Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 25, 11–30 (1972)

Entropie d'un groupe abélien de transformations

J.P. Conze

Introduction

Considérons le système dynamique (X, G), formé d'un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$, $\mu(X)=1$, et d'un groupe G d'automorphismes de cet espace. Dans le cas où G est le groupe engendré par un automorphisme T, on sait définir l'entropie du système (X, G) et appliquer cette notion à l'étude de ses propriétés stochastiques.

Il est naturel de chercher à étendre la théorie de l'entropie à des groupes G plus généraux [1]. Cette situation se présente en particulier en Mécanique Statistique où certains auteurs ont été conduits à définir l'entropie de l'action de $\mathbb{Z}^n$, pour $n>1$ (voir Robinson et Ruelle [3]).

Dans ce travail, nous donnons, dans le cadre abstrait, une définition de l'entropie d'un système (X, G), quand G est un groupe abélien finiment engendré et nous montrons que l'essentiel de la théorie de l'entropie peut être étendu aux systèmes de ce type. Nous obtenons une «formule de Pinsker» à partir de laquelle peut être développée une théorie des facteurs de Pinsker et des systèmes d'entropie complètement positive analogue à la théorie classique en dimension un.

Nous donnons également des résultats sur les partitions génératrices, sur les propriétés de mélange fort, sur la propriété de K-système en dimension n. Enfin, une «formule d'Abramov» permet d'appliquer la théorie de l'entropie aux groupes abéliens à n paramètres réels.

1. Notations et rappels

Les transformations considérées dans toute la suite sont des automorphismes d'un espace de Lebesgue fixé $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Les résultats que nous utiliserons sont exposés dans l'article de Rohlin [4]. Nous nous bornerons à faire quelques rappels.

On désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \ldots$ des partitions mesurables de l'espace X, en convenant d'identifier deux partitions qui coïncident en dehors d'un ensemble de mesure nulle. On note ε la partition de X en ses points, ν la partition de X ayant pour seul élément X. On note $\alpha\beta$ la borne supérieure de deux partitions α et β, $\alpha\wedge\beta$ leur borne inférieure. Si α est une partition moins fine que β, on écrit $\alpha\leqq\beta$.

Etant donnée une partition mesurable α de X en éléments A_i, en nombre au plus dénombrable, l'entropie de α est définie par:

$$H(\alpha)=-\sum_i \mu(A_i)\log\mu(A_i).$$

On note $\mathscr{Z}$ l'ensemble des partitions mesurables d'entropie finie.

[1] Voir Kirillov – Uspehi. Mat. Nauk, v. 22, n° 5 (1967).

Plus généralement, si α est une partition dénombrable mesurable de X en éléments A_i, et si β est une partition mesurable quelconque de X, l'entropie conditionnelle de α par rapport à β est définie par:

$$H(\alpha/\beta) = -\sum_i \int_{A_i} \log(E^\beta 1_{A_i})\, d\mu,$$

où par $E^\beta 1_{A_i}$ on désigne l'espérance conditionnelle par rapport à la tribu engendrée par β dans X de la fonction caractéristique de A_i.

Rappelons qu'on a l'équivalence $H(\alpha/\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha \leqq \beta$, et que $H(\alpha/\beta)$ est une fonction croissante en α, et décroissante en β.

Une distance d est définie sur $\mathscr{Z}$ par la formule

$$d(\alpha, \beta) = H(\alpha/\beta) + H(\beta/\alpha).$$

Pour cette distance, l'espace $\mathscr{Z}$ est un espace métrique complet.

Rappelons maintenant trois propriétés essentielles de l'entropie:

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathscr{Z},\ \forall\, \gamma, \qquad H(\alpha\beta/\gamma) = H(\alpha/\gamma) + H(\beta/\alpha\gamma). \tag{1}$$

En particulier, l'entropie conditionnelle est sous-additive:

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathscr{Z},\ \forall\, \gamma, \qquad H(\alpha\beta/\gamma) \leqq H(\alpha/\gamma) + H(\beta/\gamma). \tag{1'}$$

Si $\{\gamma_n\}$ est une suite croissante de partitions et si $\gamma = \bigvee_n \gamma_n$ est leur borne supérieure, pour toute partition α dans $\mathscr{Z}$, on a:

$$\lim_n H(\alpha/\gamma_n) = H(\alpha/\gamma). \tag{2}$$

De même si $\{\gamma_n\}$ est une suite décroissante de partitions et si $\gamma = \bigwedge_n \gamma_n$ est leur borne inférieure, pour toute partition α dans $\mathscr{Z}$, on a:

$$\lim_n H(\alpha/\gamma_n) = H(\alpha/\gamma). \tag{3}$$

Entropie d'un automorphisme. Soit T un automorphisme de $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Pour toute partition α, on pose:

$$\alpha_T^n = \bigvee_0^{n-1} T^k \alpha, \qquad \alpha_T^- = \bigvee_1^{\infty} T^{-k} \alpha, \qquad \alpha_T = \bigvee_{-\infty}^{\infty} T^k \alpha.$$

Pour toute partition α dans $\mathscr{Z}$, la suite $\frac{1}{n} H(\alpha_T^n)$ a une limite, quand n tend vers l'infini, notée $h(\alpha, T)$. De plus, cette limite s'exprime comme une entropie conditionnelle: $h(\alpha, T) = H(\alpha/\alpha_T^-)$.

La partition α_T^- constitue un «passé», par rapport à T, de α.

Plus généralement, si γ est une partition strictement invariante par T, $T\gamma = \gamma$, l'expression $\frac{1}{n} H(\alpha_T^n/\gamma)$ a une limite, égale à $H(\alpha/\alpha_T^- \gamma)$, que l'on notera parfois $h(\alpha, T, \gamma)$.

L'entropie de l'automorphisme T est définie par

$$h(T) = \sup_{\alpha \in \mathscr{Z}} h(\alpha, T).$$

La formule suivante, due à Pinsker, joue un rôle important dans l'étude de l'entropie des automorphismes. Pour tout automorphisme T et toutes partitions α et β dans $\mathscr{Z}$,

$$h(\alpha\beta, T) = h(\alpha, T) + H(\alpha/\alpha_T \beta_T^-). \tag{4}$$

Si γ est une partition invariante par T, on a, de même:

$$h(\alpha\beta, T, \gamma) = h(\alpha, T, \gamma) + H(\alpha/\alpha_T \beta_T^- \gamma). \tag{5}$$

2. Entropie d'un système dynamique (X, G)

Nous appelons système dynamique la collection formée de l'espace $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et d'un groupe abélien G d'automorphismes de $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Nour notons, pour abréger, (X, G) ce système.

Nous nous plaçons, pour commencer, dans le cas où G est le groupe engendré par n automorphismes qui commutent de $(X, \mathscr{A}, \mu)$ (groupe à n générateurs). Ultérieurement, nous aborderons le cas d'un groupe abélien à n paramètres d'automorphismes de $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Pour simplifier les raisonnements et les notations, nous traitons le cas $n=2$. Les résultats obtenus restent vérifiés pour n quelconque.

A tout choix d'un système de deux générateurs T et S de G, correspond un homomorphisme de $\mathbb{Z}^2$ sur G permettant de représenter les éléments de G par les points du plan $\mathbb{Z}^2$. Nous fixons ce choix dans la suite, mais en vérifiant, quand cela est nécessaire, que les résultats obtenus n'en dépendent pas.

Notations. Soit α une partition mesurable. Pour tout sous-ensemble E du plan $\mathbb{Z}^2$, notons α_E la partition $\bigvee_{(p,k)\in E} T^p S^k \alpha$. Quand E est fini, notons $S(E)$ le nombre de ses éléments. Dans le cas où E est le plan $\mathbb{Z}^2$ tout entier, la partition α_E est $\bigvee_{(p,k)\in\mathbb{Z}^2} T^p S^k \alpha$. On la note α_G. Une partition α est dite *génératrice* pour G si $\alpha_G = \varepsilon$.

Etant donnée une suite de parallélogrammes $\{\rho_n\}$ dans $\mathbb{Z}^2$, nous dirons que le module de ρ_n tend vers l'infini si la plus petite de ses dimension tend vers l'infini.

Lemme 2.1. *Soit α une partition dans $\mathscr{Z}$. Soient ρ un parallélogramme fixé dans $\mathbb{Z}^2$ et $\{\rho_n\}$ une suite de parallélogrammes de $\mathbb{Z}^2$ dont le module tend vers l'infini. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n \geqq n_0$, on ait:*

$$\frac{1}{S(\rho_n)} H(\alpha_{\rho_n}) \leqq \frac{1}{S(\rho)} H(\alpha_\rho) + \varepsilon. \tag{6}$$

Démonstration. On utilise un pavage de chaque parallélogramme ρ_n par des translatés du parallélogramme ρ, et on applique la sous-additivité de l'entropie, relation (1').

Théorème 2.1. *Soit α une partition dans $\mathscr{Z}$. Si $\{\rho_n\}$ est une suite de parallélogrammes, dont le module tend vers l'infini, la suite $\frac{1}{S(\rho_n)} H(\alpha_{\rho_n})$ a une limite. Cette limite est indépendante de la suite $\{\rho_n\}$ considérée.*

Démonstration. Donnons nous deux suites $\{\rho_n\}$ et $\{\rho'_n\}$ de parallélogrammes dont les modules tendent vers l'infini. D'après (6), pour tout k fixé, on a:

$$\overline{\lim} \frac{1}{S(\rho_n)} H(\alpha_{\rho_n}) \leqq \frac{1}{S(\rho'_k)} H(\alpha_{\rho'_k}),$$

d'où la majoration
$$\overline{\lim}\, \frac{1}{S(\rho_n)}\, H(\alpha_{\rho_n}) \leqq \underline{\lim}\, \frac{1}{S(\rho'_k)}\, H(\alpha_{\rho'_k}).$$

En échangeant les rôles de $\{\rho_n\}$ et de $\{\rho'_n\}$, on en déduit l'existence et l'egalité des limites, quand n tend vers l'infini, de
$$\frac{1}{S(\rho_n)}\, H(\alpha_{\rho_n}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{S(\rho'_n)}\, H(\alpha_{\rho'_n}).$$

Définition. On appelle entropie de α par rapport à G, et on note $h(\alpha, G)$, la limite de $\frac{1}{S(\rho_n)}\, H(\alpha_{\rho_n})$, où $\{\rho_n\}$ est une suite de parallélogrammes dont le module tend vers l'infini.

D'après le théorème 2.1, la valeur de $h(\alpha, G)$ ne dépend pas du choix de la suite $\{\rho_n\}$. Elle ne dépend pas non plus du choix des générateurs T et S dans G.

En effet, supposons qu'il n'existe entre T et S aucune relation de dépendance de la forme $T^\alpha S^\beta = I$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $|\alpha| + |\beta| \neq 0$. Alors tout changement de générateurs dans G correspond à un automorphisme de $\mathbb{Z}^2$, qui transforme une suite de parallélogrammes de module tendant vers l'infini, en une suite de parallélogrammes ayant la même propriété. Si, par contre, T et S sont dépendants, il en est de même de tout couple de générateurs, et il est facile de vérifier que l'entropie $h(\alpha, G)$ associée à tout couple de générateurs est nulle, dans ce cas.

Diverses expressions de $H(\alpha, G)$:

Proposition 1. *Pour toute partition $\alpha \in \mathscr{Z}$, la suite $\frac{1}{n}\, h(\alpha_T^n, S)$ converge vers $h(\alpha, G)$.*

Démonstration. D'après l'inégalité (6) et la définition de $h(\alpha, G)$, pour tout rectangle ρ dans le plan Z^2, on a:
$$h(\alpha, G) \leqq \frac{1}{S(\rho)}\, H(\alpha_\rho). \tag{7}$$

En particulier, considérons les rectangles $\rho_{n,k}$ formés des couples (s, t) vérifiant $0 \leqq s < n$, $0 \leqq t < k$. Quand k tend vers l'infini, n restant fixé, la suite $\frac{1}{S(\rho_{n,k})}\, H(\alpha_{\rho_{n,k}})$ converge vers $\frac{1}{n}\, h(\alpha_T^n, S)$. On a donc:
$$h(\alpha, G) \leqq \underline{\lim}\, \frac{1}{n}\, h(\alpha_T^n, S).$$

On a, d'autre part,
$$\frac{1}{n}\, h(\alpha_T^n, S) \leqq \frac{1}{S(\rho_{n,k})}\, H(\alpha_{\rho_{n,k}}),$$
pour tout k, d'où:
$$\overline{\lim}\, \frac{1}{n}\, h(\alpha_T^n, S) \leqq h(\alpha, G).$$

On a donc bien
$$h(\alpha, G) = \lim_n \frac{1}{n}\, h(\alpha_T^n, S) \tag{8}$$
et en échangeant les rôles de S et de T:
$$h(\alpha, G) = \lim_n \frac{1}{n}\, h(\alpha_S^n, T). \tag{9}$$

Montrons enfin que $h(\alpha, G)$ peut être exprimée comme une entropie conditionnelle.

Théorème 2.2. *Pour toute partition α dans $\mathscr{Z}$,*

$$h(\alpha, G) = H(\alpha/\alpha_S^-(\alpha_S)_T^-). \tag{10}$$

Démonstration. Utilisons la formule de Pinsker [4]:

$$h(\alpha_T^n, S) - h(\alpha_T^{n-1}, S) = H(T^{n-1}\alpha \mid T^{n-1}\alpha_S^- \circ (\alpha_T^{n-1})_S) = H(\alpha \mid \alpha_S^- \circ (T^{-1}\alpha \ldots T_\alpha^{-n+1})_S).$$

Quand n tend vers l'infini, cette expression tend vers $H(\alpha \mid \alpha_S^-(\alpha_S)_T^-)$, d'après la relation (2). En appliquant le théorème des moyennes arithmétiques et le résultat précédent, on a donc:

$$h(\alpha, G) = \lim_n \frac{1}{n} h(\alpha_T^n, S) = H(\alpha \mid \alpha_S^- \circ (\alpha_S)_T^-).$$

De même, en échangeant S et T:

$$h(\alpha, G) = H(\alpha \mid \alpha_T^- \circ (\alpha_T)_S^-). \tag{11}$$

Remarque 2.1. La partition $\alpha_S^- \circ (\alpha_S)_T^-$ joue le rôle d'un «passé» de α par rapport à l'action de G. Il y a plusieurs choix possibles d'un tel passé: l'expression obtenue en échangeant S et T par exemple, relation (11), et plus généralement les expressions obtenues en changeant de générateurs dans G (automorphisme de $\mathbb{Z}^2$). Cette situation se rencontre également quand G est engendré par un unique automorphisme T, puisque le passé habituel, α_T^-, et le «futur», $\alpha_T^+ = \bigvee_1^\infty T^k\alpha$, constituent deux choix possibles d'un passé pour l'action de T.

Il sera commode par la suite de fixer le choix du passé, de même que nous avons fixé le choix des générateurs, en prenant pour expression du passé $\alpha_S^- \circ (\alpha_S)_T^-$, que nous noterons, quand il n'y aura pas d'ambiguité, α_G^-.

Propriétés de $h(\alpha, G)$. Nous donnons une série de résultats qui étendent aux systèmes (X, G) les résultats classiques de la théorie de l'entropie des systèmes dynamiques.

1. Si

$$\alpha \in \mathscr{Z}, \quad h(\alpha, G) \leqq H(\alpha). \tag{12}$$

La formule résulte de l'inégalité (7) appliquée à un rectangle ρ réduit à un point.

2. Si

$$\alpha, \beta \in \mathscr{Z}, \quad h(\alpha\beta, G) \leqq h(\alpha, G) + h(\beta, G).$$

C'est une conséquence de la sous-additivité de l'entropie. La fonction $h(\alpha, G)$ est donc une fonction croissante en α sur $\mathscr{Z}$.

3. Si

$$\alpha, \beta \in \mathscr{Z}, \quad |h(\alpha, G) - h(\beta, G)| \leqq d(\alpha, \beta). \tag{13}$$

En effet, pour tout parallélogramme ρ dans le plan $\mathbb{Z}^2$, on a:

$$H(\alpha_\rho) - H(\beta_\rho) = H(\beta_\rho \mid \alpha_\rho) - H(\alpha_\rho \mid \beta_\rho).$$

D'où:

$$\frac{1}{S(\rho)} |H(\alpha_\rho) - H(\beta_\rho)| \leqq \frac{1}{S(\rho)} (H(\beta_\rho \mid \alpha_\rho) + H(\alpha_\rho \mid \beta_\rho))$$

$$\leqq H(\beta \mid \alpha) + H(\alpha \mid \beta) = d(\alpha, \beta) \qquad \text{(d'après la relation (1))}.$$

En passant à la limite pour une suite de parallélogrammes de module tendant vers l'infini, on obtient (13).

4. Soit G_p un sous-groupe de G d'indice p. Considérons un «domaine fondamental» δ_p de G_p dans G, contenant l'élément neutre de G. Etant donnée une partition α, nous noterons pour simplifier α^p la partition $\alpha_{\delta_p} = \bigvee_{g \in \delta_p} g \cdot \alpha$. On a alors la relation:

$$h(\alpha^p, G_p) = p\, h(\alpha, G). \tag{14}$$

5. Pour tout automorphisme T dans le groupe G,

$$h(\alpha, G) \leqq h(\alpha, T). \tag{15}$$

On obtient cette relation en revenant à la définition de $h(\alpha, G)$, ou en utilisant la formule (10).

6. Si

$$\alpha, \beta \in \mathscr{Z}, \quad h(\beta, G) \leqq h(\alpha, G) + H(\beta \,|\, \alpha_G). \tag{16}$$

Soient $\rho_n, \rho'_{n,p}, \rho''_p$ les carrés dans $\mathbb{Z}^2$ définis respectivement par $0 \leqq s, t < n$, $-p \leqq s, t < p + n$, $-p \leqq s, t \leqq p$. D'après la relation (1), on a:

$$\begin{aligned} H(\beta_{\rho_n}) &\leqq H(\beta_{\rho_n} \alpha_{\rho'_{n,p}}) = H(\alpha_{\rho'_{n,p}}) + H(\beta_{\rho_n} \,|\, \alpha_{\rho'_{n,p}}) \\ &\leqq H(\alpha_{\rho'_{n,p}}) + n^2\, H(\beta \,|\, \alpha_{\rho''_p}). \end{aligned}$$

D'où, en divisant par n^2 et en faisant tendre n vers l'infini, p restant fixé,

$$h(\beta, G) \leqq h(\alpha, G) + H(\beta \,|\, \alpha_{\rho''_p}).$$

Faisons alors tendre p vers l'infini. D'après (2), $H(\beta \,|\, \alpha_{\rho''_p})$ tend vers $h(\beta \,|\, \alpha_G)$. L'inégalité (16) en résulte.

Remarques 2.2. (a) La relation (16) généralise l'inégalité (voir [4]).

$$\alpha, \beta \in \mathscr{Z}, \quad h(\beta, T) \leqq h(\alpha, T) + H(\beta \,|\, \alpha_T). \tag{17}$$

(b) En remplaçant dans (16) β par $\alpha\beta$, on obtient:

$$h(\alpha\beta, G) \leqq h(\alpha, G) + H(\beta \,|\, \alpha_G). \tag{18}$$

(c) Si α est une partition génératrice pour G, c'est à dire si $\alpha_G = \varepsilon$, il résulte de (16) que, pour toute partition $\beta \in \mathscr{Z}$, $h(\beta \,|\, G) \leqq h(\alpha, G)$.

7. (Formule de Pinsker.) Si

$$\alpha, \beta \in \mathscr{Z}, \quad h(\alpha\beta, G) = h(\alpha, G) + H(\beta \,|\, \beta_G^- \alpha_G). \tag{19}$$

Cette formule généralise la formule de Pinsker classique (formule (4)).

Soit G_p un sous-groupe de G d'indice fini p. D'après (14) et (18), on a:

$$\begin{aligned} h(\alpha\beta, G) &= \frac{1}{p}\, h\big((\alpha\beta)^p, G_p\big) \\ &\leqq \frac{1}{p}\, h(\alpha^p, G_p) + \frac{1}{p}\, H\big(\beta^p \,|\, (\alpha)^p_{G_p}\big) \\ &= h(\alpha, G) + \frac{1}{p}\, H(\beta^p \,|\, \alpha_G). \end{aligned}$$

Choisissons une suite décroissante de sous-groupes G_p tels que l'intersection $\bigwedge_p G_p$ soit réduite à l'élément neutre de G. L'entropie $\frac{1}{p} H(\beta^p \mid \alpha_G)$ converge vers $h(\beta, G, \alpha_G) = H(\beta \mid \beta_G^- \alpha_G)$. On en déduit l'inégalité:

$$h(\alpha\beta, G) \leqq h(\alpha, G) + H(\beta \mid \beta_G^- \alpha_G).$$

Par ailleurs, si ρ est un rectangle dans $\mathbb{Z}^2$, on a d'après la relation (1):

$$\begin{aligned}\frac{1}{S(\rho)} H(\alpha\beta)_\rho &= \frac{1}{S(\rho)} H(\alpha_\rho) + \frac{1}{S(\rho)} H(\beta_\rho \mid \alpha_\rho)\\ &\geqq \frac{1}{S(\rho)} H(\alpha_\rho) + \frac{1}{S(\rho)} H(\beta_\rho \mid \alpha_G).\end{aligned}$$

En passant à la limite pour une suite de rectangles dont le module tend vers l'infini, on obtient:

$$h(\alpha\beta, G) \geqq h(\alpha, G) + H(\beta \mid \beta_G^- \alpha_G).$$

8. Si

$$\alpha, \beta \in \mathscr{Z}, \qquad \lim_{n\to\infty} H(\alpha \mid T^{-n} \beta_G^- \alpha_G^-) = H(\alpha \mid \alpha_G^-). \tag{20}$$

Appliquons la formule (19) aux partitions α et $T^{-n}\beta$. On obtient:

$$\begin{aligned}h(\alpha \circ T^{-n}\beta, G) &= h(\alpha, G) + H(T^{-n}\beta \mid T^{-n}\beta_G^- \circ \alpha_G)\\ &= h(\alpha, G) + H(\beta \mid \beta_G^- \alpha_G).\end{aligned}$$

D'autre part, en développant $h(\alpha \circ T^{-n}\beta, G)$ par la formule (1), on trouve:

$$\begin{aligned}h(\alpha \circ T^{-n}\beta, G) &= H(\alpha \circ T^{-n}\beta \mid \alpha_G^- \circ T^{-n}\beta_G^-)\\ &= H(\alpha \mid \alpha_G^- \circ T^{-n}\beta_G^-) + H(T^{-n}\beta \mid \alpha \circ \alpha_G^- \, T^{-n}\beta_G^-)\\ &= H(\alpha \mid \alpha_G^- \circ T^{-n}\beta_G^-) + H(\beta \mid T^n(\alpha \circ \alpha_G^-) \circ \beta_G^-).\end{aligned}$$

Quand n tend vers l'infini, $H(\beta \mid T^n(\alpha \circ \alpha_G^-) \circ \beta_G^-)$ tend vers $H(\beta \mid \alpha_G \circ \beta_G^-)$, d'après la relation (2). (Rappelons qu'on a posé $\alpha_G^- = \alpha_S^- \circ (\alpha_S)_T^-$.) En comparant les deux expressions de $h(\alpha \circ T^{-n}\beta, G)$, on en déduit que:

$$H(\alpha \mid T^{-n}\beta_G^- \circ \alpha_G^-) \quad \text{tend vers} \quad h(\alpha, G) = H(\alpha \mid \alpha_G^-).$$

Remarques 2.3. (a) La relation (20) généralise la relation correspondant au cas d'un groupe engendré par un unique automorphisme S:

$$\lim_{n\to\infty} H(\alpha \mid S^{-n}\beta_S^- \circ \alpha_S^-) = H(\alpha \mid \alpha_S^-). \tag{21}$$

Cette relation est utilisée dans [4] pour démontrer la formule de Pinsker en dimension un contrairement au procédé employé ici, qui déduit (20) de (19).

(b) Nous aurons besoin d'un résultat un peu plus général que (21), et que l'on obtient facilement par la méthode précédente: si $\alpha, \beta, \delta \in \mathscr{Z}$, avec $\alpha \leqq \delta$, si γ est une partition quelconque invariante par S, $S\gamma = \gamma$, alors

$$\lim_{n\to\infty} H(\alpha \mid \delta_S^- \circ S^{-n}\beta_S^- \circ \gamma) = H(\alpha \mid \delta_S^- \circ \gamma). \tag{21'}$$

Entropie du système (X, G)

Définition. On appelle *entropie du système* (X, G) la quantité

$$h(G)=\sup_{\alpha\in\mathscr{Z}} h(\alpha, G).$$

L'entropie $h(G)$ est un invariant du système (X, G). L'entropie de (X, G) est supérieure ou égale à l'entropie de ses facteurs. Si (X, G) et (Y, H) sont deux systèmes, l'entropie du système produit $(X\times Y; G\times H)$ est $h(G\times H)=h(G)+h(H)$.

D'après la remarque 2.2 (c) suivant la relation (16), si α est une partition génératrice pour G, on a $h(G)=h(\alpha, G)$. En particulier, d'après (12), l'entropie $h(G)$ est majorée par l'entropie de toute partition génératrice pour G. Nous verrons que quand G est un groupe apériodique, $h(G)$ est exactement la borne inférieure des entropies des partitions génératrices pour G.

D'après la relation (14), on a, pour tout sous-groupe G_p d'indice p dans G, $h(G_p)=p\,h(G)$.

Théorème 2.3. *Si S et T sont deux automorphismes qui commutent de l'espace $(X, \mathscr{A}, \mu)$, si S ou T ont une entropie finie, le système (X, G) qu'ils engendrent a une entropie nulle.*

Démonstration. Supposons par exemple que $h(T)$ soit fini. Pour tout entier $p>0$, soit G_p le sous-groupe de G engendré par S^p et T. On a $h(G)=\frac{1}{p}h(G_p)$ et, d'après (15), $h(G_p)\leqq h(T)$. D'où $h(G)=0$.

Exemples. (1) Soient X une variété munie d'une mesure différentiable μ, S et T deux automorphismes qui commutent de l'espace X muni de la tribu des boréliens et de la mesure μ. Si T, par exemple, est différentiable, le système (X, G) engendré par S et T est d'entropie nulle. En effet, on sait que T est d'entropie finie (théorème de Kouchnirenko) et donc, d'après le théorème 2.3, $h(G)=0$.

(2) Soient $\Omega=(\omega_i)$ un espace fini, $P=(p_i)$ un vecteur de probabilité sur Ω. Formons l'espace produit $(X, \mu)=(\Omega, P)^{\mathbb{Z}^n}$.

Le groupe $G=\mathbb{Z}^n$ opère sur (X, μ) par translations sur les coordonnées. Le système (X, G) constitue un schéma de Bernoulli généralisé. Désignons par $x_{0,0}$ la coordonnée d'indice $(0, 0)$ d'un x dans X.

La partition $\alpha=(A_i)$, où $A_i=\{x: x_{0,0}=\omega_i\}$, $\omega_i\in\Omega$, est génératrice pour $\mathbb{Z}^n$. On a donc

$$h(G)=h(\alpha, \mathbb{Z}^n)=H(\alpha)=-\sum_i p_i \log p_i.$$

(3) Soient $(Y, \mathscr{A}_0, P)$ un espace mesurable, de mesure totale 1, et S_0 un automorphisme de cet espace. Formons l'espace produit $(X, \mathscr{A}, \mu)=(Y, \mathscr{A}_0, P)^{\mathbb{Z}}$.

Un point de X est donc une suite $x=(x_n)$ d'éléments de Y. Nous définissons deux automorphismes de X en posant: $Sx=(S_0 x_n)$, $Tx=(x_{n+1})$, pour $x=(x_n)$. Les automorphismes T et S commutent et engendrent un groupe G.

Soit π_0 l'application $x=(x_n)\to x_0$ de X dans Y. Si α est une partition d'entropie finie dans Y, on a:

$$\frac{1}{p}h\big((\pi_0^{-1}\alpha)_S^p, T\big)=\frac{1}{p}h\big((\pi_0^{-1}\alpha)_S^p\big)=\frac{1}{p}h(\alpha_{S_0}^p)$$

expression qui tend vers $h(\alpha, S_0)$, quand p tend vers l'infini.

Les partitions moins fines que $\bigvee_{-n}^{n} T^k(\pi_0^{-1}\alpha)$, pour un entier n et une partition α d'entropie finie dans Y, forment un ensemble dense dans $\mathscr{X}$. On a donc:

$$h(G) = \sup_\alpha h\left(\bigvee_{-n}^{n} T^k(\pi_0^{-1}\alpha), G\right) = \sup_\alpha h(\pi_0^{-1}\alpha, G)$$
$$= \sup_\alpha h(\alpha, S_0) = h(S_0).$$

L'entropie du système (X, G) est donc égale à $h(S_0)$.

(4) Si S et T sont deux automorphismes qui commutent de l'espace $(X, \mathscr{A}, \mu)$, l'entropie $h(G)$ du groupe qu'ils engendrent mesure, en un sens, l'indépendance de S et de T, comme le montre le résultat suivant:

Proposition 2.1. *Si S est faiblement adhérent à l'orbite de T dans le groupe des automorphismes de $(X, \mathscr{A}, \mu)$, l'entropie du système engendré par S et T est nulle.*

Démonstration. Désignons par Δ la différence symétrique des ensembles dans X. Par hypothèse, pour tout sous-ensemble $A \in \mathscr{A}$, il existe une suite d'entiers $\{k_i\}$, tels que $\mu(SA \Delta T^{k_i} A)$ tende vers 0, quand i tend vers l'infini.

Soient A un sous-ensemble dans $\mathscr{A}$, et α la partition de X en A et $X - A$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier k tel que $\mathbf{d}(S\alpha, T^k\alpha) < \varepsilon$. D'autre part, comme S et T commutent, on a

$$\mathbf{d}(S^n\alpha, T^n\alpha) \leqq |n|\, \mathbf{d}(S\alpha, T\alpha), \qquad \text{pour tout entier } n.$$

On a donc

$$\mathbf{d}(S^n\alpha, T^{kn}\alpha) \leqq |n|\, \varepsilon.$$

D'où:

$$|h(\alpha_S^p, T) - h(\alpha_{T^k}^p, T)| \leqq \mathbf{d}(\alpha_S^p, \alpha_{T^k}^p) \leqq \sum_{n=1}^{p-1} \mathbf{d}(S^n\alpha, T^{kn}\alpha) \leqq p^2\varepsilon.$$

D'autre part, on a:

$$h(\alpha_{T^k}^p, T) = h(\alpha, T).$$

On en déduit, ε étant arbitraire, $h(\alpha_S^p, T) = h(\alpha, T)$.

En particulier, $h(\alpha, G) = \lim_p \frac{1}{p} h(\alpha_S^p, T) = 0$. Pour passer au cas d'une partition ξ quelconque finie, écrivons

$$\xi = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n, \quad \text{où} \quad \alpha_i = (A_i, X - A_i), \qquad \xi = (A_i).$$

On a $h(\xi, G) \leqq \sum_i h(\alpha_i, G) = 0$. D'où $h(G) = 0$.

3. Groupes apériodiques d'automorphismes, existence de générateurs

Rohlin [5] a montré qu'étant donné un automorphisme T apériodique d'un espace $(X, \mathscr{A}, \mu)$, $\mu(X) = 1$, il existe, pour tout entier $n > 0$ et tout nombre $\varepsilon > 0$, un ensemble $A \in \mathscr{A}$ dont les images $A, TA, \ldots, T^{n-1}A$ sont deux à deux disjointes et ont une réunion de mesure supérieure à $1 - \varepsilon$.

Ce résultat joue un rôle essentiel dans plusieurs questions de théorie ergodique, en particulier dans l'étude des partitions génératrices et dans le problème de l'isomorphisme des systèmes dynamiques. Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de l'étendre au cas d'un groupe G à n générateurs.

La démonstration que nous donnons, dans le cas $n=2$, pour simplifier les notations, est générale. En dimension un, elle redonne une preuve du résultat de Rohlin, différente des démonstrations données par Halmos [1], ou Neveu [2].

Définition. On dit que des automorphismes d'un espace $(X, \mathscr{A}, \mu)$, qui commutent, T_i, $i=1, \ldots, n$, engendrent un groupe G *apériodique* si, pour tout n-uple d'entiers (p_i), non tous nuls, l'ensemble des points fixes de la transformation $T_1^{p_1} \ldots T_n^{p_n}$ est de mesure nulle.

Notations. Considérons en particulier le cas de deux automorphismes S et T. Pour tout couple (t, s) d'entiers positifs, nous notons $\mathscr{D}(t, s)$ la famille des ensembles mesurables A tels que $T^k S^r A \cap T^{k'} S^{r'} A = \emptyset$, si $(k, r) \neq (k', r')$ et $0 \leqq k, k' < t, 0 \leqq r, r' < s$.

Pour tout ensemble A dans $\mathscr{D}(t, s)$, nous posons

$$A_{t,s} = \bigcup T^k S^r A, \quad 0 \leqq k < t, \ 0 \leqq r < s.$$

Enfin, nous posons

$$\phi(t, s) = \sup_{A \in \mathscr{D}(t,s)} \mu(A_{t,s}).$$

Lemme 3.1. *Si deux automorphismes S et T de $(X, \mathscr{A}, \mu)$ engendrent un groupe G abélien apériodique, pour tout couple d'entiers positifs (t, s), pour tout ensemble M mesurable, il existe $A \subset M$ tel que $A \in \mathscr{D}(t, s)$ et $\mu(A_{t,s}) \geqq \frac{1}{4} \mu(M)$.*

Démonstration. Soit B un ensemble mesurable de mesure non nulle, quelconque. Pourtout couple d'entiers (k, r) tels que $|k| + |r| \neq 0$, il est possible de construire, d'après l'apériodicité de G, un sous-ensemble B_0 de B, de mesure non nulle tel que $B_0 \cap T^k S^r B_0 = \emptyset$. On en déduit l'existence, pour tout couple d'entiers (t, s) positifs, d'un sous-ensemble B_1 de B de mesure non nulle appartenant à $\mathscr{D}(t, s)$.

Considérons un ensemble A maximal pour l'inclusion (aux ensembles de mesure nulle près) parmi les ensembles contenus dans M et appartenant à $\mathscr{D}(t, s)$. Posons $C = \bigcup T^k S^r A$, $-t < k < t$, $-s < r < s$.

Si l'on a $\mu(M - M \cap C) > 0$, il existe, d'après ce qui précède un ensemble $A_1 \subset M$, disjoint de C et de mesure non nulle, appartenant à $\mathscr{D}(t, s)$. Il est clair que l'ensemble $A_1 \cup A$ est contenu dans M, appartient à $\mathscr{D}(t, s)$ et a une mesure strictement supérieure à celle de A.

Donc en fait M est contenu dans C. On a $\mu(M) \leqq \mu(C) \leqq (2t-1)(2s-1) \mu(A)$. D'où:

$$\mu(A_{t,s}) = t s \mu(A) \geqq \tfrac{1}{4} \mu(M).$$

Théorème 3.1. *Si des automorphismes T_i, $i=1, \ldots, n$ de $(X, \mathscr{A}, \mu)$ engendrent un groupe G apériodique, pour tout n-uple entiers (t_i) et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $A \in \mathscr{A}$ dont les images $T_1^{k_1} \ldots T_n^{k_n} A$, $0 \leqq k_i < t_i$, $i=1, \ldots, n$, sont deux à deux disjointes et ont une réunion de mesure supérieure à $1-\varepsilon$.*

Démonstration. Nous nous plaçons pour simplifier les notations, dans le cas $n=2$, c'est à dire dans le cas où G est engendré par deux automorphismes S et T. Avec la notation introduite plus haut, le théorème peut s'énoncer: pour tout couple d'entiers (t, s) positifs, $\phi(t, s) = 1$.

Remarquons d'abord que la suite $\phi(t^n, s^n)$ est décroissante en n. En effet, si u_1, v_1 sont deux entiers divisant respectivement des entiers u et v, pour tout A appartenant à $\mathscr{D}(u, v)$, l'ensemble $A_1 = \bigcup T^{ku_1} S^{rv_1} A, 0 \leqq k < \frac{u}{u_1}, \quad 0 \leqq r < \frac{v}{v_1}$, appartient à $\mathscr{D}(u_1, v_1)$. L'inégalité $\phi(u, v) \leqq \phi(u_1, v_1)$ en résulte.

Il suffit donc de montrer que la limite $l = \lim_n \phi(t^n, s^n)$ vaut 1.

Soit A un ensemble dans $\mathscr{D}(t^p, s^p)$, où p est un entier strictement positif. Notons pour abréger A_p l'ensemble A_{t^p, s^p}.

Considérons les ensembles $M = X - A_p$, $M_1 = \bigcap T^k S^r M$, $-t < k < t$, $-s < r < s$. En appliquant le lemme 3.1 à M_1 et aux entiers (t, s), on peut trouver $B \subset M_1$, $B \in \mathscr{D}(t, s)$, tel que

$$\mu(B_{t,s}) \geqq \tfrac{1}{4} \mu(M_1).$$

Il est clair, d'après la définition de M_1 et le choix de A et de B, que l'ensemble $D = B \cup \bigcup T^{kt} S^{rs} A, 0 \leqq k < t^{p-1}, 0 \leqq r < s^{p-1}$, appartient à $\mathscr{D}(t, s)$.

On a donc $\phi(t, s) \geqq \mu(D_{t,s}) = \mu(A_p) + \mu(B_{t,s}) \geqq \mu(A_p) + \frac{1}{4} \mu(M_1)$.

Un calcul simple donne par ailleurs:

$$\begin{aligned} \mu(M - M_1) &= \mu\big(\bigcup (M \cap T^k S^r A_p)\big), \qquad -t < k < t, \ -s < r < s, \\ &\leqq 4 t s \mu(A) \leqq 4 t^{1-p} \cdot s^{1-p}. \end{aligned}$$

D'où:

$$\begin{aligned} \phi(t, s) &\geqq \mu(A_p) + \tfrac{1}{4}(1 - \mu(A_p)) - t^{1-p} \cdot s^{1-p} \\ &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} \mu(A_p) - t^{1-p} \cdot s^{1-p}. \end{aligned}$$

En prenant la borne supérieure sur les ensembles A appartenant à $\mathscr{D}(t^p, s^p)$ dans cette inégalité, on obtient:

$$\phi(t, s) \geqq \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} \phi(t^p, s^p) - t^{1-p} \cdot s^{1-p}.$$

On en déduit que la limite $\ell = \lim_n \phi(t^n, s^n)$ vérifie l'inégalité $\ell \geqq \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \ell$, et donc est égale à 1.

Partitions génératrices. Notation. Par analogie avec la notation de [4], nous notons B_G l'ensemble des partitions d'entropie finie génératrices pour G dans $(X, \mathscr{A}, \mu)$, et par Γ_G l'ensemble des partitions d'entropie finie pour lesquelles $h(\alpha, G)$ atteint son maximum, c'est à dire telles que $h(\alpha, G) = h(G)$.

Nous avons vu, au paragraphe 2, que B_G est contenue dans Γ_G. D'après (13), Γ_G est un fermé de l'espace métrique complet $\mathscr{Z}$.

De même qu'en dimension un, B_G est un G_δ dans Γ_G. En effet, soit $\{\alpha_n\}$ une suite de partitions croissant vers ε dans $\mathscr{Z}$. Posons

$$B_G(p, q, n) = \{\xi \in \Gamma_G : H(\alpha_p | \bigvee_{|k|, |r| < n} T^k S^r \xi) < 1/q\}.$$

Alors $B_G(p, q, n)$ est ouvert dans Γ_G et on a:

$$B_G = \bigcap_p \bigcap_q \bigcup_n B_G(p, q, n).$$

Le théorème 3.1 permet d'étendre les résultats de Rohlin sur les partitions génératrices au cas d'un groupe à n générateurs. Comme la démonstration est en tous points analogue à celle des paragraphes 10.5 à 10.8 de [4], excepté l'utilisation du théorème 3.1, nous nous bornons à énoncer les résultats.

Théorème 3.2. *Soit G un groupe abélien apériodique, à n générateurs, d'automorphismes de $(X, \mathscr{A}, \mu)$. L'entropie $h(G)$ du système (X, G) est la borne inférieure des entropies des partitions génératrices pour G.*

Si $h(G)<\infty$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une partition α d'entropie finie génératrice pour G telle que $H(\alpha)<h(G)+\varepsilon$, et le complémentaire de B_G dans Γ_G est un ensemble de première catégorie dans Γ_G.

4. Partitions de Pinsker, systèmes d'entropie complètement positive

Le système (X, G) étant donné (nous supposerons pour simplifier que G est engendré par deux automorphismes T et S qui commutent), nous associons à toute partition α mesurable de X la partition $\pi(\alpha)$ borne supérieure des partitions $\beta\in\mathscr{Z}$ telles que

$$\beta\leqq\alpha_G \quad \text{et} \quad h(\beta, G)=0.$$

La partition $\pi(\alpha)$ est appelée *partition de Pinsker associée à α*. Dans le cas où α est la partition ε de X en ses points, nous obtenons la *partition de Pinsker du système*, que nous notons $\pi(G)$.

Proposition 4.1. *Pour toute partition α, $\pi(\alpha)$ est invariante par G. Pour toute partition $\beta\in\mathscr{Z}$ telle que $\beta\leqq\pi(\alpha)$, on a $h(\beta, G)=0$. Le système $G/\pi(\alpha)$ facteur de (X, G) correspondant à $\pi(\alpha)$ est d'entropie nulle. En particulier $G/\pi(G)$ est d'entropie nulle et, inversement, tout système facteur de (X, G) d'entropie nulle est un facteur de $G/\pi(G)$.*

Démonstration. Si β est une partition dans $\mathscr{Z}$, telle que $h(\beta, G)=0$, pour tout automorphisme R qui commute avec G, on a:

$$h(R\beta, G)=0.$$

La partition $\pi(\alpha)$ est donc invariante par tout automorphisme qui commute avec G et qui laisse α_G invariante. En particulier, $\pi(G)$ est invariant par tout automorphisme qui commute avec G.

Les partitions $\beta\in\mathscr{Z}$, telles que $\beta\leqq\alpha_G$ et $h(\beta, G)=0$, sont denses dans l'ensemble des partitions $\xi\in\mathscr{Z}$ telles que $\xi\leqq\pi(\alpha)$. D'après (13), pour toute partition $\beta\in\mathscr{Z}$, on a donc l'équivalence:

$$\beta\leqq\pi(\alpha)\Leftrightarrow h(\beta, G)=0 \quad \text{et} \quad \beta\leqq\alpha_G.$$

La fin de la proposition 4.1 en résulte.

Le théorème suivant montre que la partition $\pi(\alpha)$, associée à α peut être considérée, de même qu'en dimension un, comme un «passé éloigné» pour la partition α.

Notation. Pour toute partition α dans $\mathscr{Z}$, posons

$$\hat{\alpha}=\bigwedge_n S^{-n}\alpha_S^-\cdot T^{-n}(\alpha_S)_T^-.$$

La partition $\hat{\alpha}$ est invariante par S, mais n'est pas, en général, invariante par T.

Introduisons également

$$\alpha_\infty = \bigvee_N \hat{\alpha}_N, \quad \text{où} \quad \alpha_N = \bigvee_{-N}^{N} T^k \alpha.$$

La partition α_∞ est invariante par G.

Théorème 4.1. *Pour toute partition α dans $\mathscr{Z}$, $\alpha_\infty = \pi(\alpha)$.*

Démonstration. Montrons d'abord l'inégalité $\alpha_\infty \leqq \pi(\alpha)$, qui est équivalente à: pour toute partition $\beta \in \mathscr{Z}$, telle que $\beta \leqq \alpha_\infty$, on a:

$$h(\beta, G) = 0.$$

Les partitions moins fines que l'une des partitions $\hat{\alpha}_N$ pour un entier N forment un ensemble dense dans l'ensemble des partitions moins fines que α_∞. Il suffit donc de démontrer que $\beta \in \mathscr{Z}$ et $\beta \leqq \hat{\alpha}_N$ pour un entier N implique $h(\beta, G) = 0$. Nous supposons que β est moins fine que $\hat{\alpha}$, le cas $\beta \leqq \hat{\alpha}_N$ se traitant de façon identique.

On a donc

$$H(\beta \mid S^{-n} \alpha_S^- \cdot \beta_S^- \cdot T^{-k} (\alpha_S)_T^- (\beta_S)_T^-) = 0,$$

pour tout n et tout k. En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit, d'après la relation (21'),

$$H(\beta \mid \beta_S^- \cdot T^{-k} (\alpha_S)_T^- \cdot (\beta_S)_T^-) = 0.$$

Faisons maintenant tendre k vers l'infini et appliquons la relation (20). On obtient

$$H(\beta \mid \beta_S^- \cdot (\beta_S)_T^-) = 0,$$

soit encore $h(\beta, G) = 0$.

Inversement, montrons que, pour toute partition $\beta \in \mathscr{Z}$ telle que $h(\beta, G) = 0$ et $\beta \leqq \alpha_G$, on a $\beta \leqq \alpha_\infty$.

Si G_p est un sous-groupe d'indice p dans G, on a (cf. les notations du § 2),

$$h(\beta, G_p) \leqq h(\beta^p, G_p) = p\, h(\beta, G) = 0.$$

D'autre part, la relation (19) appliquée à une partition γ quelconque dans $\mathscr{Z}$, à β et à G_p donne:

$$H(\gamma \mid \gamma_{G_p}^-) + H(\beta \mid \beta_{G_p}^- \gamma_{G_p}) = H(\beta \mid \beta_{G_p}^-) + H(\gamma \mid \gamma_{G_p}^- \beta_{G_p}),$$

d'où puisque

$$H(\beta \mid \beta_{G_p}^- \gamma_{G_p}) = H(\beta \mid \beta_{G_p}^-) = 0,$$

$$H(\gamma \mid \gamma_{G_p}^-) = H(\gamma \mid \gamma_{G_p}^- \beta_{G_p}).$$

A fortiori,

$$H(\gamma \mid \gamma_{G_p}^-) = H(\gamma \mid \gamma_{G_p}^- \beta).$$

Si G_{n^2} est le sous-groupe de G engendré par T^n et S^n, la partition du «passé» $\gamma_{G_{n^2}}^-$ est moins fine que $S^{-n+1} \gamma_S^- \cdot T^{-n+1} (\gamma_S)_T^-$. On a d'après le résultat précédent:

$$H(\gamma \mid \beta) \geqq H(\gamma \mid \gamma_{G_{n^2}}^- \beta) = H(\gamma \mid \gamma_{G_{n^2}}^-) \geqq H(\gamma \mid S^{-n+1} \gamma_S^- \cdot T^{-n+1} (\gamma_S)_T^-).$$

En passant à la limite en n, on trouve:

$$H(\gamma|\beta) \geqq H(\gamma|\hat{\gamma}).$$

En particulier, si γ est majorée par une partition de la forme α_ρ, où ρ est un rectangle fini dans Z^2, on a:

$$H(\gamma|\beta) \geqq H(\gamma|\hat{\gamma}) \geqq H(\gamma|\hat{\alpha}_\rho) \geqq H(\gamma|\alpha_\infty).$$

Comme β est limite dans $\mathscr{Z}$ de partitions γ vérifiant la condition précédente (d'après $\beta \leqq \alpha_G$), on a bien:

$$0 = H(\beta|\beta) = H(\beta|\alpha_\infty), \quad \text{soit} \quad \beta \leqq \alpha_\infty.$$

Théorème 4.2. *Soient α et β deux partitions d'entropie finie telles que: $\hat{\alpha} = \nu$ (ou, à fortiori $\pi(\alpha) = \nu$), et $h(\beta, G) = 0$. Alors α et β sont indépendantes.*

Démonstration. Soit G_k le sous-groupe de G engendré par T^{n_k} et S^{n_k}, où $\{n_k\}$ est une suite d'entiers tels que n_k divise n_{k+1}. La suite $\alpha_{G_k}^-$ est décroissante, et sa limite est contenue dans $\hat{\alpha}$, donc égale à ν. On a donc, d'après (3),

$$\lim_k H(\alpha|\alpha_{G_k}^-) = H(\alpha).$$

Comme $h(\beta, G) = 0$, nous avons (cf. la démonstration du théorème 4.1):

$$H(\alpha|\beta) \geqq H(\alpha|\alpha_{G_k}^- \cdot \beta) = H(\alpha|\alpha_{G_k}^-).$$

D'où, en passant à la limite, $H(\alpha|\beta) = H(\alpha)$, ce qui montre que α et β sont indépendantes.

Définition. Un système (X, G) est d'*entropie complètement positive* si $\pi(G) = \nu$, autrement dit, si pour toute partition β dans $\mathscr{Z}$, $h(\beta, G) = 0$, entraîne $\beta = \nu$.

Tout système facteur d'un système d'entropie complètement positive est d'entropie complètement positive. Les schémas de Bernoulli généralisés sont des systèmes d'entropie complètement positive.

Si (X, G) est d'entropie complètement positive, pour tout automorphisme $T \in G$, $T \neq$ Identité, le système (X, T) est d'entropie (infinie) complètement positive.

Une caractérisation des systèmes (X, G) d'entropie complètement positive

Proposition 4.2. *Pour qu'un système (X, G) soit d'entropie complètement positive, il faut et il suffit que, pour toute partition $\alpha \in \mathscr{Z}$, on ait:*

$H(\alpha) = \sup_{G_p} H(\alpha, G_p)$, *où G_p décrit une suite décroissante de sous-groupes d'indice fini G_p, tels que l'intersection $\bigwedge_p G_p$ soit réduite à l'identité de G.*

Démonstration. Si (X, G) est d'entropie complètement positive, $\alpha_{G_p}^-$ décroit vers la partition triviale ν de X, d'après la démonstration du théorème 4.1. On a donc

$$H(\alpha) \geqq h(\alpha, G_p) = H(\alpha|\alpha_{G_p}^-) \to H(\alpha), \qquad p \to \infty.$$

Inversement, si $h(\alpha, G) = 0$, on sait que pour tout sous-groupe G_p d'indice fini dans G, $h(\alpha, G_p) = 0$. La réciproque en résulte.

Le résultat suivant donne une caractérisation des systèmes d'entropie complètement positive liée à la structure de groupe de G.

Définition. Un groupe G d'automorphismes de $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est dit *totalement ergodique* si, pour tout sous-groupe G_p d'indice fini dans G, tout ensemble mesurable invariant par G_p est mesure 0 ou 1.

Théorème 4.3. *Soit G un groupe abélien à n générateurs d'automorphismes de $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Supposons G apériodique et totalement ergodique. Alors le système (X, G) est d'entropie complètement positive si et seulement si, pour toute partition α dans $\mathscr{Z}$, pour toute famille décroissante de sous-groupes G_p d'indices finis dans G d'intersection réduite à l'identité de G, on a:*

$$\bigwedge_{G_p} \alpha_{G_p} = \alpha.$$

Démonstration. D'après l'inégalité (16), on a, pour α et β dans $\mathscr{Z}$,

$$h(\beta, G_p) \leqq h(\alpha, G_p) + H(\beta \mid \alpha_{G_p}) \leqq H(\alpha) + H(\beta \mid \bigwedge_{G_p} \alpha_{G_p}).$$

Supposons (X, G) d'entropie complètement positive. D'après la proposition 4.2, on obtient en prenant la limite de $h(\beta, G_p)$:

$$H(\beta) \leqq H(\alpha) + H(\beta \mid \bigwedge_{G_p} \alpha_{G_p}).$$

Si β est contenue dans $\bigwedge_{G_p} \alpha_{G_p}$ et contient α, on a donc:

$$H(\beta) = H(\beta \mid \alpha) + H(\alpha) \leqq H(\alpha).$$

D'où $\beta = \alpha$, et $\bigwedge_{G_p} \alpha_{G_p} = \alpha$.

Inversement, considérons une partition γ invariante par G, telle que le système G/γ facteur de (X, G) dans γ soit d'entropie nulle. D'après le théorème 3.2 sur l'existence de générateurs, pour chaque sous-groupe G_p d'indice fini dans G, il existe dans $\mathscr{Z}(\gamma)$, l'espace des partitions d'entropie finie moins fines que γ, un G_δ dense de partitions génératrices pour G_p/γ. Comme $\mathscr{Z}(\gamma)$ est un espace métrique complet, il existe une partition $\alpha \in \mathscr{Z}(\gamma)$ génératrice pour chaque G_p/γ dans γ. On a donc $\alpha_{G_p} = \gamma$, pour tout p. Comme G est totalement ergodique, γ n'est pas une partition d'entropie finie, donc $\bigwedge_{G_p} \alpha_{G_p} = \gamma \neq \alpha$.

5. K-systèmes, propriétés spectrales des systèmes (X, G)

La notion de K-système pour un automorphisme T est liée à la structure d'ordre sur $\mathbb{Z}$. La définition que nous proposons en dimension deux est également liée au choix d'un ordre sur $\mathbb{Z}^2$, et fait jouer un rôle dissymétrique aux générateurs de G. Elle est donc relative au couple ordonné d'automorphismes (T, S). Cette définition s'étendrait de manière évidente à un système de dimension n.

Nous utilisons sur $\mathbb{Z}^2$ l'ordre lexicographique défini par:

$$(n', p') \leqq (n, p) \Leftrightarrow (n' < n, \text{ ou } n = n' \text{ et } p' \leqq p).$$

Définition. Soit (T, S) un couple ordonné d'automorphismes qui commutent de $(X, \mathscr{A}, \mu)$. On dit que ce couple définit un K-*système* s'il existe une partition mesurable ξ de X telle que:

(I) ξ est génératrice: $\bigvee_{(n,p)\in\mathbb{Z}^2} T^n S^p \xi = \varepsilon$.

(II) ξ est croissante, au sens de l'ordre lexicographique sur $\mathbb{Z}^2$:

$$(n', p') \leqq (n, p) \Rightarrow T^{n'} S^{p'} \xi \leqq T^n S^p \xi.$$

(III) $\bigwedge_n S^{-n} \xi = T^{-1} \xi_S$.

(IV) $\bigwedge_n T^{-n} \xi_S = \nu$, partition triviale de X.

Le théorème suivant montre que, comme en dimension un, les K-systèmes sont des systèmes d'entropie complètement positive.

Nous ignorons si la réciproque de ce résultat est vérifiée en dimensions n, comme elle l'est en dimension un.

Théorème 5.1. *Soient T et S deux automorphismes qui commutent de $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et G le groupe qu'ils engendrent. Si le couple ordonné (T, S) définit un K-système, le système (X, G) est d'entropie complètement positive.*

Démonstration. Montrons d'abord que pour toute partition $\beta \in \mathscr{Z}$ telle que $h(\beta, G) = 0$ et $\beta \leqq \xi_S$, on a $\beta \leqq T^{-1} \xi_S$.

On sait que pour tout sous-groupe G_p d'indice fini dans G, $h(\beta, G_p) = 0$. La formule de Pinsker (5) et l'hypothèse $\beta \leqq \xi_S$ impliquent donc:

$$H(\gamma \mid \gamma_{S^k}^- \beta_{S^k} \cdot T^{-1} \xi_S) = H(\gamma \mid \gamma_{S^k}^- \cdot T^{-1} \xi_S) \geqq H(\gamma \mid S^{-k+1} \gamma_S^- \cdot T^{-1} \xi_S),$$

pour toute partition $\gamma \in \mathscr{Z}$ et tout entier k.

Si $\gamma \leqq S^p \xi$, pour un entier p, on a:

$$H(\gamma \mid \beta \cdot T^{-1} \xi_S) \geqq H(\gamma \mid \gamma_{S^k}^- \beta_{S^k} \cdot T^{-1} \xi_S) \geqq H(\gamma \mid S^{-k+1} \gamma_S^- \cdot T^{-1} \xi_S) \geqq H(\gamma \mid S^{-k+p+1} \xi).$$

En passant à la limite en k, on obtient d'après (III):

$$H(\gamma \mid \beta \cdot T^{-1} \xi_S) \geqq H(\gamma \mid T^{-1} \xi_S).$$

D'après la densité des partitions γ considérées, cette relation est vérifiée pour toute partition d'entropie finie moins fine que ξ_S, en particulier par β: $H(\beta \mid T^{-1} \xi_S) = 0$, soit $\beta \leqq T^{-1} \xi_S$.

Soit $\beta \in \mathscr{Z}$ telle que $h(\beta, G) = 0$ et $\beta \leqq T^p \xi_S$, pour un entier p. Le raisonnement précédent, appliqué successivement à $T^p \xi_S, T^{p-1} \xi_S$, etc., montre que $\beta \leqq \bigwedge_n T^{-n} \xi_S$, donc $\beta = \nu$ d'après l'hypothèse (IV) de K-système.

Si α est une partition d'entropie finie telle que $\alpha \leqq T^p \xi_S$, pour un entier p, pour toute partition $\beta \in \mathscr{Z}$ telle que $\beta \leqq \hat{\alpha}$, on a $h(\beta, G) = 0$, d'après le théorème 4.1, donc $\beta = \nu$, d'après ce qui précède. D'où $\hat{\alpha} = \nu$. Les partitions γ telles que $h(\gamma, G) = 0$ sont donc indépendantes des partitions α telles que $\alpha \leqq T^p \xi_S$, pour un entier p (théorème 4.2). Comme ces partitions α sont denses dans $\mathscr{Z}$, on a $\gamma = \nu$ et (X, G) est d'entropie complètement positive.

Théorème 5.2. *Soit G le groupe engendré par deux automorphismes T et S qui commutent. Il existe une partition mesurable ξ satisfaisant aux conditions* (I) *et* (II) *de la définition des K-systèmes, c'est à dire génératrice et croissante, telle que:*

$$h(G) = H(S\,\xi/\xi) = H(\xi/\xi_G^-).$$

La démonstration repose sur la formule de Pinsker (19), et est analogue à celle de la première partie du théorème 1 de [7].

Propriétés spectrales des systèmes dynamiques

Définitions. Soit G un groupe topologique localement compact d'automorphismes d'un espace $(X, \mathscr{A}, \mu)$. Le système (X, G) est dit *fortement mélangeant* si, quels que soient les ensembles A et B mesurables dans X, $\mu(g A \cap B) \to \mu(A) \cdot \mu(B)$, quand g tend vers l'infini.

On note $g \to U_g$ la représentation de G dans le groupe des opérateurs unitaires de $L^2(X, \mathscr{A}, \mu)$ définie par:

$$(U_g f)(x) = f(g^{-1} \cdot x), \qquad g \in G, \; x \in X, \; f \in L^2(X).$$

Quand G est engendré par n générateurs, nous dirons que le système (X, G) est à spectre de *Lebesgue dénombrable*, s'il existe dans l'orthogonal $\mathscr{H}$ des fonctions constantes dans $L^2(X)$, un système de fonctions $\{f_{g,i}, g \in G, i \in I\}$, I ensemble dénombrable d'indice, formant une base orthonormée de $\mathscr{H}$ et tel que, pour tout $h \in G$,

$$U_h f_{g,i} = f_{hg,i}.$$

Il est clair que si (X, G) est à spectre de Lebesgue dénombrable, il est fortement mélangeant.

Théorème 5.3. *Soient (T, S) un couple ordonné d'automorphismes qui commutent, et G le groupe qu'ils engendrent. Si (T, S) est un K-système, le système (X, G) est à spectre de Lebesgue dénombrable.*

Démonstration. Dans l'orthogonal $\mathscr{H}$ des fonctions constantes dans $L^2(X)$, soient $\mathscr{K}$, resp. $\mathscr{K}_1$, le sous-espace des fonctions constantes sur les éléments de ξ, resp. de $S^{-1}\xi$, et $\mathscr{H}_1$ le supplémentaire de $\mathscr{K}_1$ dans $\mathscr{K}$. L'espace $\mathscr{H}_1$ est de dimension infinie (cf. [4], § 14.1). Pour $(n', k') \neq (n, k)$, si f et g sont dans $\mathscr{H}_1$, $T^{n'} S^{k'} f$ est orthogonal à $T^n S^k g$. (Condition (II) de K-système.) Des conditions (I), (III) et (IV), il résulte que le sous-espace engendré par $T^n S^k \mathscr{H}_1$, $(n, k) \in \mathbb{Z}^2$, est dense dans $\mathscr{H}$. Si f_i, $i \in I$, est une base dénombrable orthonormée dans $\mathscr{H}_1$, les fonctions $T^n S^k f_i$, $(n, k) \in \mathbb{Z}^2$, $i \in I$, forment une base orthonormée dans $\mathscr{H}$.

Nous ignorons si un système (X, G) d'entropie complètement positive est à spectre de Lebesgue dénombrable. Les deux théorèmes suivants constituent des réponses partielles à cette question.

Théorème 5.4. *Soit (X, G) un système dynamique, d'entropie $h(G) > 0$. Le système (X, G) a un type spectral maximal de Lebesgue dénombrable (c'est à dire, il existe dans $L^2(X)$, un système orthonormé de fonctions $f_{g,i}$, $g \in G$, $i \in I$ dénombrable, tel que*

$$U_h f_{g,i} = f_{hg,i}, \quad \textit{quels que soient} \;\; h, g \in G, \; i \in I).$$

La démonstration est analogue à celle du théorème 5.3.

Théorème 5.5. *Si le système (X, G) est d'entropie complètement positive, il est fortement mélangeant.*

Démonstration. Nous nous plaçons dans le cas $n = 2$. Le groupe G est engendré par des automorphismes T et S.

Soit A un ensemble mesurable, et (n_k, p_k) une suite dans $\mathbb{Z}^2$ telle que $\sup(|n_k|, |p_k|) \to \infty$. Montrons que

$$\mu(T^{n_k} S^{p_k} A \cap A) \to \mu(A)^2.$$

La propriété de mélange fort en résultera par polarisation.

Il suffit de raisonner dans le cas où, par exemple, $n_k \to -\infty$. Soit α la partition de X en A, $X-A$. La suite $T^{n_k+1}(\alpha_S)_T^-$ est décroissante, et sa limite est une partition moins fine que α_∞, donc triviale (cf. théorème 4.1), puisque (X, G) est d'entropie complètement positive. On a donc, d'après la relation (3):

$$\begin{aligned} H(\alpha) &\geqq \overline{\lim}\, H(\alpha \mid T^{n_k} S^{p_k} \alpha) \geqq \underline{\lim}\, H(\alpha \mid T^{n_k} S^{p_k} \alpha) \\ &\geqq \lim_k H\big(\alpha \mid T^{n_k+1}(\alpha_S)_T^-\big) = H(\alpha). \end{aligned}$$

D'où $H(\alpha \mid T^{n_k} S^{p_k} \alpha) \to H(\alpha)$, ce qui entraîne:

$$\mu(T^{n_k} S^{p_k} A \cap A) \to \mu(A)^2.$$

6. Entropie d'un système défini par n groupes à un paramètre

Supposons donnés dans le groupe des automorphismes de $(X, \mathscr{A}, \mu)$, n groupes à un paramètre réel, commutant deux à deux, $T_t, S_t, \ldots, R_t$, $t \in \mathbb{R}$, tel que la représentation de $\mathbb{R}$ dans $L^2(X)$ associée à chacun de ces groupes soit continue. Soit G le groupe engendré par $T_t, S_t, \ldots, R_t$.

Considérons le sous-groupe discret Γ de G engendré par $T_1, S_1, \ldots, R_1$. On peut considérer G comme espace vectoriel réel muni de la base $T_1, S_1, \ldots, R_1$, et donc faire opérer toute matrice réelle M de dimension n sur G. Notons Γ_M l'image par M du sous-groupe Γ. Le théorème suivant donne la relation entre l'entropie de (X, Γ) et l'entropie de (X, Γ_M). Il généralise la formule d'Abramov $h(T_t) = |t|\, h(T_1)$.

Théorème 6.1. $h(\Gamma_M) = |\det(M)|\, h(\Gamma)$.

Démonstration. Dans cette formule, on doit prendre 0 pour valeur du produit $|\det(M)|\, h(\Gamma)$, si $\det(M) = 0$ et $h(\Gamma) = \infty$.

La démonstration repose sur la méthode utilisée en dimension un par Pinsker pour prouver la formule d'Abramov. Cette méthode est exposée dans [6]. Pour simplifier, nous ferons les raisonnements dans le cas $n=2$.

Lemme 6.1. *Notons (T, S_t), (T, S_u) les groupes discrets engendrés par $T = T_1$ et S_t, et $T = T_1$ et S_u et $h(T, S_t)$, $h(T, S_u)$, leur entropie, où t et u sont deux réels. Si $0 < u < t$, on a $h(T, S_t) \leqq t/u\, h(T, S_u)$.*

Démonstration. Fixons un entier m, et soit $\delta = 1/m$. A toute partition α associons la partition $\tilde{\alpha} = \alpha \cdot S_{\delta u} \alpha \ldots S_{(m-1)\delta u} \alpha$. Pour tout entier n, soit $k = k(n)$ le plus petit entier tel que: $n t \leqq k u < (n+1) t$.

Comme dans [6], on a, pour toute partition α dans $\mathscr{Z}$,

$$H(\alpha \cdot S_t \alpha \ldots S_{nt} \alpha) \leqq H(\tilde{\alpha} \cdot S_u \tilde{\alpha} \ldots S_{ku} \tilde{\alpha}) + \sum_{i=1}^{n} H(S_{\theta_i} \alpha \mid \alpha),$$

où les nombres θ_i vérifient $0 \leqq \theta_i < \delta u$. D'où en divisant par n et en passant à la limite en n:

$$h(\alpha, S_t) \leqq \frac{t}{u} h(\tilde{\alpha}, S_u) + \varepsilon(\alpha, \delta u),$$

avec $\varepsilon(\alpha, \delta u) = \sup\limits_{0 \leqq \theta < \delta u} H(S_\theta \alpha | \alpha)$.

Appliquons cette relation à une partition ξ de la forme $\alpha \cdot T\alpha \ldots T^{p-1}\alpha$. On obtient:

$$\frac{1}{p} h(\alpha \cdot T\alpha \ldots T^{p-1}\alpha, S_t) \leqq \frac{t}{u} \cdot \frac{1}{p} h(\tilde{\alpha} \cdot T\tilde{\alpha} \ldots T^{p-1}\tilde{\alpha}, S_u) + \frac{1}{p} \varepsilon(\alpha \cdot T\alpha \ldots T^{p-1}\alpha, \delta u).$$

Pour chaque θ, on a:

$$H\big(S_\theta(\alpha \cdot T\alpha \ldots T^{p-1}\alpha) | \alpha \cdot T\alpha \ldots T^{p-1}\alpha\big) \leqq p\, H(S_\theta \alpha | \alpha).$$

D'où

$$\frac{1}{p} h(\alpha \cdot T\alpha \ldots T^{p-1}\alpha, S_t) \leqq \frac{t}{u} \cdot \frac{1}{p} h(\tilde{\alpha} \cdot T\tilde{\alpha} \ldots T^{p-1}\tilde{\alpha}, S_u) + \varepsilon(\alpha, \delta u).$$

En passant à la limite sur p, on en déduit:

$$h\big(\alpha, (T, S_t)\big) \leqq \frac{t}{u} h\big(\tilde{\alpha}(T, S_u)\big) + \varepsilon(\alpha, \delta u) \leqq \frac{t}{u} h(T, S_u) + \varepsilon(\alpha, \delta u).$$

D'après l'hypothèse de continuité faite sur les groupes $T_t, S_t, \ldots$, on peut rendre $\varepsilon(\alpha, \delta u)$ arbitrairement petit pour un choix convenable de δ. Donc:

$$h\big(\alpha, (T, S_t)\big) \leqq \frac{t}{u} h(T, S_u),$$

et, en prenant la borne supérieure en $\alpha \in \mathscr{Z}$, $h(T, S_t) \leqq \frac{t}{u} h(T, S_u)$.

Démonstration du théorème. Pour tout entier positif p,

$$h(T, S^p) = h(T^p, S) = p\, h(T, S).$$

Soient u et t des réels positifs. Supposons qu'on ait $0 < u < t$. D'après le lemme,

$$h(T, S_t) \leqq \frac{t}{u} h(T, S_u),$$

et de même, en choisissant un entier p tel que $0 < t < p u$,

$$h(T, S_{pu}) = p\, h(T, S_u) \leqq \frac{pu}{t} h(T, S_t),$$

d'où

$$h(T, S_u) \leqq \frac{u}{t} h(T, S_t).$$

On a donc l'égalité:

$$u\, h(T, S_t) = t\, h(T, S_u),$$

égalité qui s'étend à des réels t et u quelconques: $|u|\,h(T,S_t)=|t|\,h(T,S_u)$. Dans cette égalité, il convient de poser $u\,h(T,S_t)=0$ si $u=0$ et $h(T,S_t)=\infty$ (en effet si S est l'identité $h(T,S)=0$).

Soit alors M une matrice réelle de dimensions 2×2. Si M est de la forme $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$, la formule $h(\Gamma_M)=|\det(M)|\,h(\Gamma)$ est démontrée par ce qui précède. Elle est également vérifiée pour M de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ou $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ces matrices correspondant à des automorphismes de Γ.

Enfin, on a, d'après ce qui précède,

$$h(TS_t,S)=\frac{1}{t}\,h(TS_t,S_t)=\frac{1}{t}\,h(T,S_t)=h(T,S),$$

ce qui prouve la formule cherchée dans le cas où $M=\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t\neq 0$.

Comme les matrices des types précédents engendrent l'anneau des matrices 2×2, la formule $h(\Gamma_M)=|\det(M)|\,h(\Gamma)$ est démontrée dans le cas général.

Bibliographie

1. Halmos, P.: Lectures on ergodic theory. Chelsea 1956.
2. Neveu, J.: Théorie ergodique (cours polycopié – Paris 1968).
3. Robinson, D., Ruelle, D.: Mean entropy of states in clasical statistical mechanic. Commun. Math. Phys. **5**, 288–300 (1967).
4. Rohlin, V.A.: Leçons sur la théorie de l'entropie. Uspehi. Mat. Nauk v. 22 n° 5, 1–50 (1967).
5. Rohlin, V.A.: Sujets choisis de la théorie métrique des systèmes dynamiques. Uspehi. Math. Nauk v. 4 n° 2 (1949).
6. Sinai, J.G.: Theory of dynamical systems. part I. Cours rédigé par J.M. Strelcyn. Aarhus Universitet Matematisk Instit. 1970.
7. Sinai, J.G., Rohlin, V.A.: Construction et propriétés de partitions mesurables invariantes. Doklady Akad. Nauk v. 141 n° 5 (1961) 1038–1041.

Mentionnons également deux articles traitant de l'entropie de l'action de groupes abéliens, qui nous ont été signalés par le rapporteur:

Pickel, B.S., Stepin, A.M.: On the entropy equidistribution property of commutative groups of metric automorphisms. Sov. Math. Dokl. **12**, 938–942 (1971).

Stepin, A.M.: On the entropy invariants for decreasing measurable partition. Funct. Anal. and its appl. (Russian) **5**, 237–240 (1971).

Enfin, Y. Katznelson et B. Weiss ont bien voulu attirer notre attention sur leur article proche sur certains points du sujet traité ici: «Commuting measure preserving transformations». A paraître dans Israel Journal of Mathematics.

J. P. Conze
Université de Rennes
BP 25 A
F-35 Rennes, France

(Reçu le 27 janvier 1971)