

## Gekoppelte Biegeschwingungen von Laufschaufeln im Fliehkraftfeld\*

Von F. Weidenhammer

**Übersicht:** Bei der Berechnung der Biegeeigenfrequenzen von Laufschaufeln im Fliehkraftfeld rechnet man üblicherweise mit Vernachlässigungen hinsichtlich der Führungsbeschleunigung, da diese zu einer rechen-technisch unbequemen Kopplung der beiden Biegehauptschwingungen führt. Da nicht sicher ist, ob diese und weitere Vernachlässigungen auch noch bei höheren Rotordrehgeschwindigkeiten zulässig sind, wurden zunächst die Schwingungsgleichungen elastizitätstheoretisch vollständiger hergeleitet, um die Bedeutung der Näherungsannahmen zu erkennen. Sodann wurden die tiefsten Eigenfrequenzen unter Beibehaltung der Kopplungen aus einem Variationsproblem näherungsweise berechnet.

**Summary:** In calculating bending vibrations of turbine blades in a centrifugal field certain terms of the system acceleration are neglected. This is done usually to avoid couplings in the theory of bending vibrations. Because it is not evident whether this and other approximations remain reliable at high speed rotations the equations for the vibrations have been deduced more complete. The lowest eigen-frequencies have been calculated without neglecting the couplings by means of a variational principle.

**1. Die Fragestellung.** Bei der Berechnung von Eigenfrequenzen der Laufschaufeln in Strömungsmaschinen hat man den Einfluß der Fliehkraft zu berücksichtigen, wenn die Schaufeln sehr lang sind und die Drehzahl hoch ist. Da heute bei der Auslegung der Maschinen hohe Drehzahlen häufiger vorkommen als bisher und andererseits für die Aufnahme der Fliehkraft in die Rechnung in der Literatur [1, 2] unterschiedliche Formeln angegeben werden, soll die Frage des Fliehkraftereinflusses hier erneut aufgegriffen werden. Die Verschiedenheiten der Ansätze liegen nur in der Berücksichtigung desjenigen Anteils der Fliehkraft der gebogenen Schaufel, der in einer zur Scheibenebene parallelen Ebene liegt und also senkrecht zur undeformierten Schaufelachse steht (Abb. 1).

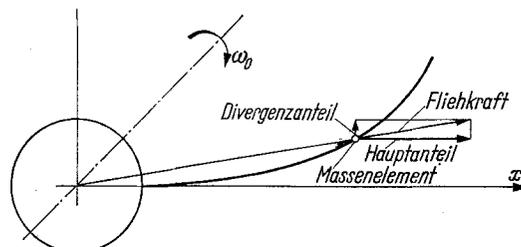


Abb. 1. Die gebogene Schaufel mit Fliehkraftbelastung.

Dieser Anteil ist wesentlich kleiner als der in allen Theorien gleichermaßen erfaßte Hauptanteil, der parallel zur undeformierten Schaufelachse gerichtet ist. Er hat jedoch die in der Rechnung unbequeme Konsequenz der Koppelung der Biegeschwingungen in den beiden Hauptachsenrichtungen. Wegen dieser Fliehkraftkopplung der Biegeschwingungen kann auch der *Rayleighsche* Quotient nicht zur näherungsweisen Eigenfrequenzberechnung herangezogen werden, wenn man die Fliehkraft vollständig berücksichtigt. Außerdem besteht das Energieintegral hier nicht, das man üblicherweise zur Rechtfertigung der Anwendung dieser Näherungsmethode heranzieht. Denn das System ist nicht konservativ, da die vorausgesetzte streng konstante Drehzahl bei schwingenden Schaufeln nur durch ein von diesen Schwingungen und der Drehzahl abhängiges, veränderliches Antriebsmoment gesichert werden könnte.

Im folgenden sollen daher die Bewegungsgleichungen für eine stationär rotierende Schaufel ohne Verwindung mit den Annahmen der technischen Biegelehre hergeleitet werden. Hinsichtlich der kinetischen Terme sollen hierbei zunächst keinerlei Vernachlässigungen zugelassen werden. Sodann soll der Einfluß der umstrittenen Fliehkraftkopplung auf die Biegefrequenzen diskutiert werden.

**2. Die Bewegungsgleichungen.** Die Schaufel werde als ein gerader Stab im Sinne der technischen Biegelehre angesehen. Seine für die Biegung maßgebenden Hauptträgheitsachsen können veränder-

\* Herrn E. Mettler zum 60. Geburtstag gewidmet.

lich sein, sie sollen jedoch in jedem Querschnitt die gleiche Richtung haben, so daß die Schaufel unverwunden ist. Zur Beschreibung der Lage eines Massenelementes des Stabes werden drei körperfeste rechtwinklige Achsen so eingeführt, daß die undeformierte Stablängsachse mit den Flächenschwerpunkten zur  $x$ -Achse wird (Einheitsvektor  $\mathbf{i}$ ) und die beiden Hauptträgheitsachsen die  $y$  und die  $z$ -Achse (Einheitsvektoren:  $\mathbf{j}, \mathbf{k}$ ) bilden (Abb. 2). Die zugehörigen zeit- und ortsabhängigen Verschiebungen sind  $u, v, w$ , von denen besonders die Biegungen  $v$  und  $w$  interessieren. Die Lage eines Stabelementes  $\mu dx$  ( $\mu(x)$  veränderliche Masse je Längeneinheit) wird also speziell durch

$$\mathbf{r} = (r_0 + x + u) \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k} \tag{1}$$

beschrieben, solange der Rotor mit dem Nabenradius  $r_0$  stillsteht und eine Achse mit der Rotorachse zusammenfällt. Um (1) durch zwei einfache Drehungen in eine allgemeine Lage zu überführen,

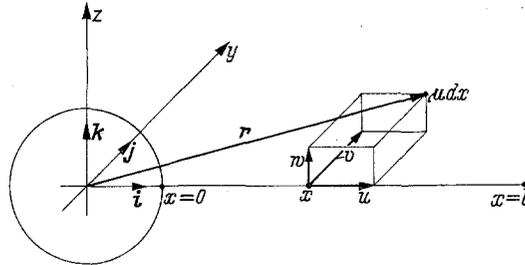


Abb. 2. Die Verschiebung eines Schaufelmassenelementes  $\mu \Delta x$ .

werde die  $\mathbf{j}$ -Achse zur raumfesten Drehachse gewählt und um diese mit dem Winkel  $\varphi = \omega_0 t$  ( $\omega_0 = \text{konst.}$  Rotordrehgeschwindigkeit) gedreht (Abb. 3). Dann gilt für die einspaltige Matrix der raumfesten Einheitsvektoren vor der Drehung

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

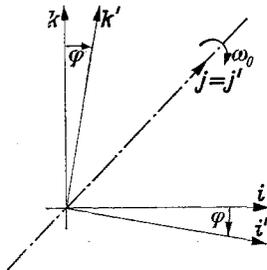


Abb. 3. Die Rotordrehung  $\varphi = \omega_0 t$ .

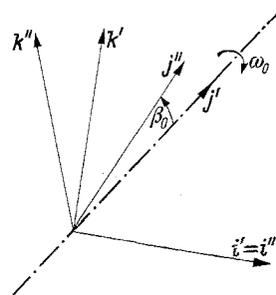


Abb. 4. Die Verdrehung der Schaufel gemessen durch die Drehung  $\beta_0$ .

und die neuen Einheitsvektoren nach der Drehung  $\mathbf{t}'$  die Transformation

$$\mathbf{t}' = \mathbf{M}_1 \mathbf{t},$$

worin  $\mathbf{M}_1$  die Matrix

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

bezeichnet. Dreht man nun noch um die neue  $\mathbf{i}'$ -Achse um den Winkel  $\beta_0 = \text{konst.}$ , so hat das Hauptachsenkreuz eine allgemeine Lage erreicht (Abb. 4). Diese Drehung beschreibt

$$\mathbf{t}'' = \mathbf{M}_2 \mathbf{t}'$$

mit

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta_0 & \sin \beta_0 \\ 0 & -\sin \beta_0 & \cos \beta_0 \end{bmatrix},$$

so daß durch  $t' = M_2 M_1 t$  die körperfesten Einheitsvektoren in allgemeiner Lage ( $t'$ ) an die raumfesten Achsen ( $t$ ) mit der  $j$ -Achse als Drehachse angeschlossen sind. Man erhält mit der auch anschaulich herleitbaren Matrix:

$$M_2 M_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ \sin \varphi \sin \beta_0 & \cos \beta_0 & \cos \varphi \sin \beta_0 \\ \sin \varphi \cos \beta_0 & -\sin \beta_0 & \cos \varphi \cos \beta_0 \end{bmatrix}$$

die Transformation der Einheitsvektoren. Damit kann der Vektor (1) in allgemeiner Lage gegen die raumfesten Achsen beschrieben werden. Man findet

$$\mathbf{r} = ((r_0 + x + u) \cos \varphi + v \sin \varphi \sin \beta_0 + w \sin \varphi \cos \beta_0) \mathbf{i} + (v \cos \beta_0 - w \sin \beta_0) \mathbf{j} + (- (r_0 + x + u) \sin \varphi + v \cos \varphi \sin \beta_0 + w \cos \varphi \cos \beta_0) \mathbf{k}, \quad (2)$$

wenn man den neuen Vektor  $\mathbf{r}'$  wieder mit  $\mathbf{r}$  bezeichnet.

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen für die Schaufel empfiehlt sich der Weg über das Prinzip von *Hamilton*, da (2) sehr komplizierte Kopplungen in den Trägheitsgliedern erwarten läßt. Um also die von diesem Prinzip verlangten Variationen

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V_i) dt = 0 \quad (3)$$

für eine Schaufel der Länge  $l$  bilden zu können, soll zunächst die kinetische Energie der Schaufel

$$T = \int_0^l \frac{\mu}{2} v^2 dx \quad (4)$$

berechnet werden. Zu dem Zweck muß aus (2) durch Differentiation nach der Zeit zunächst die Absolutgeschwindigkeit  $v$  berechnet werden und diese dann in (4) eingetragen werden. Man erhält nach elementarer, jedoch längerer, hier nicht wiedergegebener Rechnung schließlich:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \mu \{ (r_0 + x + u)^2 \omega_0^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + (\omega_0 w \cos \beta_0 + \omega_0 v \sin \beta_0)^2 - 2 (r_0 + x + u) \omega_0 (\dot{v} \sin \beta_0 + \dot{w} \cos \beta_0) + 2 \dot{u} \omega_0 (v \sin \beta_0 + w \cos \beta_0) \} dx,$$

worin Punkte partielle Zeitableitungen bezeichnen. Das für (3) noch benötigte elastische Potential besteht aus Dehnungs- und Biegeenergie und läßt sich leicht angeben, da  $v$  und  $w$  Ausbiegungen in den Hauptrichtungen sind. Mit der Dehnsteife  $E F(x)$ , den Hauptbiegesteifen  $E J_1(x)$  und  $E J_2(x)$  erhält man

$$V_i = \int_0^l \frac{E F}{2} \left( u_x + \frac{v_x^2}{2} + \frac{w_x^2}{2} \right) dx + \int_0^l \frac{E J_1}{2} v_{xx}^2 dx + \int_0^l \frac{E J_2}{2} w_{xx}^2 dx, \quad (5)$$

worin tiefgestellte Indizes  $x$  partielle Ableitungen nach der Ortskoordinate bezeichnen. In (5) rühren die letzten beiden Summanden von der Biegung her und diese Energieanteile sind der verwendeten Hauptachsen wegen voneinander unabhängig. Der erste Summand erfaßt die Dehnenergie und muß die Längsdehnung bekanntlich nicht-linear enthalten, wenn man die Kopplungen zwischen Längs- und Querbewegungen erfassen will [3]. Und genau dies ist die Aufgabe, wenn man den Einfluß der Längsträgheit (der Fliehkraft) auf die Querschwingungen (die Biegeschwingungen) erfassen will. Man hat also ein nicht-lineares Schwingungsproblem zu erwarten, das sich jedoch in technischer Näherung linear behandeln läßt, wie sich ergeben wird.

Die in (3) verlangten Variationen führen mit (4) und (5) nach einiger Rechnung auf die Bewegungsgleichungen

$$-\mu \ddot{u} + \mu \omega_0^2 (r_0 + x + u) - 2 \mu \omega_0 \dot{v} \sin \beta_0 - 2 \mu \omega_0 \dot{w} \cos \beta_0 + \left[ E F \left( u_x + \frac{v_x^2}{2} + \frac{w_x^2}{2} \right) \right]_x = 0, \quad (6)$$

$$-\mu \ddot{v} + \mu \omega_0^2 \sin \beta_0 \cos \beta_0 w + \mu \omega_0^2 \sin^2 \beta_0 v + 2 \mu \omega_0 \dot{u} \sin \beta_0 + \left[ E F \left( u_x + \frac{v_x^2}{2} + \frac{w_x^2}{2} \right) v_x \right]_x - (E J_1 v_{xx})_{xx} = 0, \quad (7)$$

$$-\mu \ddot{w} + \mu \omega_0^2 \cos^2 \beta_0 w + \mu \omega_0^2 \sin \beta_0 \cos \beta_0 v + 2 \mu \omega_0 \dot{u} \cos \beta_0 + \left[ E F \left( u_x + \frac{v_x^2}{2} + \frac{w_x^2}{2} \right) w_x \right]_x - (E J_2 w_{xx})_{xx} = 0. \quad (8)$$

Hierzu kommen die Randbedingungen der einseitig fest eingespannten und am anderen Ende freien Schaufel. Man findet für

$$x = 0 : u = 0, \quad x = l : EF \left( u_x + \frac{v_x^2}{2} + \frac{w_x^2}{2} \right) = 0, \tag{6,1}$$

$$x = 0 : v = v_x = 0, \quad x = l : v_{xx} = v_{xxx} = 0, \tag{7,1}$$

$$x = 0 : w = w_x = 0, \quad x = l : w_{xx} = w_{xxx} = 0. \tag{8,1}$$

Die Schwingungsgleichungen (6), (7) und (8) bilden ein kompliziertes gekoppeltes nichtlineares System von partiellen Differentialgleichungen mit geometrischen und nichtlinearen dynamischen Randbedingungen. Sie sind inhomogen in der Längsverschiebung  $u$ , da in Längsrichtung die Fliehkraft eingeht. Die Trägheitsterme lassen sich leicht mit Hilfe der Methoden der Relativmechanik anschaulich deuten. Die von  $\omega_0$  freien Terme beschreiben die Relativbeschleunigung, die Terme mit  $2\omega_0$  die Coriolisbeschleunigung, während die Terme mit  $\omega_0^2$  die Führungsbeschleunigung erfassen. Es entsteht so eine sehr verwickelte, jedoch lineare Kopplung aller Gleichungen miteinander. Hingegen sind die Gleichungen in den elastischen Termen auf Grund der Rechnung in Hauptachsen so weitgehend entkoppelt, daß sie bei Linearisierung überhaupt keine elastischen Kopplungen mehr enthalten. Die Biegeschwingungen aus den vollständigen Gleichungen (6), (7) und (8) zu berechnen, hat wohl keine Aussicht auf Erfolg. Eine solche strenge Rechnung dürfte jedoch bei technischen Fragestellungen auch nicht erforderlich sein.

**3. Die Fliehkraftnäherung.** Um zu Näherungsgleichungen für die Biegeschwingungen zu gelangen, wird zunächst die Stablängskraft

$$EF\varepsilon = EF \left( u_x + \frac{v_x^2}{2} + \frac{w_x^2}{2} \right)$$

aus (6) in der Form

$$(EF\varepsilon)_x = -\mu\omega_0^2(r_0 + x) \tag{9}$$

vereinfacht berechnet, wenn rechtsseitig  $u(x, t)$  wegen  $|u| \ll r_0 + x$  gestrichen wird. Weiter wurden in (9) etwaige Längsschwingungen und der Einfluß der Biegeschwingungen infolge der Kopplung durch die Coriolisbeschleunigungsanteile vernachlässigt. Dies dürfte eine sinnvolle Näherung sein, wie man aus einem Vergleich der Größenordnungen dieser Terme erkennt. Verwendet man für eine solche Abschätzung die isochronen Ansätze

$$u(x, t) = U(x) \cos \omega t, \tag{10}$$

$$v(x, t) = V(x) \cos \omega t, \quad w(x, t) = W(x) \cos \omega t, \tag{11}$$

so sind auf der rechten Seite von (9) offenbar die Beträge von

$$\mu\omega^2 U, \quad \mu\omega_0^2 U, \quad 2\mu\omega_0\omega V \sin \beta_0, \quad 2\mu\omega_0\omega W \cos \beta_0$$

gegenüber dem eigentlichen Fliehkraftterm vernachlässigt worden und dies dürfte wegen der Kleinheit der Schwingungsamplituden  $U, V, W$  zulässig sein. Man kann dann näherungsweise für  $u(x, t)$  einen stationären Zustand voraussetzen, so daß  $u(x, t)$  von der Zeit unabhängig wird. Aus (9) erhält man durch Integration

$$EF\varepsilon(x) = -\omega_0^2 \int_0^x \mu(r_0 + x_1) dx_1 + C,$$

worin sich die Integrationskonstante  $C$  aus der Randbedingung für das freie Stabende bestimmt. Offenbar muß

$$EF\varepsilon(l) = -\omega_0^2 \int_0^l \mu(r_0 + x_1) dx_1 + C = 0$$

sein, so daß damit die Stablängskraft zu

$$EF\varepsilon(x) = L(x) = \omega_0^2 \int_x^l \mu(r_0 + x_1) dx_1 \tag{12}$$

bestimmt ist.

Aus den Gleichungen (7) und (8) fällt im Rahmen der vorstehend begründeten Näherung jeweils nur noch der Kopplungsterm heraus, der von der Coriolisbeschleunigung herrührt und der  $\dot{u} \equiv 0$

enthält. So wird aus (7) und (8) ein System von zwei gekoppelten Biegeschwingungsgleichungen, in denen allerdings die Längsverschiebung  $u$  nicht mehr vorkommt:

$$-\mu \ddot{v} + \mu \omega_0^2 \sin \beta_0 \cos \beta_0 w + \mu \omega_0^2 \sin^2 \beta_0 v + (L v_x)_x - (E J_1 v_{xx})_{xx} = 0,$$

$$-\mu \ddot{w} + \mu \omega_0^2 \cos^2 \beta_0 w + \mu \omega_0^2 \sin \beta_0 \cos \beta_0 v + (L w_x)_x - (E J_2 w_{xx})_{xx} = 0.$$

Diese Gleichungen werden identisch mit den auf andere Weise anschaulich hergeleiteten Gleichungen von *Biezeno* und *Grammel* [1], wenn man die Verdrehung der Schaufel nicht mit dem Winkel  $\beta_0$  gegen die Drehachse, sondern, wie im Strömungsmaschinenbau üblich, mit dem Schiefstellungswinkel  $\beta$  gegen die Scheibenebene mißt. In Abb. 5 ist die Schaufel in einer allgemeinen Lage gezeichnet, in der beide Winkel positiv sind. Es gilt dann

$$\beta_0 = \beta + \frac{\pi}{2}$$

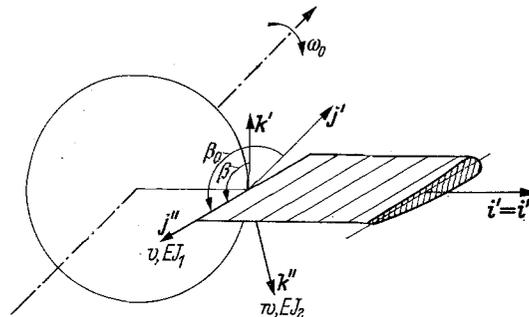


Abb. 5. Die Biegehauptachsen der Schaufel in allgemeiner Lage.

und wegen  $\sin \beta_0 = \cos \beta$ ,  $\cos \beta_0 = -\sin \beta$  erhält man

$$-\mu \ddot{v} - \mu \omega_0^2 \sin \beta \cos \beta w + \mu \omega_0^2 \cos^2 \beta v + (L v_x)_x - (E J_1 v_{xx})_{xx} = 0, \quad (13)$$

$$-\mu \ddot{w} + \mu \omega_0^2 \sin^2 \beta w - \mu \omega_0^2 \sin \beta \cos \beta v + (L w_x)_x - (E J_2 w_{xx})_{xx} = 0. \quad (14)$$

Die von der Führungsbeschleunigung herrührenden Kopplungen mit  $\omega_0^2$  kann man in (13) und (14) im Rahmen einer in sich konsistenten Theorie nicht vernachlässigen. Eine sogenannte schwache Kopplung gibt es hier nicht. Es kann jedoch im Rahmen technischer Berechnungen zulässig sein, die mit  $\omega_0^2$  behafteten vier Terme in ihrer Gesamtheit zu vernachlässigen, so daß dann die Gleichungen sehr vereinfacht und entkoppelt werden [1]. In der nachfolgenden Berechnung der Biegefrequenzen sollen diese Terme jedoch vollständig beibehalten werden. Mit den Ansätzen (11) erhält man die zeitfreien gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\mu \omega^2 V - \mu \omega_0^2 \frac{\sin 2\beta}{2} W + \mu \omega_0^2 \cos^2 \beta V + (L V')' - (E J_1 V''')'' = 0, \quad (15)$$

$$\mu \omega^2 W + \mu \omega_0^2 \sin^2 \beta W - \mu \omega_0^2 \frac{\sin 2\beta}{2} V + (L W')' - (E J_2 W''')'' = 0, \quad (16)$$

in denen Akzente Ableitungen nach der Ortskoordinate  $x$  bedeuten. Zu (15), (16) kommen die Randbedingungen

$$V = V' = W = W' = 0 \quad \text{für } x = 0 \quad (17)$$

und

$$V'' = V''' = W'' = W''' = 0 \quad \text{für } x = l, \quad (18)$$

so daß mit der in (15) und (16) enthaltenen unbekanntenen Eigenfrequenz  $\omega$  ein Eigenwertproblem vorliegt.

**4. Die näherungsweise Berechnung der Eigenfrequenzen.** Da das System (15), (16) mit  $\mu$ ,  $L$  und  $E J_1$ ,  $E J_2$  nicht-konstante Koeffizienten enthält, ist man zu einer Näherungsrechnung gezwungen. Man kann zwar nicht den *Rayleigh*schen Quotienten heranziehen, aber doch der Eigenwertaufgabe ein isoperimetrisches Variationsproblem

$$\delta I = \delta (I_1 + \omega^2 I_2) = 0 \quad (19)$$

mit dem Eigenwert  $\omega^2$  zuordnen. Die Gleichungen (15) bis (18) können nämlich als die notwendigen Bedingungen dafür aufgefaßt werden,  $I_1$  einen stationären Wert unter der Bedingung  $I_2 = \text{konst.}$  zu erteilen. In (19) ist  $I_1$  durch

$$I_1 = \omega_0^2 \cos^2 \beta \int_0^l \mu \frac{V^2}{2} dx + \omega_0^2 \sin^2 \beta \int_0^l \mu \frac{W^2}{2} dx - \omega_0^2 \frac{\sin 2\beta}{2} \int_0^l \mu V W dx - \omega_0^2 \int_0^l L^* \frac{V'^2}{2} dx - \omega_0^2 \int_0^l L^* \frac{W'^2}{2} dx - \int_0^l E J_1 \frac{V''^2}{2} dx - \int_0^l E J_2 \frac{W''^2}{2} dx$$

mit

$$L^*(x) = \int_x^l \mu (r_0 + x_1) dx_1 \tag{20}$$

gegeben, während für

$$I_2 = \int_0^l \mu \frac{V^2}{2} dx + \int_0^l \mu \frac{W^2}{2} dx$$

zu nehmen ist. Man kann noch  $I_2$  leicht anschaulich als bezogene kinetische Energie die Biegeschwingungen deuten, jedoch ist eine entsprechende energetische Deutung für  $I_1$  nicht sinnvoll. Die Größe  $I_1$  enthält zwar das elastische Potential der Biegung, jedoch auch zahlreiche Terme mit  $\omega_0^2$ , die kinetischen Ursprungs sind und durch einen Eliminationsprozeß mit Vernachlässigungen hier eintreten.

Man überzeugt sich im übrigen leicht durch Ausführung der Variationen davon, daß (15) und (16) als die *Eulerschen* Gleichungen von (19) aufgefaßt werden können. Über die aus der Theorie der Stabbiegeschwingungen hinaus bekannten Terme wird neu lediglich die Variation

$$\delta \left( -\omega_0^2 \int_0^l L^* \frac{V'^2}{2} dx \right) = -[\omega_0^2 L^* V' \delta V]_0^l + \omega_0^2 \int_0^l (L^* V'') \delta V dx$$

verlangt. Hierin verschwindet der Randausdruck für  $x = 0$  wegen der Einspannung (17) und auch für  $x = l$ , weil gemäß (20)  $L^*(l) = 0$  ist. Somit verbleiben für  $V$  und entsprechend für  $W$  nur die in (15) und (16) verlangten Beiträge  $\omega_0^2(L^* V'')$  und  $\omega_0^2(L^* W'')$ .

Zur näherungsweise Berechnung der Eigenfrequenzen mit Hilfe des *Ritzschen* Verfahrens führt man bekanntlich (19) auf eine gewöhnliche Extremalaufgabe zurück. Zu dem Zweck verwendet man einen Ansatz mit  $n$  endlich vielen Koordinatenfunktionen  $V_i(x)$ ,  $W_i(x)$ , die sämtlich möglichst alle Randbedingungen (17) und (18) erfüllen sollen:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i(x), \quad W(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i W_i(x). \tag{21}$$

Für die hierin freien Beiwerte  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) erhält man dann als die notwendigen Bedingungen für einen stationären Wert

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_i} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \beta_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{22}$$

Diese Gleichungen ergeben sich als linear, homogen und in den  $\alpha_i, \beta_i$  gekoppelt, wenn  $\omega_0^2 \neq 0$  ist. Ihre Determinante muß verschwinden und liefert so eine algebraische Gleichung für  $\omega^2$ . Ihre Wurzeln sind die Näherungswerte für die Biegeeigenfrequenzen und diese sind für den nicht stillstehenden Rotor ( $\omega_0^2 \neq 0$ ) in Strenge nur unter Beachtung der Kopplungen in den beiden Biegehaupttrichtungen zu berechnen. Inwieweit dieser bisher wohl nicht beachtete Kopplungseffekt auch zahlenmäßige Bedeutung für technische Rechnungen hat, hängt sehr von Abmessungen der Schaufel und der Drehzahl ab. Um diesen Einfluß formelmäßig verfolgen zu können, wird im nachfolgenden ein jeweils eingliedriger Ansatz durchgeführt.

**5. Näherungswerte für die beiden tiefsten Eigenwerte.** Für  $n = 1$  in (21) und mit dem jeweils gleichen Ansatz  $V_1(x) \equiv W_1(x)$  für die Grundschwingungen soll

$$V = \alpha_1 V_1(x), \quad W = \beta_1 W_1(x) \tag{23}$$

in (19) eingetragen werden. Man hat dann nur die folgenden Integrale auszuwerten:

$$\int_0^l \mu V_1^2 dx = v_{11} \neq 0, \quad \int_0^l L^* V_1'^2 dx = v_{11}^*,$$

$$\int_0^l E J_1 V_1'^2 dx = v_{11}^{**}, \quad \int_0^l E J_2 V_1'^2 dx = w_{11}^{**}.$$

Hiermit lassen sich offenbar die *Rayleigh*schen Quotienten

$$\omega_{10}^2 = \frac{v_{11}^{**}}{v_{11}}, \quad \omega_{20}^2 = \frac{w_{11}^{**}}{v_{11}} \quad (24)$$

bilden. Sie sind gemäß den Ansätzen (23) als Näherungen für die beiden jeweils tiefsten Eigenfrequenzen der nicht-rotierenden Schaufel in den Hauptachsenrichtungen 1 und 2 anzusehen. Mit der weiteren Konstanten

$$\Delta = \frac{v_{11}^*}{v_{11}} \quad (25)$$

erhält man mit (23)

$$\frac{1}{v_{11}} (I_1 + \omega^2 I_2) = \omega_0^2 \cos^2 \beta \frac{\alpha_1^2}{2} + \omega_0^2 \sin^2 \beta \frac{\beta_1^2}{2} - \omega_0^2 \frac{\sin 2\beta}{2} \alpha_1 \beta_1 - \omega_0^2 \Delta \frac{\alpha_1^2}{2} - \omega_0^2 \Delta \frac{\beta_1^2}{2} -$$

$$- \omega_{10}^2 \frac{\alpha_1^2}{2} - \omega_{20}^2 \frac{\beta_1^2}{2} + \omega^2 \frac{\alpha_1^2}{2} + \omega^2 \frac{\beta_1^2}{2},$$

so daß sich die Gleichungen (22) hier auf

$$(\omega_{10}^2 + \omega_0^2 \Delta - \omega_0^2 \cos^2 \beta - \omega^2) \alpha_1 + \omega_0^2 \frac{\sin 2\beta}{2} \beta_1 = 0, \quad (26)$$

$$\omega_0^2 \frac{\sin 2\beta}{2} \alpha_1 + (\omega_{20}^2 + \omega_0^2 \Delta - \omega_0^2 \sin^2 \beta - \omega^2) \beta_1 = 0 \quad (27)$$

reduzieren. Ihre Determinante liefert die Frequenzgleichung

$$\omega^4 + \omega^2 (\omega_0^2 (\sin^2 \beta - \Delta) + \omega_{20}^2 (\cos^2 \beta - \Delta) - \omega_{10}^2 - \omega_{20}^2) + \omega_0^4 (\cos^2 \beta - \Delta) (\sin^2 \beta - \Delta) -$$

$$- \omega_{10}^2 \omega_0^2 (\sin^2 \beta - \Delta) - \omega_{20}^2 \omega_0^2 (\cos^2 \beta - \Delta) + \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 - \omega_0^4 \left( \frac{\sin 2\beta}{2} \right)^2 = 0, \quad (28)$$

aus welcher sich bemerkenswerterweise  $\omega_0^4 \cos^2 \beta \sin^2 \beta$  gegen den Koppelterm  $-\omega_0^4 \left( \frac{\sin 2\beta}{2} \right)^2$  heraustritt. Man kann also keine konsistente Näherung durchführen, in welcher dieser für die Theorie lästige Koppelterm für sich allein gestrichen wird [2]. Offenbar gibt es andere Terme gleicher Größenordnung und man kann also lediglich alle Fliehkraftdivergenzen in ihrer Gesamtheit vernachlässigen, wie dies *Biezeno* und *Grammel* [1] tun. Man vernachlässigt dann alle Fliehkraftanteile, die nicht genau in die undeformierte Stablängsachse fallen (Abb. 1). Aus (28) erhält man mit  $\omega_1$  und  $\omega_2$  Näherungen für die jeweils tiefste Biegeeigenfrequenz in den beiden Hauptachsenrichtungen 1 und 2:

$$2 \omega_{1,2}^2 = \omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 + \omega_0^2 (2\Delta - 1) \mp \sqrt{(\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2)^2 + \omega_0^4 + 2\omega_0^2 \cos 2\beta (\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2)}. \quad (29)$$

Hierin ist der Summand  $\omega_0^2 (2\Delta - 1)$  stets positiv, da sich in (30)  $\Delta > 1$  erweisen wird. Der Radikand in (29) kann für kein  $\omega_0$  negativ werden und null nur für die Schiefstellungswinkel  $\beta = 0$  und  $\beta = 90^\circ$ , die beide für die Technik uninteressant sind. Nach (29) ist für die Zahlenwerte von  $\omega_1$  und  $\omega_2$  durchaus wesentlich, ob  $\omega_{20}^2 < \omega_{10}^2$  oder  $\omega_{20}^2 > \omega_{10}^2$  ist, wenn  $\beta \neq 45^\circ$  ist. Dies ist anschaulich verständlich, da für den Angriff der Fliehkkräfte entscheidend ist, ob sich der Schaufelquerschnitt wesentlich in Richtung der Drehachse oder senkrecht dazu in der Scheibenebene erstreckt (Abb. 5). Die Formel (29) findet man wohl nicht in der Theorie der Schaufelschwingungen. Man kann jedoch diese Frequenzen schon aus einer Theorie von *Maier* [4] über spannungslos verwundene Stäbe (z. B. Propellerblätter) entnehmen, wenn man in dieser Theorie eine Reihe von Spezialisierungen und Umrechnungen vornimmt. Diese Veröffentlichung hat wegen ihrer andersartigen Zielsetzung offenbar für Schaufelschwingungen keine Beachtung gefunden. Sie geht, wie üblich, synthetisch anschaulich und ohne Begründung unmittelbar von den Näherungsgleichungen (15) und (16) aus.

Die beiden durch (29) gegebenen Biegeeigenkreisfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  hängen wesentlich von der Rotordrehgeschwindigkeit  $\omega_0$  ab. Für das Studium dieser Abhängigkeit sind zwei Grenzfälle interessant. Erstens findet man unmittelbar für die nicht-rotierende Schaufel ( $\omega_0 = 0$ ) die durch (24)

erklärten Näherungswerte  $\omega_1 = \omega_{10}$  und  $\omega_2 = \omega_{20}$ . Wenn zweitens die Drehgeschwindigkeit  $\omega_0$  sehr groß gegen die beiden Eigenfrequenzen  $\omega_{i0}$  wird ( $\omega_0 \gg \omega_{i0}$ ,  $i = 1, 2$ ), so findet man für diesen anderen Grenzfall

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\Delta - 1} + O\left(\frac{\omega_{i0}^2}{\omega_0^2}\right),$$

und

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{\Delta} + O\left(\frac{\omega_{i0}^2}{\omega_0^2}\right),$$

worin  $\Delta$  gemäß (25) eine Mitteilung über die Fliehkraft enthält. Für jede brauchbare Näherung muß ersichtlich  $\Delta > 1$  sein. Offenbar ist im Falle sehr hoher Drehgeschwindigkeit die Biegesteife der Schaufel gegenüber der Rotationssteife der Schaufel zu vernachlässigen und mit

$$\omega_{1,s} = \omega_0 \sqrt{\Delta - 1}, \tag{30}$$

$$\omega_{2,s} = \omega_0 \sqrt{\Delta} \tag{31}$$

hat man dann die näherungsweise berechneten tiefsten Eigenkreisfrequenzen einer rotierenden biegeschlaffen Schaufel vor sich, die allerdings nur rein theoretisches Interesse hat. Denn eine solche biegeschlaffe Schaufel hätte nur als rotierendes Seil ohne Biegesteife physikalische Realität. Doch sind die Eigenfrequenzen (30) und (31) nicht mit den Randbedingungen eines solchen Seiles, sondern mit (17) und (18) für einen eingespannten Stab berechnet worden, so daß also (30) und (31) nicht die Eigenkreisfrequenzen eines rotierenden Seiles sind. Die Eigenfrequenzen eines Seiles lassen sich streng berechnen [6] und sind auch in (30) und (31) enthalten, wenn man (25) mit genau den Eigenschwingungsformen des Seiles auswertet. Die biegeschlaffe rotierende Schaufel ist in der Theorie der Schaufelschwingungen zur Abschätzung des Fliehkraftereinflusses herangezogen worden und daher eingehend untersucht [1, S. 147]. Hierbei hat man jedoch nur die höhere Frequenz (31) gefunden und nicht bemerkt, daß es zweimal unendlich viele Eigenfrequenzen gibt. Die Frequenz (30) kann nicht gefunden werden, wenn in (13) und (14) die Fliehkraftkopplung vernachlässigt wird. Zu (30) und (31) gehören zwei verschiedene, zueinander senkrechte Hauptschwingungsrichtungen, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

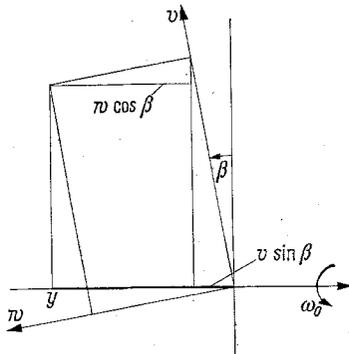


Abb. 6. Die Hauptkoordinate y der biegeschlaffen Schaufel.

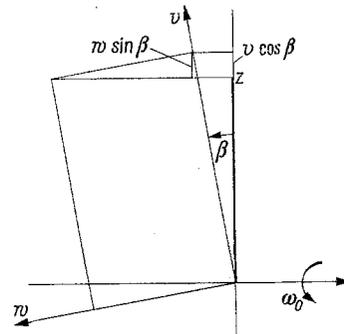


Abb. 7. Die Hauptkoordinate z der biegeschlaffen Schaufel.

Multipliziert man (13) mit  $\sin \beta$ , (14) mit  $\cos \beta$  und addiert beide Gleichungen, so erhält man für die neue abhängige Veränderliche (Abb. 6)

$$y(x, t) = v \sin \beta + w \cos \beta$$

die Schwingungseinzelgleichung

$$-\mu \ddot{y} + \omega_0^2 (L^* y_x)_x = 0.$$

Sie ist wohlbekannt [1, S. 147; 5] und führt nach einer Näherungsrechnung wie in Abschnitt 5 mit den Randbedingungen (17) und (18) auf den Wert  $\omega_{2,s}$  von (31). Man erhält also nur die höhere der möglichen beiden tiefsten Eigenfrequenzen (30) und (31). Man kann jedoch für

$$z(x, t) = v \cos \beta - w \sin \beta$$

ganz entsprechend eine weitere linear unabhängige Schwingungseinzelgleichung aus (13) und (14) herleiten (Abb. 7). Man erhält dann

$$-\mu \ddot{z} + \mu \omega_0^2 z + \omega_0^2 (L^* z_x)_x = 0$$

und daraus näherungsweise die tiefere Frequenz  $\omega_{1,s}$  von (30). Die beiden Grundfrequenzen gehören offenbar zu zwei aufeinander senkrecht stehenden Eigenschwingungen, und zwar die tiefere zur Querschwingung  $z$  senkrecht zur Drehachse (Abb. 8). In diesem Falle hat die Fliehkraft offenbar eine Komponente, die der Rotationssteife der biegeschlaffen Schaufel erweichend entgegenwirkt und so die Eigenfrequenz herabsetzt. Die Querschwingung  $y$  der Drehachse (Abb. 9) hat eine solche

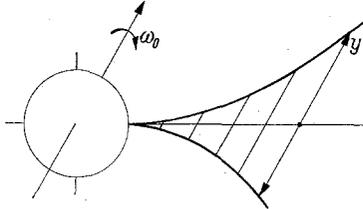


Abb. 8. Die Hauptschwingungsrichtung  $y$  der biegeschlaffen Schaufel.

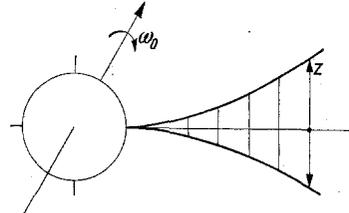


Abb. 9. Die Hauptschwingungsrichtung  $z$  der biegeschlaffen Schaufel.

Fliehkraftkomponente nicht und gehört daher zu der bekannten höheren Eigenfrequenz. Damit sind die beiden Grenzfälle verschwindender und sehr hoher Drehzahl ausreichend diskutiert und die beiden Eigenfrequenzen sollen für eine ausgeführte Schaufel auch zahlenmäßig berechnet werden.

**6. Ein Zahlenbeispiel.** Für eine Dampfturbinenschaufel wurden zum Zwecke des Vergleichs die tiefsten Eigenfrequenzen in den beiden Hauptachsenrichtungen auf dreierlei Weise näherungsweise numerisch berechnet. In allen drei Fällen wurde mit dem gleichen, alle Randbedingungen erfüllenden Eingliedansatz  $V_1(x) = 6x^2 - 4x^3 + x^4$  für die Biegeschwingungsform gearbeitet und die Änderungen der Massenbelegung und der beiden Hauptbiegesteifen in der gleichen Weise als lineare Änderungen von Schauffuß bis zur Schaufelspitze berücksichtigt. Für eine Schaufel einer Niederdruckstufe mit vernachlässigbarer Verwindung ( $\beta = \text{konst.}$ ) wurden folgende Konstruktionsdaten in die Rechnung aufgenommen (Abb. 10): Schauffellänge  $l = 50,3$  cm, Abstand der Einspannung von der Drehachse:  $r_0 = 70,0$  cm, Schiefstellungswinkel der Hauptachse  $2$  gegen die Scheibenebene:  $\beta = 37^\circ 40'$ , Massenbelegung je Längeneinheit  $\mu = 46,32 \cdot 10^{-3}$  bis  $15,09 \cdot 10^{-3}$  kg cm $^{-1}$ , Flächenträgheitsmomente:  $J_1 = 1,154$  bis  $0,109$  cm $^4$ ,  $J_2 = 13,75$  bis  $5,45$  cm $^4$ , Elastizitätsmodul  $E = 2,1 \cdot 10^6$  kp cm $^{-2}$ .

Zunächst wurden die Eigenfrequenzen ohne Vernachlässigung nach (29) berechnet<sup>1</sup>. Für den stillstehenden Rotor ergab sich:

$$\omega_{10} = 429,5 \text{ sec}^{-1}, \text{ d. h. } 68,3 \text{ Hz},$$

$$\omega_{20} = 1525,8 \text{ sec}^{-1}, \text{ d. h. } 242,8 \text{ Hz}.$$

Die Abhängigkeit von der Drehgeschwindigkeit  $\omega_0$  ist die bekannte parabelförmig anwachsende und in Abb. 10 eingetragene. Zur Verdeutlichung dieser Abhängigkeit und für den beabsichtigten Vergleich, wurde die Rechnung auch für höhere als technisch sinnvolle Werte  $\omega_0$  ausgeführt. Die Zahlenrechnung wurde zweitens auch für insgesamt konsequent vernachlässigte Fliehkraftdivergenzen ausgeführt [1]. In diesem Falle sind die Eigenfrequenzen einfach durch

$$\bar{\omega}_i^2 = \omega_{i0}^2 + \omega_0^2 \Delta \quad (i = 1, 2) \quad (32)$$

gegeben, wenn  $\omega_{10}^2 < \omega_{20}^2$  ist. Wenn hingegen anders  $\omega_{10}^2 > \omega_{20}^2$  ist, dann hat man  $\bar{\omega}_1^2$  und  $\bar{\omega}_2^2$  gegeneinander auszutauschen, da  $\bar{\omega}_1$  die tiefere der beiden Frequenzen bezeichnen soll. Die Formeln (32) erhält man aus (26) und (27), indem man dort von allen von der Divergenz des Fliehkraftfeldes herrührenden Termen absieht, wozu man nur die Summanden mit  $\cos \beta$  oder  $\sin \beta$  zu streichen hat. In (32) ist der Zahlenfaktor  $\Delta$  durch (25) erklärt und auf Grund von (30) ist stets  $\Delta > 1$ . Die in Abb. 10 eingetragenen Zahlenwerte (32) liegen grundsätzlich über den mit (29) berechneten, wie man allgemein zeigen kann und wie für  $\omega_0 \rightarrow \infty$  sofort durch Entwicklung nach  $\omega_0^{-2}$  folgt. Es gilt nämlich

$$\text{für } \omega_{20}^2 < \omega_{10}^2: \quad \bar{\omega}_1^2 - \omega_1^2 = \omega_0^2 + O(1),$$

$$\bar{\omega}_2^2 - \omega_2^2 = (\omega_{10}^2 - \omega_{20}^2) \cos^2 \beta + O(\omega_0^{-2}),$$

$$\text{und für } \omega_{10}^2 < \omega_{20}^2: \quad \bar{\omega}_1^2 - \omega_1^2 = \omega_0^2 + O(1),$$

$$\bar{\omega}_2^2 - \omega_2^2 = (\omega_{20}^2 - \omega_{10}^2) \sin^2 \beta + O(\omega_0^{-2}).$$

<sup>1</sup> Für die numerische Rechnung ist der Verfasser Herrn H. A. Müller, Karlsruhe, zu Dank verpflichtet.

Wenn man drittens die Eigenfrequenzen so berechnet, daß man nur die Fliehkraftkopplung vernachlässigt [2], dann hat man in (26) und in (27) die Koppelterme zu streichen und erhält so

$$\bar{\omega}_1^2 = \omega_{10}^2 + \omega_0^2 (\Delta - \cos^2 \beta), \tag{33}$$

$$\bar{\omega}_2^2 = \omega_{20}^2 + \omega_0^2 (\Delta - \sin^2 \beta). \tag{34}$$

Wenn  $\omega_{10}^2 < \omega_{20}^2$  ist, wird (33) im allgemeinen die tiefere der beiden Frequenzen (33), (34) liefern. Dies ist für beliebig anwachsende Drehgeschwindigkeiten  $\omega_0$  jedoch nicht gesichert, da für  $(\Delta - \cos^2 \beta) > (\Delta - \sin^2 \beta)$  auch  $\omega_1^2 > \omega_2^2$  eintreten kann. Man kann mit (33) und (34) also zu große oder zu kleine Näherungswerte erhalten. Die für das spezielle Zahlenbeispiel berechneten und ebenfalls in Abb. 10 eingetragenen Werte liefern offenbar sehr gute Näherungswerte.

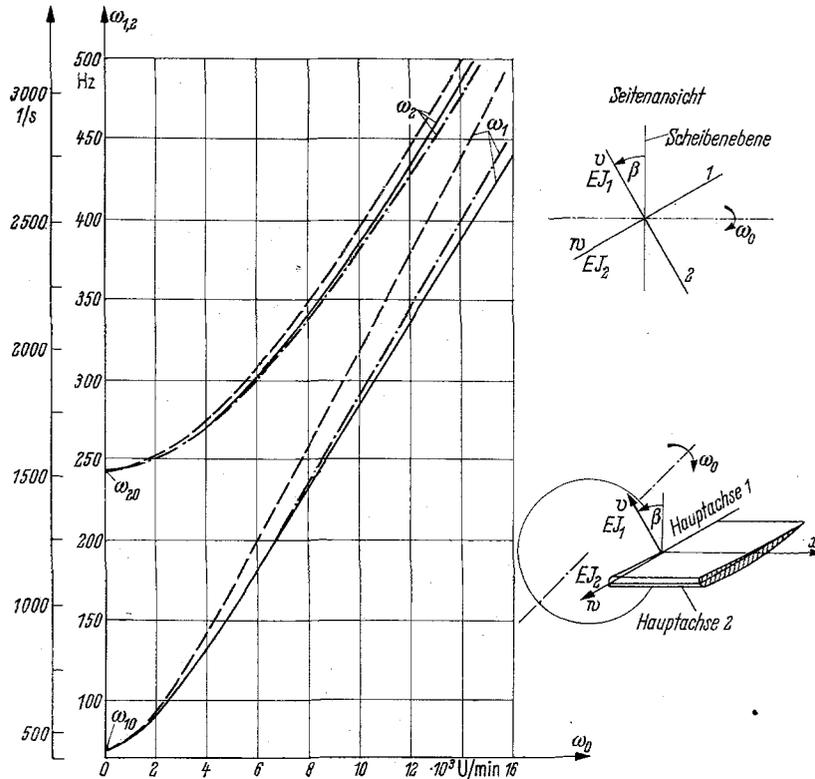


Abb. 10. Die Eigenfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  einer Niederdruckschaufel nach (29): —, ohne Fliehkraftdivergenzterme [1]; ----, ohne Fliehkraftkopplung [2]; - · - · -.

Aus den in Abb. 10 aufgetragenen Kurven entnimmt man für das Zahlenbeispiel, daß für die Drehzahlen des Turbinenbaues alle genannten Formeln zu technisch brauchbaren Zahlenwerten führen. Bei den im Strahltriebwerksbau möglichen sehr hohen Drehzahlen sollten die Eigenfrequenzen jedoch unter genauer Berücksichtigung der Fliehkkräfte nach (29) berechnet werden. Die Näherungen (33) und (34) führten für die untersuchte Schaufel zu praktisch vernachlässigbaren Fehlern. Allerdings wurden nur die jeweils tiefsten Eigenfrequenzen untersucht und es ist zu vermuten, daß sich für die höheren Eigenfrequenzen größere Fehler ergeben, wenn die Fliehkkräfte nur unvollständig berücksichtigt werden.

### Literatur

1. C. B. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik, 2. Aufl., Bd. 2, Berlin 1953, S. 137.
2. W. Traupel, Termische Turbomaschinen, 2. Aufl., Bd. 2, Berlin 1968, S. 434.
3. R. Kappus, Z. Angew. Math. Mech. 19 (1939) S. 350.
4. E. Maier, Ing.-Arch. 11 (1940) S. 79.
5. F. Söchtig, Berechnung mechanischer Schwingungen, Wien 1951, S. 186.
6. F. Weidenhammer, Z. Angew. Math. Mech. 50 (1970) S. 385.

(Eingegangen am 29. September 1969)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. F. Weidenhammer, D-75 Karlsruhe 1, Salierstr. 7