Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
67, 265-278 (1984)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Loi des grands nombres et perturbations pour des produits réductibles de matrices aléatoires indépendantes

H. Hennion

Département de Mathématiques, Université de Rennes, Campus de Beaulien,
F-35042 Rennes cedex, France

Soit $X=(X_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de matrices aléatoires réelles $d\times d$ indépendantes de même loi μ satisfaisant à:

$$\mathbb{E}[\mathrm{Log}^+\|X_n\|]<+\infty$$

le théorème de Furstenberg et Kesten [3] prouve l'existence d'une constante $\gamma(\mu)$ de $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ telle que p.s.:

$$\lim_n \frac{1}{n}\mathrm{Log}\,\|X_n\dots X_1\|=\gamma(\mu).$$

Dans les applications de ce résultat à la physique théorique, par exemple [7], la connaissance de μ peut n'être qu'approximative et ceci pose le problème de la stabilité de γ sous une perturbation de μ. Pour préciser l'objet de cette étude, notons que γ n'est pas une fonction continue de μ pour la topologie faible et un aspect du problème précédent est de formuler des hypothèses sur la suite de probabilités $(\mu_k)_k$ pour que $\lim_k \gamma(\mu_k)=\gamma(\mu)$.

Il apparaît de fait que cette convergence est intimement liée au comportement asymptotique de la suite $\left(\frac{1}{n}\mathrm{Log}\,\|X_n\dots X_1 x\|\right)_n$ où x est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$. L'étude de ce comportement constitue la première partie de ce travail, elle amène à la généralisation d'un énoncé de Furstenberg [2]. Les résultats obtenus nous permettent ensuite de donner des conditions sur la probabilité m pour la convergence de $\gamma(\mu_s)$ vers $\gamma(\mu)$ lorsque $\mu_s=(1-s)\,\mu+sm$ et que s tend vers 0; particularisant au cas où μ est ponctuelle et où m est la mesure de Haar du groupe des rotations de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, nous obtenons un développement limité au voisinage de 0 de la fonction $\Gamma(s)=\gamma(\mu_s)$ qui montre que Γ n'est pas toujours dérivable en 0.

Notons que la question de la convergence de $\gamma(\mu_k)$ vers $\gamma(\mu)$ a été abordée par Kifer et Slud [5, 12, 6] dans des situations où le support de μ est compact et où la distance du support de μ_k au support de μ tend vers 0, ce qui n'est pas le cas ici. La méthode de regroupement des termes utilisée dans la Proposition 3 est empruntée à l'étude d'un comportement asymptotique de γ menée par Pincus [10] qui n'en avait cependant pas mis en évidence les conséquences pour les probabilités invariantes.

Depuis la première rédaction de cet article Furstenberg et Kifer m'ont signalé qu'ils avaient obtenu un résultat semblable au Théorème 1 par des techniques sensiblement différentes [4].

Dans ce qui suit E est un espace vectoriel réel de dimension finie éventuellement muni d'une structure euclidienne et $\tilde{E}$ l'espace projectif associé, on note $\tilde{x}$, $\tilde{F}$ les images dans $\tilde{E}$ d'un vecteur $x \in E \setminus \{0\}$ et d'un sous-espace F de E avec la convention $\{\tilde{o}\} = \emptyset$. $Gl(E)$ est le groupe des automorphismes de $E, g \cdot \xi \in \tilde{E}$ le transformé par $g \in Gl(E)$ de $\xi \in \tilde{E}$ et ρ le cocycle multiplicatif sur $Gl(E) \times \tilde{E}$ obtenu par factorisation de la fonction $q, q(g,x) = \|gx\| \cdot \|x\|^{-1}$ de $Gl(E) \otimes (E \setminus \{0\})$ dans $\mathbb{R}$, on rappelle que, pour $g \in Gl(E)$, $\xi \in \tilde{E}$

$$|\rho(g,\xi)| \leqq \exp L(g) \tag{1}$$

où L, définie par

$$L(g) = \sup\{\log^+ \|g\|, \log^+ \|g^{-1}\|\}$$

satisfait à $L(g_1 g_2) \leqq L(g_1) + L(g_2)$.

On note $\mathscr{M}$ l'ensemble des probabilités sur $Gl(E)$ intégrant L et $\tilde{\mathscr{M}}$ l'ensemble des probabilités sur $\tilde{E}$, $\tilde{\mathscr{M}}$ et $\mathscr{M}$ sont munis de la topologie faible pour laquelle $\tilde{\mathscr{M}}$ est compact. L'action de $Gl(E)$ sur $\tilde{E}$ permet de définir la convolution de $\mu \in \mathscr{M}$ et $v \in \tilde{\mathscr{M}}$, $I(\mu)$ est alors le convexe compact des éléments μ-invariants de $\tilde{\mathscr{M}}$ et, pour $v \in I(\mu)$ on pose:

$$\gamma(\mu, v) = \int \operatorname{Log} \rho(g,\xi)\, \mu(dg)\, v(d\xi).$$

Si $X = (X_n)_{n=1}^{\infty}$, est une suite de variables aléatoires (v.a.) indépendantes de loi $\mu \in \mathscr{M}$, on note X^n le produit $X_n \dots X_1$ et $\gamma(\mu)$ ou $\gamma(X)$ la limite p.s. de la suite $\left(\frac{1}{n} \operatorname{Log} \|X^n\|\right)_n$.

μ^l désigne la puissance de convolution μ^{*l} et G_μ le sous-groupe fermé de $Gl(E)$ engendré par le support de μ; X_n, μ ou G_μ sont dits réductibles si tous les éléments de G_μ laissent invariant un même sous-espace de E distinct de $\{0\}$ et E.

§ I. Loi des grands nombres

1. Remarque sur les exposants caracteristiques dans le cas reductible

Soit $X = (X_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de v.a. indépendantes de loi $\mu \in \mathscr{M}$, le théorème d'Oseledec [11, 8] s'énonce:

Théorème. *Sur un ensemble de probabilité 1*

(i) $(X^{n*}X^n)^{1/2n}$ *converge vers un automorphisme symétrique A dont les valeurs propres $e^{\lambda_1}<e^{\lambda_2}<\ldots<e^{\lambda_r}$ sont constantes ainsi que leurs multiplicités; on note $(U_i)_{i=1}^r$ les sous-espaces propres associés;*

(ii) *Posons $V_0=\{0\}$ et, pour $i=1\ldots r$, $V_i=\bigoplus_{j=1}^{i} U_j$ alors, pour $i=1\ldots r$ et $x\in V_i\setminus V_{i-1}$*

$$\lim_n \frac{1}{n}\operatorname{Log}\|X^n x\|=\lambda_i.$$

Les réels λ_i sont les exposants caractéristiques de X, $\mathscr{S}(X)=\{\lambda_i: i=1\ldots r\}$ est appelé spectre de X et $(V_i)_{i=0}^r$ le drapeau associé; on a $\lambda_r=\gamma(X)$. Lorsque X_n est réductible la détermination de $\mathscr{S}(X)$ est facilité par:

Proposition 1. *Soit F un sous-espace de E tel que p.s. $X_r(F)\subset F$ et $A=(A_n)_{n=1}^\infty$, $\bar{X}=(\bar{X}_n)_{n=1}^\infty$ les suites induites par l'action de X sur F et E/F alors*

$$\mathscr{S}(X)=\mathscr{S}(A)\cup\mathscr{S}(\bar{X}).$$

En particulier $\gamma(X)=\sup\{\gamma(A),\gamma(\bar{X})\}$.

On en déduit immédiatement:

Corollaire 1. *Soit $X=(X_n)_{n=1}^\infty$ une suite de matrices aléatoires indépendantes identiquement distribuées, inversibles, triangulaires de dimension d telle que: $\mathbb{E}[L(X_1)]<+\infty$, si A_n^k est le k-ième terme diagonal de X_n, alors*

$$\mathscr{S}(X)=\{\mathbb{E}[\operatorname{Log}|A_n^k|]: k=1\ldots d\}.$$

Preuve de la Proposition 1. Elle repose sur la remarque suivante conséquence du point (i) du théorème précédent: si $\tilde{X}_n=(X_n^*)^{-1}$ le spectre de $\tilde{X}=(\tilde{X}_n)_{n=1}^\infty$ est $\mathscr{S}(X)=-\mathscr{S}(X)=\{-\lambda_{r-i+1}: i=1\ldots r\}$ et le drapeau associé est $(V_{r-i}^\perp)_{i=0}^r$.

Identifions alors E/F à $H=F^\perp$ et soit $B=(B_n)_{n=1}^\infty$ la suite d'automorphismes aléatoires de H associée à $\bar{X}$ dans cette identification, on note que p.s. $\tilde{X}_n$ laisse stable H et que sa restriction à ce sous-espace est $\tilde{B}_n=(B_n^*)^{-1}$.

On a clairement $\mathscr{S}(A)\subset\mathscr{S}(X)$ et $\mathscr{S}(\tilde{B})\subset\mathscr{S}(\tilde{X})$ donc $\mathscr{S}(A)\cup\mathscr{S}(B)\subset\mathscr{S}(X)$. Inversement, soit $\lambda_i\in\mathscr{S}(X)$, si $\lambda_i\notin\mathscr{S}(A)$ on a $F\cap V_i\subset V_{i-1}$ soit $H+V_i^\perp\supset V_{i-1}^\perp$, puisque $V_{i-1}^\perp\supset V_i^\perp$ on en déduit que $(V_{i-1}^\perp\setminus V_i^\perp)\cap H\neq\{0\}$ donc $-\lambda_i\in\mathscr{S}(\tilde{B})=-\mathscr{S}(B)$ d'où $\mathscr{S}(X)\subset\mathscr{S}(A)\cup\mathscr{S}(B)$.

Remarques. Les énoncés précédents restent valides lorsque l'hypothèse d'indépendance est remplacée par celle de stationarité et d'ergodicité.

2. Loi des grands nombres pour $(\|X^n x\|)_n$

Soit $X=(X_n)_{n=1}^\infty$ une suite de v.a. indépendantes de même loi $\mu\in\mathscr{M}$.

Théorème 1. *Il existe un entier r, $r\geqq 1$, une suite strictement croissante de réels $(\lambda_i)_{i=1}^r$ et une suite strictement croissante de sous-espaces de E stables par G_μ, $(F_i)_{i=0}^r$ avec $F_0=\{0\}$ et $F_r=E$, tels que, pour $i=1\ldots r$, si $x\in F_i\setminus F_{i-1}$ on a p.s.*

$$\lim_n \frac{1}{n}\operatorname{Log}\|X^n x\|=\lambda_i.$$

De plus, si, pour $i=1\dots r$ *et* $\eta>0$, *on note*

$$B_i^\eta=\{x: x\in F_i,\ \|x\|=1;\ \inf\{\|x-y\|: y\in F_{i-1}\}\geqq\eta\}$$

on a, uniformément sur B_i^η

$$\lim_n \frac{1}{n}\,\mathbb{E}[\operatorname{Log}\|X^n x\|]=\lambda_i.$$

Corollaire 2. *Pour* $i=1\dots r$ *il existe* $\nu\in I(\mu)$ *telle que*

$$\lambda_i=\gamma(X^{(i)})=\gamma(\mu,\nu)$$

où $X^{(i)}$ *désigne la restriction de* X *à* F_i; *de plus, pour* $\nu\in I(\mu)$ *telle que* $\operatorname{supp}(\nu)\subset F_i$ *on a* $\lambda_i=\gamma(\mu,\nu)$ *si et seulement si* $\nu(\tilde{F}_{i-1})=0$.

Les λ_i *sont des exposants caractéristiques de* X.

Preuve du Théorème 1. Nous utiliserons à plusieurs reprises les assertions des deux lemmes préliminaires ci-dessous.

Lemme 1. (i) *pour tout* $x\in E\setminus\{0\}$, $\overline{\lim}\,\frac{1}{n}\operatorname{Log}\|X^n x\|\leqq\gamma(X)$ p.s. (2)

(ii) *si, pour tout* $x\in E\setminus\{0\}$, $\overline{\lim}\,\frac{1}{n}\operatorname{Log}\|X^n x\|<\gamma$ p.s. *alors* $\gamma(X)<\gamma$ (3)

Preuve du Lemme 1. (i) est clair. Etablissons (ii).

Soit $(f_i)_{i=1}^l$ une base de E, pour $n\geqq 1$, notons

$$\Omega_i^n=\left\{\omega: \overline{\lim_k}\,\frac{1}{k}\operatorname{Log}\|X^k(\omega)f_i\|\leqq\gamma-\frac{1}{n}\right\}\qquad\text{et}\quad \Omega^n=\bigcap_{i=1}^{l}\Omega_i^n,$$

par hypothèse $\lim_n P(\Omega_i^n)=1$ donc aussi $\lim_n P(\Omega^n)=1$, choisissons n_0 tel que $P(\Omega^{n_0})>0$; pour presque tout $\omega\in\Omega^{n_0}$ on a par définition de $\gamma(X)$ et par l'équivalence des normes sur F

$$\gamma(X)=\lim_k\frac{1}{k}\operatorname{Log}\|X^k(\omega)\|=\lim_k\frac{1}{k}\operatorname{Log}\big(\sup_{i=1\dots l}\|X^k(\omega)f_i\|\big)$$

$$\leqq\sup_{i=1\dots l}\ \overline{\lim_k}\ \frac{1}{k}\operatorname{Log}\|X^k(\omega)f_i\|\leqq\gamma-\frac{1}{n_0}$$

ce qui achève la preuve du Lemme 1.

Lemma 2. *Soit* $(x_n)_{n=1}^\infty$ *une suite d'éléments normés de* E, *il existe une sous-suite* $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ *et* $\nu\in I(\mu)$ *tels que*

$$\lim_k\frac{1}{n_k}\,\mathbb{E}[\operatorname{Log}\|X^{n_k}x_{n_k}\|]=\gamma(\mu,\nu).$$

Preuve du Lemme 2. Soit $(\xi_n)_n$ l'image dans $\tilde{E}$ de $(x_n)_n$ et

$$\nu_n=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\mu^l*\delta_{\xi_n},$$

par compacité on peut extraire une sous-suite $(\nu_{n_k})_k$ convergeant faiblement vers ν qui est alors μ-invariante.

D'après l'inégalité (1), la fonction

$$\bar{\rho}(\xi)=\int \operatorname{Log} \rho(g,\xi)\,\mu(dg)$$

est continue, par suite en tenant compte de la propriété de cocycle de ρ

$$\lim_k \frac{1}{n_k} \sum_{l=0}^{n_k-1} \int \operatorname{Log} \rho(g, g'\cdot\xi_{n_k})\,\mu(dg)\,\mu^l(dg')=\gamma(\mu,\nu)$$

la démonstration du lemme est complète.

La preuve du théorème se fait par récurrence sur la dimension de E en utilisant le

Lemme 3. *Soit*

$$F=\left\{x:\overline{\lim_n}\,\frac{1}{n}\operatorname{Log}\|X^n x\|<\gamma(X)\text{ p.s.}\right\}$$

F est un sous-espace strict de E, stable par G_μ; en notant A la restriction à F de X on a $\gamma(A)<\gamma(X)$.

Preuve du Lemme 3. Il est clair que F est un sous-espace de E.

Pour $x\in E$ notons

$$\Omega_x=\left\{\omega:\overline{\lim_n}\,\frac{1}{n}\operatorname{Log}\|X^n(\omega)x\|<\gamma(X)\right\}.$$

Identifions l'espace canonique $(\Omega,\mathscr{F},P)$ de la suite $(X_n)_n$ au produit $Gl(E),\mathscr{B},\mu)\otimes(\Omega,\mathscr{F},P)$ où $\mathscr{B}$ est la tribu borélienne de $(Gl(E)$, par l'application $\Phi(\omega)=(X_1(\omega),\theta\,\omega)$, où θ est l'opérateur de décalage.

Pour $x\in F$ l'égalité $P(\Omega_x)=1$ implique, d'après le théorème de Fubini, que, pour μ-presque tout $g\in Gl(E)$

$$P\{\omega:(g,\omega)\in\Omega_x\}=1$$

donc $\overline{\lim_n}\,\frac{1}{n}\operatorname{Log}\|X_{n-1}(\omega)\dots X_1(\omega)\,g\,x\|<\gamma(X)$ sur un ensemble de probabilité 1, c'est-à-dire $\mu(\{g:\,g\,x\in F\})=1$.

Puisque $\{g:g\,x\in F\}$ est fermé, on en déduit qu'il contient $\operatorname{supp}(\mu)$, de sorte que F est stable par G_μ.

L'inégalité annoncée résulte de (3) appliquée à A.

(i) Si $F=\{0\}$, pour tout $x\in E\setminus\{0\}$, on a sur un ensemble de probabilité strictement positive:

$$\overline{\lim_n}\,\frac{1}{n}\operatorname{Log}\|X^n(\omega)x\|=\gamma(X)$$

tandis que, d'après le théorème ergodique, pour tout ν extrémale dans $I(\mu)$,

$$\lim_n \frac{1}{n}\operatorname{Log}\|X^n(\omega)x\|=\gamma(\mu,\nu)$$

pour $(\omega, \tilde{x})$ dans un ensemble de $P \otimes \nu$ mesure 1, (cf. [2]), il en résulte que pour tout ν extrémale et, par suite:

$$\text{pour tout } \nu \in I(\mu), \qquad \gamma(\mu, \nu) = \gamma(\mu). \tag{4}$$

Supposons qu'il existe $x_0 \in E \setminus \{0\}$ tel que $\overline{\lim} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|X^n x_0\| < \gamma(x)$ sur un ensemble de probabilié strictement positive, d'après (2),

$$\lim \frac{1}{n} \mathbb{E}[\operatorname{Log} \|X^n x_0\|] \leqq \mathbb{E}\left[\overline{\lim} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|X^n x_0\|\right] < \gamma(X)$$

mais alors le Lemme 2 avec $x_n = x_0$ permettait de construire $\nu \in I(\mu)$ telle que $\gamma(\mu, \nu) < \gamma(\mu)$ en contradiction avec (4); on conclut que, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\overline{\lim} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|X^n x\| = \gamma(X)$ p.s.

Par ailleurs, le théorème d'Oseledec montre que la limite p.s. de $\left(\frac{1}{n} \operatorname{Log} \|X^n x\|\right)_n$ existe, elle est donc égale à $\gamma(X)$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Pour achever l'étude de ce cas, notons que, d'après l'inégalité (1), la convergence ci-dessus a aussi lieu en moyenne, reprenant un argument de [9], nous concluons par le Lemme 2 et (4) à la convergence uniforme sur la boule unité de $\left(\frac{1}{n} \mathbb{E}[\operatorname{Log} \|X^n x\|]\right)_n$.

(ii) Supposons $F \neq \{0\}$. Soient H un supplémentaire de F dans E, $A = (A_n)_{n=1}^{\infty}$ la restriction de X à F et $B = (B_n)_{n=1}^{\infty}$ l'image dans l'identification de H à E/F de la suite $\bar{X}$ induite par l'action de X sur E/F; l'hypothèse de récurrence s'applique à A et B.

Pour $y \in H \setminus \{0\}$ on a

$$\lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|B^n y\| = \gamma(X) \quad \text{p.s.}$$

En effet, dans le cas contraire, il existerait un sous-espace H' de H, $H' \neq \{0\}$ stable par le sous-groupe de $Gl(E)$ engendré par le support de la loi de B_n et une constante $\gamma' < \gamma(X)$ tels que, pour tout $y \in H'$

$$\overline{\lim_n} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|B^n y\| \leqq \gamma' \quad \text{p.s.};$$

mais alors $E' = F \oplus H'$ serait stable par G_μ et la Proposition 1 jointe à (3) permettraient de conclure que, si X' est la restriction de X à E' et B' la restriction de B à H', pour $x \in E'$,

$$\overline{\lim_n} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|X^n x\| \leqq \lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|X'^n\| = \max(\gamma(A), \gamma(B')) < \gamma(X)$$

donc $E' \subset F$ et $H' = \{0\}$.

Soit $x \notin F$ alors $x = y + z$, $y \in F$, $z \in H \setminus \{0\}$, en munissant $E = F \oplus H$ d'une norme somme

$$\underline{\lim_n} \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|X^n x\| \geqq \lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|B^n z\| = \gamma(X). \tag{5}$$

Il reste à remarquer que, d'une part, pour $x \in E$, $\|x\| = 1$, on a $\|X^n x\| \leqq \|X^n\|$ tandis que, d'autre part, d'après (i) appliqué à B on a uniformément pour $z \in H$, $\|z\| = 1$,

$$\lim_n \frac{1}{n} \mathbb{E}[\operatorname{Log} \|B^n z\|] = \gamma(X)$$

pour conclure par (5) à la convergence uniforme des moyennes dans les conditions de l'énoncé.

Preuve du Corollaire 2. L'égalité $\lambda_i = \gamma(X^{(i)})$ résulte immédiatement de (2) et (3), tandis que l'existence de $\nu \in I(\mu)$ telle que $\gamma(\mu, \nu) = \lambda_i$ est conséquence directe du Lemme 2.

Soit $\xi \in \tilde{E}$ le Théorème 1 s'écrit:

$$\lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} \rho(X^n, \xi) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i 1_{\tilde{F}_i \setminus \tilde{F}_{i-1}}(\xi) \quad \text{p.s.}$$

si $\nu \in I(\mu)$ l'inégalité (1) permet de justifier la formule

$$\gamma(\mu, \nu) = \lim_n \frac{1}{n} \int \nu(d\xi) \, \mathbb{E}[\operatorname{Log} \rho(X^n, \xi)] = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \nu(\tilde{F}_i \setminus \tilde{F}_{i-1})$$

qui prouve la seconde assertion.

Enfin le dernier point découle de la comparaison avec le théorème d'Oseledec.

§ II. Perturbations des produits de matrices

Dorénavant on notera F_μ le sous-espace F_{r-1} associé à la probabilité $\mu \in \mathcal{M}$ par l'énoncé du Théorème 1 et $\tilde{F}_\mu$ son image dans $\tilde{E}$.

1. Quelques conséquences générales de la loi des grands nombres

Soit $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}$ convergeant faiblement vers $\mu \in \mathcal{M}$ et satisfaisant à la condition d'équi-intégrabilité

$$\lim_{N \to +\infty} \sup_k \int_{\{g: \|g\| \geqq N\}} L(g) \, \mu_k(dg) = 0,$$

on sait que [5] dans ce cas, si la suite $(\nu_k)_{k=1}^{\infty}$, $\nu_k \in I(\mu_k)$ converge faiblement vers ν alors $\nu \in I(\mu)$ et

$$\lim_k \gamma(\mu_k, \nu_k) = \gamma(\mu, \nu).$$

On dira que $\mu \in \mathscr{F}$ si $\mu \in \mathscr{M}$ et si $\gamma(\mu, v)$ est indépendant de $v \in I(\mu)$; ceci est réalisé si $I(\mu)$ est réduit à un point où d'après le Corollaire 2 lorsque μ est irréductible i.e. lorsque G_μ ne laisse invariant aucun sous-espace strict de E autre que $\{0\}$.

Proposition 2. (i) *si* $\mu \in \mathscr{F}$ *alors* $\lim_k \gamma(\mu_k) = \gamma(\mu)$,

(ii) *si* $\mu_k \in \mathscr{F}$ *alors* $\lim_k \gamma(\mu_k) = \gamma(\mu)$ *si et seulement si toutes les valeurs d'adhérences des suites* $(v_k)_k$, $v_k \in I(\mu_k)$ *satisfont à* $v(\tilde{F}_\mu) = 0$.

Preuve de la Proposition 2. (i) en effet soit $v_k \in I(\mu_k)$ telle que $\gamma(\mu_k) = \gamma(\mu_k, v_k)$, pour toute sous-suite $(v_{k_l})_l$ convergeant vers v on a

$$\lim_l \gamma(\mu_{k_l}) = \lim_l \gamma(\mu_{k_l}, v_{k_l}) = \gamma(\mu, v) = \gamma(\mu)$$

on conclut par compacité de $\tilde{\mathscr{M}}$.

(ii) est obtenu par des arguments similaires en utilisant la caractérisation, fournie par le Corollaire 2 des $v \in I(\mu)$ telles que $\gamma(\mu) = \gamma(\mu, v)$.

2. *Etude d'une perturbation particulière*

Théorème 3. *Soient* μ *et* $m \in \mathscr{M}$ *telle que*

(i) *m est irréductible,*

(ii) *pour tout* $v \in I(\mu)\, m * v(\tilde{F}_\mu) = 0$, *alors si:*

$$\mu_s = (1-s)\,\mu + s\,m, \qquad 0 < s < 1$$

$$\lim_{s \to 0} \gamma(\mu_s) = \gamma(\mu).$$

Donnons deux exemples d'application de ce théorème.

1. Supposons $E = \mathbb{R}^2$ et $\mu_s = (1-s)\,\delta_a + s\,\delta_b$ où

$$a = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda > 1 \quad \text{et } b = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

les probabilités a-invariantes sur $\tilde{E}$ s'écrivent

$$v = p\,\delta_{\tilde{u}} + q\,\delta_{\tilde{v}}, \quad u = (1,0), \quad v = (0,1), \quad p \geqq 0, \quad q \geqq 0, \quad p + q = 1,$$

si $\theta \neq k\frac{\pi}{2}$, $\delta_b * v(\{\tilde{v}\}) = 0$ et $\lim_{s \to 0} \gamma(\mu_s) = \gamma(\delta_a) = \operatorname{Log}\lambda$; si $\theta = k\pi$ un calcul direct montre que ce résultat subsiste, ce qui n'est plus le cas [5] si $\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

2. Si m est une probabilité absolument continue de $\mathscr{M}$ les hypothèses (i) et (ii) sont vérifiées. En effet dans ce cas m est irréductible, de plus

$$m * v(\tilde{F}_\mu) = \int m(\{g : g \cdot \tilde{x} \in F_\mu\})\, v(d\tilde{x})$$

et, pour $x \neq 0$, $\{g : g\,x \in F_\mu\}$ est une sous-variété plongée de dimension $(\dim E)^2 - \dim F_\mu$ de $Gl(E)$ donc de mesure de Haar nulle.

Preuve du théorème. Elle repose sur la

Proposition 3. *Soit* $\mu_s \in \mathcal{M}$ *s'écrivant* $\mu_s = (1-s)\mu + s m$, $0 < s < 1$ *posons:*

$$\sigma_s = \sum_{k=0}^{\infty} s(1-s)^k \mu^k \qquad \text{et } \pi_s = m * \sigma_s$$

alors

(i) $\sigma_s \in \mathcal{M}$ *et pour toute fonction* f *sur* $Gl(E)$ *telle que*

$$|f(g)| \leqq A L(g), \qquad A \in \mathbb{R}_+$$

l'on a:

$$\int f(g) \sigma_s(dg) = \sum_{k=0}^{\infty} s(1-s)^k \int f(g) \mu^k(dg),$$

(ii) $\gamma(\mu_s) = s\gamma(\pi_s)$,
(iii) *si* $\nu_s \in I(\mu_s)$ *alors* $m * \nu_s \in I(\pi_s)$,
(iv) *si* m *est irréductible, il en est de même de* π_s.

Preuve de la Proposition 3. Etablissons d'abord le point (i).

Soit f telle que dans l'énoncé, pour $c > 0$ et tout $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leqq q$

$$\int \inf\{|f(g)|, c\} \cdot \sum_{k=p}^{q} s(1-s)^k \mu^k(dg) \leqq \sum_{k=p}^{q} s(1-s)^k \int |f(g)| \mu^k(dg)$$

passant à la limite en q, il vient

$$\int \inf\{|f(g)|, c\} \sum_{k=p}^{\infty} s(1-s)^k \mu^k(dg) \leqq A \left(\sum_{k=p}^{\infty} k s(1-s)^k\right) \cdot \int L(g) \mu(dg)$$

de l'arbitraire de c, il résulte que

$$\lim_{p \to +\infty} \int |f(g)| \sum_{k=p}^{\infty} s(1-s)^k \mu^k(dg) = 0.$$

(i) en découle.

Pour la suite de la preuve, introduisons quelques notations.

Soit $\mathscr{P}_0$ l'espace de probabilité $(\{0,1\} \times Gl(E), \mathscr{B}_0, P_0)$ où $\mathscr{B}_0$ est la tribu borélienne de $\{0,1\} \otimes Gl(\mathbb{E})$ et P_0 le produit semi-direct

$$P_0(A \times B) = (1-s)\delta_0(A)\mu(B) + s\delta_1(A) m(B).$$

On pose $\mathscr{P} = \mathscr{P}_0^{\mathbb{N}}$, l'on note θ l'opérateur de décalage sur $\mathscr{P}$ et (U_n, X_n) la projection de $\mathscr{P}$ sur son nième facteur; les v.a. X_n sont indépendantes de loi μ_s.

a) Posons

$$T_0 = 0$$
$$T_1 = \inf\{n : n \geqq 1, U_n = 1\},$$
$$T_{k+1} = T_k + T_1 \circ \theta_{T_k}, \qquad k \geqq 1;$$

les v.a. $(T_{k+1}-T_k)_{k=0}^{\infty}$ sont indépendantes de même loi géométrique d'espérance $\frac{1}{s}$.

Soit $Y_n = X_{T_n} \dots T_{T_{n-1}+1}$, $n \geqq 1$, ces v.a. sont indépendantes de même loi π_s; passons à la limite dans la relation

$$\frac{1}{T_n} \operatorname{Log} \|X_{T_n} \dots X_1\| = \frac{n}{T_n} \cdot \frac{1}{n} \operatorname{Log} \|Y_n \dots Y_1\|$$

en utilisant la loi des grands nombres pour T_n, il vient $\gamma(\mu_s) = s\,\gamma(\pi_s)$.

b) On se place maintenant sur $\mathscr{P}'$ trace de $\mathscr{P}$ sur $\{U_1 = 1\}$ et l'on pose

$$T' = \inf\{n : n \geqq 2, U_n = 1\}$$

T' est un temps d'arrêt pour la suite $(U_n)_{n=1}^{\infty}$.

Soit f mesurable bornée sur $\tilde{E}$ et $\nu \in I(\mu_s)$, notant $g(\nu)$ la mesure image de ν par $g \in Gl(E)$, $Z_n = X_1 \dots X_n(\nu)(f)$, $n \geqq 1$ est une martingale [2] sur $\mathscr{P}$, il en est de même de sa restriction à $\mathscr{P}'$ et, puisque f est bornée, le théorème d'arrêt permet d'écrire:

$$\mathbb{E}'[X_1 \dots X_{T'-1} X_{T'}(\nu)(f)] = \mathbb{E}'[X_1(\nu)(f)],$$

or dans $\mathscr{P}'$ la loi de $X_1 \dots X_{T'-1}$ est π_s tandis que celle de X_1 et $X_{T'}$ est m d'où l'égalité

$$\pi_s * m * \nu = m * \nu.$$

c) On a clairement $G_{\pi_s} \subset G_{\mu_s}$; inversement, si $g \in \operatorname{supp}(m)$, pour $h \in \operatorname{supp}(m * \mu) \subset G_{\pi_s}$, $gh \in \operatorname{supp}(m^2 * \mu) \subset G_{\pi_s}$ donc $g \in G_{\pi_s}$ et $\operatorname{supp}(m) \subset G_{\pi_s}$, de façon analogue $\operatorname{supp}(\mu) \subset G_{\pi_s}$; finalement $G_{\pi_s} = G_{\mu_s}$.

Etudions maintenant la convergence de $\gamma(\mu_s)$ lorsque s tend vers 0. Pour cela introduisons l'ensemble

$$B_\eta = \{\xi : \xi \in \tilde{E},\ d(\xi, \tilde{F}_\mu) \geqq \eta\}$$

où $\eta > 0$ et d est une distance sur $\tilde{E}$, et notons le

Lemme 4. *Soit $(C_k)_{k=0}$ une suite de réels telle que $\lim_k C_k = 0$ alors*

$$\lim_{s \to 0} s \sum_{k=0}^{\infty} s(1-s)^k k\, C_k = 0.$$

En utilisant la propriété de cocycle de ρ il vient, avec les notations de la proposition précédente

$$\gamma(\pi_s) = \gamma(m * \sigma_s, m * \nu_s) = \Gamma_1(s) + \Gamma_2(s)$$
$$\Gamma_1(s) = \int \operatorname{Log} \rho(g, \xi)\, m(dg)\, \sigma_s * m * \nu_s(d\xi)$$
$$\Gamma_2(s) = \int \operatorname{Log} \rho(g, \xi)\, \sigma_s(dg)\, m * \nu_s(d\xi).$$

Puisque Γ_1 est borné par

$$\int L(g)\, m(dg), \quad \lim_{s \to 0} s\, \Gamma_1(s) = 0, \tag{6}$$

d'autre part, le point (i) de la Proposition 2 permet d'écrire

$$s\Gamma_2(s)-(1-s)\gamma(\mu)=s\sum_{k=1}^{\infty} ks(1-s)^k \int m*\nu_s(d\xi)\int\left[\frac{1}{k}\operatorname{Log}\rho(g,\xi)-\gamma(\mu)\right]\mu^k(dg)$$

or

$$\Delta_k(\xi)=\left|\int\left[\frac{1}{k}\operatorname{Log}\rho(g,\xi)-\gamma(\mu)\right]\mu^k(dg)\right|$$

est borné par $A=\int L(g)\,\mu(dg)+|\gamma(\mu)|$ et converge vers 0 uniformément sur B_η d'après le Théorème 2, donc

$$|s\Gamma_2(s)-(1-s)\gamma(\mu)|\leqq A\,m*\nu_s(B_\eta^c)+\sum_{k=1}^{\infty} ks^2(1-s)^k\sup_{\xi\in B_\eta}\Delta_k(\xi). \tag{7}$$

Soit $(s_k)_k$ telle que $\lim_k s_k=0$ et que ν_{s_k} converge dans $\tilde{\mathscr{M}}$ sa limite ν est dans $I(\mu)$, choisissons alors $(\eta_l)_l$ telle que $\lim_l \eta_l=0$ et que B_{η_l} soit un ensemble de continuité pour ν, appliquant le Lemme 4 dans (7), il résulte de (6) et du point (ii) de la Proposition 3 que

$$\overline{\lim_k}\,|\gamma(\mu_{s_k})-\gamma(\mu)|\leqq A\,m*\nu(B_{\eta_l}^c)$$

et de l'arbitraire de l il vient

$$\overline{\lim_k}\,|\gamma(\mu_{s_k})-\gamma(\mu)|\leqq A\,m*\nu(\tilde{F}_\mu)$$

qui, par hypothèse est nul.

On conclut en utilisant ce qui précède et la compacité de $\tilde{\mathscr{M}}$.

2. Perturbation d'une matrice par des rotations

On suppose maitenant que la norme sur E est associée à une structure euclidienne de dimension d, l'on note $SO(E)$ le groupe des rotations de E et m_K sa probabilité de Haar.

Proposition 3. *Soit $g\in Gl(E)$ de rayon spectral $r(g)$, réductible à la forme de Jordan dans une base orthonormée du complexifié $E_{\mathbb{C}}$ de E et $\mu_s=(1-s)\,\delta_g+s\,m_K$.*

Soit t le plus grand des ordres de multiplicité des racines de module $r(g)$ dans le polynome minimal de g et d_1 la somme des dimensions des sous-espaces propres associés à ces racines, alors

si $t>1$

$$\gamma(\mu_s)=\operatorname{Log} r(g)+(t-1)\,s\operatorname{Log}\frac{1}{s}+O^1(s)$$

si $t=1$

$$\gamma(\mu_s)=\operatorname{Log} r(g)+J\cdot s+\sigma^1(s)$$

avec

$$J=\tfrac{1}{2}\int_S \operatorname{Log}(x_1^2+\ldots+x_{d_1}^2)\,\nu'(dx)$$

où ν' *est la probabilité* $SO(E)$*-invariante sur* $S=\{x: x\in E,\ \|x\|=1\}$. $\sigma^\alpha(u)$ (resp. $O^\alpha(u)$) *désignent des fonctions dont le quotient par* u^α *tend vers* 0 (resp. *est borné*) *lorsque* u *tend vers* 0.

Preuve de la Proposition 3. Appliquons comme précédemment la Proposition 2.

Pour $\nu_s \in I(\mu_s)$, $m_K * \nu_s$ est l'unique probabilité ν $SO(E)$-invariante sur $\tilde{E}$; d'autre part, puisque pour tout $h\in SO(E)$ $\rho(hg,\xi)=\rho(g,\xi)$, $\gamma(\pi_s)=\gamma(\sigma_s)$ de sorte que

$$\gamma(\mu_s)=s\sum_{k=0}^{\infty} s(1-s)^k \int \operatorname{Log}\rho(g^k,\xi)\,\nu(d\xi)$$

expression dont l'étude va résulter de celle du comportement asymptotique de la suite $(I_n)_n$

$$I_n=\int \operatorname{Log}\rho(g^n,\xi)\,\nu(d\xi)=\int_S \operatorname{Log}\|g^n x\|\,\nu'(dx).$$

Identifions E à $\mathbb{R}^d$ par le choix d'une base orthonormée, g^n admet la décomposition de Cartan $g^n=k_n a_n k_n'$ où $k_n, k_n'\in O(d)$ et

$$a_n=\operatorname{diag}(\mu_1^{(n)},\dots,\mu_d^{(n)}),\qquad \mu_1^{(n)}\leqq\dots\leqq\mu_d^{(n)},$$

et il vient

$$I_n=\tfrac{1}{2}\int_S \operatorname{Log}(\mu_1^{(n)2}x_1^2+\dots+\mu_d^{(n)2}x_d^2)\,\nu'(dx)=\operatorname{Log}\|g^n\|+J_n$$

où $J_n=\frac{1}{2}\int_S \operatorname{Log}\left(\left(\frac{\mu_1^{(n)}}{\mu_d^{(n)}}\right)^2 x_1^2+\dots+x_d^2\right)\nu'(dx)$ satisfait à l'inégalité:

$$-\infty<\int_S \operatorname{Log}|x_d|\,\nu'(dx)\leqq J_n\leqq 0.$$

Par hypothèse, on peut écrire $g=khk^{-1}$ où k est une matrice unitaire et h une matrice de Jordan, on a $\|g^n\|=\|h^n\|$ d'autre part en notant $(f_j)_{j=1}^d$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^d$

$$\sup_{j=1\dots d}\|h^n f_j\|\leqq\|h^n\|\leqq\left(\sum_{j=1}^d \|h^n f_j\|^2\right)^{1/2},$$

et en utilisant la forme explicite de h^n, il vient

$$\|h^n\|=C_n^{t-1}\,r(g)^{n-t+1}\left[1+\sigma^0\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

a) Supposons $t>1$.

Dans ce cas $I_n=n\operatorname{Log} r(g)+(t-1)\operatorname{Log} n+O^0\left(\frac{1}{n}\right)$ et

$$\gamma(\mu_s)=\operatorname{Log} r(g)+(t-1)s^2\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Log} k\cdot(1-s)^k+O^1(s).$$

On conclut alors par le

Lemme 5. *Soit* $f(u)=\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Log} k\cdot u^k$ *alors*

$$f(u)=\frac{1}{1-u}\operatorname{Log}\frac{1}{1-u}-\frac{C}{1-u}+\frac{1}{1-u}\sigma^0(1-u).$$

Preuve du Lemme 5. D'après la formule de Stirling $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log} k = \operatorname{Log} n! \sim n \operatorname{Log} n$, un théorème taubérien [1] page 423 montre que lorsque u tend vers 1

$$f(u) \sim g(u) = \frac{1}{1-u} \operatorname{Log} \frac{1}{1-u};$$

mais, pour $|u|<1$,

$$g(u) - f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \operatorname{Log} n\right] u^n$$

et, puisque $\lim_n \left\{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \operatorname{Log} n\right\} = C$, (constante d'Euler) on a

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} - \operatorname{Log} k\right\} \sim n\, C$$

de sorte que, lorsque u tend vers 1:

$$g(u) - f(u) \sim \frac{C}{1-u}.$$

b) Supposons $t=1$.

$\operatorname{Log} \|h^n\| = n \operatorname{Log} r(g) + o^0 \left(\frac{1}{n}\right)$; d'autre part en considérant une décomposition de Cartan de g^n associée à une décomposition de Cartan de h^n, on voit que

$$\text{pour } k = 1 \dots d_1 \ \mu_{d-k+1}^{(n)} = \|h^n\| = \|g^n\|$$

$$\text{pour } k = d_1 + 1 \dots d \ \lim_{n \to +\infty} \frac{\mu_{d-k+1}^{(n)}}{\mu_d^{(n)}} = 0$$

en effet, rappelons [8] que, pour $k = 1 \dots d$,

$$\lim_n \frac{1}{n} \operatorname{Log} \mu_k^{(n)} = \operatorname{Log} |\lambda_k|$$

en désignant par $\lambda_1 \dots \lambda_d$ les valeurs propres de g rangées par ordre de modules croissants, il en résulte que $\lim_n J_n = J$, d'où $I_n = n \operatorname{Log} r(g) + J + o^0 \left(\frac{1}{n}\right)$ l'assertion s'en déduit.

References

1. Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications. Vol. II. New York: John Wiley
2. Furstenberg, H.: Non commuting random products. Trans. Amer. Math. Soc. **108**, 377–428 (1963)
3. Furstenberg, H., Kesten, H.: Products of random matrices. Ann. Math. Statist. **31**, 457–469 (1960)

4. Furstenberg, H., Kifer, Y.: Random Matrix Products and Measures on Projective Spaces. Israël J. of Math., Vol. 46, Nos. 1, 2, 1983
5. Kifer, Y.: Perturbations of Random Matrix Products. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **61**, 83–95 (1982)
6. Kifer, Y., Slud, E.: Perturbation of random matrix products in a reducible case. [To appear]
7. Lacroix, J.: Localisation pour l'opérateur de Schrödinger aléatoire dans un ruban. [A paraître]
8. Le Drappier, F.: Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour 1982. [A paraître]
9. Lepage, E.: Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires. Séminaire Probab. Rennes 1980
10. Pincus, S.: Strong laws of large numbers for products of random matrices. Thesis Duke University, Durham, North Carolina 27706
11. Ragunathan, M.S.: A proof of Oseledec's multiplicative ergodic theorem. Israël Jour. Math. **32**, 356–362 (1979)
12. Slud, E.: Products of independent randomly perturbed matrices. Ergodic theory and dynamical systems 2. Proc. Special Year, Maryland 1979–80. Birkhäuser: Boston 1982

Reçu le 28 Mars 1983; en forme révisée le 13 Mars 1984