Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
35, 1–37 (1976)

Zeitschrift für
Wahrscheinlichkeitstheorie
und verwandte Gebiete

Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semi-martingales

Jean Jacod et Jean Mémin

IRISA, Laboratoire associé n° 227, et Département de Mathématiques et Informatique,
Université de Rennes, Avenue du Général Leclerc, F-35031 Rennes-Cedex, BP 25 A, France

Introduction

1. Soit X une semi-martingale sur un espace $(\Omega, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathscr{F}, P)$. On considère la mesure aléatoire μ sur $]0, \infty[\times(\mathbb{R}-\{0\})$ associée aux sauts de X par

$$\mu(A)=\sum_{(s)} 1_{\{X_{s-}\neq X_s\}} 1_A(s, \Delta X_s),$$

et le processus X^0 obtenu en amputant X de ses sauts d'amplitude supérieure à 1:

$$X_t^0=X_t-\sum_{s\leqq t} 1_{\{|\Delta X_s|>1\}}\Delta X_s-X_0.$$

On peut montrer que X^0 s'écrit de manière unique comme $X^0=M+\alpha$, où M est une martingale locale, et où α est un processus prévisible nul à l'origine, localement à variations intégrables.

On appelle *P-caractéristiques locales* de X le triplet $\mathscr{C}=(\nu, \alpha, \beta)$ constitué de (i) la «projection prévisible duale» ν de μ (c'est encore une mesure aléatoire sur $]0, \infty[\times(\mathbb{R}-\{0\})$ dont la définition précise est connée au paragraphe 1, et qui par référence aux processus de Markov pourrait s'appeler le «système de Lévy» de X), de (ii) le processus α introduit ci-dessus, et de (iii) le processus croissant continu $\beta=\langle M^c, M^c\rangle$ associé à la partie continue M^c de M.

Par exemple si X est un processus à accroissements indépendants et stationnaires, il est bien connu que c'est une semi-martingale (relativement à sa famille naturelle de tribus). Ses caractéristiques locales sont $\nu(dt, dx)=dt\,F(dx)$, $\alpha_t=at$, et $\beta_t=b^2 t$, où F est la mesure de Lévy de X, a est la dérive et b est le coefficient de la partie brownienne.

La notion de caractéristiques locales, pour une classe de processus plus restrictive que les semi-martingales, a été introduite par Grigelionis [9]. La présentation de cette notion est faite au paragraphe 2.

2. Nous nous intéressons principalement au problème suivant: supposons que P et P' soient deux probabilités sur $(\Omega, \mathscr{F})$ pour lesquelles X est une semi-martingale, de caractéristiques locales respectives $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$; peut-on trouver des conditions sur $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ pour qu'on ait $P\ll P'$, ou $P'\ll P$, ou $P'\sim P$?

Lorsque X est à trajectoires continues, ce problème a été étudié en détails, et nous ne ferons ici que retrouver des résultats connus. Citons notamment Ershov [6], Kailath [12], Kailath et Zakai [13], Liptzer et Shyriaev [16], Orey [22] et Kunita [15]. Pour une bibliographie descriptive, nous renvoyons à Orey [23], Mémin [18], ou Liptzer et Shyriaev [17].

Lorsque X est un processus non continu, les résultats antérieurs sont beaucoup plus parcellaires. Citons, en ce qui concerne les processus ponctuels et les «processus de sauts pur», par exemple Brémaud [1], Kailath et Segall [14], Orey [23] et Jacod [10]. Enfin Skorokhod [24] a donné des conditions pour que $P \sim P'$ lorsque X est intégrale stochastique d'un processus à accroissements indépendants, tandis que Grigelionis [7–9] a étudié certains aspects du problème ci-dessus dans le cadre des processus «localement indéfiniment divisibles» (cf. paragraphe 2).

Signalons enfin que ce problème débouche sur un certain nombre d'applications en théorie du filtrage non linéaire: voir Kailath [12], Grigelionis [9], ou Liptzer et Shyriaev [17].

3. La première étape, fondamentale, consiste à prouver que si X est une semi-martingale pour P de caractéristiques locales $\mathscr{C}=(\nu, \alpha, \beta)$ et si $P' \ll P$, alors X est aussi une P'-semi-martingale dont les P'-caractéristiques locales $\mathscr{C}'$ peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} &\nu' = Y \cdot \nu \\ &\alpha'_t = \alpha_t + \int_0^t z_s d\beta_s + \int_0^t \int_{\{|x| \leq 1\}} x[Y(s,x)-1]\,\nu(ds,dx) \\ &\beta' = \beta, \end{aligned} \qquad (*)$$

où z est un processus prévisible, et où Y est une fonction positive «prévisible» sur $\Omega \times [0, \infty[\times(\mathbb{R}-\{0\})$. Ce résultat fait l'objet du paragraphe 3.

4. Il est alors naturel de reformuler le problème initial ainsi: on suppose que X est un processus continu à droite, limité à gauche, adapté à $(\mathscr{F}_t)$; soient Q une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F}_0)$ et $\mathscr{C}=(\nu, \alpha, \beta)$ un triplet constitué d'une mesure aléatoire «prévisible» ν, d'un processus prévisible α et d'un processus croissant continu adapté β. On dit qu'une probabilité P est solution (faible) du *problème des martingales* $(X, \mathscr{C}, Q)$ si X est une P-semi-martingale de caractéristiques locales $\mathscr{C}$, et si la restriction de P à $(\Omega, \mathscr{F}_0)$ égale Q. Soient également Q' une autre probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F}_0)$, z un processus prévisible, Y une fonction positive prévisible sur $\Omega \times [0, \infty[\times(\mathbb{R}-\{0\})$ et $\mathscr{C}'$ le triplet défini par les formules $(*)$. Si P' est solution du problème des martingales $(X, \mathscr{C}', Q')$, à quelles conditions sur Y, z, Q et Q' a-t'on $P' \ll P$, ou $P \ll P'$, ou $P \sim P'$?

Le paragraphe 4 est consacré à l'énoncé des résultats obtenus dans cette direction, leurs démonstrations étant repoussées aux paragraphes 5 et 6. On se limite au cas où, pour P et P', X est une semi-martingale *quasi-continue à gauche*.

Enfin dans le cas où $P' \ll P$, on donne sous certaines conditions une expression de la *dérivée de Radon-Nikodym* $E\left(\frac{dP'}{dP}\middle|\mathscr{F}_t\right)$ en fonction de Y, z, Q et Q'.

5. Les résultats précédents conduisent à se poser un certain nombre de problèmes intéressants, notamment sur l'unicité de la solution du problème des

martingales $(X, \mathscr{C}, Q)$, et sur les relations entre cette unicité et un théorème de représentation des martingales. Le problème de l'unicité est abordé au paragraphe 7, tandis que dans le paragraphe 8 on montre que si P est l'unique solution du problème $(X, \mathscr{C}, Q)$, toute P-martingale locale nulle à l'origine est la somme d'une intégrale stochastique par rapport à la martingale locale continue $M^c=(X^0-\alpha)^c$, et d'une intégrale stochastique par rapport à la mesure aléatoire $\mu-\nu$.

Par contre nous avons pratiquement laissé de coté le problème de l'existence d'une solution au problème des martingales $(X, \mathscr{C}, Q)$. Un seul résultat, du type «théorème de Girsanov» (énoncé sous deux formes différentes: théorèmes (3.8) et (4.5)), est donné dans cette direction.

6. Il est évident qu'à des modifications triviales près, nos résultats restent valides lorsque X est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, dont chaque composante est une semi-martingale.

Ces résultats resteraient également valides, avec une formulation légèrement différente, si X était un «processus de sauts pur» à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$: dans ce cas X est entièrement déterminé par la mesure aléatoire μ sur $]0, \infty[\times E$, définie par $\mu(A)=\sum_{(s)} 1_{\{X_{s-} \neq X_s\}} 1_A(s, X_s)$, et les P-caractéristiques locales de X sont constituées de la seule projection prévisible duale de μ (plus généralement, d'ailleurs, on pourrait partir d'une mesure aléatoire μ «à valeurs entières»: cf. [11]).

Enfin nous avons supposé, par habitude, que le processus X était défini sur $[0, \infty[$. S'il n'est défini que sur un intervalle semi-ouvert borné $[0, d[$, il suffit de remplacer partout dans le texte l'instant $+\infty$ par l'instant d. Si maintenant X est défini sur un intervalle fermé borné $[0, d]$, il convient de prendre plus de précautions dans l'application de ce qui suit: on définit un nouveau processus X' sur $[0, \infty[$ par $X'_t = X_{t \wedge d}$, et on pose $\mathscr{F}'_t = \mathscr{F}_{t \wedge d}$; si $(X_t)_{0 \leq t \leq d}$ est une semi-martingale sur $(\Omega, (\mathscr{F}_t)_{0 \leq t \leq d}, \mathscr{F}, P)$, il est clair que X' est une semi-martingale sur $(\Omega, (\mathscr{F}'_t), \mathscr{F}, P)$, et les P-caractéristiques locales de X sont définies comme les restrictions à $[0, d]$ des P-caractéristiques locales de X'. A l'aide de ces quelques remarques, la transposition de nos résultats au cas où X est défini sur $[0, d]$ est alors très facile.

1. Préliminaires

1. Quelques notations. On considère un espace mesurable $(\Omega, \mathscr{F})$ muni d'une famille $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ croissante et continue à droite de sous-tribus de $\mathscr{F}$. On considère également un processus X à valeurs réelles, défini sur Ω, adapté à la famille $(\mathscr{F}_t)$, dont les trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche; *ce processus X est fixé une fois pour toutes.*

Sauf mention contraire, le terme «temps d'arrêt» se rapporte à la famille $(\mathscr{F}_t)$; de même le terme «processus» signifie processus à valeurs dans $[-\infty, \infty]$, adapté à la famille $(\mathscr{F}_t)$.

Si S et T sont deux temps d'arrêt, l'*intervalle stochastique* $[S, T]$ est l'ensemble $\{(\omega, t): S(\omega) \leq t \leq T(\omega), t<\infty\}$; les intervalles $[S, T[$, $]S, T]$ et $]S, T[$ sont définis de manière analogue. En particulier, $[T]=[T, T]$ s'appelle le *graphe* de T dans $\Omega \times [0, \infty[$.

Si T est un temps d'arrêt et Y un processus, on note Y^T le processus arrêté en T: $Y_t^T = Y_{T \wedge t}$. Si Y est un processus continu à droite et limité à gauche, on note Y_{t-} et ΔY_t sa limite à gauche et son saut à l'instant $t>0$.

Pour tout espace mesurable $(A, \mathscr{A})$, on désigne par $\mathscr{A}^+$ l'ensemble des applications $\mathscr{A}$-mesurables de A dans $[0, \infty]$.

Soit P une probabilité quelconque sur $(\Omega, \mathscr{F})$. On dit qu'un ensemble B de $\Omega \times [0, \infty[$ est *P-évanescent* si l'ensemble $\{\omega: \exists\, t, (\omega, t) \in B\}$ est P-négligeable. Deux processus Y et Z sont *P-indiscernables* si l'ensemble $\{Y \neq Z\}$ est P-évanescent.

2. Processus et temps d'arrêt prévisibles. Nous utiliserons souvent le livre de Dellacherie [3]. Comme nous ne voulons pas fixer a-priori une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$, il nous faut modifier les notions de processus et de temps d'arrêt prévisibles.

Définition. (i) *Un processus Y est* dit *prévisible* si l'application $(\omega, t \rightsquigarrow Y_t(\omega)$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathscr{P}$ de $\Omega \times [0, \infty[$ engendrée par les applications $(\omega, t) \rightsquigarrow Z_t(\omega)$ qui sont $\mathscr{F}_t$-mesurables en ω pour tout t, et continues à gauche en t pour tout ω.

(ii) *Un temps d'arrêt T* est dit *prévisible* si le processus $Y_t = 1_{\{T \leqq t\}}$ est prévisible.

Les faits suivants sont bien connus: la tribu $\mathscr{P}$ est engendrée par les intervalles stochastiques $[0, T]$, où T désigne un temps d'arrêt quelconque. Si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$, un processus est prévisible au sens de [3], relativement à la famille usuelle des complétées des $\mathscr{F}_t$ par rapport à P, si et seulement s'il est P-indiscernable d'un processus prévisible au sens ci-dessus. On a une assertion analogue pour les temps d'arrêt et les temps d'arrêt prévisibles. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier, à l'aide des assertions ci-dessus, que tous les résultats de [3] sont appliqués ici de manière légitime.

3. Processus croissants et martingales. Par *processus croissant*, on entend un processus dont toutes les trajectoires sont croissantes, continues à droite, et égales à 0 ou à $+\infty$ à l'instant 0. Soit A un processus croissant. Pour tout processus $z \geqq 0$ on définit sans ambiguité le processus croissant $z \cdot A$ par $z \cdot A_t = \int_0^t z_s dA_s$; si z est de signe quelconque, *on définit le processus $z \cdot A$ par*

$$z \cdot A_t = \begin{cases} \int_0^t z_s dA_s & \text{si} \quad |z| \cdot A_t < \infty \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

(la valeur $+\infty$ ci-dessus est arbitraire pour les applications que nous avons en vue; elle permet simplement d'assurer l'identité des deux définitions de $z \cdot A$ lorsque $z \geqq 0$). Remarquons que si z et A sont prévisibles, il en est de même de $z \cdot A$.

Supposons maintenant fixée une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{F})$. Soit $\mathscr{A}^+(P)$ l'ensemble des processus croissants A vérifiant $A_t < \infty$ P-ps pour tout t fini. Soit $\mathscr{V}_{\text{loc}}^+(P)$ l'ensemble des processus croissants A pour lesquels il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt (appelée «suite localisante») croissant P-ps vers $+\infty$, et vérifiant $E(A_{T_n}) < \infty$ pour tout n. On note $\mathscr{A}(P) = \mathscr{A}^+(P) - \mathscr{A}^+(P)$ l'ensemble des différences de deux éléments de $\mathscr{A}^+(P)$, et de même $\mathscr{V}_{\text{loc}}(P) = \mathscr{V}_{\text{loc}}^+(P) - \mathscr{V}_{\text{loc}}^+(P)$.

Bien entendu $\mathscr{V}_{\mathrm{loc}}(P) \subset \mathscr{A}(P)$, mais l'inclusion inverse n'est pas vraie; cependant si $A \in \mathscr{A}(P)$ est prévisible, alors $A \in \mathscr{V}_{\mathrm{loc}}(P)$ (Jacod [10]).

Si $A \in \mathscr{V}_{\mathrm{loc}}^{+}(P)$, on pose $L^2_{\mathrm{loc}}(A, P) = \{z \text{ prévisible}, z^2 \cdot A \in \mathscr{V}_{\mathrm{loc}}(P)\}$. Enfin si $A \in \mathscr{A}(P)$, pour tout processus z on écrit $z \cdot A_t = \int_0^t z_s dA_s$ chaque fois que cette expression a un sens: on étend ainsi la définition (1).

On note $\mathscr{M}(P)$ l'ensemble des *martingales continues à droite et uniformément intégrables* (sous-entendu: par rapport à la famille $(\mathscr{F}_t)$; on identifie toujours deux martingales P-indiscernables). On désigne par $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ l'ensemble des *martingales locales*, c'est-à-dire des processus M pour lesquels il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt (suite localisante) croissant P-ps vers $+\infty$, et vérifiant $M^{T_n} \in \mathscr{M}(P)$ pour tout n. Soient

$$\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{+}(P) = \{M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P),\ M \geqq 0\},$$

$$\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{2}(P) = \{M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P), \text{ il existe une suite localisante } (T_n) \text{ pour } M \text{ telle que } \sup_{(t)} E[(M_t^{T_n})^2] < \infty \text{ pour tout } n\}$$

(martingales localement de carré intégrable).

A tout $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^2(P)$ on associe, d'après Meyer [19], un élément prévisible de $\mathscr{V}_{\mathrm{loc}}^{+}(P)$ et un seul (à une P-indiscernabilité près), noté $\langle M, M \rangle$, et tel tel que $M^2 - \langle M, M \rangle \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$. Si M et N sont dans $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^2(P)$, on pose $\langle M, N \rangle = \frac{1}{4}[\langle M+N, M+N \rangle - \langle M-N, M-N \rangle]$, qui est l'unique élément prévisible de $\mathscr{V}_{\mathrm{loc}}(P)$ tel que $MN - \langle M, N \rangle \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$.

Pour toutes les propriétés des martingales et des intégrales stochastiques par rapport aux martingales, nous renvoyons à Doléans-Dade et Meyer [5]. Sur le plan des notations, on écrira $z \cdot M$ pour l'*intégrale stochastique* (lorsqu'elle existe) du processus prévisible z par rapport à $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$. Rappelons simplement que si $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^2(P)$ et si $z \in L^2_{\mathrm{loc}}(\langle M, M \rangle, P)$, alors $\langle z \cdot M, N \rangle = z \cdot \langle M, N \rangle$ pour tout $N \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^2(P)$. Rappelons également qu'à tout $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ on associe sa *partie continue* M^c: c'est un élément de $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ (et même de $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^2(P)$) à trajectoires continues, tel que $M_0^c = 0$ et que $M - M^c$ soit une «somme compensée de sauts».

Toujours d'après [5], une *semi-martingale* (relativement à P) est un processus pouvant se mettre sous la forme $X = X_0 + M + A$, où $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ où $A \in \mathscr{A}(P)$ et où X_0 est $\mathscr{F}_0$-mesurable. Enfin on a le résultat fondamental suivant:

(1.1) Théorème (Dellacherie [3]). *Soit $A \in \mathscr{V}_{\mathrm{loc}}(P)$. Il existe un élément prévisible $A' \in \mathscr{V}_{\mathrm{loc}}(P)$ et un seul (à une P-indiscernabilité près) tel que $A - A' \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$.*

Le processus A' s'appelle la *projection prévisible duale* de A (pour P). Ce résultat est énoncé dans [3] lorsque A est un processus croissant intégrable (i.e.: tel que $E(A_\infty) < \infty$), mais son extension aux éléments de $\mathscr{V}_{\mathrm{loc}}(P)$ est immédiate.

4. Mesures aléatoires. Dans toute la suite, $(E, \mathscr{E})$ désigne l'espace $\mathbb{R} - \{0\}$ muni de ses boréliens. On munit l'espace $\tilde{\Omega} = \Omega \times [0, \infty[\times E$ des tribus $\tilde{\mathscr{P}} = \mathscr{P} \otimes \mathscr{E}$, et $\tilde{\mathscr{B}} = \mathscr{F} \otimes \mathscr{B}([0, \infty[) \otimes \mathscr{E}$.

Définition. Une *mesure aléatoire* est une mesure de transition positive de $(\Omega, \mathscr{F})$ dans l'espace $]0, \infty[\times E$ muni de ses boréliens.

Si ρ est une mesure aléatoire et si $Y \in \tilde{\mathscr{B}}^+$, on définit une nouvelle mesure aléatoire $Y \cdot \rho$ et un processus croissant $Y * \rho$ par

$$Y \cdot \rho(\omega; dt, dx) = Y(\omega, t, x)\, \rho(\omega; dt, dx),$$

$$Y * \rho_t(\omega) = \int_0^t \int_E \rho(\omega; ds, dx)\, Y(\omega, s, x).$$

Nous allons maintenant étendre la définition du processus $Y * \rho$ à toute fonction $\tilde{\mathscr{B}}$-mesurable Y, de signe quelconque. Posons

$$J(\rho) = \{(\omega, t) \colon \rho(\omega; \{t\} \times E) > 0\},$$

$$A_t = |Y 1_{J^c(\rho)}| * \rho_t + \sum_{s \leqq t} 1_{J(\rho)}(s) \left| \int_E Y(s, x)\, \rho(\{s\}, dx) \right|,$$

avec la convention $A_t = +\infty$ si l'une des intégrales du second membre n'est pas définie. Soit alors

$$Y * \rho_t = \begin{cases} \int_0^t \int_E Y(s, x)\, 1_{J^c(\rho)}(s)\, \rho(ds, dx) + \sum_{s \leqq t} 1_{J(\rho)}(s) \int_E Y(s, x)\, \rho(\{s\}, dx) & \text{si } A_t < \infty \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

Là encore la valeur $+\infty$ ci-dessus est arbitraire, elle permet d'assurer l'identité des deux définitions de $Y * \rho$ lorsque $Y \geqq 0$. Remarquons cependant que, contrairement à ce qui se passe pour les processus $z \cdot A$ définis par (1), on peut avoir $|Y * \rho_t| < \infty$ et $|Y| * \rho_t = +\infty$ (lorsque $J(\rho) \neq \emptyset$).

On dit que *la mesure aléatoire* ρ *est prévisible* si $Y * \rho$ est un processus prévisible pour tout $Y \in \tilde{\mathscr{P}}^+$; dans ce cas, $Y * \rho$ sera prévisible pour toute fonction $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable Y, de signe quelconque.

Soit maintenant P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$. A toute mesure aléatoire ρ on associe une *mesure positive* M_ρ^P sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{B}})$ par la formule $M_\rho^P(Y) = E(Y * \rho_\infty)$, où $Y \in \tilde{\mathscr{B}}^+$. On a alors:

(1.2) Théorème (Jacod [10]). *Soit* ρ *une mesure aléatoire telle que la restriction de* M_ρ^P *à* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{P}})$ *soit* σ*-finie. Il existe une mesure aléatoire prévisible* ρ' *et une seule (à un ensemble* P*-négligeable près) telle que les restrictions de* M_ρ^P *et de* $M_{\rho'}^P$ *à* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{P}})$ *coïncident.*

La mesure ρ' s'appelle la *projection prévisible duale* de ρ; elle est caractérisée par le fait que, pour tout $Y \in \tilde{\mathscr{P}}^+$ tel que $M_\rho^P(Y) < \infty$, le processus croissant $Y * \rho'$ est la projection prévisible duale du processus croissant $Y * \rho$.

Plaçons nous toujours sous l'hypothèse du théorème (1.2). Soit $\mathscr{K}(\rho, P)$ l'ensemble des fonctions $\tilde{\mathscr{B}}$-mesurables Y telles que la restriction de la mesure $|Y| \cdot M_\rho^P$ à $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{P}})$ soit σ-finie. Si $Y \in \mathscr{K}(\rho, P)$, on peut définir l'*espérance conditionnelle* $M_\rho^P(Y | \tilde{\mathscr{P}})$, comme une version $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable quelconque de la dérivée de Radon-Nikodym de la restriction de $Y \cdot M_\rho^P$ à $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{P}})$, par rapport à la restriction de M_ρ^P à $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{P}})$.

5. *La mesure aléatoire associée aux sauts de* X. La formule

$$\mu(\omega; dt, dx) = \sum_{(s)} 1_{\{\Delta X_s(\omega) \neq 0\}}\, \varepsilon_{(s, \Delta X_s(\omega))}(dt, dx), \tag{3}$$

où ε_a désigne la mesure de Dirac en a, définit une mesure aléatoire μ. On a montré dans [11] que

(1.3) Proposition. *Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.*

(a) *La restriction de M_μ^P à $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{P}})$ est σ-finie.*

(b) *Pour tout $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$, on a $\Delta M \in \mathscr{K}(\mu, P)$ (par abus d'écriture, ΔM désigne la fonction $(\omega, t, x) \rightsquigarrow \Delta M_t(\omega)$).*

Fixons maintenant une probabilité P, et désignons par ν une version de la projection prévisible duale de μ pour P. Nous avons également montré dans [11] que

(1.4) Proposition. (a) *Pour qu'un temps d'arrêt T tel que $\Delta X_T \neq 0$ P-ps sur $\{T < \infty\}$ soit totalement inaccessible relativement à P, il faut et il suffit que $[T] \cap J(\nu)$ soit P-évanescent.*

(b) *Pour que X soit quasi-continu à gauche relativement à P, il faut et il suffit que $J(\nu)$ soit P-évanescent.*

(c) *L'ensemble $\{(\omega, t) \colon \nu(\omega; \{t\} \times E) > 1\}$ est P-évanescent.*

En ce qui concerne l'*intégrale stochastique par rapport à $\mu - \nu$*, nous renvoyons à Jacod [11]. Nous nous contentons d'énoncer ici les résultats qui nous seront utiles.

Pour toute fonction U, on définit les processus croissants:

$$\beta_t(U) = |U 1_{J^c(\nu)}| * \nu_t + \sum_{s \leq t} 1_{J(\nu)}(s) \left| \int_E \mu(\{s\}, dx) U(s, x) - \int_E \nu(\{s\}, dx) U(s, x) \right|,$$

$$B_t(U) = U^2 1_{J^c(\nu)} * \nu_t + \sum_{s \leq t} 1_{J(\nu)}(s) \left| \int_E \nu(\{s\}, dx) U^2(s, x) - \left[\int_E \nu(\{s\}, dx) U(s, x)\right]^2 \right|$$

avec la convention $\beta_t(U) = +\infty$ (resp. $B_t(U) = +\infty$) si l'une des intégrales ci-dessus n'est définie, ou si l'on arrive à une expression de la forme $\infty - \infty$. Soient alors

$$\mathscr{G}^1_{\mathrm{loc}}(\mu, P) = \{U \colon \text{fonction } \tilde{\mathscr{P}}\text{-mesurable}, \ \beta(U) \in \mathscr{V}_{\mathrm{loc}}(P)\},$$

$$\mathscr{G}^2_{\mathrm{loc}}(\mu, P) = \{U \colon \text{fonction } \tilde{\mathscr{P}}\text{-mesurable}, \ B(U) \in \mathscr{V}_{\mathrm{loc}}(P)\},$$

$$\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P) = \{U = U_1 + U_2, \ U_1 \in \mathscr{G}^1_{\mathrm{loc}}(\mu, P), \ U_2 \in \mathscr{G}^2_{\mathrm{loc}}(\mu, P)\}.$$

Pour tout $U \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$ on peut alors définir un élément $U * (\mu - \nu)$ de $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$, qui possède les propriétés suivantes:

(i) Si $U \in \mathscr{G}^1_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$, on a $U * (\mu - \nu) \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P) \cap \mathscr{V}_{\mathrm{loc}}(P)$.
(ii) Si $U \in \mathscr{G}^2_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$, on a $U * (\mu - \nu) \in \mathscr{M}^2_{\mathrm{loc}}(P)$.
(iii) On a $[U * (\mu - \nu)]^c = 0$ et

$$\Delta [U * (\mu - \nu)]_s = U(s, X_s) 1_{\{\Delta X_s \neq 0\}} - \int_E \nu(\{s\}, dx) U(s, x) \tag{4}$$

(iv) Si les processus $U * \mu$ et $U * \nu$ sont dans $\mathscr{A}(P)$, on a $U * (\mu - \nu) = U * \mu - U * \nu$.

Lorsque X est quasi-continu à gauche, nous aurons également besoin des résultats suivants, montrés dans [11]:

(1.5) Théorème. *Supposons X quasi-continu à gauche. Soient $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ et U une version de $M_\mu^P(\Delta M|\tilde{\mathscr{P}})$. Alors $U \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$; si de plus $M_\mu^P(\{\Delta M \neq U\})=0$, la martingale locale $M - U * (\mu - \nu)$ n'a aucun saut commun avec X. Inversement si $U \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$ et si $M = U * (\mu - \nu)$, on a $U = M_\mu^P(\Delta M|\tilde{\mathscr{P}})$.*

(1.6) Proposition. *Supposons X quasi-continu à gauche. Pour que $U \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$, il faut et il suffit que U soit $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable, et que le processus $[|U| 1_{\{|U|>1\}} + U^2 1_{\{|U| \leqq 1\}}] * \nu$ soit dans $\mathscr{V}_{\mathrm{loc}}^+(P)$.*

2. Caractéristiques locales d'une semi-martingale

On associe à X les processus suivants:

$$X_t^1 = X_0 + \sum_{s \leqq t} \Delta X_s 1_{\{|\Delta X_s|>1\}}, \qquad X_t^0 = X_t - X_t^1.$$

Chaque trajectoire de X^1 est à variations bornées sur tout intervalle fini.

Soit maintenant P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$ *pour laquelle X est une semi-martingale.*

(2.1) Proposition. *Il existe une décomposition $X^0 = N + A$, où $N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ et $A \in \mathscr{V}_{\mathrm{loc}}(P)$.*

Démonstration. Par hypothèse X s'écrit $X = N + B$, où $N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ et $B \in \mathscr{A}(P)$. Il suffit alors de montrer que $A = B - X^1$ est dans $\mathscr{V}_{\mathrm{loc}}(P)$.

Soient (R_n) une suite localisante pour N, $S_n = \inf(t\colon \int_0^t |dA_s| \geqq n)$ et $T_n = R_n \wedge S_n$. Comme T_n tend P-ps vers $+\infty$, il suffit donc de montrer que $E\left(\int_0^{T_n} |dA_s|\right) < \infty$ pour tout n. Or par définition de X^1,

$$|\Delta A_{T_n}| = \begin{cases} |\Delta B_{T_n}| \leqq |\Delta N_{T_n}^{R_n}| + 1 & \text{si } |\Delta X_{T_n}| \leqq 1 \\ |\Delta N_{T_n}^{R_n}| & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $\Delta N_{T_n}^{R_n}$ est intégrable. Donc $E\left(\int_0^{Tn} |dA_s|\right) \leqq n + E(|\Delta A_{T_n}|)$ est fini.

Suivant Grigelionis [9], on pose alors la

Définition. On appelle *P-caractéristiques locales de X* un triplet $\mathscr{C} = (\nu, \alpha, \beta)$ constitué de:

(i) une version ν de la projection prévisible duale de μ,

(ii) une version α de la projection prévisible duale de A,

(iii) une version du processus croissant prévisible $\beta = \langle N^c, N^c \rangle$.

L'existence de ν (resp. α) est assurée par la proposition (1.3) (resp. le théorème (1.1)); on sait que β est P-ps à trajectoires continues, puisque N^c est continue. Le caractère intrinsèque du triplet $\mathscr{C}$ est assuré par la

(2.2) Proposition. (a) *Les P-caractéristiques locales sont définies de manière unique, à un ensemble P-négligeable près, indépendamment de la décomposition $X^0 = N + A$, où $N \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ et $A \in \mathscr{V}_{\mathrm{loc}}(P)$.*

(b) *Si X est quasi-continu à gauche, α est P-ps à trajectoires continues.*

Démonstration. (a) L'unicitè de ν découle du théorème (1.2). Soient $N+A$ et $N'+A'$ deux décompositions satisfaisant les conditions de l'énoncé, et α (resp. α') la projection prévisible duale de A (resp. A'). On a $\tilde{N}=A-\alpha\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ et $\tilde{N}'=A'-\alpha'\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$. Mais alors $\alpha-\alpha'=N'-N+\tilde{N}'-\tilde{N}\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$, ce qui implique la P-indiscernabilité de α et de α', d'après le théorème (1.1). On en déduit également que $N'-N=\tilde{N}-\tilde{N}'$; or $\tilde{N}$ et $\tilde{N}'$ sont des sommes compensées de sauts, donc $N'^c=N^c$, d'où l'unicité de β.

(b) Soient $M=X^0-\alpha\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ et (T_n) une suite localisante de temps d'arrêt pour M. Soit T un temps d'arrêt prévisible; d'après [5], on a $E(\Delta M_T^{T_n}|\mathscr{F}_{T-})=0$; mais si X est quasi-continu à gauche, on a aussi $\Delta X_T^0=0$ et comme $\Delta\alpha_T$ est $\mathscr{F}_{T-}$-mesurable, il vient

$$\Delta\alpha_T^{T_n}=E(\Delta\alpha_T^{T_n}|\mathscr{F}_{T-})=-E(\Delta M_T^{T_n}|\mathscr{F}_{T-})=0 \qquad P\text{-ps}$$

sur $\{T<\infty\}$. On en déduit que $\Delta\alpha_T=0$ P-ps sur $\{T<\infty\}$, pour tout temps d'arrêt prévisible T. Le théorème de section appliqué à l'ensemble prévisible $\{\Delta\alpha\neq 0\}$ entraine alors le résultat (Dellacherie [3]).

Remarques. 1. Le résultat ci-dessus conduit à une *représentation canonique* de X:

$$X=X^1+M+\alpha, \tag{5}$$

où $M\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$. Remarquons qu'on a $\beta=\langle M^c,M^c\rangle$. Cette décomposition canonique sera continuellement utilisée dans la suite. Nous précisons quelques propriétés de M dans la proposition (2.3).

2. Soit $U(\omega,t,x)=x\,1_{\{|x|\leqq 1\}}$. On pourrait montrer que $U\in\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu,P)$ et que $X=X^1+M^c+U*(\mu-\nu)+\alpha$, rafinant ainsi la décomposition (5). Ce résultat ne sera pas utilisé plus loin.

3. La seconde caractéristique locale α dépend essentiellement de la définition de X^1. Si on avait posé $X_t^1=X_0+\sum_{s\leqq t}\Delta X_s 1_{\{|\Delta X_s|>a\}}$ avec $a\neq 1$, $a>0$, on aurait trouvé un autre processus α. Par contre ν et β seraient restés inchangés.

Commentaires. Grigelionis définit dans [9] les caractéristiques locales pour une classe beaucoup plus restreinte de processus, ceux pour lesquels le triplet $\mathscr{C}$ vérifie en outre:

ν est de la forme $\nu(\omega;dt,dx)=dt\,\Pi(\omega,t;dx)$,

on a $E\left[\int_0^t\int_E(x^2\wedge 1)\,\nu(ds,dx)\right]<\infty$,

α est de la forme $\alpha_t=\int_0^t a_s\,ds$, avec $E\left(\int_0^t a_s^2\,ds\right)<\infty$,

β est de la forme $\beta_t=\int_0^t b_s\,ds$, avec $E(\beta_t)<\infty$.

Ces processus sont appelés *localement indéfiniment divisibles.* Bien que couvrant sans doute la majeure partie des applications, cette classe est trop restreinte pour ce qui nous concerne, puisqu'elle ne se conserve pas lors d'un changement absolument continu de probabilité.

Exemples. Les exemples les plus typiques sont constitués des processus à accroissements indépendants et des processus de diffusion; ces exemples sont traités en détails plus loin. Citons ici simplement le cas des processus d'Ito (dans la terminologie de Liptzer et Shyriaev [17]), qui sont les processus X se mettant sous la forme

$$X_t = \int_0^t a_s\,ds + \int_0^t b_s\,dB_s,$$

où a et b sont des processus adaptés convenables, et B un mouvement brownien. X est alors une semi-martingale de caractéristiques locales $\nu=0$, $\alpha_t=\int_0^t a_s\,ds$ et $\beta_t=\int_0^t b_s^2\,ds$.

Terminons ce paragraphe par deux résultats très simples, de nature technique.

(2.3) Proposition. *Soit* $M=X^0-\alpha$.

(a) *On a* $\Delta M=\Delta X^0$ *sur* $J^c(\nu)$, *en dehors d'un ensemble* P*-évanescent.*

(b) *On a* $M\in\mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}(P)$, *et* $|\Delta M|\leqq 2$ *en dehors d'un ensemble* P*-évanescent.*

Démonstration. (a) Soit (T_n) une suite localisante de temps d'arrêt pour M. Si T est un temps d'arrêt prévisible, on a (cf. proposition (2.2)):

$$\Delta\alpha_T^{T_n} = E(\Delta X^0_{T\wedge T_n} - \Delta M_T^{T_n}|\mathcal{F}_{T-}) = E(\Delta X^0_{T\wedge T_n}|\mathcal{F}_{T-}). \tag{6}$$

Soit alors T un temps d'arrêt tel que $[T]\subset J^c(\nu)$. Si T est totalement inaccessible pour P, on a $\Delta\alpha_T=0$ P-ps sur $\{T<\infty\}$ (puisque α est prévisible), donc $\Delta M_T=\Delta X_T^0$ P-ps sur $\{T<\infty\}$. Si T est prévisible, on a $\Delta X_T^0=0$ P-ps sur $\{T<\infty\}$ d'après la proposition (1.4) (a); la formule (6) entraine alors que $\Delta\alpha_T=0$, donc $\Delta M_T=0$ P-ps sur $\{T<\infty\}$. Finalement on en déduit que pour tout temps d'arrêt T tel que $[T]\subset J^c(\nu)$, on a $\Delta X_T^0=\Delta M_T$ P-ps sur $\{T<\infty\}$. Le théorème de section des ensembles bien-mesurables [3] prouve alors que $J^c(\nu)\cap\{\Delta X^0 \neq \Delta M\}$ est P-évanescent.

(b) La première assertion découle immédiatement de la seconde. Comme $|\Delta X^0|\leqq 1$ on déduit de (6) que $|\Delta\alpha|\leqq 1$ sauf sur un ensemble P-évanescent (théorème de section des ensembles prévisibles), d'où le résultat puisque $|\Delta M|\leqq|\Delta X^0|+|\Delta\alpha|$.

(2.4) Proposition. *Soit* T *un temps d'arrêt. Alors* X^T *est une semi-martingale pour* P*, admettant pour* P*-caractéristiques locales le triplet* $\mathcal{C}^T=(1_{]0,T]\times E}\cdot\nu,\alpha^T,\beta^T)$.

Démonstration. Avec une définition évidente pour $(X^T)^1$, on déduit de (5) que $X^T=(X^T)^1+M^T+\alpha^T$. Comme $(X^T)^1\in\mathcal{A}(P)$, $M^T\in\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ et $\alpha^T\in\mathcal{V}_{\mathrm{loc}}(P)$, on voit que X^T est une semi-martingale. Comme α^T est prévisible, on en déduit que c'est la seconde caractéristique locale de X^T. Comme $(M^T)^c=(M^c)^T$, la troisième caractéristique locale de X^T est $\langle (M^T)^c,(M^T)^c\rangle=\beta^T$. Enfin la mesure aléatoire associée à X^T par (3) est $1_{]0,T]\times E}\cdot\mu$. Comme $]0,T]\times E\in\tilde{\mathcal{P}}$, sa projection prévisible duale est clairement $1_{]0,T]\times E}\cdot\nu$.

3. Transformation d'une semi-martingale lors d'un changement de loi

On fixe dans ce paragraphe une probabilité P sur $(\Omega,\mathcal{F})$ pour laquelle X est une semi-martingale, ainsi qu'une version $\mathcal{C}=(\nu,\alpha,\beta)$ des P-caractéristiques locales de X, et on pose $M=X^0-\alpha$.

On va montrer le résultat fondamental suivant: si P' est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$ absolument continue par rapport à P (on écrit $P' \ll P$; on écrira $P' \sim P$ lorsqu'à la fois $P' \ll P$ et $P \ll P'$), X est encore une semi-martingale pour P'. On exprime alors les P'-caractéristiques locales de X en fonction de la dérivée de Radon-Nikodym dP'/dP, et on donne une généralisation du théorème de Girsanov.

Commençons par des préliminaires.

(3.1) Proposition. *Soit $Z \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{+}(P)$. Il existe $Y \in \tilde{\mathscr{P}}^{+}$ et un processus prévisible z tels que*

$$M_{\mu}^{P}(\Delta Z \mid \tilde{\mathscr{P}}) = Z_{-}(Y-1) \tag{7}$$

$$\langle Z^{c}, M^{c} \rangle = (Z_{-} z) \cdot \beta. \tag{8}$$

Remarques. 1. Bien entendu, les assertions ci-dessus restent valides, à l'exception de la positivité de Y, lorsque $Z \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$.

2. D'après Meyer [20], l'équation (8) implique que $Z_{-} z \in L_{\mathrm{loc}}^{2}(\beta, P)$; de même l'équation (7) a un sens d'après la proposition (1.3)(b), et d'après [11] elle implique que la fonction

$$W(t,x) = Z_{t-}[Y(t,x)-1] + 1_{\{\nu(\{t\} \times E) < 1\}} \frac{Z_{t-}}{1-\nu(\{t\} \times E)} \int_{E} \nu(\{t\}, dx)[Y(t,x)-1]$$

soit dans $\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$. Nous n'utiliserons pas ce résultat ici.

Démonstration. Soit $R = \inf(t: Z_t = 0)$; on sait que (voir par exemple Doléans-Dade [4]), en dehors d'un ensemble P-négligeable, Z_t et Z_{t-} sont strictement positifs si $t < R$, et nuls si $t > R$. Donc $\Delta Z = 0$ sur $\{Z_{-} = 0\}$, à un ensemble P-évanescent près; d'autre part $Z \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{+}(P)$ entraine $\Delta Z \geqq -Z_{-}$. Comme Z_{-} est prévisible, il existe une version $U = M_{\mu}^{P}(\Delta Z \mid \tilde{\mathscr{P}})$ qui vérifie identiquement $U \geqq -Z_{-}$ et $U = 0$ sur $\{Z_{-} = 0\}$. Mais alors $Y = 1 + \frac{U}{Z_{-}} 1_{\{Z_{-} > 0\}}$ vérifie les conditions requises.

De même d'après Meyer [20] il existe $z' \in L_{\mathrm{loc}}^{2}(\beta, P)$ tel que $\langle Z^{c}, M^{c} \rangle = z' \cdot \beta$. Comme $Z = Z^{R}$, on a $Z^{c} = (Z^{c})^{R}$ et $\langle Z^{c}, M^{c} \rangle = \langle Z^{c}, M^{c} \rangle^{R}$. On peut donc choisir z' nul sur $]R, \infty[$. Si on pose $z = \frac{z'}{Z_{-}} 1_{\{Z_{-} > 0\}}$, z est prévisible et vérifie (8), car β est P-ps à trajectoires continues.

(3.2) Lemme. *Soient $Z \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{+}(P)$, $U(\omega, t, x) = x 1_{\{|x| \leqq 1\}}$ et $Y \in \tilde{\mathscr{P}}^{+}$ vérifiant* (7).

(a) *Le processus $B_t = \sum_{s \leqq t} \Delta Z_s \Delta M_s$ est dans $\mathscr{V}_{\mathrm{loc}}(P)$.*

(b) *Le processus $B' = [U Z_{-}(Y-1)] * \nu$ est une version de la projection prévisible duale de B, et il appartient donc à $\mathscr{V}_{\mathrm{loc}}(P)$.*

Démonstration. (a) D'après [5], Z se décompose en $Z = Z' + Z''$, où $Z' \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{2}(P)$ et $Z'' \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P) \cap \mathscr{V}_{\mathrm{loc}}(P)$. D'après la proposition (2.3), on a alors

$$\int_{0}^{t} |dB_s| \leqq \sum_{s \leqq t} |\Delta Z'_s \Delta M_s| + 2 \sum_{s \leqq t} |\Delta Z''_s|.$$

Comme $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^{2}(P)$, le processus croissant de droite est clairement dans $\mathscr{V}_{\mathrm{loc}}^{+}(P)$.

(b) On va calculer successivement les projections prévisibles duales des processus $B^c = 1_{J^c(\nu)} \cdot B$ et $B^d = 1_{J(\nu)} \cdot B$. Pour simplifier les notations, on pose $V = UZ_-(Y-1)$. Soit $\hat{V}_t = \int_E \nu(\{t\}, dx)\, V(t,x)$ lorsque cette intégrale existe, et $\hat{V}_t = +\infty$ sinon.

Soit T un temps d'arrêt tel que $E\left(\int_0^T |dB_s|\right) < \infty$. D'après (7) et la proposition (2.3), on a

$$\begin{aligned} E(|V 1_{J^c(\nu)}| * \nu_T) &= M_\nu^P(1_{J^c(\nu) \cap [0,T]} |V|) \\ &= M_\mu^P(1_{J^c(\nu) \cap [0,T]} |U|\, |Z_-(Y-1)|) \\ &\leqq M_\mu^P(1_{J^c(\nu) \cap [0,T]} |U|\, |\Delta Z|) \\ &= E\Big(\sum_{s \leqq T} 1_{J^c(\nu)}(s) |\Delta X_s^0|\, |\Delta Z_s|\Big) = E\left(\int_0^T 1_{J^c(\nu)}(s) |dB_s|\right) < \infty \end{aligned}$$

(rappelons que, ν étant prévisible, on a $J(\nu) \in \mathscr{P}$). Cela prouve que

$$|V 1_{J^c(\nu)}| * \nu \in \mathscr{V}_{\mathrm{loc}}^+(P).$$

Le même calcul, effectué en enlevant les valeurs absolues, conduit à

$$E[(V 1_{J^c(\nu)}) * \nu_T] = E(1_{J^c(\nu)} \cdot B_T),$$

ce qui prouve que $V 1_{J^c(\nu)} * \nu$ est une version de la projection prévisible duale de B^c.

D'autre part les coupes de $J(\nu)$ sont dénombrables P-ps (puisque M_ν^P est σ-finie). Il existe donc d'après Dellacherie [3] une suite (R_n) de temps d'arrêt de graphes disjoints, prévisibles, tels que $J(\nu)$ soit P-indiscernable de $\sum [R_n]$. Soit T un temps d'arrêt tel que $E\left(\int_0^T |dB_s|\right) < \infty$ et que $Z^T \in \mathscr{M}(P)$ (il existe une suite de tels temps d'arrêt croissant P-ps vers $+\infty$). Soit $A \in \mathscr{F}_{R_n-}$; comme $E(\Delta Z_{R_n}^T | \mathscr{F}_{R_n-}) = 0$ et comme $A \cap \{R_n \leqq T\}$ et $\Delta\alpha_{R_n}$ sont $\mathscr{F}_{R_n-}$-mesurables, il vient:

$$\begin{aligned} E(1_{A \cap \{R_n \leqq T\}} \Delta B_{R_n}) &= E[1_{A \cap \{R_n \leqq T\}} \Delta Z_{R_n} (\Delta X_{R_n}^0 - \Delta\alpha_{R_n})] \\ &= E(1_{A \cap \{R_n \leqq T\}} \Delta Z_{R_n} \Delta X_{R_n}^0) \\ &= M_\mu^P(1_A 1_{[R_n] \cap [0,T]} \Delta Z U) \\ &= M_\nu^P(1_A 1_{[R_n] \cap [0,T]} V) = E(1_{A \cap \{R_n \leqq T\}} \hat{V}_{R_n}). \end{aligned}$$

Par suite on a

$$\hat{V}_{R_n} = E(\Delta B_{R_n} | \mathscr{F}_{R_n-}) \qquad P\text{-ps sur } \{R_n \leqq T\}.$$

Comme $\{V \neq 0\} \subset J(\nu)$, on déduit de ce qui précède que

$$E\Big(\sum_{s \leqq T} |\hat{V}_s|\Big) \leqq E\left(\int_0^T |dB_s|\right) < \infty$$

$$E\Big(\sum_{s \leqq T} \hat{V}_s\Big) = E\left(\int_0^T 1_{J(\nu)}(s)\, dB_s\right).$$

Donc le processus $\sum_{s \leqq t} \hat{V}_s$ est une version de la projection prévisible duale de B^d. Enfin d'après (2), on a $V 1_{J(\nu)} * \nu_t = \sum_{s \leqq t} V_s$ dès que $\sum_{s \leqq t} |\hat{V}_s| < \infty$, et on en déduit le résultat.

(3.3) Théorème. *Soient $P' \ll P$, Z une version de la martingale $E\left(\frac{dP'}{dP}\middle|\mathscr{F}_t\right)$, et $U(\omega, t, x) = x 1_{\{|x| \leqq 1\}}$.*

(a) *X est une semi-martingale pour P'.*

(b) *Si X est quasi-continu à gauche pour P, X est aussi quasi-continu à gauche pour P'.*

(c) *Si $Y \in \tilde{\mathscr{P}}^+$ et si le processus prévisible z vérifient* (7) *et* (8), *les formules*

$$\begin{aligned} v' &= Y \cdot v \\ \alpha' &= \alpha + z \cdot \beta + [U(Y-1)] * v \\ \beta' &= \beta \end{aligned} \tag{9}$$

définissent une version des P'-caractéristiques locales de X.

(d) *Si les formules* (9), *où $Y \in \tilde{\mathscr{P}}^+$ et où z est un processus prévisible, définissent une version des P'-caractéristiques locales de X, alors Y et z vérifient* (7) *et* (8).

Faisons une première remarque, importante: si on n'a pas $P' \sim P$, il existe également des versions des P'-caractéristiques locales de X qui ne sont pas de la forme (9).

Soient $R_n = \inf(t\colon Z_t \leqq 1/n)$ et $R = \inf(t\colon Z_t = 0)$. On a $R = \lim_{(n)} \uparrow R_n$ P-ps, et

$$P'(R < \infty) = E(1_{\{R < \infty\}} Z_R) = 0. \tag{10}$$

Cela est cohérent avec les faits suivants: d'une part α' n'est défini de manière unique qu'à une P'-indiscernabilité près; d'autre part les processus $z \cdot \beta$ et $[U(Y-1)] * v$ sont définis de manière non triviale par (1) et (2) sur l'intervalle $[0, R[$, puisque sur cet intervalle on a

$$z \cdot \beta = \frac{1}{Z_-} \cdot [(Z_- z) \cdot \beta] \quad \text{et} \quad [U(Y-1)] * v = \frac{1}{Z_-} \cdot B'.$$

Avant d'aborder la démonstration, partiellement inspirée par un travail de Van-Schuppen et Wong [26], de ce théorème, nous donnons sans démonstration quelques lemmes classiques. Pour simplifier l'écriture, on écrira $N \sim N'$ lorsque $N - N' \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$.

(3.4) Lemme. *Pour que $N \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P')$, il faut et il suffit que $(NZ)^{R_n} \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ pour tout n* (voir par exemple [26]).

(3.5) Lemme. *Soient $N \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$, $N' \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ vérifiant $N'_0 = 0$ et $A \in \mathscr{V}_{\mathrm{loc}}(P)$; alors*

$$\begin{aligned} N_t N'_t &= N_- \cdot N'_t + N'_- \cdot N_t + \langle N^c, N'^c \rangle_t + \sum_{s \leqq t} \Delta N_s \Delta N'_s \sim \langle N^c, N'^c \rangle_t + \sum_{s \leqq t} \Delta N_s \Delta N'_s \\ NA &= A_- \cdot N + N \cdot A \sim N \cdot A \end{aligned}$$

(application de la formule d'Ito: voir [5]).

(3.6) Lemme. *Si A est un processus croissant adapté (resp. prévisible), on a $E'(A_\infty) = E(Z \cdot A_\infty)$ (resp. $E'(A_\infty) = E(Z_- \cdot A_\infty)$)* [3].

Démonstration du théorème (3.3). (a) D'après la proposition (3.1) on peut choisir $Y \in \tilde{\mathscr{P}}^+$ et un processus prévisible z vérifiant (7) et (8). On définit α' par (9), et B et B' comme dans le lemme (3.2); on pose $D=[U(Y-1)]*\nu$. Il est clair que $D=\frac{1}{Z_-}\cdot B'$ sur $\bigcup_{(n)}[0,R_n]$; comme $B'\in\mathscr{A}(P)$ et d'après (10), on a $D\in\mathscr{A}(P')$; de même $Z\cdot\beta\in\mathscr{A}(P')$ puisque $Z_-z\in L^2_{\text{loc}}(\beta,P)$ d'après (8). Par suite $\alpha'\in\mathscr{A}(P')$ et comme α' est prévisible, on a $\alpha'\in\mathscr{V}_{\text{loc}}(P')$.

Appliquons le lemme (3.5):

$$(MZ)^{R_n}\sim\langle M^c,Z^c\rangle^{R_n}+B^{R_n}=(Z_-z)\cdot\beta^{R_n}+B^{R_n},$$
$$[(z\cdot\beta)\,Z]^{R_n}\sim(Zz)\cdot\beta^{R_n}=(Z_-z)\cdot\beta^{R_n},$$
$$(DZ)^{R_n}\sim Z\cdot D^{R_n}.$$

Comme D est prévisible, on vérifie facilement (à l'aide du lemme (3.6) par exemple) que $Z_-\cdot D^{R_n}$ est une version de la projection prévisible duale de $Z\cdot D^{R_n}$ (pour P). Mais $Z_-\cdot D^{R_n}=B'^{R_n}\sim B^{R_n}$ d'après le lemme (3.2), donc $[(X^0-\alpha')\,Z]^{R_n}\sim 0$. D'après le lemme (3.4) on a $M'=X^0-\alpha'\in\mathscr{M}_{\text{loc}}(P')$. Comme $X=X^1+M'+\alpha'$ et comme $X^1\in\mathscr{A}(P')$, on voit que X est une semi-martingale pour P'.

(c) D'après ce qui précède, α' est une version de la seconde P'-caractéristique locale de X. Soit $V\in\tilde{\mathscr{P}}^+$; appliquons successivement le lemme (3.6) à $V*\mu$ et à $(VY)*\nu$, et (7):

$$M^{P'}_\mu(V)=M^P_\mu(ZV)=M^P_\mu(Z_-YV)=M^P_\mu(Z_-YV)=M^{P'}_\nu(YV)=M^{P'}_{Y\cdot\nu}(V),$$

et par suite $Y\cdot\nu$ est une version de la projection prévisible duale de μ pour P'.

Par ailleurs le raisonnement de (a) prouve que si $M^d=M-M^c$, les processus $M'^c=M^c-z\cdot\beta$ et $M'^d=M^d-D$ sont dans $\mathscr{M}_{\text{loc}}(P')$. Mais M'^c est à trajectoires continues, alors que $D\in\mathscr{V}_{\text{loc}}(P')$ et que M^d est limite en probabilité pour P, donc pour P', d'une suite d'éléments de $\mathscr{A}(P)$, donc de $\mathscr{A}(P')$. On en déduit que M'^c est la partie continue et M'^d la somme compensée des sauts de M', pour la probabilité P'. Appliquons alors le lemme (3.5):

$$(M^c)^2=\beta+2M^c\cdot M^c,$$
$$[((M^c)^2-\beta)\,Z]^{R_n}\sim 2\langle M^c\cdot M^c,Z^c\rangle^{R_n}=2(M^cZ_-z)\cdot\beta^{R_n},$$
$$(z\cdot\beta^{R_n})\,Z^{R_n}=(Z_-z)\cdot\beta^{R_n}+(z\cdot\beta^{R_n})\cdot Z^{R_n},$$
$$\begin{aligned}[(z\cdot\beta^{R_n})\,M^cZ]^{R_n}&\sim(M^cZ_-z)\cdot\beta^{R_n}+\langle M^c,[(z\cdot\beta^{R_n})\cdot Z]^c\rangle^{R_n}\\&=(M^cZ_-z)\cdot\beta^{R_n}+[Z_-z(z\cdot\beta^{R_n})]\cdot\beta^{R_n},\end{aligned}$$
$$(z\cdot\beta^{R_n})^2=2[z(z\cdot\beta^{R_n})]\cdot\beta^{R_n},$$
$$(z\cdot\beta^{R_n})^2\,Z^{R_n}\sim 2[Z_-z(z\cdot\beta^{R_n})]\cdot\beta^{R_n}.$$

En rassemblant ces résultats, on arrive à

$$[((M'^c)^2-\beta)\,Z]^{R_n}\sim 0,$$

ce qui prouve que $(M'^c)^2-\beta\in\mathscr{M}_{\text{loc}}(P')$. Donc β est une version de la troisième P'-caractéristique locale de X.

(b) C'est un corollaire immédiat de (c) et de la proposition (1.4) (b), puisque $J(Y \cdot \nu) \subset J(\nu)$.

(d) Si $V \in \tilde{\mathscr{P}}^+$, le même calcul que ci-dessus prouve que $M_\mu^P(VZ) = M_\mu^P(VZ_- Y)$. Donc $M_\mu^P(Z \mid \tilde{\mathscr{P}}) = Z_- Y$, et Y vérifie (7). Soit maintenant z' un processus prévisible vérifiant (8). D'après (c), les processus $z \cdot \beta$ et $z' \cdot \beta$ sont P'-indiscernables. Mais pour tout t, les restrictions des probabilités P et P' à $\mathscr{F}_t$ sont équivalentes sur l'ensemble $\{t < R\}$. Par suite les processus $Z_- \cdot (z \cdot \beta)$ et $Z_- \cdot (z' \cdot \beta)$ sont P- indiscernables, et z vérifie (8).

Passons maintenant à la généralisation du théorème de Girsanov. Commençons par compléter la proposition (3.1):

(3.7) Proposition. *Soient $Z \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^+(P)$ et $Y \in \tilde{\mathscr{P}}^+$ vérifiant* (7). *En dehors d'un ensemble P-négligeable, on a $Z_{t-} \int_E \nu(\{t\}, dx)\,[Y(t, x) - 1] = 0$ pour tout t tel que $\nu(\{t\} \times E) = 1$.*

Démonstration. Soit (T_n) une suite localisante pour Z. Soit T un temps d'arrêt prévisible, tel que $\nu(\{T\} \times E) = 1$ P-ps sur $\{T < \infty\}$. D'après (7) on a, si $A \in \mathscr{F}_{T-}$:

$$\begin{aligned}
0 &= E(1_{A \cap \{T \leqq T_n\}} \Delta Z_T) = M_\nu^P(1_A 1_{[T] \cap [0, T_n]} \Delta Z) \\
&= M_\nu^P[1_A 1_{[T] \cap [0, T_n]} Z_- (Y - 1)] \\
&= E[1_{A \cap \{T \leqq T_n\}} Z_{T-} \int_E \nu(\{T\}, dx)\,(Y(T, x) - 1)].
\end{aligned}$$

On en déduit que $Z_{T-} \int_E \nu(\{T\}, dx)\,(Y(T, x) - 1) = 0$ P-ps sur $\{T \leqq T_n\}$ pour tout n. Le résultat découle alors du théorème de section appliqué à l'ensemble prévisible $\{\nu(\{\cdot\} \times E) = 1, Z_- \int_E \nu(\{\cdot\}, dx)\,(Y(\cdot, x) - 1) \neq 0\}$ (Dellacherie [3]).

(3.8) Théorème. *Soient $Y \in \tilde{\mathscr{P}}^+$, $z \in L_{\mathrm{loc}}^2(\beta, P)$ et $q \in \mathscr{F}_0^+$ avec $E(q) = 1$. On suppose que:*

(i) *En dehors d'un ensemble P-négligeable, $\int_E \nu(\{s\}, dx)\, Y(s, x) = 1$ pour tout s tel que $\nu(\{s\} \times E) = 1$.*

(ii) *La fonction W définie ci-dessous est dans $\mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$:*

$$W(s, x) = Y(s, x) - 1 + 1_{\{\nu(\{s\} \times E) \neq 1\}} \frac{1}{1 - \nu(\{s\} \times E)} \int_E \nu(\{s\}, dx)(Y(s, x) - 1).$$

On pose $N = z \cdot M^c + W * (\mu - \nu)$, et

$$Z_t = q\, e^{N_t - \frac{1}{2} z^2 \cdot \beta_t} \prod_{s \leqq t} [(1 + \Delta N_s) e^{-\Delta N_s}]. \tag{11}$$

Si $E(Z_\infty) = 1$, X admet le triplet $\mathscr{C}' = (\nu', \alpha', \beta')$ défini par (9) *pour P'-caractéristiques locales, pour la probabilité $P' = Z_\infty \cdot P$.*

Ce théorème généralise le *théorème de Girsanov* relatif au cas où X est un mouvement brownien pour P (on a alors $\nu = \alpha = 0$, $\beta_t = t$). On reconnaitra en particulier la «condition de Girsanov» $E(Z_\infty) = 1$.

On pourrait substantiellement affaiblir les conditions sur Y et z, tout en conservant le résultat (comparer par exemple la condition (i), et la proposition (3.7)). Nous ne tenterons pas de le faire dans le cas général, mais par contre nous ferons dans les paragraphes suivants une étude systématique du cas où X est quasi-continu à gauche.

Démonstration. Par construction $N \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$, et $N^c = z \cdot M^c$. Donc d'après Doléans-Dade [4], la formule (11) définit l'unique élément de $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ solution de l'équation $Z = q + Z_- \cdot N$. On en déduit d'abord que $Z^c = Z_- \cdot N^c = (Z_- z) \cdot M^c$, donc z vérifie (8). Un calcul élémentaire utilisant (4), la condition (i) et le fait que $\{\nu(\{\cdot\} \times E) > 1\}$ est P-évanescent (proposition (1.4)(c)), montre que, en dehors d'un ensemble P-négligeable,

$$\Delta N_s = \begin{cases} Y(s, \Delta X_s) & \text{si } \Delta X_s \neq 0 \\ 1_{\{\nu(\{s\} \times E) < 1\}} \dfrac{\int_E \nu(\{s\}, dx)(Y(s,x) - 1)}{\nu(\{s\} \times E) - 1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit d'abord que, comme $\Delta Z = Z_- \Delta N$, on a $\Delta Z \cdot \mu = [Z_-(Y-1)] \cdot \mu$, et cela implique clairment que Y vérifie (7). On en déduit ensuite que $\Delta N_s \geqq -1$, donc $Z \geqq 0$. Par conséquent la condition $E(Z_\infty) = E(Z_0) = 1$ entraine que Z soit la martingale $E\left(\dfrac{dP'}{dP} \mid \mathscr{F}_t\right)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème (3.3).

4. Conditions d'absolue continuité de deux lois en fonction des caractéristiques locales

Nous étudions maintenant le problème suivant: soient P et P' deux probabilités sur $(\Omega, \mathscr{F})$, faisant chacune de X une semi-martingale quasi-continue à gauche. Supposons que les P-caractéristiques locales de X soient $\mathscr{C} = (\nu, \alpha, \beta)$, tandis que les P'-caractéristiques locales de X sont données par les formules (9). A quelles conditions sur Y et z a-t'on $P' \ll P$, ou $P \ll P'$, ou $P' \sim P$?

Dans ce paragraphe nous nous contentons d'énoncer les résultats principaux, les démonstrations étant faites dans les paragraphes suivants.

Pour simplifier les énoncés, et sans que cela nuise réellement à la généralité des résultats, *nous supposerons dorénavant que* $\mathscr{F} = \bigvee_{(t)} \mathscr{F}_t$.

1. Le problème des martingales. Il est clair que, en général, le triplet $\mathscr{C}$ ne détermine pas entièrement la probabilité P, et il faut au minimum lui adjoindre la «condition initiale».

On considère donc une tribu $\mathscr{F}_0^0$ contenue dans $\mathscr{F}_0$, et fixée une fois pour toutes; une *condition initiale* est la donnée d'une probabilité Q sur $(\Omega, \mathscr{F}_0^0)$. Bien entendu on peut avoir $\mathscr{F}_0^0 = \mathscr{F}_0$, mais nous voulons nous réserver la possibilité que la condition initiale soit la «loi de la variable aléatoire X_0»; dans ce cas il convient de prendre pour $\mathscr{F}_0^0$ la tribu $\sigma(X_0)$ engendrée par X_0, et cette tribu est contenue strictement dans $\mathscr{F}_0$ en général, à cause de la propriété de continuité à droite imposée à la famille $(\mathscr{F}_t)$.

Considérons par ailleurs un triplet $\mathscr{C} = (\nu, \alpha, \beta)$ constitué d'une mesure aléatoire prévisible ν, d'un processus prévisible α et d'un processus croissant continu β.

Définition. On dit que *le problème* $(X, \mathscr{C}, Q)$ *admet une solution* P si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$ dont la restriction à $(\Omega, \mathscr{F}_0^0)$ est Q, et qui fait de X une semi-martingale de caractéristiques locales $\mathscr{C}$.

Pour une telle solution, on écrira $P \in (X, \mathscr{C}, Q)$. Par analogie avec le problème classique des martingales, on peut dire que P est solution (faible) du problème des martingales associé à $\mathscr{C}$, avec condition initiale Q.

Remarque. On n'a imposé aucune condition sur la finitude de ν, α ou β. Cependant dire que $P \in (X, \mathscr{C}, Q)$ implique que α et β soient dans $\mathscr{V}_{\text{loc}}(P)$, et que la restriction de M_ν^P à $(\Omega, \tilde{\mathscr{P}})$ soit σ-finie.

Définition. Soit T un temps d'arrêt; on dit qu'*il y a T-unicité pour le problème* $(X, \mathscr{C}, Q)$ si deux solutions quelconques du problème $(X^T, \mathscr{C}^T, Q)$ coïncident sur $(\Omega, \mathscr{F}_{T-})$.

(Le triplet $\mathscr{C}^T$, introduit dans la proposition (2.4), est constitué de $1_{]0,T]\times E} \cdot \nu$, α^T et β^T; cette proposition implique que toute solution de $(X, \mathscr{C}, Q)$ est également solution de $(X^T, \mathscr{C}^T, Q)$.)

Lorsque $T = \infty$, on parle d'*unicité* au lieu de T-unicité. Comme $\mathscr{F} = \bigvee_{(t)} \mathscr{F}_t$, on retrouve bien la notion naturelle d'unicité. Remarquons que si T est un temps d'arrêt quelconque, l'unicité n'entraine pas la T-unicité, et la T-unicité n'entraine pas l'unicité.

Exemples. On se place dans la situation canonique suivante: $\Omega = D([0, \infty[)$, espace des fonctions continues à droite et limitées à gauche, X est le processus canonique défini sur Ω par $X_t(\omega) = \omega(t)$; $\mathscr{F}_t^0 = \sigma(X_s : s \leqq t)$, $\mathscr{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s^0$ et $\mathscr{F} = \bigvee_{(t)} \mathscr{F}_t$.

1. Supposons que $\mathscr{C}$ soit de la forme

$$\begin{aligned} &\nu(\omega; dt, dx) = dt\, F_t(dx) \\ &\qquad \alpha_t(\omega) = \int_0^t a(s)\, ds \\ &\qquad \beta_t(\omega) = \int_0^t b^2(s)\, ds, \end{aligned} \tag{12}$$

où F est une mesure de transition positive de $[0, \infty[$ dans E vérifiant $\int_0^t ds \int_E F_s(dx)(x^2 \wedge 1) < \infty$ pour tout $t < \infty$, et où a et b sont deux fonctions sur $[0, \infty[$, de carré intégrable sur tout intervalle fini. Pour toute probabilité Q sur $(\Omega, \mathscr{F}_0^0)$ il est bien connu (cf. Grigelionis [9] par exemple) que le problème $(X, \mathscr{C}, Q)$ admet *une solution et une seule*, faisant de X un *processus à accroissements indépendants*. Nous verrons qu'il y a T-unicité pour tout temps d'arrêt relatif à la famille $(\mathscr{F}_t^0)$.

2. Supposons que $\mathscr{C}$ soit de la forme

$$\begin{aligned} &\nu = 0 \\ &\alpha_t = \int_0^t a(X_{s-})\, ds \\ &\beta_t = \int_0^t b^2(X_{s-})\, ds, \end{aligned} \tag{13}$$

où a et b sont des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$. D'après Stroock et Varadhan [25] on sait que pour toute probabilité Q sur $(\Omega, \mathscr{F}_0^0)$, le problème $(X, \mathscr{C}, Q)$ admet *une solution et une seule*, faisant de X un *processus de diffusion*. Nous verrons également qu'il y a T-unicité pour tout $(\mathscr{F}_t^0)$-temps d'arrêt T.

3. Supposons que $\alpha=\beta=0$ et que $\nu(]0,t]\times E)$ soit une processus croissant fini pour tout t fini. Le problème $(X, \mathscr{C}, Q)$ n'admet pas nécessairement une solution (il en admet une si, par exemple, $\nu(]0,t]\times E)$ est un processus croissant dont les sauts sont d'amplitude inférieure ou égale à 1, et qui est majoré par une fonction déterministe finie pour tout t fini). Mais s'il admet une solution, celle-ci fait de X un «processus de sauts pur», et elle est T-unique pour tout temps d'arrêt T[10].

2. *Les résultats principaux.* Rappelons que nous nous restreignons au cas quasi-continu à gauche.

Jusqu'à la fin de cet article, on fixe un triplet $\mathscr{C}=(\nu,\alpha,\beta)$ constitué d'une mesure aléatoire prévisible ν telle que $J(\nu)=\emptyset$, d'un processus continu α et d'un processus croissant continu β. On fixe également $Y\in\tilde{\mathscr{P}}^+$ et un processus prévisible z. On fixe enfin deux probabilités Q et Q' sur $(\Omega, \mathscr{F}_0^0)$. On définit un triplet $\mathscr{C}'$ par les formules (9), rappelées ci-dessous (avec $U(\omega,t,x)=x1_{\{|x|\leqq 1\}}$):

$$\begin{aligned}
&\nu'=Y\cdot\nu,\\
&\alpha'=\alpha+z\cdot\beta+[U(Y-1)]*\nu,\\
&\beta'=\beta.
\end{aligned}$$

On pose également

$$\begin{aligned}
&A=z^2\cdot\beta+(Y-1)1_{\{Y>2\}}*\nu+(Y-1)^2 1_{\{Y\leqq 2\}}*\nu\\
&S_n=\inf(t\colon A_t\geqq n),\qquad S=\inf(t\colon A_t=\infty)=\lim_{(n)}\uparrow S_n\\
&G=\{A_\infty<\infty\}=\bigcup_{(n)}\{S_n=\infty\},\qquad \hat{G}=\{1_{\{Y=0\}}*\nu_\infty=0\}
\end{aligned}\tag{14}$$

(on a $\hat{G}=\Omega$ si $Y>0$ identiquement). On a alors:

(4.1) Théorème. *Soient $P\in(X,\mathscr{C},Q)$ et $P'\in(X,\mathscr{C}',Q')$. Alors*
(a) *Si $P'\ll P$, on a $Q'\ll Q$ et $P'(G)=1$.*
(b) *Si $P\ll P'$, on a $Q\ll Q'$ et $P(G\cap\hat{G})=1$.*
(c) *Si $P\sim P'$, on a $Q\sim Q'$ et $P(G\cap\hat{G})=P'(G\cap\hat{G})=1$.*

(4.2) Théorème. *Soient $P\in(X,\mathscr{C},Q)$ et $P'\in(X,\mathscr{C}',Q')$. Supposons que pour tout $n\geqq n_0$ il y ait S_n-unicité pour le problème $(X,\mathscr{C}',Q')$. Alors*
(a) *Si $Q'\ll Q$ et $P'(G)=1$, on a $P'\ll P$.*
(b) *Si $Q\ll Q'$ et $P(G\cap\hat{G})=1$, on a $P\ll P'$.*
(c) *Si $Q\sim Q'$ et $P(G\cap\hat{G})=P'(G)=1$, on a $P\sim P'$.*

(4.3) Théorème. *Soient $P\in(X,\mathscr{C},Q)$ et $P'\in(X,\mathscr{C}',Q')$. Supposons que pour tout $n\geqq n_0$ il y ait S_n-unicité pour le problème $(X,\mathscr{C},Q)$. Alors*
(a) *Si $Q'\ll Q$ et $P'(G\cap\hat{G})=1$, on a $P'\ll P$.*
(b) *Si $Q\ll Q'$ et $P(G\cap\hat{G})=P'(\hat{G})=1$, on a $P\ll P'$.*
(c) *Si $Q\sim Q'$ et $P(G\cap\hat{G})=P'(G\cap\hat{G})=1$, on a $P\sim P'$.*

On remarque que le théorème (4.3) n'est pas entièrement satisfaisant, si on le compare aux deux théorèmes précédents. En particulier on peut trouver des exemples où il y a S_n-unicité pour $(X, \mathscr{C}, Q)$, où $P' \ll P$ et où cependant $P'(\hat{G}) < 1$: ces exemples ne rentrent pas dans le cadre du théorème (4.3).

Pour que les théorèmes (4.2) et (4.3) soient réellement utilisables, il convient d'examiner quelles hypothèses entrainent la condition, inhabituelle, de S_n-unicité. *Cet examen est fait au paragraphe* 7. En particulier on y donne, sous la seule hypothèse d'unicité, des versions un peu affaiblies de ces deux théorèmes, dans le cadre des processus les plus usuels (notamment les processus à accroissements indépendants et les diffusions).

Disons ici simplement que, lorsque le processus A est borné (ce qui implique $G = \Omega$), on peut remplacer de manière évidente la S_n-unicité par l'unicité.

3. Une expression de la densité relative. Là encore nous énonçons le résultat principal. Des compléments importants, ainsi que les démonstrations, sont donnés au paragraphe 8.

Définition. On dit que $P \in (X, \mathscr{C}, Q)$ satisfait la *condition de représentation des martingales* si tout $N \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ s'écrit

$$N = E(N_0 \mid \mathscr{F}_0^0) + z \cdot M^c + W * (\mu - \nu), \tag{15}$$

où $z \in L^2_{\mathrm{loc}}(\beta, P)$, où $W \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$ et où M^c est la partie continue (pour P) de $M = X^0 - \alpha$.

(4.4) Théorème. *Si P est l'unique solution de $(X, \mathscr{C}, Q)$, elle vérifie la condition de représentation des martingales.*

D'après la proposition (1.6), on sait que si $P \in (X, \mathscr{C}, Q)$, on a $1_{[0, S_n]}(Y-1) \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$ pour tout n. Donc

$$N(n) = z \cdot (M^c)^{S_n} + [1_{[0, S_n]}(Y-1)] * (\mu - \nu) \tag{16}$$

est un élément de $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$, et $N(n+1) = N(n)$ sur $[0, S_n]$. La formule suivante définit donc un processus continu à droite Z:

$$Z_t = \begin{cases} e^{N_t(n) - \frac{1}{2} z^2 \cdot \beta_t} \prod\limits_{s \leq t} [(1 + \Delta N_s(n))\, e^{-\Delta N_s(n)}] & \text{si } t \leqq S_n \\ \liminf\limits_{(n)} Z_{S_n} & \text{si } t \geqq S. \end{cases} \tag{17}$$

On a alors le résultat suivant, dont la première partie améliore le théorème de Girsanov (3.8):

(4.5) Théorème. *Soient $P \in (X, \mathscr{C}, Q)$ et Z défini par* (17).

(a) *Soit $q \in (\mathscr{F}_0^0)^+$ tel que $E(q) = 1$. Supposons que $E(qZ_\infty) = 1$ et que $qZ_S = 0$ P-ps sur $\bigcup\limits_{(n)} \{S_n = S < \infty\}$. Alors $P' = (qZ_\infty) \cdot P$ est une solution du problème $(X, \mathscr{C}', q \cdot Q)$ et qZ est une version de la martingale $E\left(\frac{dP'}{dP} \middle| \mathscr{F}_t\right)$.*

(b) *Supposons que* $P' \in (X, \mathscr{C}', Q')$ *vérifie* $P' \ll P$, *et soit* q *une version de* dQ'/dQ. *Supposons que l'une des conditions suivantes soit réalisée:*

(i) P *vérifie la condition de représentation des martingales, ou*

(ii) *pour tout* $n \geqq n_0$ *il y a* S_n*-unicité pour* $(X, \mathscr{C}', Q)$.

Alors on a $E(qZ_\infty)=1$, $qZ_S=0$ P-ps *sur* $\bigcup_{(n)} \{S_n = S < \infty\}$, *et* qZ *est une version de* $E\left(\frac{dP'}{dP}\middle| \mathscr{F}_t\right)$.

Remarque. Lorsque l'ensemble $\bigcup_{(n)} \{S_n = S < \infty\}$ est P-négligeable (c'est-à-dire lorsque le processus A est P-ps à trajectoires continues), on peut remplacer (17) par la formule plus familière suivante:

$$Z_t = \begin{cases} e^{N_t(n) - \frac{1}{2} z^2 \cdot \beta_t} \prod_{s \leqq t} [(1+\Delta N_s(n))\, e^{-\Delta N_s(n)}] & \text{si } t \leqq S_n \\ 0 & \text{si } S<\infty \text{ et } t \geqq S. \end{cases}$$

5. Étude des équations (7) et (8)

Etant données les assertions (c) et (d) du théorème (3.3), on voit que la démonstration des théorèmes du paragraphe 4 repose sur la résolution du système d'équations (7) et (8), où l'inconnue est Z.

1. Nous allons commencer par des résultats techniques, venant compléter la «transformation exponentielle» de Doléans-Dade [4]. On fixe une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{F})$.

Désignons par $\mathscr{N}$ la classe des familles $N = (N(n), T_n)$ constituées d'une suite croissante (T_n) de temps d'arrêt et d'une suite $N(n)$ d'éléments quasi-continu à gauche de $\mathscr{M}_{\text{loc}}(P)$ vérifiant $N(n) = N(n)^{T_n} = N(n+1)^{T_n}$. Pour une telle famille, on pose $S = \lim_{(n)} \uparrow T_n$ et $N^c = (N(n)^c, T_n)$. On définit un processus continu à droite $Z(N)$ par

$$Z_t(N) = \begin{cases} e^{N_t(n) - \frac{1}{2}\langle N(n)^c, N(n)^c\rangle_t} \prod_{s \leqq t} [(1+\Delta N_s(n))\, e^{-\Delta N_s(n)}] & \text{si } t \leqq T_n \\ \liminf_{(n)} Z_{T_n}(N) & \text{si } t \geqq S. \end{cases} \tag{18}$$

(5.1) Proposition. *Soit* $N = (N(n), T_n) \in \mathscr{N}$.

(a) *Pour tout* n, $Z(N)^{T_n}$ *est l'unique élément de* $\mathscr{M}_{\text{loc}}(P)$ *solution de l'équation* $Z = 1 + Z_- \cdot N(n)$.

(b) *Si* $\Delta N(n) \geqq -1$, $Z(N)$ *est une surmartingale positive.*

Démonstration. Soit $Z = Z(N)$. L'assertion (a) découle de [4]. Si $\Delta N(n) \geqq -1$, on a $Z \geqq 0$. D'après un résultat bien connu, comme $Z^{T_n} \in \mathscr{M}^+_{\text{loc}}(P)$, Z^{T_n} est une surmartingale. En appliquant le lemme de Fatou, on obtient alors

$$\begin{aligned} Z_t = \liminf_{(n)} Z_t^{T_n} &\geqq \liminf_{(n)} E(Z_{t+s}^{T_n} | \mathscr{F}_t) \\ &\geqq E(\liminf_{(n)} Z_{t+s}^{T_n} | \mathscr{F}_t) = E(Z_{t+s} | \mathscr{F}_t), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

On fixe maintenant $N=(N(n), T_n)\in\mathcal{N}$ vérifiant $\Delta N(n)\geqq -1$. Pour tout $a\geqq 1$, on pose

$$B_t(a)=\sum_{s\leqq t}\Delta N_s(n)^2\,1_{\{|\Delta N_s(n)|\leqq a\}},$$

$$C_t(a)=\sum_{s\leqq t}\Delta N_s(n)\,1_{\{\Delta N_s(n)>a\}}$$

si $t\leqq T_n$, $B_t(a)=C_t(a)=+\infty$ si $t>T_n$ pour tout n. Comme $B^{T_n}(a)$ et $C^{T_n}(a)$ sont dans $\mathcal{V}^+_{\text{loc}}(P)$, il est facile de voir qu'il existe des processus croissants $B'(a)$ et $C'(a)$ tels que pour chaque n, $B'^{T_n}(a)$ (resp. $C'^{T_n}(a)$) soit la projection prévisible duale de $B^{T_n}(a)$ (resp. $C^{T_n}(a)$). De plus sur $\bigcup_{(n)}[0, T_n]$, ces processus sont P-ps continus (à cause de la quasi-continuité à gauche de N) et finis. On pose

$$A(N)=\begin{cases}\langle N(n)^c, N(n)^c\rangle+B'(1)+C'(1) & \text{sur } [0, T_n]\\ +\infty & \text{sur } (\bigcup_{(n)}[0, T_n])^c\end{cases} \tag{19}$$

$$S^n=\inf(t\colon A_t(N)\geqq n)\wedge T_n,$$

et on a $S=\lim_{(n)} S_n$ P-ps.

(5.2) Proposition. *Pour tout n, on a $Z(N)^{S^n}\in\mathcal{M}(P)$.*

Démonstration. Quitte à arrêter tous les processus en S_n, on peut supposer que $S_n=\infty$ et $A_\infty(N)\leqq n$: il nous faut alors montrer que $Z(N)\in\mathcal{M}(P)$, ou encore que $E(Z_\infty(N))=1$.

Fixons un nombre $a>2\vee(e^n-1)$: on a alors $B'(a)\leqq(1+a)n$ et $C'(a)\leqq n$. On écrit $N=N(n)$, $C=C(a)$, $C'=C'(a)$, et on pose $N''=C-C'$ et $N'=N-N''$. Il est clair que $N''^c=0$, que $|\Delta N'|\leqq a$ et que N' et N'' n'ont pas de sauts communs. Donc si $Z'=Z(N')$ et $Z''=Z(N'')$, on a $Z(N)=Z'Z''$. Nous allons distinguer plusieurs étapes:

(i) Montrons d'abord que $Z'\in\mathcal{M}(P)$: il s'agit d'un résultat classique lorsque $N'=N'^c$, et pour la démonstration nous nous inspirons de Kunita [15]. Si $\hat{N}=2N+B(a)-B'(a)$, on a $\hat{N}\in\mathcal{M}_{\text{loc}}(P)$ et

$$\hat{Z}_t=e^{\hat{N}_t-\frac{1}{2}\langle\hat{N}^c,\hat{N}^c\rangle_t}\prod_{s\leqq t}[(1+\Delta\hat{N}_s)\,e^{-\Delta\hat{N}_s}]$$

est dans $\mathcal{M}_{\text{loc}}(P)$. Un calcul simple montre que $\Delta\hat{N}=2\Delta N+\Delta N^2$ si $\Delta N\leqq a-1$ et $\Delta\hat{N}=0$ sinon. Il s'ensuit que $\Delta\hat{N}\geqq 1$, donc $\hat{Z}\in\mathcal{M}^+_{\text{loc}}(P)$ et on a $E(\hat{Z}_t)\leqq 1$ pour tout t. D'autre part il est facile de vérifier que $Z_t'^2=\hat{Z}_t\exp(\langle N^c, N^c\rangle_t+B'_t(a))$, donc

$$E(Z_t'^2)\leqq e^{(2+a)n}E(\hat{Z}_t)\leqq e^{(2+a)n},$$

ce qui implique l'intégrabilité uniforme des (Z'_t), donc $Z'\in\mathcal{M}(P)$.

(ii) Soit la probabilité $P'=Z'_\infty\cdot P$. Comme Z' et C n'ont pas de sauts communs, d'après le lemme (3.6) on a pour tout temps d'arrêt T:

$$E'(C_T)=E(Z'\cdot C_T)=E(Z'_-\cdot C_T)=E(Z'_-\cdot C'_T)=E'(C'_T).$$

Donc C' est également la projection prévisible duale de C pour P'. Donc $N''\in\mathcal{M}(P')$ et il s'ensuit que $Z''\in\mathcal{M}^+_{\text{loc}}(P')$.

(iii) Comme $E(Z_\infty(N))=E'(Z''_\infty)$, il nous reste à prouver que $Z''\in\mathscr{M}(P')$. Comme les sauts de C sont supérieurs à a et que C est P'-integrable, si R_n désigne le $n^{\text{ième}}$ instant de saut de C on a $\lim\limits_{(n)}\downarrow P'(R_n<\infty)=0$.

Posons $V^n=Z''^{R_{n+1}}/Z''^{R_n}$ (avec la convention $0/0=1$). Comme $Z''\in\mathscr{M}^+_{\text{loc}}(P')$, il est clair que $V^n\in\mathscr{M}^+_{\text{loc}}(P')$ également. Mais on a

$$V_t^n=\begin{cases}1 & \text{si } t\leqq R_n\\ (1+\Delta C_{R_{n+1}})\exp-(C'_{R_{n+1}}-C'_{R_n}) & \text{si } R_{n+1}\leqq t<\infty\\ \exp-(C'_t-C'_{R_n}) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Donc $V_t^n\leqq 1+\Delta C_{R_n}$, qui est P'-intégrable, et les variables (V_t^n) sont uniformément intégrables par rapport à P'; donc $V^n\in\mathscr{M}(P')$. Il vient alors

$$E'(Z''_{R_{n+1}})=E'[Z''_{R_n}E'(V^n\,|\,\mathscr{F}_{R_n})]=E'(Z''_{R_n}V^n_{R_n})=E'(Z''_{R_n}),$$

et par récurrence sur n on obtient

$$E'(Z''_{R_n})=1. \tag{20}$$

Posons $D_t=\sum\limits_{s\leqq t}1_{\{\Delta C_s>0\}}(1+\Delta C_s)$: D est un processus croissant P'-intégrable $\left(\text{car } D\leqq\dfrac{a+1}{a}C\right)$, dont on note D' la projection prévisible duale pour P' (c'est également la projection prévisible duale pour P, pour les mêmes raisons qu'en (ii)). Le processus $W_t=1_{\{R_n<t\leqq R_{n+1}\}}Z''_{R_n}\exp-(C'_t-C'_{R_n})$ est prévisible, donc

$$\begin{aligned}E'(1_{\{R_{n+1}<\infty\}}Z''_{R_{n+1}})&=E'(1_{\{R_{n+1}<\infty\}}Z''_{R_n}\Delta D_{R_{n+1}}\exp-(C'_{R_{n+1}}-C'_{R_n}))\\ &=E'\left(\int_0^\infty W_s dD_s\right)=E'\left(\int_0^\infty W_s dD'_s\right)\\ &=E'\left(1_{\{R_n<\infty\}}Z''_{R_n}\int_{R_n}^{R_{n+1}}dD'_t\exp-(C'_t-C'_{R_n})\right).\end{aligned}$$

Mais $D'\leqq\dfrac{a+1}{a}C'$, donc

$$\begin{aligned}E'(1_{\{R_{n+1}<\infty\}}Z''_{R_{n+1}})&\leqq\frac{a+1}{a}E'\left(1_{\{R_n<\infty\}}Z''_{R_n}\int_{R_n}^{R_{n+1}}dC'_t\exp-(C'_t-C'_{R_n})\right)\\ &\leqq\frac{a+1}{a}E'(1_{\{R_n<\infty\}}Z''_{R_n}[1-\exp-(C'_{R_{n+1}}-C'_{R_n})]).\end{aligned}$$

Si $b=\dfrac{a+1}{a}(1-e^{-n})$, on a $b<1$, et ce qui précède entraine (puisque $C'_\infty\leqq n$):

$$E'(1_{\{R_{n+1}<\infty\}}Z''_{R_{n+1}})\leqq bE'(1_{\{R_n<\infty\}}Z''_{R_n})\leqq b^{n+1}$$

(par récurrence sur n). En combinant ce résultat avec (20) on obtient:

$$E'(Z''_\infty)=\lim_{(n)}E'(1_{\{R_n=\infty\}}Z''_{R_n})=\lim_{(n)}[E'(Z''_{R_n})-E'(1_{\{R_n<\infty\}}Z''_{R_n})]=1.$$

(5.3) Proposition. *On a* $Z_{S-}(N)=0$ P-ps *sur l'ensemble* $\bigcap\limits_{(n)}\{S_n<S\}=\{A_{S-}(N)=+\infty\}$.

Commençons par un lemme, qui est l'application à nos besoins d'un résultat bien connu de la théorie des martingales. Supposons que $(\hat{N}(n))$ soit une famille d'éléments de $\mathscr{M}(P)$ vérifiant $\hat{N}(n)=\hat{N}(n)^{S_n}=\hat{N}(n+1)^{S_n}$.

(5.4) Lemme. (a) *Supposons que* $\sup_{(\omega,t,n)} \Delta\hat{N}_t(n)(\omega)<\infty$. *En dehors d'un ensemble P-négligeable, on a soit* $\liminf_{(n)} \hat{N}_{S_n}(n)=\limsup_{(n)} \hat{N}_{S_n}(n)\in\mathbb{R}$, *soit* $\limsup_{(n)} \hat{N}_{S_n}(n)=+\infty$.

(b) *Supposons que* $\sup_{(\omega,t,n)} |\Delta\hat{N}_t(n)(\omega)|<\infty$. *En dehors d'un ensemble P-négligeable, on a soit* $\liminf_{(n)} \hat{N}_{S_n}(n)=\limsup_{(n)} \hat{N}_{S_n}(n)\in\mathbb{R}$, *soit* $\liminf_{(n)} \hat{N}_{S_n}(n)=-\infty$ *et* $\limsup_{(n)} \hat{N}_{S_n}(n)=+\infty$.

Démonstration. On pose $T_a=\inf(t\colon \hat{N}_t(n)>a)$ s'il existe t et n tels que $\hat{N}_t(n)>a$, et $T_a=S$ sinon. La suite $(\hat{N}_{T_a}(n))_{(n)}$ est une martingale relativement à la famille de tribus $\mathscr{F}_{T_a\wedge S_n}$, et on a

$$E(\hat{N}_{T_a}(n)\vee 0)\leqq a+\sup_{(\omega,t,p)} \Delta N_t(p)(\omega)<\infty.$$

D'après un théorème classique (voir par exemple Neveu [21]) $\hat{N}_{T_a}(n)$ converge alors P-ps vers une limite finie. Mais alors si $\limsup_{(n)} \hat{N}_{S_n}(n)$ est fini, on a $T_a=S$ pour a assez grand et on voit que $\hat{N}_{S_n}(n)=\hat{N}_{T_a}(n)$ converge P-ps vers une limite finie, ce qui prouve l'assertion (a). Pour prouver (b). il suffit d'appliquer (a) à la famille $(\hat{N}(n))$ et à la famille $(-\hat{N}(n))$.

Démonstration de (5.3). On écrit $B=B(1)$, $B'=B'(1)$, $C=C(1)$, $C'=C'(1)$, $\hat{N}(n)=B^{S_n}-B'^{S_n}$ $N''(n)=C^{S_n}-C'^{S_n}$ et $N'(n)=N(n)-N^c(n)-N''(n)$. On définit le processus croissant D par $D_t=\langle N(n)^c, N(n)^c\rangle_t$ si $t\leqq S_n$ et $D_t=+\infty$ si $t>S_n$ pour tout n. Les familles $N^c=(N(n)^c, S_n)$, $N'=(N'(n), S_n)$ et $N''=(N''(n), S_n)$ sont dans $\mathscr{N}$, et on peut poser $Z^c=Z(N^c)$, $Z'=Z(N')$ et $Z''=Z(N'')$. Comme N' et N'' n'ont pas de sauts communs, il est facile de voir que $Z(N)=Z^c Z' Z''$; comme chacun des processus Z^c, Z' et Z'' est, d'après la proposition (5.1), une surmartingale positive, ces processus ont une limite à gauche P-ps finie en S. Il suffit alors de montrer que

(i) $Z^c_{S-}=0$ P-ps sur $\{D_{S-}=\infty\}$,

(ii) $Z'_{S-}=0$ P-ps sur $\{B'_{S-}=\infty\}$,

(iii) $Z''_{S-}=0$ P-ps sur $\{C'_{S-}=\infty\}$.

Montrons (i): il s'agit d'ailleurs d'un résultat bien connu (voir par exemple Orey [23]). On a $Z^c_{S_n}=\exp(N^c_{S_n}(n)-\frac{1}{2}D_{S_n})$. D'après le lemme (5.4), deux cas sont alors possibles (P-ps):

soit $N^c_{S_n}(n)$ converge vers une limite finie, et alors $Z^c_{S-}=0$ si $D_{S_n}\uparrow D_{S-}=+\infty$,

soit $\liminf_{(n)} N^c_{S_n}(n)=-\infty$ et $\limsup_{(n)} N^c_{S_n}(n)=+\infty$. Mais $Z^c_{S_n}$ converge vers une limite finie et $D_{S_n}\uparrow+\infty$, donc la limite Z^c_{S-} de $Z^c_{S_n}$ ne saurait être que 0.

Montrons (ii): si on applique le lemme (5.4) (b) à la famille $(\hat{N}'(n))$, qui vérifie $|\Delta\hat{N}'(n)|\leqq 1$, on voit que $B_{S-}=+\infty$ P-ps sur $\{B'_{S-}=+\infty\}$. Mais on a

$$\gamma_n=\sum_{t\leqq S_n}[\Delta N'_t(n)-\operatorname{Log}(1+\Delta N'_t(n))]\geqq\tfrac{1}{2}\sum_{t\leqq S_n}(\Delta N'_s(n))^2=\tfrac{1}{2}B_{S_n},$$

qui tend donc également P-ps vers $+\infty$ sur $\{B'_{S-}=+\infty\}$. Or $Z'_{S_n}=\exp(N'_{S_n}(n)-\gamma_n)$ tend P-ps vers une limite finie. Il reste alors à appliquer le lemme (5.4) (b) à $(N'(n))$ et à raisonner comme pour (i), ce qui montre que cette limite est P-ps 0 sur $\{B'_{S-}=+\infty\}$.

Montrons enfin (iii): On a

$$Z''_{S_n}=\exp(-C'_{S_n}+\sum_{t\leqq S_n}\mathrm{Log}(1+\Delta C_t)).$$

Supposons que cette expression converge vers une limite finie non nulle, alors que $C'_{S-}=+\infty$. Cela implique la convergence de $\sum_{t\leqq S_n}\mathrm{Log}(1+\Delta C_t)$ vers $+\infty$, donc C possède une infinité de sauts sur $[0, S[$; cela implique également la convergence de $-C'_{S_n}+\sum_{t\leqq S_n}\mathrm{Log}(1+\Delta C_t)$ vers une limite finie. Mais $\Delta C_t>1$ dès que $\Delta C_t\neq 0$, et $\mathrm{Log}(1+x)\leqq x-\frac{1}{4}$ si $x>1$, donc

$$N''(n)\geqq -C'_{S_n}+\sum_{t\leqq S_n}\mathrm{Log}(1+\Delta C_t)+\tfrac{1}{4}\sum_{t\leqq S_n}1_{\{\Delta C_t\neq 0\}}$$

doit converger vers $+\infty$. Or cette possibilité est exclue P-ps par le lemme (5.4) (a) appliqué à la famille $(-N''(n))$.

(5.5) Proposition. *On a $Z(N)\in\mathscr{M}^+_{\mathrm{loc}}(P)$.*

Démonstration. Comme $Z=Z(N)$ est une surmartingale positive et quasi-continue à gauche, elle s'écrit de manière unique comme $Z=Z'-D$, où $Z'\in\mathscr{M}^+_{\mathrm{loc}}(P)$ et où $D\in\mathscr{V}^+_{\mathrm{loc}}(P)$ est continu (décomposition de Riesz et de Doob-Meyer).

Soit $R_n=S_n$ sur $\{S_n<S\}$, $R_n=+\infty$ sur $\{S_n=S\}$: R_n est un temps d'arrêt, et $Z^{R_n}=Z^{S_n}\in\mathscr{M}(P)$. Comme $Z^{R_n}=Z'^{R_n}-D^{R_n}$, l'unicité de la décomposition ci-dessus entraine que $D^{R_n}=0$; il s'ensuit que $D=0$ et $Z=Z'$ sur $\bigcup_{(n)}[0, R_n]$. Si maintenant $\lim_{(n)} R_n<\infty$, on a $S<\infty$ et $S_n<S$ pour tout n; donc $Z_{S-}=0$ P-ps d'après la proposition (5.3), et $Z'_{S-}=0$ P-ps puisque $Z=Z'$ sur $[0, S[$. Mais comme Z et Z' sont des surmartingales positives, on sait que $Z_t=0$ (resp. $Z'_t=0$) P-ps si $t\geqq S$, dès que $Z_{S-}=0$ (resp. $Z'_{S-}=0$). On a donc montré finalement que $Z=Z'$ P-ps, donc $Z\in\mathscr{M}^+_{\mathrm{loc}}(P)$.

2. Existence d'une solution aux équations (7) *et* (8). Nous allons maintenant appliquer les résultats ci-dessus à la situation du paragraphe 4. On part donc d'une solution P de $(X, \mathscr{C}, Q)$, le triplet $\mathscr{C}$ étant défini en 4.2. On fixe également $Y\in\tilde{\mathscr{P}}^+$ et un processus prévisible z; on définit A, S_n et S par (14), $N(n)$ par (16) et Z par (17). On remarque que $N=(N(n), S_n)$ appartient à $\mathscr{N}$ et vérifie $\Delta N(n)\geqq -1$, puisque d'après (4) on a $\Delta N_s(n)=1_{\{\Delta X_s\neq 0\}}[Y(s,\Delta X_s)-1]$. Il est alors facile de vérifier que $A=A(N)$ et $Z=Z(N)$, et que S_n a la même signification dans (14) et dans (19).

(5.6) Proposition. *Soient $q\in\mathscr{F}^+_0$ intégrable et $\hat{Z}=qZ$.*

(a) *On a $\hat{Z}\in\mathscr{M}^+_{\mathrm{loc}}(P)$ et $\hat{Z}^{S_n}\in\mathscr{M}(P)$ pour tout n.*

(b) *On a $\hat{Z}_{S-}=0$ P-ps sur $\bigcap_{(n)}\{S_n<S\}=\{A_{S-}=+\infty\}$.*

(c) *Si $\hat{Z}_S=0$ P-ps sur $\bigcup_{(n)}\{S_n=S<\infty\}$, alors $\hat{Z}$ vérifie* (7) *et* (8).

Démonstration. Les assertions (a) et (b) découlent immédiatement pour Z des propositions (5.2), (5.3) et (5.5); comme $q \in \mathscr{F}_0^+$ elles restent évidemment valides pour $\hat{Z}$.

On montre exactement comme dans le théorème (3.8) que $\hat{Z}^{S_n}$ vérifie (7) et (8) avec $1_{[0,S_n]} Y + 1_{]S_n, \infty[}$, et $1_{[0,S_n]} z$. Par suite $\hat{Z}$ vérifie (7) sur l'ensemble $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable $\bigcup_{(n)} [0, S_n] \times E$, et (8) sur l'ensemble prévisible $\bigcup_{(n)} [0, S_n]$. Si maintenant $\hat{Z}_S = 0$ P-ps sur $\bigcup_{(n)} \{S_n = S < \infty\}$, on voit en appliquant (b) que $\hat{Z} = \hat{Z}_- = 0$ sur $(\bigcup_{(n)} [0, S_n])^c$. Il est alors facile d'en déduire que $\hat{Z}$ vérifie (7) et (8).

3. *Unicité d'une solution aux équations* (7) *et* (8). Les résultats ci-dessous seront utilisés au paragraphe 8. On se place sous les mêmes hypothèses qu'en 5.2 ci-dessus.

(5.7) Proposition. *Soit $q \in \mathscr{F}_0^+$, intégrable. Supposons que P vérifie la condition de représentation des martingales. Pour que les équations* (7) *et* (8) *admettent une solution dans $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^+(P)$ égale à q en $t=0$, il faut et il suffit que $\hat{Z} = qZ$ vérifie $\hat{Z}_S = 0$ P-ps sur $\bigcup_{(n)} \{S_n = S < \infty\}$. Dans ce cas, $\hat{Z}$ est l'unique solution.*

Démonstration. La condition suffisante n'est autre que la proposition (5.6). Supposons maintenant que $\hat{Z}' \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^+(P)$ vérifie $\hat{Z}'_0 = q$, ainsi que les équations (7) et (8). D'après le théorème (1.5), on a $\hat{Z}'_-(Y-1) \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$, et d'après [20] on a $\hat{Z}'_- z \in L^2_{\mathrm{loc}}(\beta, P)$. Etant donnée la proposition (1.6) et la définition de A, cela implique que $\hat{Z}'_- \cdot A \in \mathscr{V}_{\mathrm{loc}}^+(P)$. Par suite, $\hat{Z}'_S = 0$ P-ps sur $\bigcup_{(n)} \{S_n = S < \infty\}$.

Posons $R_n = \inf(t\colon \hat{Z}'_t \leq 1/n)$, $R = \lim_{(n)} \uparrow R_n$ et $T_n = R_n \wedge S_n$. Soient également $N'(n) = \frac{1}{\hat{Z}'_-} \cdot (\hat{Z}')^{T_n} \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$ et $N''(n) = N'(n) - N(n)^{T_n}$. On a alors

$$M_\mu^P(\Delta N''(n) \mid \tilde{\mathscr{P}}) = \frac{1}{\hat{Z}'_-} M_\mu^P(\Delta \hat{Z}'^{T_n} \mid \tilde{\mathscr{P}}) - 1_{[0,T_n]}(Y-1) = 0,$$

$$\langle N''(n)^c, M^c \rangle = \frac{1}{\hat{Z}'_-} \cdot \langle (\hat{Z}'^c)^{T_n}, M^c \rangle - z \cdot \beta^{T_n} = 0.$$

Mais $N''_0(n) = 0$; donc d'après l'hypothèse faite sur P, il existe $z'' \in L^2_{\mathrm{loc}}(\beta, P)$ et $W \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$ tels que $N''(n) = z'' \cdot M^c + W * (\mu - \nu)$; ceci implique $\langle N''(n)^c, M^c \rangle = z'' \cdot \beta$ et $M_\mu^P(\Delta N''(n) \mid \tilde{\mathscr{P}}) = W$ (théorème (1.5)). Par suite $z'' \cdot \beta = 0$, et $W = 0$ M_μ^P-ps, ce qui entraine $N''(n) = 0$. Finalement on a montré que $N(n) = N'(n)$ sur $[0, T_n]$.

Par définition de $\hat{Z}$ on a $\hat{Z}^{T_n} = q + \hat{Z}_-^{T_n} \cdot N(n)^{T_n}$; par définition de $N'(n)$, on a $\hat{Z}'^{T_n} = q + \hat{Z}'^{T_n}_- \cdot N'(n)$. Or d'après [4] ces équations admettent des solutions uniques dans $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P)$. Autrement dit on a montré que $\hat{Z} = \hat{Z}'$ sur chaque $[0, R_n \wedge S_n]$.

Sur l'ensemble $\bigcap_{(n)} \{S_n < S\}$ on a $\hat{Z}_{S-} = 0$ P-ps d'après la proposition (5.6); par suite $\hat{Z}'_{S_n \wedge R_n} = \hat{Z}_{S_n \wedge R_n}$ tend P-ps vers 0, et on a $R_n \leq S$ P-ps pour tout n. Autrement dit, à un ensemble P-négligeable près, on a

$$\Omega = \bigcap_{(n)} \{R_n < S\} + \bigcup_{(n)} \{R_n = S_n = \infty\} + \bigcup_{(n)} \{R_n = S_n = S < \infty, \hat{Z}'_S = 0\}$$

(puisque $\hat{Z}'_S=0$, donc $R \leqq S$ P-ps sur $\bigcup_{(n)} \{S_n = S < \infty\}$). Sur l'ensemble $\bigcup_{(n)} \{R_n = S_n = \infty\}$ on a évidemment $\hat{Z} = \hat{Z}'$. Sur l'ensemble $\bigcap_{(n)} \{R_n < S\}$, $\hat{Z}_{R_n} = \hat{Z}'_{R_n}$ tend vers 0, donc $\hat{Z} = \hat{Z}'$. Enfin sur l'ensemble $\bigcup_{(n)} \{R_n = S_n = S < \infty, \hat{Z}'_S = 0\}$ on a $\hat{Z}^S = \hat{Z}'^S$, donc $\hat{Z}_S = \hat{Z}'_S = 0$, donc $\hat{Z} = \hat{Z}'$. Finalement on a bien montré que $\hat{Z}' = \hat{Z}$, et que $\hat{Z}_S = 0$ P-ps sur $\bigcup_{(n)} \{S_n = S < \infty\}$.

(5.8) Proposition. *Supposons que $Y=1$ et que $z=0$. Si $\hat{Z}=1$ est l'unique élément de $\mathscr{M}^+_{\text{loc}}(P)$ vérifiant (7) et (8) et tel que $E(\hat{Z}_0 | \mathscr{F}^0_0) = 1$, alors P vérifie la condition de représentation des martingales.*

Démonstration. Soit $\mathscr{M}_0$ la classe des $N \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(P)$ telles que $|\Delta N| \leqq 1$, $E(N_0 | \mathscr{F}_0^0) = 0$, $\langle N^c, M^c \rangle = 0$ et $M^P_\mu(\Delta N | \tilde{\mathscr{P}}) = 0$.

Soit $C \in \mathscr{F}_0$; si $q = 1_C - E(1_C | \mathscr{F}^0_0)$, la martingale $Z_t = q + 1$ vérifie les conditions de l'énoncé, donc égale 1. On en déduit que tout $C \in \mathscr{F}_0$ vérifie $E(1_C | \mathscr{F}^0_0) = 1_C$, donc tout $N \in \mathscr{M}_0$ vérifie $N_0 = 0$. Soient alors $N \in \mathscr{M}_0$ et $\hat{Z}$ l'unique solution dans $\mathscr{M}_{\text{loc}}(P)$ de $\hat{Z} = 1 + \hat{Z}_- \cdot N$. Comme $\Delta N \geqq -1$, on a $\hat{Z} \geqq 0$. Mais $\langle \hat{Z}^c, M^c \rangle = \hat{Z}_- \cdot \langle N^c, M^c \rangle = 0$ et $M^P_\mu(\Delta \hat{Z} | \tilde{\mathscr{P}}) = \hat{Z}_- M^P_\mu(\Delta N | \tilde{\mathscr{P}}) = 0$. Donc $\hat{Z}$, vérifiant les conditions de l'énoncé, égale 1. Comme $N = N_0 + \frac{1}{\hat{Z}_-} \cdot \hat{Z}$, on a $N = 0$.

Montrons ensuite que tout élément de $\mathscr{M}_{\text{loc}}(P)$ est quasi-continu à gauche. Si ce n'était pas le cas, il existerait un temps d'arrêt T prévisible et une variable $\mathscr{F}_T$-mesurable V, intégrable et non nulle, telle que $E(V | \mathscr{F}_{T-}) = 0$. Comme $\Delta X_T = 0$ P-ps sur $\{T < \infty\}$, il est clair que la martingale $N_t = V 1_{\{T \leqq t\}}$ appartient à $\mathscr{M}_0$, donc est nulle, ce qui entraine une contradiction.

Soit alors $N \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(P)$ vérifiant $|\Delta N| \leqq a$. Il existe $z' \in L^2_{\text{loc}}(\beta . P)$ tel que $\langle N^c, M^c \rangle = z' \cdot \beta$ et $W \in \mathscr{G}_{\text{loc}}(\mu, P)$ vérifiant $|W| \leqq a$ et $M^P_\mu(\Delta N | \tilde{\mathscr{P}}) = W$. Mais alors si

$$N' = N - E(N_0 | \mathscr{F}^0_0) - z' \cdot M^c - W * (\mu - \nu),$$

on a $\frac{1}{2a} N' \in \mathscr{M}_0$. Donc $N' = 0$ et N est de la forme (15).

Soit enfin $N \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(P)$ quelconque. Comme N est quasi-continu à gauche, on peut l'écrire $N = N' + \sum_{n \geqq 1} N(n)$, où $N' \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(P)$ vérifie $|\Delta N'| \leqq 1$ et où chaque $N(n)$ est une somme compensée de sauts vérifiant $|\Delta N(n)| \in [n, n+1[$. On a vu ci-dessus que N' se met sous la forme (15), et que $N(n)$ s'écrit $N(n) = W(n) * (\mu - \nu)$, où $W(n) \in \mathscr{G}_{\text{loc}}(\mu, P)$. De plus $|W(n)| * \nu_t \leqq \int_0^t |dN_s(n)|$, et le processus $\sum_{n \geqq 1} N(n)$ est dans $\mathscr{V}_{\text{loc}}(P)$; donc $W = \sum_{n \geqq 1} W(n) \in \mathscr{G}^1_{\text{loc}}(\mu, P)$ et $\sum_{n \geqq 1} N(n) = W * (\mu - \nu)$, d'où le résultat.

Remarque. Plus généralement, on pourrait montrer l'assertion suivante: Supposons que Y et z soient tels que $P(S < \infty) = 0$ et que $P(\hat{G}) = 1$; supposons que $q \in (\mathscr{F}^0_0)^+$ soit intégrable et vérifie $P(q = 0) = 0$. Si les équations (7) et (8) admettent une seule solution $\hat{Z} \in \mathscr{M}^+_{\text{loc}}(P)$ telle que $E(\hat{Z}_0 | \mathscr{F}^0_0) = q$, alors P vérifie la condition de représentation des martingales (et $\hat{Z} = qZ$).

6. Démonstration des théorèmes du paragraphe 4.2

Nous utilisons intégralement les hypothèses et les notations du paragraphe 4. Pour toute mesure aléatoire $\hat{v}$ et toute fonction W sur $\tilde{\Omega}$, on pose

$$B(W, \hat{v}) = [W^2 1_{\{|W| \leq 1\}} + |W| 1_{\{|W|>1\}}] * \hat{v}.$$

Nous commençons par un lemme. Si $N \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(P)$, posons

$$B_t(N) = \sum_{s \leq t} \Delta N_s^2 1_{\{|\Delta N_s| \leq 1\}},$$

$$C_t(N) = \sum_{s \leq t} |\Delta N_s| 1_{\{|\Delta N_s|>1\}}.$$

Ces deux processus sont dans $\mathscr{V}_{\text{loc}}^+(P)$, donc admettent des projections prévisibles duales $B'(N)$ et $C'(N)$.

(6.1) Lemme. *Soit $N \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(P)$. Soient $W = M_\mu^P(\Delta N | \tilde{\mathscr{P}})$ et z un processus prévisible tel que $\langle N^c, M^c \rangle = z \cdot \beta$. On a:*

$$z^2 \cdot \beta + B(W, v) \leq \langle N^c, N^c \rangle + 3B'(N) + 7C'(N).$$

Démonstration. Il est évident que $z^2 \cdot \beta \leq \langle N^c, N^c \rangle$, donc on peut se restreindre au cas où $N^c = 0$. On peut écrire $N = N' + N''$, où N' (resp. N'') est la somme compensée des sauts prévisibles (resp. totalement inaccessibles pour P) de N. Comme $M_\mu^P(\Delta N' | \tilde{\mathscr{P}}) = 0$ et comme $B(N) = B(N') + B(N'')$ et $C(N) = C(N') + C(N'')$, il suffit évidemment de montrer le résultat lorsque $N = N''$.

Supposons donc que $N \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(P)$ soit quasi-continue à gauche. Soit $D_t = \sum_{s \leq t} \Delta N_s 1_{\{|\Delta N_s|>1\}}$, qui admet une projection prévisible duale D'; posons $N'' = D - D'$, $N' = N - N''$, $W'' = M_\mu^P(\Delta N'' | \tilde{\mathscr{P}})$ et $W' = M_\mu^P(\Delta N' | \tilde{\mathscr{P}})$. Comme $|\Delta N''| * \mu \leq C(N'')$, on a $|W''| * v \leq C'(N'')$ (puisque, comme il est facile de le vérifier, $W'' * v$ est la projection prévisible duale de $\Delta N'' * \mu$); de même $\Delta N'^2 * \mu \leq B(N')$, donc $W'^2 * v \leq B'(N')$. De plus N' et N'' n'ont pas de sauts communs; il en découle que $C'(N'') = C'(N)$ et $B'(N') = B'(N)$, et que $|\Delta N'| \leq 1$, donc $|W'| \leq 1$.

Mais un calcul simple, utilisant $|W'| \leq 1$ et $W = W' + W''$, montre que $|W| \leq 3|W''| + 2W'^2$ si $|W| > 1$, et $W^2 \leq W'^2 + 4|W''|$ si $|W| \leq 1$. Par suite $B(W, v) \leq 3W'^2 * v + 7|W''| * v$, et le résultat en découle.

(6.2) *Soient $P \in (X, \mathscr{C}, Q)$ et $P' \in (X, \mathscr{C}', Q')$. Si $P' \ll P$ on a $Q' \ll Q$ et $P'(G) = 1$ (assertion* (4.1)(a)).

Démonstration. Le fait que $Q' \ll Q$ est trivial, et on note q une version de $\dfrac{dQ'}{dQ}$.

Soient $\hat{Z}$ une version de $E\left(\dfrac{dP'}{dP} \middle| \mathscr{F}_t\right)$, $R_n = \inf(t: Z_t \leq 1/n)$, $R = \lim_{(n)} \uparrow R_n$ et $\hat{N}(n) = \dfrac{1}{\hat{Z}_-} \cdot \hat{Z}^{R_n} \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(P)$. La famille $\hat{N} = (\hat{N}(n), R_n)$ appartient à $\mathscr{N}$ et vérifie $\Delta \hat{N}(n) \geq -1$. Définissons $Z(\hat{N})$ et $A(\hat{N})$ par (18) et (19). On a $\hat{Z}^{R_n} = qZ(\hat{N})^{R_n}$, et d'après la proposition (5.3), $\{A_{R-}(\hat{N}) = +\infty\} \subset \{Z_{R-}(\hat{N}) = 0\}$ P-ps. Or $P'(\hat{Z}_{R-} = 0) = E(\hat{Z}_\infty 1_{\{\hat{Z}_{R-}=0\}}) = 0$, donc $P'(A_{R-}(\hat{N}) = +\infty) = 0$. Comme d'après le lemme (6.1) on a $A \leq 7A(\hat{N})$, on en déduit que $P'(G^c) = 0$.

(6.3) Lemme. *Soit $\hat{\nu}$ une mesure aléatoire, et supposons que la fonction $\hat{Y}$ vérifie identiquement $0<\hat{Y}<\infty$. Alors $B\left(\frac{1}{\hat{Y}}-1, \hat{Y}\cdot\hat{\nu}\right) \leqq 2B(\hat{Y}-1, \hat{\nu})$ et $B(\hat{Y}-1, \hat{\nu}) \leqq 2B\left(\frac{1}{\hat{Y}}-1, \hat{Y}\cdot\hat{\nu}\right)$.*

Démonstration. Il suffit évidemment de montrer (par exemple) la première des deux relations ci-dessus. On a

$$\begin{aligned} B\left(\frac{1}{\hat{Y}}-1, \hat{Y}\cdot\hat{\nu}\right) &= (\hat{Y}-1)^2 \frac{1}{\hat{Y}} 1_{\{\hat{Y}\geqq 1/2\}} * \hat{\nu} + (1-\hat{Y}) 1_{\{\hat{Y}<1/2\}} * \hat{\nu} \\ &\leqq (\hat{Y}-1) 1_{\{\hat{Y}\geqq 2\}} * \hat{\nu} + 2(\hat{Y}-1)^2 1_{\{1/2\leqq \hat{Y}<2\}} * \hat{\nu} \\ &\quad + 2(\hat{Y}-1)^2 1_{\{\hat{Y}<1/2\}} * \hat{\nu} \\ &\leqq 2B(\hat{Y}-1, \hat{\nu}), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

(6.4) *Supposons que $P\in(X, \mathscr{C}, Q)$ et que $P'\in(X, \mathscr{C}', Q')$. Si $P \ll P'$ on a $Q \ll Q'$ et $P(G\cap\hat{G})=1$ (assertion* (4.1)(b)).

Cela achèvera de prouver le théorème (4.1), puisque dans ce théorème les assertions (a) et (b) entrainent immédiatement (c).

Démonstration. D'après le théorème (3.3), il existe $\hat{Y}\in\tilde{\mathscr{P}}^+$ et un processus prévisible $\hat{z}$ tels que si $\hat{\mathscr{C}}=(\hat{Y}\cdot\nu', \alpha'+\hat{z}\cdot\beta+[U(\hat{Y}-1)]*\nu', \beta)$, alors $P\in(X, \hat{\mathscr{C}}, Q)$.

On a alors $\hat{Y}\cdot\nu'=\hat{Y}Y\cdot\nu=\nu$ P-ps, donc $P(\hat{G})=1$, et aussi $P(\tilde{G})=1$ si $\tilde{G}=\{1_{\{Y=\infty\}} * \nu_\infty=0\}$. On en déduit également que pour $\hat{Y}$ on peut choisir $\hat{Y}=\frac{1}{Y} 1_{\{0<Y<\infty\}}+1_{\{Y=0\}\cup\{Y=\infty\}}$. Mais alors sur $\hat{G}\cap\tilde{G}$ on a $(\hat{Y}-1)\cdot\nu'=-(Y-1)\cdot\nu$; comme la seconde caractéristique locale (pour P) de X est définie à une P-indiscernabilité près, on voit qu'on peut choisir pour $\hat{z}$ le processus $\hat{z}=-z$.

Appliquons alors (6.2) en intervertissant les rôles de P et de P': on voit que $Q\ll Q'$ (ce qui est évident) et que $P(\hat{z}^2\cdot\beta_\infty+B_\infty(\hat{Y}-1, \nu')<\infty)=1$. Mais $\hat{z}^2\cdot\beta= z^2\cdot\beta$, et sur $\hat{G}\cap\tilde{G}$ on a $B_\infty(Y-1, \nu)\leqq 2B_\infty(\hat{Y}-1, \nu')$ d'après le lemme (6.3), donc on a bien $P(G)=1$.

Le théorème suivant est une formulation (un tout petit peu) plus générale que celle du théorème (4.2); cette formulation nous sera utile plus loin. Si $T_n=S_n$, on retrouve (4.2).

(6.5) Théorème. *Soient $P\in(X, \mathscr{C}, Q)$ et $P'\in(X, \mathscr{C}', Q')$. Supposons qu'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt croissant vers S, telle que $T_n\leqq S_n$, que $G=\bigcup_{(n)}\{T_n=\infty\}$, et que pour tout $n\geqq n_0$ il y ait T_n-unicité pour le problème $(X, \mathscr{C}', Q')$. Alors*

(a) *Si $Q'\ll Q$ et $P'(G)=1$, on a $P'\ll P$.*
(b) *Si $Q\ll Q'$ et $P(G\cap\hat{G})=1$, on a $P\ll P'$.*
(c) *Si $Q\sim Q'$ et $P'(G)=P(G\cap\hat{G})=1$, on a $P\sim P'$.*

Démonstration. (a) Soit q une version de dQ'/dQ. Comme $qZ^{S_n}\in\mathscr{M}(P)$ (proposition (5.6)) et $T_n\leqq S_n$, la formule $P^n=(qZ_{T_n})\cdot P$ définit une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$, qui d'après le théorème (3.8) est solution de $(X^{T_n}, \mathscr{C}'^{T_n}, Q')$. Par hypothèse les restrictions de P^n et de P' à $(\Omega, \mathscr{F}_{T_n-})$ coïncident dès que $n \geqq n_0$. Mais si $A \in \mathscr{F}$, on a $A \cap \{T_n = \infty\} \in \mathscr{F}_{T_n-}$. Comme $P'(\bigcup_{(n)} \{T_n = \infty\}) = 1$, on a

$$P'(A) = \lim_{(n)} P'(A \cap \{T_n = \infty\}) = \lim_{(n)} P^n(A \cap \{T_n = \infty\})$$
$$= \lim_{(n)} E(1_{A \cap \{T_n = \infty\}} q Z_{T_n}),$$

qui est nul si $P(A) = 0$. Donc $P' \ll P$.

(b) Commençons par une remarque triviale. Soient $\hat{\mathscr{C}}$ un triplet quelconque, $\hat{Q}$ et $\hat{Q}'$ deux lois initiales, et a et a' deux réels positifs de somme 1; si $\hat{P} \in (X, \hat{\mathscr{C}}, \hat{Q})$ et si $\hat{P}' \in (X, \hat{\mathscr{C}}, \hat{Q}')$, alors $a\hat{P} + a'\hat{P}' \in (X, \hat{\mathscr{C}}, a\hat{Q} + a'\hat{Q}')$.

Soit q une version de dQ/dQ'. Posons $a = P'(q > 0)$. Il est clair que si $a < 1$, la probabilité $\left(\frac{1}{1-a} 1_{\{q=0\}}\right) \cdot P'$ est solution de $\left(X, \mathscr{C}', \left(\frac{1}{1-a} 1_{\{q=0\}}\right) \cdot Q'\right)$, tandis que $\left(\frac{1}{a} 1_{\{q>0\}} \frac{Z_{T_n}}{q}\right) \cdot P$ est solution de $\left(X^{T_n}, \mathscr{C}'^{T_n}, \left(\frac{1}{a} 1_{\{q>0\}}\right) \cdot Q'\right)$ d'après le théorème (3.8) et la définition de q. La remarque ci-dessus montre alors que

$$P^n = \left(1_{\{q>0\}} \frac{Z_{T_n}}{q}\right) \cdot P + 1_{\{q=0\}} \cdot P'$$

est solution de $(X^{T_n}, \mathscr{C}'^{T_n}, Q')$. Par hypothèse les restrictions de P' et de P^n à $(\Omega, \mathscr{F}_{T_n-})$ coïncident donc dès que $n \geqq n_0$. D'après la définition de P^n, on voit alors que si $A \in \mathscr{F}$ vérifie $P'(A) = 0$, on a

$$E\left(1_{A \cap \{T_n = \infty\} \cap \{q>0\}} \frac{Z_{S_n}}{q}\right) = 0.$$

Comme $P(\hat{G}) = 1$, on a $M_\mu^P(\{Y = 0\}) = 0$, donc $\Delta N(n) > -1$ sauf sur un ensemble P-évanescent, et $Z_{T_n} > 0$ P-ps. L'égalité ci-dessus implique donc que $P(A \cap \{T_n = \infty\} \cap \{q > 0\}) = 0$. Comme $P(G) = 1$, on a aussi $P(A \cap \{q > 0\}) = 0$. Enfin

$$P(A \cap \{q = 0\}) = E[1_{\{q=0\}} E(1_A | \mathscr{F}_0^0)] = E'[q\, 1_{\{q=0\}} E(1_A | \mathscr{F}_0^0)] = 0.$$

Donc $P(A) = 0$, et on en déduit que $P \ll P'$.

(c) Cette dernière assertion découle immédiatement de (a) et (b).

Voici enfin un résultat, un peu plus général que le théorème (4.3).

(6.6) Théorème. *Soient $P \in (X, \mathscr{C}, Q)$ et $P' \in (X, \mathscr{C}', Q')$. Supposons qu'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt croissant vers S, telle que $T_n \leqq S_n$, que $G = \bigcup_{(n)} \{T_n = \infty\}$, et que pour tout $n \geqq n_0$ il y ait T_n-unicité pour $(X, \mathscr{C}, Q)$. Supposons enfin que $P'(\hat{G}) = 1$. Alors*

(a) *Si $Q' \ll Q$ et $P'(G) = 1$, on a $P' \ll P$.*
(b) *Si $Q \ll Q'$ et $P(G \cap \hat{G}) = 1$, on a $P \ll P'$.*
(c) *Si $Q \sim Q'$ et $P'(G) = P(G \cap \hat{G}) = 1$, on a $P \sim P'$.*

Démonstration. Soit $\tilde{G} = \{1_{\{Y=\infty\}} * \nu_\infty = 0\}$. Le fait que $Y \cdot \nu$ soit la projection prévisible duale de μ pour P' implique que $(1_{\{Y=\infty\}} Y) \cdot \nu = 0$ P'-ps, donc $P'(\tilde{G}) = 1$.

Soient $\bar{Y}=Y1_{\{0<Y<\infty\}}+1_{\{Y=0\}\cup\{Y=\infty\}}$, et le triplet $\bar{\mathscr{C}}=(\bar{\nu},\bar{\alpha},\bar{\beta})$ défini par $\bar{\nu}=\bar{Y}\cdot\nu$, $\bar{\alpha}=\alpha+z\cdot\beta+[U(\bar{Y}-1)]*\nu$ et $\bar{\beta}=\beta$. Comme $P'(\hat{G}\cap\tilde{G})=1$, on a $\bar{\nu}=\nu'$ et $\bar{\alpha}=\alpha'$ P'-ps; donc $P'\in(X,\bar{\mathscr{C}},Q')$. De plus on a $B(\bar{Y}-1,\nu)=B(Y-1,\nu)$ sur $\hat{G}\cap\tilde{G}$; si alors $\bar{G}=\{z^2\cdot\beta_\infty+B_\infty(\bar{Y}-1,\nu)<\infty\}$ est l'ensemble associé à $(\bar{Y},z)$ par (14), on a $P'(\bar{G})=1$ lorsque $P'(G)=1$ (puisque $P'(\hat{G}\cap\tilde{G})=1$), et $P(\bar{G})=1$ lorsque $P(G\cap\hat{G})=1$ (puisque $P(G)=1$ implique évidemment $P(\tilde{G})=1$). On peut donc remplacer Y par $\bar{Y}$ et $\mathscr{C}'$ par $\bar{\mathscr{C}}$ sans changer les conditions du problème. Autrement dit ce n'est pas une restriction que de supposer $0<Y<\infty$ partout, de que nous ferons.

Soient alors $Y'=1/Y$ et $z'=-z$. Par des formules analogues à (14) on pose $S'_n=\inf(t: z'^2\cdot\beta_t+B_t(Y'-1,\nu')\geqq n)$, $G'=\bigcup_{(n)}\{S'_n=\infty\}$ et $\hat{G}'=\{1_{\{Y'=0\}}*\nu'_\infty=0\}=\Omega$. Considérons également le triplet $\mathscr{C}''=(Y'\cdot\nu',\alpha'+z'\cdot\beta+[U(Y'-1)]*\nu',\beta)$. Comme $(Y'-1)\cdot\nu'=-(Y-1)\cdot\nu$, il est clair que $\mathscr{C}''=\mathscr{C}$. Enfin d'après le lemme (6.3) on a $G'=G$ et $S_n\leqq S'_{2n}$, donc $T_n\leqq S'_{2n}$. Il suffit alors d'appliquer le théorème (6.5) en intervertissant les rôles de $(P,\mathscr{C})=(P,\mathscr{C}'')$ et de $(P',\mathscr{C}')$, puisque ce théorème reste bien entendu valide si, dans son énoncé, on remplace la condition « $T_n\leqq S_n$» par « $T_n\leqq S_{2n}$».

7. Compléments sur la T-unicité

On part encore des hypothèses du paragraphe 4.2. Comme fréquemment l'ensemble $\bigcup_{(n)}\{S_n=S<\infty\}$ est vide, dans les applications, et comme dans ce cas chaque S_n est un temps d'arrêt prévisible, nous nous contenterons d'étudier la T-unicité pour les T prévisibles.

1. Commençons par des résultats généraux

(7.1) Proposition. *Soient $P\in(X,\mathscr{C},Q)$ et $P'\in(X,\mathscr{C}',Q')$. Soit T un temps d'arrêt prévisible tel que A_{T-} soit borné.*

(a) *Si $Q\ll Q'$ et si $P(1_{\{Y=0\}}*\nu_T=0)=1$, la T-unicité pour $(X,\mathscr{C}',Q')$ entraine la T-unicité pour $(X,\mathscr{C},Q)$.*

(b) *Si $Q'\ll Q$ et si $\{1_{\{Y=0\}}*\nu_T=0\}=\Omega$, la T-unicité pour $(X,\mathscr{C},Q)$ entraine la T-unicité pour $(X,\mathscr{C}',Q')$.*

Démonstration. (a) Soit q une version de dQ/dQ'. On montre exactement comme pour le théorème (6.5)(b) que

$$\hat{P}=\left(1_{\{q>0\}}\frac{Z_T}{q}\right)\cdot P+1_{\{q=0\}}\cdot P'$$

est solution de $(X^T,\mathscr{C}'^T,Q')$, puisque $Z^T\in\mathscr{M}(P)$ d'après la proposition (5.6). Mais T étant prévisible et X quasi-continu à gauche pour P, on a $\Delta X_T=0$ P-ps, donc $Z_T=Z_{T-}$ P-ps puisque par construction Z ne peut être discontinu qu'aux temps de saut de X. L'hypothèse entraine alors que les restrictions de P' et de $\left(1_{\{q>0\}}\frac{Z_{T-}}{q}\right)\cdot P$ à $(\Omega,\mathscr{F}_{T-})$ coïncident.

Soit d'autre part $\tilde{P} \in (X^T, \mathscr{C}^T, Q)$. Comme $M^T \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(P)$ et comme $1_{[0,T]} \cdot \nu$ est la projection prévisible duale de $1_{[0,T]} \cdot \mu$ pour $\tilde{P}$, les processus $N(n)^T$ définis par (16) sont également des éléments de $\mathscr{M}_{\text{loc}}(\tilde{P})$, et $Z^T \in \mathscr{M}(\tilde{P})$. Par suite, pour les mêmes raisons que ci-dessus, les restrictions de P' et de $\left(1_{\{q>0\}} \frac{Z_{T-}}{q}\right) \cdot \tilde{P}$ à $(\Omega, \mathscr{F}_{T-})$ coïncident.

Comme q et Z_{T-} sont $\mathscr{F}_{T-}$-mesurables, et comme ni P, ni $\tilde{P}$, ne chargent $\{q=0\}$, on en déduit que les restrictions de $1_{\{Z_{T-}>0\}} \cdot P$ et de $1_{\{Z_{T-}>0\}} \cdot \tilde{P}$ à $(\Omega, \mathscr{F}_{T-})$ coïncident. Or $P(1_{\{Y=0\}} * \nu_T = 0) = 1$ entraine que $P(Z_{T-}>0)=1$, donc $\tilde{P}(Z_{T-}>0)=1$; comme $\tilde{P}(\Omega)=1$ on a $\tilde{P}(Z_{T-}=0)=0$, et finalement les restrictions de P et de $\tilde{P}$ à $(\Omega, \mathscr{F}_{T-})$ coïncident, ce qui achève de prouver (a).

(b) Définissons $\bar{Y}$ et $\bar{\mathscr{C}}$ comme dans la démonstration du théorème (6.6). Comme $1_{\{Y=0\}} * \nu_T = 0$, il est facile de vérifier que toute solution de $(X^T, \mathscr{C}'^T, Q')$ est solution de $(X^T, \bar{\mathscr{C}}^T, Q')$. Autrement dit nous pouvons supposer, et nous supposerons, que $0 < Y < \infty$.

Soit encore $\mathscr{C}''$ le triplet défini dans le théorème (6.6). D'après (a), la T-unicité pour $(X, \mathscr{C}'', Q)$ entraine la T-unicité pour $(X, \mathscr{C}', Q')$. Or $\mathscr{C}'' = \mathscr{C}$, d'où le résultat.

Nous avons déjà souligné qu'il n'y a pas, en général, d'implication entre la T-unicité et l'unicité. Cependant on a:

(7.2) Proposition. *Soit $P \in (X, \mathscr{C}, Q)$. Supposons qu'il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt telle que $P(\bigcup_{(n)} \{T_n = \infty\}) = 1$ et qu'il y ait T_n-unicité pour le problème $(X, \mathscr{C}, Q)$ pour chaque n. Alors P est l'unique solution du problème $(X, \mathscr{C}, Q)$.*

Démonstration. Soit $P' \in (X, \mathscr{C}, Q)$. Par hypothèse, les restrictions de P et de P' à $(\{T_n = \infty\}, \mathscr{F} \cap \{T_n = \infty\})$ coïncident (rappelons que $\mathscr{F} = \bigvee_{(t)} \mathscr{F}_t$). Donc les restrictions de P et de P' à $(\bigcup_{(n)} \{T_n = \infty\}, \mathscr{F} \cap (\bigcup_{(n)} \{T_n = \infty\}))$ coïncident. Or $P(\bigcup_{(n)} \{T_n = \infty\}) = 1$, donc $P'(\bigcup_{(n)} \{T_n = \infty\}) = 1$ et on en déduit que $P' = P$.

2. Nous allons montrer maintenant que, pour une classe raisonnablement vaste de processus, l'unicité entraine la T-unicité pour tout temps d'arrêt prévisible $T > 0$.

On se place dans le cadre des *hypothèses canoniques:* $\Omega = D([0, \infty[)$, X est le processus canonique sur Ω, $\mathscr{F}_t^0 = \sigma(X_s \colon s \leqq t)$, $\mathscr{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s^0$, et $(\theta_t)_{t \geqq 0}$ désigne le semi-groupe des translations sur Ω, défini par $X_{t+s} = X_t \circ \theta_s$. On note Q_x la probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F}_0^0)$ chargeant d'une masse 1 l'atome $\{X_0 = x\}$.

Etant donnée une mesure aléatoire ρ, on définit une nouvelle mesure aléatoire $\tau_t \rho$ par la formule

$$\tau_t \rho(\omega; A) = \int \rho(\omega; ds, dx) 1_A(s-t, x) 1_{\{t<s\}},$$

où $A \in \mathscr{B}(]0, \infty[) \otimes \mathscr{E}$.

Condition (C). On dit que *le triplet $\mathscr{C} = (\nu, \alpha, \beta)$ vérifie la condition (C)* s'il existe une famille $[p_t \mathscr{C} = (p_t \nu, p_t \alpha, p_t \beta)]_{t \geqq 0}$ de triplets vérifiant:

(i) Si $A \in \mathscr{B}(]0, \infty[) \otimes \mathscr{E}$ (resp. $s \geqq 0$), $p_t \nu(\omega; A)$ (resp. $p_t \alpha_s(\omega)$ et $p_t \beta_s(\omega)$) est $\mathscr{B}([0, \infty[) \otimes \mathscr{F}$-mesurable en (t, ω).

(ii) On a identiquement

$$p_t\nu(\theta_t(\omega);.)=\tau_t\nu(\omega;.)$$
$$p_t\alpha_s(\theta_t(\omega))=\alpha_{t+s}(\omega)-\alpha_t(\omega) \quad \text{(avec la convention } \infty-\infty=+\infty) \tag{21}$$
$$p_t\beta_s(\theta_t(\omega))=\beta_{t+s}(\omega)-\beta_t(\omega).$$

(iii) Il existe une probabilité de transition $P^{x,t}(d\omega)$ de

$(\mathbb{R}\times[0,\infty[,\mathscr{B}(\mathbb{R}\times[0,\infty[))$

dans $(\Omega,\mathscr{F})$ telle que $P^{x,t}\in(X,p_t\mathscr{C},Q_x)$ pour chaque (x,t).

Exemples. Reprenons les deux premiers exemples du paragraphe 4.1: *tout triplet donné par les formules* (12) *ou* (13) *vérifie la condition* (C). Dans le second cas (formules (13)) on peut choisir $p_t\mathscr{C}=\mathscr{C}$, et prendre pour $P^{x,t}$ l'unique solution du problème $(X,\mathscr{C},Q_x)$, la mesurabilité en x étant bien connue. Dans le premier cas (formules (12)), on peut poser

$$p_t\nu(\omega;ds,dx)=ds\,F_{t+s}(dx),$$
$$p_t\alpha_s=\int_t^{t+s}a_u\,du,$$
$$p_t\beta_s=\int_t^{t+s}b_u^2\,du.$$

$p_t\mathscr{C}$ est donné par des formules analogues à (12), et le problème $(X,p_t\mathscr{C},Q_x)$ admet donc une solution et une seule $P^{x,t}$; nous laissons au lecteur le soin de prouver que $P^{x,t}(B)$ est mesurable en (x,t) pour tout $B\in\mathscr{F}$.

Remarques. 1. La formulation un peu compliquée de la condition (C) permet de rendre compte à la fois des processus à accroissements indépendants non stationnaires, et des processus de diffusions. En fait cette formulation est adaptée à tous les cas où la solution est un processus de Markov (éventuellement non homogène).

2. Dans les exemples ci-dessus, la transition $P^{x,t}(d\omega)$ est unique; mais cette unicité n'est pas imposée par la condition (C).

(7.3) Théorème. *Supposons que le triplet* $\mathscr{C}$ *vérifie la condition* (C), *et que* P *soit l'unique solution du problème* $(X,\mathscr{C},Q)$. *Pour tout temps d'arrêt* $T>0$ *relatif à la famille* $(\mathscr{F}_t^0)$, *il y a* T*-unicité pour le problème* $(X,\mathscr{C},Q)$.

Remarque. On démontrera en fait le résultat suivant, un peu plus fort que la T-unicité: si $P'\in(X^T,\mathscr{C}^T,Q)$, alors les restrictions de P et de P' à $(\Omega,\mathscr{F}_T^0)$ coïncident. Au prix de quelques complications, on pourrait supprimer l'hypothèse «$T>0$». Par ailleurs, remarquons que tout temps d'arrêt prévisible T pour la famille $(\mathscr{F}_t)$, tel que $\{T=0\}\in\mathscr{F}_0^0$, est un temps d'arrêt pour la famille $(\mathscr{F}_t^0)$.

Commençons par deux lemmes, qui sont des conséquences faciles de résultats dûs à Courrège et Priouret [2]. T désigne un $(\mathscr{F}_t^0)$-temps d'arrêt.

(7.4) Lemme. *On a* $\mathscr{F}_T^0\cap\theta_T^{-1}(\mathscr{F})=\sigma(X_T)$.

Démonstration. Il est clair que X_T est mesurable par rapport à $\mathscr{F}_T^0$ et à $\theta_T^{-1}(\mathscr{F})$. Inversement soit $A\in\mathscr{F}_T^0\cap\theta_T^{-1}(\mathscr{F})$: il existe $B\in\mathscr{F}$ tel que $A=\theta_T^{-1}(B)$. Soient alors

ω et ω' vérifiant $X_0(\omega)=X_0(\omega')$; comme Ω est l'espace canonique, il existe $\hat{\omega}$ et $\hat{\omega}'$ tels que $T(\hat{\omega})=T(\hat{\omega}')$, que $X_s(\hat{\omega})=X_s(\hat{\omega}')$ pour tout $s \leqq T(\hat{\omega})$, et que $\theta_T(\hat{\omega})=\omega$ et $\theta_T(\hat{\omega}')=\omega'$. D'après [2], l'hypothèse $A \in \mathscr{F}_T^0$ implique alors que $1_A(\hat{\omega})=1_A(\hat{\omega}')$, donc $1_B(\omega)=1_B(\omega')$. Toujours d'après [2] il en découle que $B \in \mathscr{F}_0^0=\sigma(X_0)$, d'où le résultat.

(7.5) Lemme. *Soit W une fonction $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable sur $\tilde{\Omega}$. Il existe alors une fonction $\mathscr{F}_T^0 \otimes \tilde{\mathscr{B}}$-mesurable $\overline{W}$ sur $\Omega \times \tilde{\Omega}$, telle que $\overline{W}(\omega, .)$ soit $\tilde{\mathscr{P}}$-mesurable pour tout ω et que $W(\omega, T(\omega)+t, x)=\overline{W}(\omega, \theta_T(\omega), t, x)$ pour tout $t>0$.*

Démonstration. D'après un argument de classe monotone, il auffit de prouver le résultat lorsque W est de la forme $W=1_{[0,S] \times A}$, où S est un temps d'arrêt (pour la famille $(\mathscr{F}_t)$), et où $A \in \mathscr{E}$. Mais d'après [2] il existe une fonction $\mathscr{F}_T^0 \otimes \mathscr{F}$-mesurable $\bar{S}$ sur $\Omega \times \Omega$, telle que

(i) pour tout ω, $\bar{S}(\omega, .)$ est un temps d'arrêt,

(ii) on a identiquement $S(\omega) \vee T(\omega)=T(\omega)+\bar{S}(\omega, \theta_T(\omega))$. (22)

Une vérification élémentaire prouve alors que

$$\overline{W}(\omega, \omega', s, x)=1_{\{s \leqq \bar{S}(\omega, \omega')\}} 1_A(x)$$

répond à la question.

Supposons alors que $\mathscr{C}$ vérifie la condition (C), et soit $P' \in (X^T, \mathscr{C}^T, Q)$. Comme $P^{x, T(\omega)}(X_0=x)=1$ et comme $\mathscr{F}=\mathscr{F}_T^0 \vee \theta_T^{-1}(\mathscr{F})$ d'après [2], le lemme (7.4) implique que la formule

$$\tilde{P}(A \cap \theta_T^{-1}(B))=E'[1_A P^{X_T, T}(B)], \tag{23}$$

où $A \in \mathscr{F}_T^0$ et $B \in \mathscr{F}$, définit sans ambiguité une probabilité $\tilde{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$. De plus les restrictions de $\tilde{P}$ et de P' à $(\Omega, \mathscr{F}_T^0)$ coïncident. Comme $\mathscr{F}_{T-} \subset \mathscr{F}_T^0$, le théorème sera prouvé si on parvient à montrer que $\tilde{P} \in (X, \mathscr{C}, Q)$, puisqu'alors on aura $\tilde{P}=P$.

(7.6) Lemme. *Soit $N' \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P')$. Soit $(p_t N)_{t \geqq 0}$ une famille de processus continus à droite et limités à gauche, dont les sauts sont bornés par un nombre a fini. Supposons que pour tout $s \geqq 0$, $p_t N_s(\omega)$ soit $\mathscr{B}([0, \infty[) \otimes \mathscr{F}$-mesurable en (t, ω), et que pour tout (x, t), $p_t N \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P^{x,t})$. La formule*

$$\tilde{N}_t(\omega)=\begin{cases} N_t'(\omega) & \text{si } t \leqq T(\omega) \\ N_T'(\omega)+[p_{T(\omega)} N_{t-T(\omega)}-p_{T(\omega)} N_0] \circ \theta_T(\omega) & \text{si } t \geqq T(\omega) \end{cases} \tag{24}$$

définit alors un élément de $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\tilde{P})$.

Démonstration. Soit (R_n') une suite localisante pour N'. Posons

$$R(n, t)=\inf(s: |p_t N_s| \geqq n)$$

et

$$\tilde{R}_n(\omega)=\begin{cases} R_n'(\omega) & \text{si } R_n'(\omega)<T(\omega), \\ T(\omega)+R(n, T(\omega)) \circ \theta_T(\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $P'(\lim_{(n)} R_n'=\infty)=1$ et comme $P^{x,t}(\lim_{(n)} R(n, t)=\infty)=1$, il est clair que $P(\lim_{(n)} R_n=\infty)=1$. D'autre part $|\tilde{N}_t^{\tilde{R}_n}| \leqq |N_{t \wedge T \wedge R_n}'|+a+n$, donc les variables

$(\tilde{N}_t^{\tilde{R}_n})_{t \geqq 0}$ sont uniformément intégrables pour $\tilde{P}$. Il nous reste alors à prouver que pour tout n et tout temps d'arrêt S, on a $\tilde{E}(\tilde{N}_S^{\tilde{R}_n} - \tilde{N}_0) = 0$.

Soit alors la fonction $\bar{S}$ associée à S par (22). Soit $A \in \mathscr{F}_T^0$. D'après (24) et le fait que $p_t N^{R(n,t)} \in \mathscr{M}(P^{x,t})$, on a

$$\begin{aligned}\tilde{E}[1_A(\tilde{N}_{S \vee T}^{T+R(n,T)\circ\theta_T} - \tilde{N}_T)] &= \tilde{E}[1_A(p_T N_{\bar{S}(\cdot,\theta_T(\cdot))}^{R(n,T)\circ\theta_T} - p_T N_0)\circ\theta_T] \\ &= \int P'(d\omega)\, 1_A(\omega) E^{X_{T(\omega)}, T(\omega)}(p_{T(\omega)} N_{\bar{S}(\omega,\cdot)}^{R(n,T(\omega))} - p_{T(\omega)} N_0) = 0.\end{aligned}$$

Comme $\{\tilde{R}_n \geqq T\} \in \mathscr{F}_T^0$, il vient alors, puisque $N'^{R'_n} \in \mathscr{M}(P')$:

$$\tilde{E}(\tilde{N}_S^{\tilde{R}_n} - \tilde{N}_0) = E'(N'^{R'_n}_{S \wedge T} - N'_0) + \tilde{E}[1_{\{T \leqq \tilde{R}_n\}}(\tilde{N}_{S \vee T}^{T+R(n,T)\circ\theta_T} - \tilde{N}_T)] = 0.$$

Démonstration de (7.3). Soit $W \in \tilde{\mathscr{P}}^+$ tel que $W = 0$ sur $[0, T] \times E$. Soit $\overline{W}$ la fonction associée à W par le lemme (7.5). En utilisant (23), le fait que $P^{x,t} \in (X, p_t\mathscr{C}, Q_x)$, et enfin (21), on voit que

$$\begin{aligned}M_\mu^{\tilde{P}}(W) &= \hat{E}[\sum_{(s)} 1_{\{\Delta X_s \circ \theta_T \neq 0\}} W(.\,, T+s, \Delta X_s \circ \theta_T)] \\ &= \hat{E}[\sum_{(s)} 1_{\{\Delta X_s \circ \theta_T \neq 0\}} \overline{W}(.\,, \theta_T(.), s, \Delta X_s \circ \theta_T)] \\ &= \int P'(d\omega) E^{X_{T(\omega)}, T(\omega)} [\sum_{(s)} 1_{\{\Delta X_s \neq 0\}} \overline{W}(\omega, ., s, \Delta X_s)] \\ &= \int P'(d\omega) E^{X_{T(\omega)}, T(\omega)} [\int p_{T(\omega)} \nu(.; ds, dx) \overline{W}(\omega, ., s, x)] \\ &= \hat{E}[\int p_T \nu(\theta_T(.); ds, dx) W(., T+s, x)] = M_\nu^{\tilde{P}}(W).\end{aligned}$$

D'autre part si $W \in \tilde{\mathscr{P}}^+$ est nul sur $]T, \infty[\, \times E$, il est clair que

$$M_\mu^{\tilde{P}}(W) = M_\mu^{P'}(W 1_{[0,T]}) = M_\nu^{P'}(W 1_{[0,T]}) = M_\nu^{\tilde{P}}(W).$$

Par suite $M_\mu^{\tilde{P}}(W) = \mathrm{M}_\nu^{\tilde{P}}(W)$ pour tout $W \in \tilde{\mathscr{P}}^+$, donc ν est la projection prévisible duale de μ pour $\tilde{P}$.

Soit $M = X^0 - \alpha$. Posons $p_t M = X^0 - p_t \alpha$; un calcul simple basé sur (21) montre que $(p_t M_s - p_t M_0) \circ \theta_t = M_{t+s} - M_t$. On par hypothèse $M^T \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P')$, $p_t M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(P^{x,t})$, et la famille $(p_t M)$ vérifie les conditions du lemme (7.6). Comme on peut définir M à partir de M^T et de $(p_t M)$ par la formule (24), on en déduit que $M \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\tilde{P})$. Cela implique d'une part que X est une semi-martingale pour $\tilde{P}$, et d'autre part que α est la seconde $\tilde{P}$-caractéristique locale de X.

On a $\Delta M = \Delta X 1_{\{|\Delta X| \leqq 1\}}$. Donc si $U(\omega, t, x) = x 1_{\{|x| \leqq 1\}}$, on a $\Delta M \cdot \mu = U \cdot \mu$, ce qui implique $M_\mu^P(\Delta M | \tilde{\mathscr{P}}) = U$. D'après le théorème (1.5) on a donc $U \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, P)$, et exactement pour les mêmes raisons on a $U \in \mathscr{G}_{\mathrm{loc}}(\mu, \tilde{P})$. On peut donc trouver un processus qui soit une version de l'intégrale stochastique $U * (\mu - \nu)$ pour P et pour $\tilde{P}$. Par suite $M^c = M - M_0 - U * (\mu - \nu)$ est la «partie continue» de la martingale locale M pour P et pour $\tilde{P}$. Comme P et P' coïncident sur $(\Omega, \mathscr{F}_T^0)$, $(M^c)^T$ est la partie continue de M^T pour P'. Enfin une démonstration analogue prouverait que $p_t M^c = p_t M - p_t M_0 - U * (\mu - p_t \nu)$ est la partie continue de $p_t M$ pour $P^{x,t}$.

Posons $N' = [(M^c)^2 - \beta]^T$ et $p_t N = (p_t M^c)^2 - p_t \beta$. Par hypothèse, N' et $(p_t N)$ vérifient les conditions du lemme (7.6), donc $\tilde{N}$ défini par (24) est dans $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\tilde{P})$.

Or on vérifie aisément que $p_t M_s^c \circ \theta_t = M_{t+s}^c - M_t^c$, donc

$$\tilde{N}_t = \begin{cases} (M_t^c)^2 - \beta_t & \text{si } t \leqq T \\ (M_t^c)^2 - \beta_t + 2(M_T^c)^2 - 2M_T^c M_t^c & \text{si } t \geqq T. \end{cases}$$

Mais le processus $\hat{M}_t = 1_{\{T \leqq t\}} M_T^c (M_t^c - M_T^c)$ est une martingale locale pour $\tilde{P}$, donc $(M^c)^2 - \beta = \tilde{N} - 2\hat{M} \in \mathscr{M}_{\text{loc}}(\tilde{P})$. Par suite β est la troisième $\tilde{P}$-caractéristique locale de X, et $\tilde{P} \in (X, \mathscr{C}, Q)$. D'après la remarque précédant le lemme (7.6), la démonstration est achevée.

On pourrait ensuite combiner le théorème (7.3) et la proposition (7.1), de façon à montrer que l'unicité entraine la T-unicité pour tout $(\mathscr{F}_t^0)$-temps d'arrêt T, pour une classe bien plus vaste de processus que ceux qui vérifient la condition (C): c'est le cas par exemple des processus «de type markovien» définis par Grigelionis [8]. Nous laissons au lecteur le soin de formaliser de telles généralisations.

Par contre nous allons énoncer à nouveau les théorèmes (4.2) et (4.3) lorsque la condition (C) est remplie:

(7.7) Théorème. *Supposons que $\mathscr{C}'$ vérifie la condition (C) et que P' soit l'unique solution de $(X, \mathscr{C}', Q')$. Supposons que $P \in (X, \mathscr{C}, Q)$ et que $\bigcup_{(n)} \{S_n = S < \infty\} = \emptyset$.*

(a) *Si $Q' \ll Q$ et $P'(G) = 1$, on a $P' \ll P$.*
(b) *Si $Q \ll Q'$ et $P(G \cap \hat{G}) = 1$, on a $P \ll P'$.*
(c) *Si $Q \sim Q'$ et $P'(G) = P(G \cap \hat{G}) = 1$, on a $P \sim P'$.*

(7.8) Théorème. *Supposons que $\mathscr{C}$ vérifie la condition (C) et que P soit l'unique solution de $(X, \mathscr{C}, Q)$, Supposons que $P' \in (X, \mathscr{C}', Q')$ et que $\bigcup_{(n)} \{S_n = S < \infty\} = \emptyset$.*

(a) *Si $Q' \ll Q$ et $P'(G \cap \hat{G}) = 1$, on a $P' \ll P$.*
(b) *Si $Q \ll Q'$ et $P'(\hat{G}) = P(G \cap \hat{G}) = 1$, on a $P \ll P'$.*
(c) *Si $Q \sim Q'$ et $P'(G \cap \hat{G}) = P(G \cap \hat{G}) = 1$, on a $P \sim P'$.*

8. Dérivée de Radon-Nikodym et représentation des martingales

Nous allons maintenant démontrer les résultats du paragraphe 4.3, et donner quelques compléments.

(8.1) Théorème. *Si le problème $(X, \mathscr{C}, Q)$ admet une solution et une seule P, celle-ci vérifie la condition de représentation des martingales.*

Démonstration. D'après la proposition (5.8), il suffit de montrer que l'unique élément $Z \in \mathscr{M}_{\text{loc}}^+(P)$ vérifiant $E(Z_0 | \mathscr{F}_0^0) = 1$, $M_\mu^P(\Delta Z | \tilde{\mathscr{P}}) = 0$ et $\langle Z^c, M^c \rangle = 0$, est $Z = 1$.

Soient alors $Z' \in \mathscr{M}_{\text{loc}}^+(P)$ un élément vérifiant les conditions ci-dessus, et (T_n) une suite localisante pour Z'. Il est clair que Z'^{T_n} vérifie encore les conditions ci-dessus, donc d'après le théorème (3.3), la probabilité $Z'_{T_n} \cdot P$ est solution du problème $(X, \mathscr{C}, Q)$. Par suite $Z'_{T_n} \cdot P = P$ pour tout n, et on en déduit que $Z' = 1$.

(8.2) *Démonstration du théorème* (4.5). L'assertion (a) est un corollaire de la proposition (5.6) et du théorème (3.3). Lorsque la condition (i) est vérifiée, l'assertion (b) découle simplement du théorème (3.3)(d) et de la proposition (5.7).

Lorsque la condition (ii) est réalisée, on a vu dans la démonstration du théorème (6.5)(a) que

$$P'(A) = \lim_{(n)} E(1_{A \cap \{S_n = \infty\}} q Z_{S_n});$$

comme qZ est une surmartingale, on en déduit d'abord que

$$1 = P'(\Omega) = \lim_{(n)} E(1_{\{S_n = \infty\}} q Z_\infty) \leqq E(qZ_\infty) \leqq 1.$$

Donc $E(qZ_\infty) = 1$ et $qZ \in \mathscr{M}(P)$. Il en découle également que $E(qZ_\infty 1_{\bigcap_{(n)} \{S_n < \infty\}}) = 0$, donc $qZ_S = 0$ P-ps sur $\bigcup_{(n)} \{S_n = S < \infty\}$, et $P'(A) = E(qZ_\infty 1_A)$, ce qui achève de prouver l'assertion (b).

(8.3) Théorème. *Supposons que $P \in (X, \mathscr{C}, Q)$ vérifie la condition de représentation des martingales. Alors toute probabilité $P' \ll P$ vérifie également cette condition.*

Démonstration. Il existe un triplet $\mathscr{C}'$ donné par les formules (14) et une loi initiale Q' tels que $P' \in (X, \mathscr{C}', Q')$. Dans la démonstration du théorème (8.1) on a prouvé (il suffit d'y remplacer P par P') que, si P' ne satisfait pas la condition de représentation des martingales, il existe une autre probabilité $P'' \ll P'$, solution de $(X, \mathscr{C}', Q')$. Mais si $q = dQ'/dQ$, le théorème (4.5)(b) (condition (i)) entraine que les martingales $E\left(\frac{dP'}{dP}\middle|\mathscr{F}_t\right)$ et $E\left(\frac{dP''}{dP}\middle|\mathscr{F}_t\right)$ sont toutes deux égales à qZ. Par suite $P' = P''$, ce qui engendre une contradiction.

Remarque. La condition $P' \ll P$ est relativement forte, puisque si les P'-caractéristiques locales de X sont données par (9), elle implique $P'(G) = 1$. Cependant le théorème (8.3) (ainsi d'ailleurs que le théorème (3.3)) reste évidemment valide si on remplace $P' \ll P$ par: pour tout t fini, la restriction de P' à $(\Omega, \mathscr{F}_t)$ est absolument continue par rapport à la restriction de P à $(\Omega, \mathscr{F}_t)$; cette condition implique seulement $P'(A_t < \infty) = 1$ pour tout t fini.

Les théorèmes (8.1) et (8.3) ont les conséquences importantes, et plus ou moins classiques, suivantes: soit $(\Omega, (\mathscr{F}_t), \mathscr{F}, (X_t), P)$ une semi-martingale quelconque, la famille $(\mathscr{F}_t)$ étant la plus petite famille continue à droite rendant X adapté. Supposons que pour tout t fini, *la loi de $(X_s)_{0 \leqq s \leqq t}$ soit absolument continue par rapport à la loi d'un processus à accroissements indépendants* ($\mathscr{C}$ donné par (12)), *ou d'un processus de diffusion* ($\mathscr{C}$ donné par (13)) *sur* $[0, t]$; *alors la condition de représentation des martingales est satisfaite.*

Références

1. Brémaud, P.: A martingale approach to point processes. Ph.D. thesis, El. Res. Lab. Berkeley; M-345 (1972)
2. Courrège, P., Priouret, P.: Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire, relations d'équivalence associées et propriétés de décomposition. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **14**, 245–274 (1965)
3. Dellacherie, C.: Capacités et processus stochastiques. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
4. Doléans-Dade, C.: Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semi-martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **16**, 181–194 (1970)

5. Doléans-Dade, C., Meyer, P. A.: Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Sém. Probab. Strasbourg IV. Lecture Notes in Math. **124**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
6. Ershov, M. P.: On the absolute continuity of measures corresponding to diffusion processes. Theor. Probability Appl. **17**, 173–178 (1972)
7. Grigelionis, B.: On the absolute continuity of measures corresponding to stochastic processes. Litovsk. Mat. Sb. **11**, 783–794 (1971)
8. Grigelionis, B.: On the structure of densities of measures, corresponding to stochastic processes. Litovsk. Mat. Sb. **13**, 71–78 (1973)
9. Grigelionis, B.: On non-linear filtering theory and absolute continuity of measures, corresponding to stochastic processes, second Japan-USSR symp. Lecture Notes in Math. **330**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
10. Jacod, J.: Multivariate point processes: predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **31**, 235–253 (1975)
11. Jacod, J.: Un théorème de représentation pour les martingales discontinues. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **34**, 225–244 (1976)
12. Kailath, T.: The structure of Radon-Nikodym derivatives with respect to Wiener and related measures. Ann. Math. Statist. **42**, 1054–1067 (1971)
13. Kailath, T., Zakai, M.: Absolute continuity and Radon-Nikodym derivatives for certain measures relative to Wiener measure. Ann. Math. Statist. **42**, 130–140 (1971)
14. Kailath, T., Segall, A.: Radon-Nikodym derivatives with respect to measures induced by discontinuous independent increments processes. (À paraître)
15. Kunita, H.: Cours de 3ème cycle. Univ. Paris VI (1974)
16. Liptzer, R., Shyriaev, A.: Sur l'absolue continuité des mesures, correspondant aux processus de type diffusion, par rapport à la mesure brownienne. Izv. Akad. Nauk, SSSR Ser. Mat. **36**, 847–889 (1972)
17. Liptzer, R., Shyriaev, A.: Statistique des processus stochastiques (filtrage non linéaire et questions liées). [En russe.] Moscou: Nauka 1974
18. Mémin, J.: Sur quelques problèmes fondamentaux de la théorie du filtrage. Thèse 3ème cycle, Univ. Rennes (1974)
19. Meyer, P. A.: Probabilités et potentiel. Paris: Hermann 1966
20. Meyer, P. A.: Intégrales stochastiques. Sém. Probab. Strasbourg, Lecture Notes in Math. **39**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967
21. Neveu, J.: Bases mathématiques du calcul des probabilités. Paris: Masson 1964
22. Orey, S.: Conditions for the absolute continuity of two diffusions. Trans. Amer. Math. Soc. **193**, 413–426 (1974)
23. Orey, S.: Radon-Nikodym derivatives of probability measures: martingales methods. Dpt. Found. Math. Sc. Tokyo Univ. of Education (1974)
24. Skorokhod, A. V.: Studies in random processes. Reading: Addison-Wesley 1965
25. Stroock, D., Varadhan, W. S.: Diffusion processes with continuous coefficients I, II. Comm. Pure Appl. Math. **22**, 345–400 et 479–530 (1969)
26. van Schuppen, J. H., Wong, E.: Transformations of local martingales under a change of law. Ann. Probab. **2**, 879–888 (1974)

Reçu le 1 juillet, 1975