Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 2, 69—74 (1963)

Eine Bemerkung zur Kennzeichnung der charakteristischen Funktionen*

Von

GIORGIO LETTA

Bekanntlich kann die Menge der charakteristischen Funktionen, d. h. die Menge der Fourier-Stieltjes-Transformierten der Verteilungsfunktionen, durch die funktionellen Eigenschaften beschrieben werden, die die zu ihr gehörenden Funktionen besitzen.

Von grundlegender Bedeutung ist in diesem Zusammenhang der Begriff der „nichtnegativen Definitheit" und der Satz von S. BOCHNER (siehe [1], S. 207), nach dem eine für alle reellen Zahlen definierte komplexwertige stetige und beschränkte Funktion f dann und nur dann eine charakteristische Funktion ist, wenn sie nichtnegativ definit und $f(0) = 1$ ist.

Andere Kriterien entstehen hieraus durch Spezialisierung der in der Definition von nichtnegativer Definitheit auftretenden unbestimmten Funktion. Zum Beispiel gilt der Satz, daß eine für alle reellen Zahlen definierte komplexwertige Funktion f genau dann eine charakteristische Funktion ist, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt (vgl. [2], S. 324):

(a) f ist beschränkt.

(b) f ist stetig mit $f(0) = 1$.

(c) Es ist

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u-v)\, e^{-i(u-v)x-a(u+v)}\, du\, dv \geqq 0$$

für alle reellen x und genügend kleine $a > 0$.

In einem anderen Kriterium wird (c) durch die folgende Bedingung (c′) ersetzt (vgl. [1], S. 208):

(c′) Es ist

$$\int_0^b\int_0^b f(u-v)\, e^{-i(u-v)x}\, du\, dv \geqq 0$$

für alle reellen x und genügend große $b > 0$.

In [2] und weniger ausdrücklich auch in [1] wird bemerkt, daß die L-meßbare Funktion f jedenfalls L-fast gleich einer charakteristischen Funktion ist, wenn sie die Eigenschaften (a) und (c), bzw. (a) und (c′), besitzt und dabei stetig im Nullpunkt ist mit $f(0) = 1$.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir unter Verzicht auf Stetigkeitsforderungen notwendige und hinreichende Bedingungen für die L-fast-Übereinstimmung einer

* Herrn Prof. Dr. H. RICHTER bin ich für Hinweise während der Abfassung dieser Arbeit dankbar.

gegebenen Funktion mit einer charakteristischen Funktion und damit Ergebnisse beweisen, die die zwei erwähnten Kriterien enthalten.

Zunächst betrachten wir ein Kriterium (2.1) für die L-fast-Übereinstimmung einer gegebenen Funktion mit einer charakteristischen Funktion für den besonderen Fall, daß die fragliche Funktion L-summierbar ist. Dabei wird die Bedingung $f(0) = 1$ durch die Forderung ersetzt, daß das unbestimmte Integral von f im Nullpunkt links- und rechtsseitigen Ableitungen mit der Halbsumme Eins besitzt. Die Verallgemeinerung (2.2) auf den allgemeinen Fall geschieht dann durch Approximation von f durch eine Folge $(f g_n)$, wobei (g_n) eine passende gegen Eins konvergente Hilfsfolge von summierbaren charakteristischen Funktionen ist.

Durch Spezialisierung der Hilfsfolge (g_n) fließen aus diesem Kriterium verschiedene Spezialkriterien; insbesondere Verallgemeinerungen der zwei eingangs erwähnten für stetige Funktionen gültigen Kriterien auf den Fall der Meßbarkeit.

1.

Im folgenden bezeichnen wir mit R die Menge der reellen Zahlen und mit $\mathfrak{B}$ den σ-Körper der Borelschen Teilmengen von R.

Es gilt der folgende

(1.1) **Satz.** *Es sei (h_n) eine Folge von nichtnegativen in R definierten reellen Funktionen, wobei h_n für jedes n auf dem Intervall $(-\infty, u)$ monoton nichtfallend und auf dem Intervall $(u, +\infty)$ monoton nichtwachsend ist mit*

$$(1.2) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_x^y h_n(t)\,dt = 1 \quad \text{für} \quad -\infty \leqq x < u < y \leqq +\infty .$$

Die komplexwertige, in R definierte L-meßbare Funktion f sei auf der L-meßbaren Menge A beschränkt und auf $R - A$ L-summierbar; weiter besitze die Funktion $\hat{f}(x) = \int_u^x f(t)\,dt$ im Punkt u die Ableitung $f(u)$. Dann gilt

$$(1.3) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_R f(t)\,h_n(t)\,dt = f(u)\,.^{\star}$$

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß u nebst einer Umgebung zu $R - A$ gehört.

Gilt nun $|f(t)| \leqq c$ auf A mit $0 < c < \infty$, so liefert (1.2)

$$\Big|\int_A f(t)\,h_n(t)\,dt\Big| \leqq c \int_A h_n(t)\,dt \to 0\,.$$

Wir dürfen also $A = \emptyset$, d. h. f als summierbar annehmen.

Sind nun a, b fest gewählt mit $-\infty < a < u < b < \infty$, so gilt

$$(1.4) \qquad \int_R f(t)\,h_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^a f(t)\,h_n(t)\,dt + \int_a^b f(t)\,h_n(t)\,dt + \int_b^{+\infty} f(t)\,h_n(t)\,dt\,,$$

so daß wir nach dem Satz von P. I. ROMANOWSKI ([3], S. 317) nur die Beziehungen

$$(1.5) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^a f(t)\,h_n(t)\,dt = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \int_b^{+\infty} f(t)\,h_n(t)\,dt = 0$$

⋆ Für den Spezialfall, daß die Funktionen h_n und f außerhalb eines festen endlichen Intervalls verschwinden, wurde dieser Satz bereits von P. I. ROMANOWSKI bewiesen.

zu beweisen brauchen. Ist $a < a' < u$, so gilt

$$\left| \int_{-\infty}^{a} f(t)\, h_n(t)\, dt \right| \leqq h_n(a) \int_{-\infty}^{a} |f(t)|\, dt \leqq \frac{1}{a' - a} \int_{a}^{a'} h_n(t)\, dt \cdot \int_{-\infty}^{a} |f(t)|\, dt,$$

woraus die erste Beziehung von (1.5) folgt; die zweite ergibt sich analog.

Den Satz (1.1) werden wir auch in der folgenden Gestalt verwenden.

(1.6) **Satz.** *Wird in* (1.1) *von* $\hat{f}$ *lediglich die Existenz der links- und der rechtsseitigen Ableitung gefordert und wird* (1.2) *durch die stärkere Annahme ersetzt, daß es zwei Zahlen* a, b *gibt mit* $a + b = 1$ *und*

$$\lim_n \int_x^u h_n(t)\, dt = a \quad \text{für} \quad -\infty \leqq x < u, \quad \lim_n \int_u^y h_n(t)\, dt = b \quad \text{für} \quad u < y \leqq +\infty,$$

so gilt statt (1.3) *die Beziehung*

$$\lim_n \int_R f(t)\, h_n(t)\, dt = a f_*(u) + b f^*(u), \tag{1.7}$$

wobei $f_*(u)$ *bzw.* $f^*(u)$ *die links- bzw. rechtsseitige Ableitung von* $\hat{f}$ *in* u *bedeuten.*

Beweis. Setzen wir

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für} \quad t < u \\ f_*(u) & \text{für} \quad t \geqq u, \end{cases} \qquad f^0(t) = \begin{cases} f^*(u) & \text{für} \quad t \leqq u \\ f(t) & \text{für} \quad t > u \end{cases}$$

und wenden wir (1.1) auf die Funktionen f_0, $h_n \cdot \chi_{(-\infty,\, u)}$, bzw. auf f^0, $h_n \cdot \chi_{(u,\, +\infty)}$ an, so erhalten wir zwei Gleichungen, aus denen sich (1.7) durch Addition ergibt.

2.

Eine *Verteilung* ist ein normiertes Maß auf $\mathfrak{B}$. Die *charakteristische Funktion* der Verteilung μ ist die komplexwertige in R definierte Funktion

$$f(u) = \int_R e^{iux}\, d\mu(x).$$

Eine komplexwertige in R definierte Funktion f nennen wir eine charakteristische Funktion, wenn es eine Verteilung μ gibt, so daß f mit der charakteristischen Funktion von μ übereinstimmt.

Es gilt der folgende

(2.1) **Satz.** *Für die komplexwertige in* R *definierte und* L*-summierbare Funktion* f *sei definiert*

$$p(x) := \frac{1}{2\pi} \int_R e^{-itx} f(t)\, dt \quad \text{für} \quad x \in R.$$

1. Es ist f *dann und nur dann* L*-fast gleich einer charakteristischen Funktion, wenn* f *die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(a) *Die Funktion* $\hat{f}(t) = \int_0^t f(x)\, dx$ *besitzt im Nullpunkt die links- und die rechtsseitige Ableitung* $f_*(0)$ *und* $f^*(0)$ *mit* $\frac{1}{2}(f_*(0) + f^*(0)) = 1$.

(b) *Es ist* $p(x) \geqq 0$ *für jedes* $x \in R$.

2. Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt $\int\limits_R p(x)\,dx = 1$ *und* f *ist L-fast gleich der charakteristischen Funktion der durch die Dichte* p *definierte Verteilung.*

Beweis. 1. Die Notwendigkeit von (a) und (b) ist bekannt, so daß nur das Hinreichen zu zeigen ist. Dabei beachten wir die Beschränktheit von p.

2. Es ist für jedes $u \in R$ und jedes natürliche n:

$$\begin{aligned}\int\limits_R e^{iux}\,p(x)\,e^{-\frac{1}{n}|x|}\,dx &= \int\limits_R e^{iux}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_R e^{-itx} f(t)\,dt\right] e^{-\frac{1}{n}|x|}\,dx \\ (*) \qquad &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_R dt\, f(t) \int\limits_R e^{i(u-t)x-\frac{1}{n}|x|}\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_R f(t)\,\frac{n}{n^2+(t-u)^2}\,dt\,.\end{aligned}$$

Im Falle $u = 0$ bilden die Integranden in (*) links wegen (b) eine nichtfallende Folge von summierbaren Funktionen. Gemäß (1.6) und wegen (a) haben wir also

$$\begin{aligned}\int\limits_R p(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int\limits_R p(x)\,e^{-\frac{1}{n}|x|}\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_R f(t)\,\frac{n}{n^2+t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\,(f_*(0)+f^*(0)) = 1\,.\end{aligned}$$

Somit dürfen wir in (*) nach dem Satz von Lebesgue unter dem Integralzeichen zu $n \to \infty$ übergehen und damit ergibt sich gemäß (1.1)

$$\int\limits_R e^{iux}\,p(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_R e^{iux}\,p(x)\,e^{-\frac{1}{n}|x|}\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_R f(t)\,\frac{n}{n^2+(t-u)^2}\,dt = f(u)$$

für fast jedes $u \in R$*; w. z. b. w.

Aus dem soeben bewiesenen Satz entnehmen wir nun den folgenden

(2.2) **Satz.** *Es sei* (g_n) *eine gegen Eins konvergente Folge von reellen und summierbaren charakteristischen Funktionen, so daß für jedes* n g_n *monoton nichtfallend in einer linken Umgebung und monoton nichtwachsend in einer rechten Umgebung von* 0 *ist.*

Die komplexwertige in R *definierte Funktion* f *ist dann und nur dann L-fast gleich einer charakteristischen Funktion, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:*

(a) f *ist L-meßbar.*

(b) f *ist auf der L-meßbaren Menge* A *beschränkt und auf* $R - A$ *L-summierbar, wobei* A *bis auf eine L-Nullmenge eine Umgebung von* 0 *enthält.*

(c) *Die Funktion* $\hat{f}(t) = \int\limits_0^t f(x)\,dx$ *besitzt im Nullpunkt die links- und die rechtsseitige Ableitung* $f_*(0)$ *und* $f^*(0)$ *mit* $\frac{1}{2}(f_*(0)+f^*(0)) = 1$.

(d) *Es ist*

$$\int\limits_R e^{itx} f(t)\,g_n(t)\,dt \geqq 0$$

für jedes $x \in R$ *und jedes* n.

Beweis. Ist f L-fast gleich einer charakteristischen Funktion, so sind die Bedingungen (a), (b), (c) offenbar erfüllt und dabei ist die summierbare Funktion fg_n

---

* Vergleiche hierzu [3], Seite 280, Satz 2.

L-fast gleich einer charakteristischen Funktion ([2], (6.22), S. 292), so daß gemäß (2.1) die Bedingung (d) ebenfalls erfüllt ist.

Nun nehmen wir umgekehrt an, daß die Bedingungen (a), (b), (c), (d) erfüllt sind.

Für festes n wählen wir $a > 0$, so daß g_n monoton nichtwachsend in $(0, a)$ ist und $|f(t)| \leqq c < \infty$ für $t \in (0, a)$.

Bezeichnen wir mit μ_n das durch $-g_n$ in dem σ-Körper der Borelschen Teilmengen von $(0, a)$ erzeugte Maß, so haben wir durch zwei partielle Integrationen für jedes $u \in (0, a)$

$$\int_0^u f(t)\, g_n(t)\, dt = \hat{f}(u)\, g_n(u) + \int_0^u \hat{f}\, d\mu_n ,$$

wobei gilt:

$$\Big|\int_0^u \hat{f}\, d\mu_n\Big| \leqq c \int_0^u t\, d\mu_n(t) = c\Big[\int_0^u g_n(t)\, dt - u g_n(u)\Big].$$

Hieraus folgt unmittelbar wegen Voraussetzung (c):

$$\lim_{u \downarrow 0} \frac{1}{u} \int_0^u f(t)\, g_n(t)\, dt = f^*(0). \tag{2.3a}$$

Völlig analog ergibt sich die Beziehung

$$\lim_{u \uparrow 0} \frac{1}{u} \int_0^u f(t)\, g_n(t)\, dt = f_*(0). \tag{2.3b}$$

Dann folgt aus (2.1) für jedes n, daß $f g_n$ L-fast gleich einer charakteristischen Funktion ist. Wegen $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f(t)\, g_n(t)$ für $t \in R$ ist dann auch f L-fast gleich einer charakteristischen Funktion; w.z.b.w.

Bemerkung. Der voranstehende Satz ist auch dann gültig, wenn die charakteristischen Funktionen g_n komplexwertig sind, sofern die Voraussetzung der lokalen Monotonie durch die der lokalen *Dehnungsbeschränktheit* der Funktionen g_n im Nullpunkt ersetzt wird. Man darf in diesem Falle sogar bei Voraussetzung (b) die Einschränkung „wobei A bis auf eine L-Nullmenge usw.“ streichen.

Man überzeugt sich leicht hiervon, wenn man bemerkt, daß unter diesen neuen Voraussetzungen die Beziehungen (2.3a) und (2.3b) noch erfüllt sind, weil für jedes n und genügend kleines $u \neq 0$ gilt:

$$\int_0^u f(t)\, g_n(t)\, dt = \hat{f}(u)\, g_n(u) - \int_0^u \hat{f}(t)\, g_n'(t)\, dt$$

mit

$$\left|\frac{1}{u} \int_0^u \hat{f}(t)\, g_n'(t)\, dt\right| \leqq c_n \frac{1}{u} \int_0^u |\hat{f}(t)|\, dt ,$$

wobei c_n von u unabhängig ist.

Beispiele 1⁰. Es sei

$$g_n(t) := e^{-a_n|t|} \quad \text{mit} \quad 0 < a_n < \infty \quad \text{und} \quad \lim_n a_n = 0 .$$

Die g_n sind charakteristische Funktionen zu Cauchy-Verteilungen und erfüllen offenbar die Forderungen von (2.2). Die Bedingung (d) lautet nun

$$0 \leqq \int_R e^{itx} f(t)\, e^{-a_n|t|}\, dt = a_n \int_R dt \int_{|t|}^{+\infty} e^{itx} f(t)\, e^{-a_n s}\, ds$$
$$= 2\, a_n \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(u-v)\, e^{i(u-v)x - a_n(u+v)}\, du\, dv\,.$$

Damit haben wir ein Kriterium, welches das erste der zwei eingangs erwähnten Kriterien enthält.

2°. Setzen wir dagegen

$$g_n(t) := \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{b_n} & \text{für} \quad |t| \leqq b_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{mit} \quad 0 < b_n < \infty \quad \text{und} \quad \lim_n b_n = \infty\,,$$

so bekommt (d) die Form

$$0 \leqq \int_{-b_n}^{b_n} e^{itx} f(t) \left(1 - \frac{|t|}{b_n}\right) dt = \frac{1}{b_n} \left[\int_0^{b_n} dt\, e^{itx} f(t) \int_0^{b_n - t} dv + \int_{-b_n}^{0} dt\, e^{itx} f(t) \int_{-t}^{b_n} dv \right]$$
$$= \frac{1}{b_n} \int_0^{b_n} \int_0^{b_n} f(u-v)\, e^{i(u-v)x}\, du\, dv\,,$$

so daß ein Kriterium entsteht, das insbesondere das zweite der eingangs genannten einschließt.

Literatur

[1] LOÈVE, M.: Probability Theory. New York: Van Nostrand 1955.
[2] RICHTER, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1956.
[3] NATANSON, I. P.: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1961.

Istituto Matematico
Università, Pisa/Italia

(Eingegangen am 22. November 1962)