6$

nicht sinnvoll ist. Denn mit den Zwischenmodellen F 10 und F 12, die eine solch einseitige Modellierung darstellen, konnten im Vergleich zum komplexen F 19-Modell gegenüber dem einfachen F 7-Modell keine besseren Aussagen bezüglich des Fahrzeugkomforts und der Fahr-sicherheit gewonnen werden.

Ein mechanisches Ersatzmodell wird also im allgemeinen immer nur so gut sein, wie die am größten modellierte Teilkomponente des Gesamtmodells. Im hier vorliegenden Fall bedeutet dies,

daß eine Verfeinerung des einfachen räumlichen Modells (F 7) sinnvollerweise nicht auf die Zwischenmodelle F 10 oder F 12 führt, sondern die Untersuchung eines komplexen Modells (F 19) erforderlich macht. Da es heute möglich ist, mit Hilfe von modernen Rechenverfahren auch sehr komplexe Modelle zu behandeln, braucht der Übergang von einem einfachen zu einem komplexen Modell nicht gescheut werden.

Parallel zur verfeinerten Fahrzeugmodellierung hat die Verbesserung der mathematischen Beschreibung gemessener Fahrbahnen zu erfolgen. So wurde in dieser Arbeit gezeigt, daß die Korrelation paralleler Fahrspuren mit Hilfe von Formfilterbeziehungen berücksichtigt werden kann.

Es konnten hier sicher nicht alle Probleme aufgezeigt werden, denn es sollten keine Detailfragen angeschnitten werden, die einer kompakten Darstellung im Wege stehen. Deshalb wurde auf Erläuterungen zur Berechnung sowie auf das Abdrucken der teilweise recht umfangreichen Bewegungsgleichungen ebenso verzichtet, wie auf die Beschreibung der Kovarianzanalyse.

Mit dieser Arbeit sollten auch Entscheidungshilfen bei der Wahl eines geeigneten Ersatzmodells zur Simulation von stochastischen Fahrzeugschwingungen gegeben werden. Dabei wurde die wirtschaftliche Bedeutung einfacher Modelle im Vergleich zu einseitig verfeinerten Modellen deutlich. Verbesserte Simulationsergebnisse sind jedoch im allgemeinen nur durch gleichmäßige Verfeinerung bei der Modellierung von Fahrzeug und Fahrbahn zu erhalten.

## Literatur

1. Voy, C.: Die Simulation vertikaler Fahrzeugschwingungen. Fortschr. Ber. VDI-Z. R. 12, Nr. 30. Düsseldorf: VDI-Verlag 1977
2. Rill, G.: Grenzen der Kovarianzanalyse bei Weißem Geschwindigkeitsrauschen. Z. Angew. Math. Mech. erscheint demnächst
3. Schiehlen, W.; Kreuzer, E.: Rechnergestütztes Aufstellen der Bewegungsgleichungen gewöhnlicher Mehrkörpersysteme. Ing.-Arch. 46 (1977) 185—194
4. Schiehlen, W. O.; Kreuzer, E. J.: Symbolic Computerized Derivation of Equations of Motion. In: Magnus, K. (ed.): Dynamics of Multibody Systems. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1978
5. Kreuzer, E.: Symbolische Berechnung der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen. Fortschr. Ber. VDI-Z. R. 11, Nr. 32. Düsseldorf: VDI-Verlag 1979
6. Bormann, V.: Messungen von Fahrbahn-Unebenheiten paralleler Fahrspuren und Anwendung der Ergebnisse. Vehicle Syst. Dyn. 7 (1978) 65—81
7. Dodds, C. J.; Robson, J. D.: The Description of Road Surface Roughness. J. Sound Vibr. 31 (1973) 175—183
8. Kamash, K. M. A.; Robson, J. D.: The Application of Isotropy in Road Surface Roughness. J. Sound Vibr. 57 (1978) 89—100
9. Parkhilovski, J. G.: Investigations of the probability characteristics of the surfaces of distributed types of roads. Avtomob. Prom. 8 (1968) 18—22
10. Müller, P. C.; Popp, K.; Schiehlen, W. O.: Berechnungsverfahren für stochastische Fahrzeugschwingungen. Ing.-Arch. 49 (1980) 235—254
11. Müller, P. C.; Popp, K.: Kovarianzanalyse von linearen Zufallsschwingungen mit zeitlich verschobenen Erregerprozessen. Z. Angew. Math. u. Mech. 59 (1976) T 144—146
12. Smith, R. A.: Matrix Equation  $XA + BX = C$ . SIAM J. Appl. Math. 16 (1968) 198—201
13. Müller, P. C.; Schiehlen, W. O.: Lineare Schwingungen. Wiesbaden: Akad. Verlagsgesellschaft 1976

*Eingegangen am 13. August 1981*

Dr.-Ing. E. Kreuzer

Dipl.-Ing. G. Rill

Institut B für Mechanik

Universität Stuttgart

Pfaffenwaldring 9

D-7000 Stuttgart 80

Bundesrepublik Deutschland