

## Die konvexe Hülle von $n$ rotationssymmetrisch verteilten Punkten\*

H. CARNAL

*Summary.* The number of edges  $A_n$ , the length  $l_n$  and the surface  $F_n$  of the convex hull of  $n$  independent, identically distributed random points in the plane are considered under the assumption of rotational symmetry. The asymptotic behaviour of the expectations  $E(A_n)$ ,  $E(l_n)$  and  $E(F_n)$  is studied according to the behaviour of the function  $Pr(\overline{OP} > x)$  as  $x \rightarrow 1$  (distributions on the unit disc) or  $x \rightarrow \infty$  (distributions on the whole plane).

In [4] studierten Rényi und Sulanke die konvexe Hülle von  $n$  zufällig in der Ebene gewählten Punkten, entweder mit gleichmäßiger oder mit normaler Verteilung. Diese Untersuchungen wurden unter anderem in [1] und [3] fortgesetzt. In der vorliegenden Arbeit nehmen wir nun an, daß die gemeinsame Verteilung der  $n$  unabhängigen Punkte  $P_i$  rotationssymmetrisch ist und untersuchen das asymptotische Verhalten der Erwartungswerte  $E(A_n)$ ,  $E(F_n)$  und  $E(l_n)$ , wobei  $A_n$ ,  $F_n$  und  $l_n$  die Anzahl der Eckpunkte, bzw. die Fläche und den Umfang der konvexen Hülle  $H_n$  von  $P_1, \dots, P_n$  bedeuten sollen. Dieses Verhalten hängt natürlich von der Beschaffenheit der Wahrscheinlichkeitsverteilung am Rande des Trägers ab (des Einheitskreises etwa oder der ganzen Ebene). Bei Verteilungen im Einheitskreis (§ 3) wachsen die Erwartungswerte um so schneller mit  $n$ , desto stärker die Konzentration am Rande ist; dagegen ist es bei Verteilungen in der unbeschränkten Ebene (§ 2) etwas unerwartet möglich, daß  $E(A_n)$  gegen eine feste Konstante (sogar gegen 4) konvergiert (vgl. 2.5).

### § 1. Allgemeine Formeln

Die Verteilung von  $P_i(\xi_i, \eta_i)$  sei charakterisiert durch

$$F(x) = W(\overline{OP}_i = \sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2} \geq x), \quad x \geq 0$$

( $W$  für Wahrscheinlichkeit). Wir bezeichnen mit  $d_{ij}$  den Abstand vom Nullpunkt zur Geraden  $g_{ij}$  durch  $P_i$  und  $P_j$  und mit  $F_{ij}$  die Fläche des Dreiecks  $OP_iP_j$ . Es sei dann:

$$G(x) = W(\xi_i \geq x) \quad (\text{die Marginalfunktion}), \quad (1.1)$$

$$H(x) = W(d_{ij} \geq x), \quad (1.2)$$

$$K(x) = \int_{d_{ij} \geq x} F_{ij} dW \quad (\text{falls das Integral existiert}). \quad (1.3)$$

\* Herrn Prof. H. Hadwiger zu seinem 60. Geburtstag gewidmet.

Wie es in [4] gemacht wurde, ist es auch hier möglich, nur das Paar  $P_1, P_2$  zu betrachten, da die  $\binom{n}{2}$  Paare eine symmetrische Rolle spielen. Das Paar gehört zu  $H_n$  mit der Wahrscheinlichkeit

$$G^{n-2}(d_{12}) + (1 - G(d_{12}))^{n-2}. \tag{1.4}$$

Wegen  $G \leq \frac{1}{2}$  vernachlässigen wir  $G^{n-2}$  und erhalten:

$$E(A_n) = \binom{n}{2} \int_0^\infty (1 - G(x))^{n-2} |dH(x)| + O(n^2 2^{-n}), \tag{1.5}$$

$$E(F_n) = \binom{n}{2} \int_0^\infty (1 - G(x))^{n-2} |dK(x)| + O(n^2 2^{-n}), \tag{1.6}$$

$$E(l_n) = \binom{n}{2} \int_0^\infty (1 - G(x))^{n-2} \cdot \frac{2}{x} |dK(x)| + O(n^2 2^{-n}), \tag{1.7}$$

letzteres wegen  $P_1 P_2 = 2F_{12}/d_{12}$ .

Wir versuchen jetzt, die Funktionen  $G, H$  und  $K$  durch  $F$  auszudrücken. Es ist zuerst:

$$G(x) = \frac{1}{\pi} \int_x^\infty \arccos \frac{x}{y} |dF(y)| \quad (x \geq 0). \tag{1.8}$$

Um  $H$  zu berechnen, nehmen wir zuerst  $\overline{OP_1} = y > \overline{OP_2} = z$  (Fig. 1). Damit  $d_{12} \geq x$  werde, muß  $P_2$  außerhalb der Tangenten an  $K$  durch  $P_1$  liegen. Der Anteil der

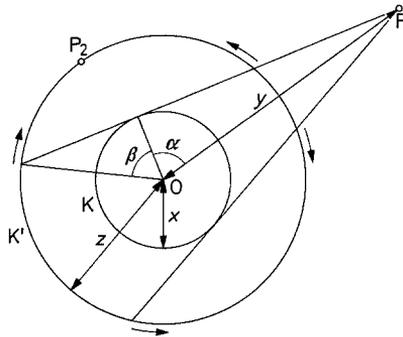


Fig. 1. Ist  $\overline{OP_1} = y, \overline{OP_2} = z$  und  $d_{12} > x$ , so steht  $P_2$  auf einem der zwei zwischen den Pfeilen liegenden Bogen

ausgeschnittenen Teile an der Gesamtlänge von  $K'$  ist  $4\beta/2\pi$ , mit  $\beta = \arccos(x/z)$ . Da der Beitrag im Falle  $y < z$  gleich groß ist, erhält man bei stetiger  $F$ :

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{4}{\pi} \int_x^\infty |dF(y)| \int_x^y \arccos \frac{x}{z} |dF(z)| \\ &= \frac{4}{\pi} \int_x^\infty F(z) \arccos \frac{x}{z} |dF(z)| = \frac{2}{\pi} \int_x^\infty \arccos \frac{x}{z} |d(F^2(z))|. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Die Gültigkeit von (1.9) bei unstetiger  $F$  kann man entweder direkt nachweisen oder indem man  $F$  in der schwachen Topologie durch stetige Verteilungsfunktionen approximiert.

Um nun  $K$  zu bestimmen, betrachten wir wieder Fig. 1, wobei erneut  $\overline{OP_1} > \overline{OP_2}$  vorausgesetzt wird. Ist  $\gamma$  der Winkel zwischen  $OP_1$  und  $OP_2$ , so ist  $F_{12} = yz \sin \gamma/2$ .  $P_2$  muß, wie oben, außerhalb der Tangenten liegen. Auf einem der ausgeschnittenen Teile ist  $\alpha - \beta \leq \gamma \leq \alpha + \beta$ , mit  $\alpha = \arccos(x/y)$ ,  $\beta$  wie oben. Der zweite Teil liefert einen gleich großen Beitrag. Somit ist der Anteil an (1.3), bei festen  $y$  und  $z$ , gleich

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta} yz \sin \gamma d\gamma = \frac{yz}{\pi} \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{\pi} \sqrt{y^2 - x^2} \sqrt{z^2 - x^2}.$$

Da der Ausdruck in  $y$  und  $z$  symmetrisch ist (die Annahme  $y > z$  ist also irrelevant) und zudem ein Produkt, haben wir:

$$K(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \int_x^\infty \sqrt{y^2 - x^2} dF(y) \right]^2. \quad (1.10)$$

## § 2. Verteilungen in der unbeschränkten Ebene

Wir betrachten zuerst Verteilungen der Form:

$$F(x) = x^{-k} L(x) \quad (k \geq 0), \quad (2.1)$$

wobei  $L(x)$  eine „langsam variierende Funktion“ ist:

$$L(\lambda x)/L(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 \quad (\forall \lambda > 0).$$

Für  $k=0$  wird natürlich  $L \rightarrow 0$  verlangt. Nach [4, S. 274], kann man  $L$  so schreiben:

$$L(x) = a(x) \exp \left[ \int_1^x \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right], \quad (2.2)$$

$$a(x) \rightarrow a_0 \neq 0, \infty; \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0.$$

$L$  heiße etwa „sehr langsam“, falls  $\varepsilon(t) \sqrt{\log t} \rightarrow 0$ . Wir berechnen zuerst  $G(x)$ . Nach (1.8) ist

$$\begin{aligned} \pi G(x) &= - \int_x^{Ax} \arccos \frac{x}{y} dF(y) - \int_{Ax}^\infty \arccos \frac{x}{y} dF(y) \\ &= x \int_x^{Ax} \frac{y^{-k} L(y)}{y \sqrt{y^2 - x^2}} dy - F(Ax) \arccos \frac{1}{A} - \int_{Ax}^\infty \arccos \frac{x}{y} dF(y), \end{aligned}$$

wobei der Übergang von der ersten zur zweiten Zeile durch partielle Integration erfolgt. Ist, bei vorgegebenem  $\delta$ ,  $A$  groß genug, so ist  $\arccos(x/y)$  für  $y \geq Ax$  praktisch  $\pi/2$ , so daß die Summe der letzten zwei Terme dem absoluten Betrage nach kleiner wird als  $\delta F(Ax)$ . Ist nun  $x$  groß genug, so ist  $L(y)/L(x)$ ,  $x \leq y \leq Ax$ ,

wie aus (2.2) ersichtlich, ungefähr gleich 1, so daß

$$\begin{aligned} \pi G(x) &= (1 \pm \delta) x L(x) \int_x^{Ax} \frac{y^{-k-1}}{\sqrt{y^2-x^2}} dy \pm \delta F(Ax) \\ &= (1 \pm \delta) x^{-k} L(x) \int_1^A \frac{y^{-k-1}}{\sqrt{y^2-1}} dy \pm \delta F(Ax) = \frac{1}{2}(1 \pm 3\delta) x^{-k} L(x) B\left(\frac{1}{2}, \frac{k+1}{2}\right), \\ G(x) &\sim \frac{1}{2\pi} B\left(\frac{1}{2}, \frac{k+1}{2}\right) x^{-k} L(x). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ähnlich erhält man:

$$\begin{aligned} H(x) &\sim \frac{1}{\pi} B\left(\frac{1}{2}, \frac{2k+1}{2}\right) x^{-2k} L^2(x) \\ &\sim 4\pi \left\{ B\left(\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right) / B^2\left(\frac{1}{2}, \frac{k+1}{2}\right) \right\} G^2(x). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Setzen wir in (1.5)  $G(x) = w$  und bemerken wir, daß nur kleine Werte von  $w$  einen Beitrag liefern, so daß wir unsere asymptotischen Formeln einsetzen können, ersetzen wir schließlich  $(1-w)^n$  durch  $e^{-nw}$ , so kommt

$$E(A_n) \sim 4\pi \frac{B(\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{B^2\left(\frac{1}{2}, \frac{k+1}{2}\right)} n^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-nw} w dw \sim 4\pi \frac{B(\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}{B^2\left(\frac{1}{2}, \frac{k+1}{2}\right)}. \quad (2.5)$$

Für  $k=0$  ergibt (2.5):  $E(A_n) \sim 4$ .

Von nun an soll  $k > 1$  sein, womit das Integral in (1.10) konvergiert. Durch ähnliche Betrachtungen wie oben bekommt man:

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \sqrt{y^2-x^2} |dF(y)| &= \int_x^\infty \frac{yF(y)}{\sqrt{y^2-x^2}} dy \sim \frac{1}{2} x^{1-k} L(x) B\left(\frac{1}{2}, \frac{k-1}{2}\right), \\ K(x) &\sim \frac{1}{4\pi} x^{2-2k} L^2(x) B^2\left(\frac{1}{2}, \frac{k-1}{2}\right) \sim \pi x^2 (k/k-1)^2 G^2(x). \end{aligned}$$

Setzen wir  $w = G(x)$  in (1.6), so erhalten wir

$$E(F_n) \sim \pi (k/k-1)^2 \frac{n^2}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-nw} d(x^2 w^2). \quad (2.6)$$

Es handelt sich nun darum, (2.3) nach  $x$  aufzulösen, d. h. eine Beziehung der Form

$$c w = x^{-k} L(x) \leftrightarrow x = x(w)$$

herzuleiten. Wir zeigen, daß dies geschrieben werden kann

$$x = (c w)^{-1/k} L_k^*(w^{-1}) \quad (L_k^* \text{ langsam variierend}). \quad (2.7)$$

Ist nämlich  $x^{-k} L(x) = c w$ , und sucht man  $x_1$  so, daß

$$x_1 = x(\lambda w) \quad (\lambda < 1, \text{ fest}), \quad \text{d. h.} \quad x_1^{-k} L(x_1) = \lambda c w,$$

so sieht man, daß für  $\varepsilon > 0$  und  $w$  klein genug

$$(1 + \varepsilon)^{-k} \lambda x_1^{-k} L((1 + \varepsilon) \lambda^{-1/k} x) \leq \lambda x^{-k} L(x) = \lambda c w,$$

was  $x_1 \leq (1 + \varepsilon) \lambda^{-1/k} x$  bedeutet ( $F$  ist ja monoton). Ähnlich kommt  $x_1 \geq (1 - \varepsilon) \lambda^{-1/k} x$ , d. h.

$$\frac{x_1}{x} \frac{(c \lambda w)^{1/k}}{(c w)^{1/k}} \xrightarrow{w \rightarrow 0} 1: \quad x(w)(c w)^{1/k} \text{ langsam variierend.}$$

Für „sehr langsame“  $L$  kann man analog zeigen:

$$L_k^*(w^{-1}) \sim (L(w^{-1}))^{1/k}. \quad (2.8)$$

(2.7) in (2.6) eingesetzt und ein bekannter abelscher Satz über die Laplace-Transformation [4, S. 421] liefern:

$$E(F_n) \sim \frac{\pi}{2} (k/k - 1)^2 \left[ B\left(\frac{1}{2}, \frac{k+1}{2}\right) / 2\pi \right]^{2/k} n^2 \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-nw} d(w^{2-\frac{2}{k}} (L_k^*(w^{-1}))^2), \quad (2.9)$$

$$E(F_n) \sim \frac{\pi}{2} (k/k - 1)^2 \left[ B\left(\frac{1}{2}, \frac{k+1}{2}\right) / 2\pi \right]^{2/k} \Gamma\left(3 - \frac{2}{k}\right) n^{2/k} (L_k^*(n))^2.$$

Analog:

$$E(l_n) \sim \pi (k/k - 1)^2 \frac{n^2}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-nw} \frac{2}{x} d(x^2 w^2), \quad (2.10)$$

$$E(l_n) \sim \pi (k/k - 1)^2 \left[ B\left(\frac{1}{2}, \frac{k+1}{2}\right) / 2\pi \right]^{1/k} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \Gamma\left(3 - \frac{1}{k}\right) n^{1/k} L_k^*(n). \quad (2.11)$$

Wir untersuchen nun auch eine Art des Verhaltens von  $F$ , die z. B. bei der 2-dimensionalen Normalverteilung vorkommt. Es sei

$$x = L\left(\frac{1}{F(x)}\right), \quad L \text{ langsam variierend, monoton, } L(\infty) = \infty.$$

Bei der Normalverteilung ist z. B.  $L(s) = \sqrt{2 \log s}$ . In der Darstellung (2.2) wollen wir  $a \equiv 1$  annehmen. Es gilt

$$x = L(s) = \exp\left(\int^s \frac{\varepsilon(t) dt}{t}\right) \leftrightarrow F(x) = \exp\left(-\int^x \frac{du}{v(u)u}\right), \quad (2.12)$$

$$0 < v(u) = \varepsilon(L^{-1}(u)) = \varepsilon(1/F(u)) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0, \quad (2.13)$$

wie man aus

$$\frac{dx}{ds} = x \frac{\varepsilon(s)}{s} \leftrightarrow \frac{ds}{s} = \frac{dx}{\varepsilon(s)x} = \frac{dx}{v(x)x} \quad (2.14)$$

ersieht. Ferner verlangen wir von  $v$  einige Eigenschaften, die bei den meisten in Frage kommenden Verteilungen, insbesondere  $F(x) = x^u \exp(-x^k)$ ,  $x \geq x_0$ , erfüllt sind:

$$v \text{ monoton } (u \geq u_0); \quad u \cdot v' \log v \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0; \quad v \log u \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0. \quad (2.15)$$

Die Bedingung  $u v' \rightarrow 0$  bedeutet, wie man aus (2.13) und (2.14) ausrechnen kann ( $d\varepsilon/\varepsilon : (ds/s) \rightarrow 0$ , d. h.  $\varepsilon$  langsam variierend).

Wir berechnen nun das Integral (1.8). Indem man  $F(x) = s$ ,  $F(y) = \sigma$  setzt, bekommt man:

$$\pi G(x) = \int_x^\infty \arccos \frac{x}{y} |dF(y)| = \int_s^\infty \arccos \frac{L(s)}{L(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma^2} = \int_0^{As} + \int_{As}^\infty$$

( $A$  fest). Für den Integranden können wir im ersten Teilintegral schreiben, indem wir die langsame Variation von  $L$  und  $\varepsilon$  berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \arccos \frac{L(s)}{L(\sigma)} &\sim \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{L(s)}{L(\sigma)}} \sim \sqrt{2} \left( 1 - \exp \left( - \int_s^\sigma \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\sim \sqrt{2} \left[ 1 - \exp \left( - \varepsilon(s) \log \frac{\sigma}{s} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \sim \sqrt{2} \left[ \varepsilon(s) \log \frac{\sigma}{s} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.16) \\ \int_s^{As} \arccos \frac{L(s)}{L(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma^2} &\sim \sqrt{2\varepsilon(s)} \int_s^{As} \left( \log \frac{\sigma}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\sigma}{\sigma^2} = \frac{\sqrt{2\varepsilon(s)}}{s} \int_1^A (\log t)^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2}. \end{aligned}$$

Für  $\sigma \geq As$  ist, weil  $v$  und daher  $\varepsilon$  monoton sind:

$$\begin{aligned} \frac{L(s)}{L(\sigma)} &\geq \exp \left( - \varepsilon(s) \log \frac{\sigma}{s} \right) \geq 1 - \varepsilon(s) \log \frac{\sigma}{s}, \\ \int_{As}^\infty \arccos \frac{L(s)}{L(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma^2} &\leq \int_{As}^\infty 2 \left[ 1 - \frac{L(s)}{L(\sigma)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{d\sigma}{\sigma^2} \leq \frac{2\sqrt{\varepsilon(s)}}{s} \int_A^\infty (\log t)^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2}. \quad (2.17) \end{aligned}$$

Da  $A$  beliebig groß gewählt werden darf, folgt aus (2.14)–(2.17):

$$G(x) \sim \frac{\sqrt{2v(x)}}{\pi} F(x) \int_1^\infty (\log t)^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{v(x)} F(x). \quad (2.18)$$

Ähnlich:

$$H(x) \sim \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{v(x)/2} F^2(x) \sim 2\sqrt{\pi} G^2(x) [v(x)]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.19)$$

Wir setzen  $G(x) = w$  und zeigen:  $v(x) \sim \varepsilon(1/w)$ . Ist nämlich  $G(x) = F(x_1)$ , so

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \log(c v(x)) &= \log \frac{F(x)}{G(x)} = \log \frac{F(x)}{F(x_1)} = \int_{x_1}^x \frac{dt}{t v(t)} \sim \frac{x - x_1}{x v(x)} \\ x_1 - x &\sim \frac{1}{2} x v(x) \log(c v(x)) \Rightarrow v(x_1) - v(x) \sim \frac{1}{2} x v(x) \log(c v(x)) \cdot v'(x) \\ \frac{v(x_1) - v(x)}{v(x)} &\sim \frac{1}{2} \log(c v(x)) x v'(x) \rightarrow 0 \quad (\text{vgl. (2.15)}). \end{aligned}$$

Deshalb ist  $H(w) \sim 2\sqrt{\pi} w^2 (\varepsilon(1/w))^{-\frac{1}{2}}$  und

$$E(A_n) \sim \sqrt{\pi} n^2 \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-nw} d(w^2 [\varepsilon(1/w)]^{-\frac{1}{2}}) \sim 2\sqrt{\pi} (\varepsilon(n))^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.20)$$

Bei der Normalverteilung haben wir

$$L = \sqrt{2 \log s}, \quad \varepsilon(s) = s L(s) / L(s) = \frac{1}{2 \log s}, \quad E(A_n) \sim 2\sqrt{2\pi \log n}$$

(vgl. [1] und [3]). Man bemerke, daß das Verhalten von  $A_n$  für  $F(x) = \exp(-x^k)$  auch durch  $\sqrt{\log n}$  bestimmt wird.

Analog bekommt man

$$K(x) \sim \frac{1}{2} v(x) x^2 F^2(x) \sim \pi x^2 G^2(x) = \pi x^2 \cdot w^2.$$

Wie vorher bei  $v(x) \sim \varepsilon(1/w)$  gilt jetzt  $x \sim L(1/w)$  und

$$E(F_n) \sim \frac{n^2}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-nw} d(w^2 L^2(1/w)) \sim \pi L^2(n), \quad (2.21)$$

$$E(l_n) \sim n^2 \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-nw} \frac{1}{L(1/w)} d(w^2 L^2(1/w)) \sim 2\pi L(n). \quad (2.22)$$

### § 3. Verteilungen im Einheitskreis

In diesem Abschnitt setzen wir voraus:  $F(1) = 0$ ,  $F(x) \neq 0$  für  $x < 1$ . Wir betrachten zuerst den Fall

$$F(1-x) \sim x^k L(1/x) \quad (x \rightarrow 0, L \text{ langsam variierend, } k \geq 0).$$

Da die Berechnungen ähnlich wie in § 2 verlaufen, beschränken wir uns auf einige Resultate (abgesehen von der Bestimmung der Funktion  $K$ , die wir ausführlicher behandeln):

$$G(1-x) \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_x^1 \sqrt{y-(1-x)} |dF(y)| \sim a L(1/x) x^{k+\frac{1}{2}}, \quad (3.1)$$

$$H(1-x) \sim b [L(1/x)]^2 x^{2k+\frac{1}{2}} \sim b a^{-2} x^{-\frac{1}{2}} [G(1-x)]^2, \quad (3.2)$$

$$a = B(k+1, \frac{1}{2}) / \sqrt{2} \pi; \quad b = \sqrt{2} B(2k+1, \frac{1}{2}) / \pi. \quad (3.3)$$

Ist  $G(1-x) = w$ , so kann  $x$  wiederum geschrieben werden als

$$x = \left[ \frac{w}{a} \right]^{\frac{2}{2k+1}} (L_{k+\frac{1}{2}}^*(w^{-1}))^{-1}$$

(vgl. (2.7) und (2.8)). Der Abelsche Satz ergibt dann

$$E(A_n) \sim \frac{b}{2} a^{-2+\frac{1}{2k+1}} \Gamma\left(3 - \frac{1}{2k+1}\right) n^{1/(2k+1)} [L_{k+\frac{1}{2}}^*(n)]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.4)$$

Zur Berechnung von  $K$  aus (1.10) bemerken wir, daß für  $x, y \rightarrow 1$ :

$$\arccos \frac{x}{y} - \sqrt{y^2 - x^2} \sim \sqrt{2(y-x)} \left( \frac{1-x}{3} + 2 \frac{1-y}{3} \right). \quad (3.5)$$

Damit ergibt sich nach einigen Rechnungen:

$$\begin{aligned} \pi H(x) &= \left[ \int_x^1 \arccos \frac{x}{y} |dF(y)| - \int_x^1 \left( \arccos \frac{x}{y} - \sqrt{y^2 - x^2} \right) |dF(y)| \right]^2 \\ &= [\pi G(x) - c(1-x)^{k+\frac{3}{2}} L(1/1-x)(1+o(1))]^2 \\ &= \pi^2 G^2(x) \left[ 1 - \frac{2c}{a\pi} (1-x)(1+o(1)) \right]. \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{c}{a\pi} = \gamma = \frac{2k+1}{2k+3}.$$

$$E(F_n) = \pi \binom{n}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-w)^{n-2} d \left[ w^2 (1-2\gamma \left( \frac{w}{a} \right)^{\frac{2}{2k+1}} [L_{k+\frac{1}{2}}^*(w^{-1})]^{-1} (1+o(1))) \right].$$

Ist  $k > \frac{1}{2}$ , so genügt die Approximation:

$$E(F_n) \cong \frac{n^2}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-nw} d(\dots)$$

und ergibt:

$$E(F_n) = \pi - \gamma a^{-\frac{2}{2k+1}} \Gamma \left( 3 + \frac{2}{2k+1} \right) n^{-\frac{2}{2k+1}} [L_{k+\frac{1}{2}}^*(n)]^{-1} (1+o(1)). \quad (3.6)$$

Diese Formel bleibt aber auch für  $k \leq \frac{1}{2}$  richtig, da die vernachlässigten Terme in  $n^{-1}$  und  $n^{-2}$  sich aufheben. Für den Umfang von  $H_n$  bekommt man:

$$\begin{aligned} E(l_n) &= \pi n^2 \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-nw} \left\{ 1 + \left( \frac{w}{a} \right)^{\frac{2}{2k+1}} [L_{k+\frac{1}{2}}^*(w^{-1})]^{-1} (1+o(1)) \right\} d(\dots), \\ E(l_n) &= 2\pi - \pi \frac{(2k+1)^2}{(2k+2)(2k+3)} \\ &\quad \cdot a^{-\frac{2}{2k+1}} \Gamma \left( 3 + \frac{2}{2k+1} \right) n^{-\frac{2}{2k+1}} [L_{k+\frac{1}{2}}^*(n)]^{-1} (1+o(1)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Für die gleichmäßige Verteilung hat man  $k=1$ ,  $L \rightarrow 2$ ,  $L_{\frac{3}{2}}^* \rightarrow 2^{\frac{3}{2}}$  und man erhält durch Einsetzen in (3.4), (3.6) und (3.7) die Formeln von [1] für den Kreis wieder.

Für Verteilungsfunktionen der Form

$$1-x = L(1/F(x)), \quad \varepsilon(s) = s L'(s)/L(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0,$$

erhält man unter denselben Bedingungen und mit derselben Argumentation wie in § 2:

$$\begin{aligned} E(A_n) &\sim 2 \sqrt{\pi} [L(n) \cdot \varepsilon(n)]^{-\frac{1}{2}}, \\ E(F_n) &= \pi - 2\pi L(n)(1+o(1)), \\ E(l_n) &= 2\pi - 2\pi L(n)(1+o(1)). \end{aligned}$$

**Literatur**

1. Efron, B.: The convex hull of a random set of points. *Biometrika* **52**, 331 – 343 (1965).
2. Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications, vol. II. New York-London-Sydney: Wiley 1966.
3. Raynaud, H.: Sur le comportement asymptotique de l'enveloppe convexe d'un nuage de points tirés au hasard dans  $R^n$ . *C. r. Acad. Sci. Paris* **261**, 627 – 629 (1965).
4. Rényi, A., Sulanke, R.: Über die konvexe Hülle von  $n$  zufällig gewählten Punkten I und II. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **2**, 75 – 84 (1963/64) und **3**, 138 – 147 (1964/65).

Prof. Dr. H. Carnal  
Mathematisches Institut  
Universität Bern  
CH-3000 Bern, Sidlerstraße 5

*(Eingegangen am 25. Oktober 1968)*