Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
35, 349–353 (1976)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Corps convexes et processus Gaussiens de petit rang

X. Fernique

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Université Louis Pasteur, U.E.R. de Mathématique, 7 rue René Descartes
F-67084 Strasbourg Cedex, France

On calcule des moments du maximum de certains processus gaussiens à partir d'éléments géométriques.

1. Introduction, notations

Soient n un entier positif et $X=X(\omega,t)$, $\omega\in\Omega$, $t\in T=[1,n]$, un vecteur gaussien centré de covariance Γ inversible; soit g la densité de X sur $\mathbb{R}^T=\mathbb{R}^n$, nous avons donné précédemment en utilisant des idées de Chevet ([1]) un calcul de $E[\sup_T X]$ à partir d'intégrales sur $\mathbb{R}^{n-1}$ liées à g ([2], lemme 2.2.1). Nous allons généraliser ce calcul dans deux directions: lui donner un sens lorsque Γ n'est pas inversible, l'étendre au calcul d'autres moments; nous constaterons aussi dans des cas particuliers sa signification géométrique. Nous supposerons T fini.

Soit (s,t) un couple d'éléments de T, nous noterons $Y(s,t)$ le processus gaussien défini par:

$$\forall u\in T, \qquad Y(s,t)(u)=X(u)-E\{X(u)|X(s)-X(t)\},$$

soit si $d(s,t)\neq 0$, $Y(s,t)(u)=X(u)-\dfrac{\gamma(u,s)-\gamma(u,t)}{d^2(s,t)}(X(s)-X(t))$.

Remarquons que pour tout couple (s,t) de distance $d(s,t)\neq 0$, la probabilité de $\{X(s)=X(t)\}$ est nulle; elle vaut 1 si $d(s,t)=0$. Puisque T est fini, on peut donc définir presque sûrement une variable aléatoire $\sigma=\sigma_X$ à valeurs dans T muni de la tribu engendrée par les d-boules en posant:

$$\sigma_X(\omega)=s \rightleftharpoons X(\omega,s)=\sup_T X(\omega).$$

Nous noterons $\mu=\mu_X$ la probabilité sur T qui est la loi de σ.

2. Le calcul fondamental

2.1. Nous supposons pour commencer que X a une covariance Γ inversible, nous notons G la matrice inverse de Γ et g la densité sur $\mathbb{R}^T$ de la loi de X; nous posons $\gamma_0=\sup_{s\in T}\gamma(s,s)$.

Lemme 2.1. *Pour toute fonction f continue à dérivée continue d'une variable réelle telle que:*

$$\exists\, \gamma > \gamma_0 : \lim_{|x| \to \infty} \{f'(x)\, e^{-\frac{x^2}{2\gamma}}\} = 0,$$

on a pour tout élément s de T:

$$E\{[X(s)\, f(X(s)) - f'(X(s))\, \gamma(s,s)]\, I_{\sigma=s}\}$$

$$= \sum_{t \neq s} (\gamma(s,s) - \gamma(s,t)) \int \frac{dx}{dx_s\, dx_t} \int_E f(\alpha) g(x) d\alpha, \qquad E = \{x_s = x_t = \sup x = \alpha\}, \tag{2.1.1}$$

$$2E\{[X(\sigma)\, f(X(\sigma)) - f'(X(\sigma))\, \gamma(\sigma,\sigma)]\}$$

$$= \sum_s \sum_{t \neq s} d^2(s,t) \int \frac{dx}{dx_s\, dx_t} \int_E f(\alpha) g(x) d\alpha, \qquad E = \{x_s = x_t = \sup x = \alpha\}, \tag{2.1.2}$$

$$E[X(s)\, X(\sigma)] = E[\gamma(s,\sigma)] = \int \gamma(s,t)\, d\mu(t). \tag{2.1.3}$$

Démonstration. On calcule facilement $E\{[f(X(s))(GX)(t)]\, I_{\sigma=s}\}$ pour $t \neq s$ en intégrant par rapport à x_t puisque $(Gx)(t)\, g(x)$ est égal à $-\frac{\partial}{\partial x_t} g(x)$; on calcule aussi $E\{[f(X(s))(GX)(s) - f'(X(s))]\, I_{\sigma=s}\}$ en développant suivant les ensembles où les $X(t)$, $t \neq s$ sont les plus grands à part $X(s)$ et en intégrant alors par rapport à x_s sur $[x_t, +\infty]$. La relation (2.1.1) se déduit de ces deux calculs en utilisant:

$$X(s) = \sum_t \gamma(s,t)(GX)(t);$$

la relation (2.1.2) s'obtient alors en sommant sur (2.1.1); les mêmes calculs liés à la fonction $f(x) = x$ donnent (2.1.3).

2.2. Les relations ci-dessus font intervenir explicitement G et g. En fait, on peut les écrire aussi à partir des processus conditionnés $Y(s,t)$; il suffit de remarquer que la fonction $\sqrt{2\pi}\, d(s,t)\, g(x)$ pour $x_s = x_t$ est la densité de $Y(s,t)$. On obtient alors, si Γ est inversible:

$$E\{[X(s)\, f(X(s)) - f'(X(s))\, \gamma(s,s)]\, I_{\sigma=s}\}$$

$$= \sum_{t \neq s} \frac{\gamma(s,s) - \gamma(s,t)}{\sqrt{2\pi}\, d(s,t)} E\{f(Y(t,s)(s))\, I_{\sigma_Y=s}\}, \tag{2.2.1.}$$

$$E\{[X(\sigma)\, f(X(\sigma)) - f'(X(\sigma))\, \gamma(\sigma,\sigma)]\}$$

$$= \sum_s \sum_{t \neq s} \frac{d(s,t)}{2\sqrt{2\pi}} E\{f(Y(t,s)(s))\, I_{\sigma_Y=s}\}, \tag{2.2.2.}$$

$$E\{X(s)\, X(\sigma)\} = E\{\gamma(s,\sigma)\} = \int \gamma(s,t)\, d\mu(t). \tag{2.2.3.}$$

2.3. Nous étudions maintenant le cas où Γ n'est pas inversible; les variables aléatoires $(X(t), t \in T)$ définissent dans $L^2(\Omega)$ un ensemble fini; nous notons $\mathscr{E}(X)$

l'ensemble fini des indices des sommets de son enveloppe convexe; c'est un sous-ensemble de T (identique à T si Γ est inversible) et la variable aléatoire $\sigma = \sigma_X$ prend ses valeurs dans $\mathscr{E} = \mathscr{E}(X)$, on a d'ailleurs:

$$\sup_T X = \sup_{\mathscr{E}} X.$$

Lemme 2.3. *Soit X un processus gaussien sur un ensemble fini T séparé par d; pour toute fonction f continue à dérivée continue d'une variable réelle telle que*

$$\exists\, \gamma > \sup_{s\in T} \gamma(s,s): \lim_{|x|\to\infty} \{f'(x)\, e^{-\frac{x^2}{2\gamma}}\} = 0,$$

on a pour tout élément s de $\mathscr{E}$:

$$E\{[X(s)\, f(X(s)) - f'(X(s))\, \gamma(s,s)]\, I_{\sigma=s}\} = \sum_{\substack{t\in\mathscr{E}\\ t\neq s}} \frac{\gamma(s,s)-\gamma(s,t)}{\sqrt{2\pi}\, d(s,t)} E\{f(Y(t,s)(s))\, I_{\sigma_Y=s}\}, \tag{2.3.1.}$$

$$E\{X(\sigma)\, f(X(\sigma)) - f'(X(\sigma))\, \gamma(\sigma,\sigma)\} = \sum_{s\in\mathscr{E}} \sum_{\substack{t\in\mathscr{E}\\ t\neq s}} \frac{d(s,t)}{2\sqrt{2\pi}} E\{f(Y(t,s)(s))\, I_{\sigma_Y=s}\}, \tag{2.3.2}$$

et pour tout élément s de T:

$$E\{X(s)\, X(\sigma)\} = \int \gamma(s,t)\, d\mu(t). \tag{2.3.3}$$

Démonstration. Elle résulte d'un passage à la limite sur les processus auxiliaires inversibles $X_\varepsilon(t) = X(t) + \varepsilon \Lambda(t)$, $t\in\mathscr{E}$, où Λ est un processus normal sur $\mathscr{E}$ indépendant de X; on vérifie en effet:

$$\forall\, s\in\mathscr{E}, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} P\{[\sigma_X = s]\, \Delta\, [\sigma_{X_\varepsilon} = s]\} = 0,$$

$$\forall\, (s,t)\in\mathscr{E}\times\mathscr{E}, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} P\{[\sigma_{Y_\varepsilon(s,t)} = s]\, \Delta\, [\sigma_{Y_{(s,t)}} = s]\} = 0.$$

3. Etude de cas particuliers

3.1. Le rang 2

Supposons qu'il existe deux vecteurs A_1 et A_2 de $\mathbb{R}^T$ et un couple normal (λ_1, λ_2) tels que:

$$\forall\, t\in T, \quad X(t) = A_1(t)\, \lambda_1 + A_2(t)\, \lambda_2;$$

dans ces conditions, X peut être représenté dans $\mathbb{R}^2$ par l'ensemble A des points $\{A(t) = (A_1(t), A_2(t)),\ t\in T\}$; nous notons P le polygone convexe engendré par A.

Théorème. *Si le rang de X est inférieur ou égal à 2, les premiers moments de* $\sup_T X$ *sont donnés à partir du périmètre p de P et son aire* $\mathscr{A}$ *par:*

$$E[X(\sigma)] = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, p,$$

$$E[X^2(\sigma) - \gamma(\sigma,\sigma)] = \frac{\mathscr{A}}{2\pi}.$$

Démonstration. Si $d(s,t)$ est non nulle, alors $Y(s,t)$ est de rang inférieur ou égal à 1 et l'ensemble $\{\sigma_{Y(s,t)} = s\}$ sera de probabilité nulle ou égale à 1/2; le second cas se produit si la projection orthogonale commune de $A(t)$ et $A(s)$ dans la direction $A(t)A(s)$ est un sommet de la projection de P, c'est-à-dire si $A(t)$ et $A(s)$ sont deux sommets consécutifs de P. On aura donc, en notant $\mathscr{E}(s)$ l'ensemble des indices des deux sommets de P contigus à $A(s)$:

$$\begin{aligned} &E\{X(\sigma)\, f(X(\sigma)) - f'(X(\sigma))\, \gamma(\sigma,\sigma)\} \\ &= \sum_s \sum_{t\in\mathscr{E}(s)} \frac{d(s,t)}{2\sqrt{2\pi}}\, E\{f(Y(t,s)(s))\, I_{\sigma_Y = s}\}; \end{aligned}$$

la première formule s'en déduit en prenant $f(x)=1$, les derniers facteurs valant alors 1/2. On établit la seconde en prenant $f(x)=x$, on obtient en effet:

$$E\{X^2(\sigma) - \gamma(\sigma,\sigma)\} = \sum_s \sum_{t\in\mathscr{E}(s)} \frac{d(s,t)}{2\sqrt{2\pi}}\, \varepsilon_{s,t} \left[\frac{\overrightarrow{0A(s)} \wedge \overrightarrow{A(t)A(s)}}{d(s,t)}\right],$$

où $\varepsilon_{s,t}$ vaut $+1$ si l'origine 0 est du côté de $A(s)A(t)$ qui contient le polygone P et vaut (-1) dans le contraire. En sommant sur les différents sommets, on obtient le résultat indépendamment de la position de l'origine.

3.2. *Le rang 3*

Supposons maintenant que X soit de rang inférieur ou égal à 3; nous le représentons par un ensemble A dans $\mathbb{R}^3$ et nous notons P le polyèdre convexe engendré par A; pour tout sommet $A(s)$ de P, nous notons $\mathscr{E}(s)$ l'ensemble des indices des sommets contigus. Dans ces conditions, l'ensemble $\{\sigma_Y(s,t) = s\}$ sera encore de probabilité nulle si t n'appartient pas à $\mathscr{E}(s)$ et on obtient:

Théorème. *Si le rang de X est inférieur ou égal à* 3, *le second moment de* $\sup_T X$ *est donné à partir de l'aire latérale* $\mathscr{A}$ *de P par:*

$$E\{X^2(\sigma) - \gamma(\sigma,\sigma)\} = \frac{\mathscr{A}}{4\pi}.$$

Démonstration. En appliquant aux $Y(s,t)$ les résultats du rang 2, on obtient:

$$\begin{aligned} &E\{X^2(\sigma) - \gamma(\sigma,\sigma)\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_s \sum_{t\in\mathscr{E}_X(s)} \sum_{u\in\mathscr{E}_{Y(s,t)}(s)} \frac{d_X(s,t)}{2}\, \frac{\gamma_{Y(s,t)}(s,s) - \gamma_{Y(s,t)}(s,u)}{d_{Y(s,t)}(s,u)} \end{aligned}$$

et on reconnaît dans ce terme l'aire du triangle $A(s)A(t)\mathcal{O}$, où $\mathcal{O}$ est la projection orthogonale de l'origine sur le plan $A(s)A(t)A(u)$, comptée positivement si ce triangle coupe le triangle $A(s)A(t)A(u)$. En projetant parallèlement aux différentes arêtes successives de la facette contenant $A(s)A(t)A(u)$, on obtient le résultat.

3.3. On remarquera qu'en appliquant les formules 3.1. aux cas où P est un segment ou un triangle, on obtient des formules connues, de même en engendrant une ellipse ou un ellipsoïde par des polygones ou des polyèdres inscrits. Le fait que $E(X(\sigma))$ s'exprime, en rang 2, à partir du seul périmètre est lié à son indépendance par rapport à la position de l'origine relativement à A, ceci est classique.

Par contre, il est plus troublant que $E\{X^2(\sigma)-\gamma(\sigma,\sigma)\}$ soit aussi indépendant de la position de l'origine et soit donc fonction de la seule distance du processus. C'est pourtant une propriété générale indépendante du rang de X et de la dimension de T.

Théorème 3.3. *Soit X un processus gaussien centré sur un ensemble fini T; alors la projection orthogonale de $X(\sigma)=\sup_T X$ sur le sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$ engendré par $\{X(t), t\in T\}$ est $\int X(t)\,d\mu(t)$ où μ est la loi de σ. De plus, $E\{X^2(\sigma)-\gamma(\sigma,\sigma)\}$ est une fonction de la seule distance du processus.*

Démonstration. La première affirmation résulte immédiatement de la formule 2.3.3. Pour démontrer la seconde, il suffit, puisque la loi de $X'=X-\frac{1}{\operatorname{Card} T}\sum_{t\in T} X(t)$ ne dépend que de la distance de X, de montrer que $E\{X'^2(\sigma_{X'})-\gamma_{X'}(\sigma_{X'},\sigma_{X'})\}$ est égal à $E\{X^2(\sigma_X)-\gamma_X(\sigma_X,\sigma_X)\}$. Comme $\sigma_{X'}$ est égal à σ_X, la vérification est immédiate à partir de la formule 2.3.3.

3.4. L'auteur remercie tout particulièrement les probabilistes de l'Université de Clermont dont les critiques ont été précieuses pour la mise au point de ce travail.

Références

1. Badrikian, A., Chevet, S.: Mesures cylindriques, espaces de Wiener et fonctions aléatoires Gaussiennes. Lecture Notes in Math. **379**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974
2. Fernique, X.: Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires Gaussiennes. Lecture Notes in Math. **480**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1975

Reçu le 5 mars 1976