Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre: théorie des équations et calcul intégral

CHRISTIAN GILAIN

Mémoire présenté par U. BOTTAZZINI

Sommaire

1. Introduction

Si quelques articles consacrés à des aspects importants de l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre ont paru ces dernières années ([BACHMACOVA 1960], [PETROVA 1974], [HOUZEL 1989]), on ne dispose pas encore d'une monographie d'ensemble sur le sujet [1]*. Cependant, la structure générale de l'histoire de ce théorème peut sembler bien établie. Elle apparaît en effet de manière analogue dans la plupart des ouvrages classiques d'histoire des mathématiques. Donnons-en deux exemples, parmi beaucoup d'autres [2]:

"The dissertation [of GAUSS] gave the first rigorous proof of the so-called *fundamental theorem of algebra*, which states that every algebraic equation with real coefficients has at least one root and hence has n roots. The theorem goes

---

* Voir les *Notes*, p. 121.

back to Albert Girard [...]; d'Alembert had tried to give a proof in 1746" [STRUIK 1967, 141].

"D'Alembert had spent much of his time and effort attempting to prove the theorem conjectured by Girard and known today as the fundamental theorem of algebra — that every polynomial equation $f(x) = 0$, having complex coefficients and of degree $n \geqq 1$, has at least one complex root [...].

[The] statement, which Gauss later referred to as *the fundamental theorem of algebra* is essentially the proposition known in France as d'Alembert's theorem; but Gauss showed that all previously attempted demonstrations, including some by Euler and Lagrange, were inadequate" [BOYER 1968, 490–491 et 548].

De ces citations se dégage la conception d'une histoire marquée par trois moments principaux, qui en déterminent la périodisation:

— les premières formulations du théorème, sans démonstration, au début du XVII^e siècle (GIRARD notamment);
— les premières tentatives de démonstration au milieu du XVIII^e siècle (D'ALEMBERT, EULER);
— la première démonstration rigoureuse au tournant du XIX^e siècle (GAUSS).

Se succèdent ainsi, sur le même axe historique, ce qui apparaît comme la conjecture, l'essai de preuve et la preuve du théorème. Cependant, cette présentation classique de l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre ne nous paraît pas satisfaisante, car elle mêle des éléments qui ressortissent en fait à deux histoires distinctes [3]. Il nous semble en effet nécessaire de dissocier clairement deux résultats dans le cadre de la théorie des équations algébriques: le théorème fondamental de l'algèbre — en abrégé: TFA — (appelé encore théorème de D'ALEMBERT, ou de D'ALEMBERT-GAUSS) [4], et ce que nous appellerons le théorème de factorisation linéaire — en abrégé: TFL — (nommé parfois théorème de KRONECKER).

Sur le plan mathématique, rappelons que le TFA peut s'exprimer sous l'une des formes équivalentes suivantes:

(a): tout polynôme de degré $n \geqq 1$ à coefficients complexes a au moins une racine complexe;
(b): tout polynôme de degré $n \geqq 1$ à coefficients complexes se décompose en un produit de n facteurs linéaires à coefficients complexes et admet n racines complexes (distinctes ou confondues);
(a′) et (b′): mêmes conclusions qu'en (a) et (b) à partir d'un polynôme quelconque à coefficients réels;
(c): tout polynôme de degré $n \geqq 1$ à coefficients réels peut se décomposer en un produit de facteurs réels du premier ou du second degré.

En termes de structures: l'ensemble $\boldsymbol{C}$ des nombres complexes est un corps algébriquement clos et l'ensemble $\boldsymbol{R}$ des nombres réels un corps ordonné maximal (ou réel clos).

Le TFL correspond, lui, à l'énoncé selon lequel tout polynôme de degré $n \geqq 1$ peut se décomposer en un produit de n facteurs du premier degré, ou encore a exactement n racines (distinctes ou confondues), avec lesquelles on peut calculer algébriquement. Plus précisément, il affirme que si

$$P = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

est un polynôme de degré $n \geqq 1$, à coefficients dans un corps commutatif K, il existe un corps L (corps de décomposition) contenant les coefficients a_i et tel que l'on ait $P = a_n(x - x_1) \ldots (x - x_n)$, avec les racines x_i appartenant à L.

Dans le cas des polynômes à coefficients réels ou complexes, qui nous concerne pour l'histoire du TFA, les énoncés semblent se confondre. Cependant, on est réellement en présence de deux théorèmes mathématiquement indépendants, aucun n'ayant besoin de l'autre pour être démontré. Ainsi, le TFL figure comme lemme dans les démonstrations dites algébriques du TFA, mais on peut s'en passer dans le cas des démonstrations dites analytiques. Le TFL apparaît, pour un polynôme quelconque, comme un énoncé très général d'existence de la factorisation et des racines, indépendamment de la forme de ces dernières, tandis que le TFA, lui, correspond à un résultat précis sur la nature des racines (ou de la factorisation), lié à la structure particulière des corps $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{C}$.

Sur le plan historique, il nous semble que la distinction entre ces deux théorèmes permet de mieux comprendre l'histoire du TFA et plus généralement celle de la théorie des équations algébriques. Dans cet article nous reprenons, à la lumière de cette distinction, quelques épisodes significatifs de cette histoire, certains bien connus, d'autres moins. Nous concentrerons particulièrement notre analyse sur le XVIII^e siècle, période clé pour faire apparaître l'utilité d'une telle réécriture. Nous verrons ainsi que les mémoires d'EULER et de D'ALEMBERT sur le TFA apparaissent, non comme des tentatives tardives de démontrer la conjecture de GIRARD — laquelle se rattache plutôt au TFL —, mais comme un achèvement relatif d'une période ouverte vers 1700 par des travaux de LEIBNIZ sur le calcul intégral. Nous serons alors conduits à souligner le rôle fondateur de D'ALEMBERT en théorie des équations, puis à revenir sur la place de GAUSS dans cette histoire. Auparavant, il est nécessaire d'évoquer à grands traits la situation au XVII^e siècle.

2. La théorie générale des équations au XVII^e siècle

On sait qu'en 1629, ALBERT GIRARD énonce, dans son *Invention nouvelle en l'algèbre*, le "Théorème" suivant:

"Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions, que la dénomination de la plus haute quantité le démontre, excepté les incomplètes: et la première faction des solutions est égale au nombre du premier mêlé, la seconde faction des mêmes, est égale au nombre du deuxième mêlé; la troisième, au troisième, et toujours ainsi, tellement que la dernière faction est égale à la fermeture, et ce selon les signes qui se peuvent remarquer en l'ordre alternatif." [GIRARD 1629, E_4 r–v] [5].

Il lève en fait la restriction "excepté les incomplètes" dans son "Explication" qui tient lieu de démonstration. GIRARD fonde en effet sa théorie, comme le suggère la seconde partie de son théorème, sur le système des relations entre les coefficients et les racines qu'il utilise de manière systématique, notamment pour calculer les solutions. Pour lui, il y a autant de racines qu'il y a de telles relations et autant de relations que de coefficients moins un, c'est-à-dire autant que l'indique le degré. Si une équation est incomplète, certains termes, donc certaines relations, manquent, mais GIRARD remarque que l'on peut retrouver le bon nombre de relations (et donc de racines) en ajoutant des termes dont le coefficient est zéro. Ainsi, considérant l'exemple de l'équation $x^4 = 4x - 3$, le mathématicien lorrain indique, de façon correcte, que les "factions" sont 0, 0, 4, 3 et les quatre solutions:

$$1, 1, -1 + \sqrt{-2}, \ -1 - \sqrt{-2}.$$

D'une manière générale, il distingue trois sortes de solutions: "il y en a qui sont plus que rien; d'autres moins que rien; et d'autres enveloppées, comme celles qui ont des $\sqrt{-}$, comme des $\sqrt{-3}$, ou autres nombres semblables" [*op. cit.*, F_v]. Pour lui, l'utilité de l'introduction des solutions "impossibles" réside dans ce qu'elles assurent "la certitude de la règle générale", ce qui permet ainsi de n'oublier aucune racine, alors que ses prédécesseurs, souligne-t-il, n'étaient pas même certains d'avoir trouvé toutes les racines réelles positives.

Cet énoncé général sur le nombre de racines égal au degré, qui implique l'existence d'au moins une racine pour toute équation algébrique et suppose l'acceptation des solutions non réelles, représente un pas en avant substantiel par rapport à la simple affirmation, alors courante, de majoration du nombre de racines par le degré. Cependant, on ne peut pas dire, pensons-nous, que le théorème de GIRARD constitue une conjecture du TFA, car si, pour une équation quelconque de degré n, il affirme bien l'existence de n racines exactement, il n'énonce pas que toutes ces racines sont complexes, c'est-à-dire de la forme $A + B\sqrt{-1}$, avec A et B réels. Certes, dans les exemples numériques qu'il traite, correspondant essentiellement à des équations de degré $\leqq 4$, les solutions trouvées sont réelles ou de la forme $a + \sqrt{-b}$ (avec $b > 0$). Mais, si les expressions de ce type font effectivement partie de ses solutions "enveloppées" ou "impossibles", GIRARD n'aborde pas la question de savoir si ces dernières sont toutes de cette forme; il ne donne pas d'énoncé général sur la nature précise des racines non réelles. On peut cependant se demander si on n'a pas affaire avec l'énoncé de GIRARD à une première forme, imprécise, du TFA. Ne suffira-t-il pas, en effet, de préciser peu à peu la nature des racines non réelles pour parvenir de manière continue à l'énoncé exact du TFA? Si une réponse positive à cette interrogation peut sembler logique, l'examen de la suite des travaux sur ce sujet, éclairant le statut historique de l'énoncé de GIRARD, nous conduit à écarter l'idée d'une filiation entre ce travail et ceux de D'ALEMBERT et D'EULER sur le TFA au milieu du XVIII^e siècle (voir *infra*).

Les deux résultats généraux présentés par GIRARD dans son "théorème" correspondent au nombre des racines d'une équation quelconque et au système des relations entre coefficients et racines, ce qui, écrit-il, éclaire "la nature des équations qui est qu'icelles ont leurs termes composés des factions, et que toutes les questions n'ont autre nœud" [*op. cit.*, F_v]. Résultant clairement de la supposition d'une décomposition complète de toute équation algébrique en facteurs linéaires [6], ces propriétés des racines apparaissent ainsi préalablement à la recherche de leur forme générale et semblent bien indépendantes de celle-ci. L'énoncé de GIRARD peut donc plutôt être interprété comme représentant une première forme du TFL, qui assure alors le fondement de la théorie naissante des équations algébriques générales [7]. Autrement dit, le texte de GIRARD ne se situe pas dans la préhistoire du TFA mais dans celle du TFL.

En 1637, dans le livre III de *La Géométrie*, RENÉ DESCARTES énonce: "Sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité" [DESCARTES 1637, 372]. La formulation peut laisser à penser que DESCARTES indique seulement que le nombre de racines est au plus égal au degré [8], ce que semble confirmer la nature de la justification donnée qui consiste à construire, par la multiplication de certains facteurs linéaires, des équations du 3^e et du 4^e degré ayant respectivement trois et quatre racines réelles. Cependant, il ajoute plus loin:

> "Au reste tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires; c'est-à-dire, qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine" [*op. cit.*, 380].

DESCARTES cite alors l'exemple de l'équation $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ pour laquelle on peut "imaginer" trois racines, indique-t-il, bien qu'une seule, 2, soit réelle, les deux autres étant imaginaires. Prises ensemble, ces deux citations, extraites d'un long passage de son ouvrage que DESCARTES consacre à "De la nature des équations", constituent un énoncé qui apparaît, encore plus nettement que chez GIRARD, comme une forme du TFL et non du TFA. Sa démarche consiste, en effet, à admettre que, puisque l'on peut former une équation de degré n en faisant le produit de n équations simples, réciproquement toute équation de degré n peut se décomposer en n facteurs linéaires. Les racines imaginaires nécessaires pour assurer la généralité de cette factorisation apparaissent alors comme des adjonctions formelles, sans précision de leur nature.

Il est intéressant de rappeler la critique qui a été faite de la théorie de DESCARTES, dans des pamphlets datant de 1638 et dus sans doute à JEAN DE BEAUGRAND [9]. Sur la question du nombre, de la nature des racines et de la factorisation linéaire des équations, on peut y lire: "s'il y a une infinité d'équations qui se produisent par la multiplication d'autres équations, il y en a aussi une infinité d'autres qui ne peuvent être produites suivant cet ordre" [TANNERY, *Mémoires*, 226]. C'est cela, indique BEAUGRAND, qui a retenu VIÈTE "de rien écrire de général sur ce sujet" [*op. cit.*, 226], et qui correspond au fait "qu'il y a beaucoup d'équations où il est impossible que la quantité inconnue ait autant de valeurs qu'elle a de dimensions" [*op. cit.*, 214]. Pour justifier cette affirmation, il cite entre autres, l'exemple de l'équation utilisée par DESCARTES: $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$, où il ne peut y avoir, insiste-t-il, qu'une seule racine $+2$. Le fond de la position de BEAUGRAND est, bien sûr, qu'il refuse l'existence des racines imaginaires, car, écrit-il "lorsque non seulement elles ne sont point, mais qu'il implique contradiction qu'elles soient, on ne les peut pas nommer avec raison ni réelles ni imaginaires, puisqu'elles ne peuvent être l'objet de notre entendement ni de notre imagination" [*op. cit.*, 228].

Cependant, la plupart des mathématiciens du XVII^e siècle admettront, comme DESCARTES, ce que BEAUGRAND refusait. Nous ne multiplierons pas les citations car il suffira pour notre propos de faire le point sur les grandes lignes de la théorie générale des équations à l'articulation du XVII^e^ et du XVIII^e^ siècle, à un moment où d'ailleurs paraissent plusieurs ouvrages comprenant une partie synthétique sur le sujet (voir notamment [WALLIS 1685], [PRESTET 1689], [OZANAM 1702], [NEWTON 1707], [REYNEAU 1708]). Sans être identiques sur tous les points, ces traités présentent de manière analogue la structure de la théorie générale des équations, dans la lignée de DESCARTES [10]. Suivons par exemple l'ouvrage de REYNEAU, dont la présentation est particulièrement claire. L'idée de base est que "pour concevoir clairement la nature des équations composées, il faut voir la manière dont elles peuvent être formées" [1708 I, 56]. Il énonce ainsi le "Théorème I": "Toute équation composée peut être conçue comme étant formée par la multiplication d'autant d'équations simples, que l'équation composée a de degrés" [*op. cit.*, 58]. REYNEAU en déduit une série de corollaires portant sur le "nombre" et la "qualité" des racines, notamment: "une équation composée a autant de racines, qu'elle a de degrés" [*op. cit.*, 63]; les racines peuvent être réelles ou imaginaires; les relations entre coefficients et racines [*op. cit.*, 65]. Or, ce "théorème", qui apparaît ainsi comme assurant le fondement de la théorie générale des équations, correspond clairement à une forme du TFL. REYNEAU en donne une "démonstration" d'abord pour les équations du second et du troisième degré. Elle consiste, en réalité, à montrer que l'on peut construire des produits de deux ou de trois facteurs linéaires donnant des équations des divers types possibles, suivant le signe des coefficients. Pour les degrés supérieurs, il écrit simplement:

> "On voit clairement que les équations des autres degrés peuvent être conçues formées par les équations du premier, du second et du troisième degré [...] par conséquent toute équation composée peut être conçue formée par autant d'équations simples qu'elle a de degrés" [*op. cit.*, 61].

Ceci ne constitue pas bien sûr une démonstration du théorème en question, le raisonnement portant plutôt sur sa réciproque. Dans la plupart des traités de l'époque, il n'y a d'ailleurs même pas d'essai de preuve de ce résultat, la décomposition des polynômes en facteurs linéaires étant considérée comme un véritable *principe* de base de la théorie générale des équations. C'est un énoncé qu'on ne pouvait alors qu'accepter ou refuser, suivant l'idée que l'on se faisait des mathématiques, et en particulier de la place donnée à la généralité de l'algèbre et à l'autonomie de son formalisme [11].

Cependant, s'il conduit nécessairement à introduire des racines non réelles avec lesquelles on peut calculer algébriquement, ce principe de factorisation linéaire ne dit rien en lui-même sur la forme précise de ces racines imaginaires. Sur ce dernier point, les traités font apparaître d'ailleurs des points de vue variés, alors qu'une quasi-unanimité se manifeste dans l'acceptation du principe de factorisation. L'exposé de REYNEAU, là encore, illustre bien la situation de l'époque quant à la fluctuation des définitions et des dénominations des imaginaires: il s'agit d'abord des grandeurs "impossibles" de la forme $\sqrt{-aa}$ [*op. cit.*, 57], mais aussi des "mixtes imaginaires" $a \pm \sqrt{-aa}$ [*op. cit.*, 58], puis dans un autre chapitre [*op. cit.*, Livre V], apparaît la forme plus générale $\pm i \pm \sqrt{-kk}$ alors que, par ailleurs, il est remarqué que les diverses racines paires d'une grandeur négative sont aussi des grandeurs imaginaires [*op. cit.*, 58]. Ainsi, si tel ou tel type d'expression est repéré comme "imaginaire", ou "impossible", il n'y a pas encore de caractérisation d'ensemble de ces racines non réelles sous la forme $a + b\sqrt{-1}$.

Cette situation ne correspond pas à une absence de formulation d'un résultat qui serait en fait admis implicitement par tous; c'est alors la marque d'une réelle difficulté à saisir le statut général des imaginaires [12]. Une tentative de clarification de la "nature des racines imaginaires" effectuée par J. PRESTET [1689 II], illustre d'ailleurs ce fait. Celui-ci décrit une échelle des "absurdités" qui commence par les absurdités "linéaires" correspondant aux racines négatives, puis les absurdités du second degré qui font intervenir les racines carrées de nombres négatifs. Les absurdités du troisième degré se réduisent, pour lui, aux deux premiers types, puisque l'on peut toujours diviser l'équation correspondante par un facteur linéaire (réel).

"Mais, écrit PRESTET, le quatrième degré peut avoir des contradictions encore plus compliquées que les planes, parce qu'on y peut supposer des contradictions où il faudra tirer les racines carrées des racines des grandeurs négatives; comme dans l'égalité $z^4 + a^4 = 0$, ou $z^4 = -a^4$, l'inconnue z est $\sqrt{\sqrt{-a^4}}$" [*op. cit.*, 371].

Il décrit ainsi l'apparition d'une infinité d'espèces, de racines imaginaires correspondant à des polynômes de degrés successifs du type 2^n [13].

L'absence, dans la théorie des équations au XVII^e^ siècle, de caractérisation exacte de la forme des imaginaires, confirme que les énoncés généraux d'alors sur la factorisation linéaire et le nombre des racines se rattachent non pas au TFA, mais au TFL. Cela va d'ailleurs apparaître encore plus nettement, à l'orée du XVIII^e^ siècle, avec l'émergence du problème précis du TFA, qui ne se situera pas dans le prolongement continu des énoncés de factorisation linéaire du XVII^e^ siècle.

3. Leibniz, l'intégration des différentielles rationnelles et le problème du théorème fondamental de l'algèbre

En 1702, se produit en effet un évènement très important pour notre sujet, non pas directement en théorie des équations, mais dans un nouveau domaine mathématique alors récemment créé: le calcul infinitésimal. Il s'agit de la publication d'un mémoire de GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ sur l'intégration des différentielles rationnelles ([LEIBNIZ 1702]). Le 5 août de la même année, JEAN (I) BERNOULLI envoie à PIERRE VARIGNON un mémoire consacré aussi à ce problème de calcul intégral, texte qui, traduit, est lu par son correspondant le 13 décembre à l'Académie des sciences de Paris et qui paraîtra, en 1704, dans les *MARS* 1702 ([BERNOULLI 1702]). Ces deux mémoires ont plusieurs points communs: un même objet d'étude, mais aussi l'utilisation d'un même type de méthode, la décomposition des fractions rationnelles en une somme d'éléments simples. De plus cette décomposition repose dans les deux cas sur l'expression du dénominateur de la fraction rationnelle sous la forme d'un produit de facteurs linéaires. Ainsi, J. BERNOULLI, après s'être ramené par une division au cas où le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, écrit la différentielle sous la forme:

$$r\,dx : q = a\,dx : (x + f) + b\,dx : (x + g) + c\,dx : (x + h) + \text{etc.}$$

"c'est-à-dire $r\,dx : q$ égale à autant de différentielles logarithmiques, que la plus grande dimension de x, dans q, a d'unités." [*op. cit.*, 393–394]. La détermination des numérateurs des fractions simples, repose alors sur la méthode des coefficients indéterminés.

De même, LEIBNIZ écrit:

"Hanc demptis integris puris ajo posse ostendi aequalem aggregato fractionum, quarum numerator sit constans seu sine x, denominator autem sit simplex, ita ut quaevis harum fractionum sit qualis $\frac{a}{x+b}$, quod qui fieri possit, sic ostendo." [LEIBNIZ 1702, 351] [14].

Pour parvenir à ce résultat, il indique d'abord:

"Primum ex Algebra suppono divisores simplices cujusque formulae rationalis integrae utcunque cognitos; [...] Itaque ex suppositis resolutionibus aequationum Algebraicis habentur divisores formularum, et nostra haec Analysis infinitesimalis Analysin Algebraicam, ut superior inferiorem, supponit" [*op. cit.*, 351–352] [15].

Même si LEIBNIZ sait bien alors que les connaissances algébriques ne permettent pas de calculer toujours exactement les racines [16], il s'appuie sur l'existence *a priori* de la factorisation linéaire, écrivant le dénominateur de la fraction sous la forme *lmn etc.* avec $l = x + b$, $m = x + c$, $n = x + d$, *etc.* Comme J. BERNOULLI, il suppose donc l'énoncé du TFL.

Malgré ces grandes similitudes [17], les travaux des deux savants présentent des différences notables, voire des divergences, sur la décomposition des fractions rationnelles et l'intégration des éléments simples. LEIBNIZ, dans son mémoire de 1702, suppose de fait que les racines du dénominateur de la fraction rationnelle considérée sont toutes distinctes. Mais l'année suivante, il fait paraître une suite [LEIBNIZ 1703], consacrée au cas des racines multiples. On y trouve la règle générale correcte correspondante: à chaque facteur du dénominateur du type h^t avec $h = x + a$ et t entier correspond une décomposition de la forme $A/h^t + B/h^{t-1} + \ldots + N/h$ $(A, B, \ldots, N$ constantes) (voir [*op. cit.*, 364–365]). Quant à JEAN BERNOULLI, sa méthode générale publiée correspond essentiellement au cas des racines distinctes ([BERNOULLI 1702], [BERNOULLI 1703]) [18].

Pour l'intégration des éléments simples, la méthode générale de JEAN BERNOULLI consiste à intégrer formellement chaque différentielle $a\,dx : (x + f)$ sous la forme d'un logarithme Log $(x + f)^a$, réel ou imaginaire. Comme il est indiqué dans l'énoncé du problème en tête de son mémoire ([BERNOULLI 1702, 393] ou mieux [BERNOULLI 1703, 26]), il en conclut que, si elle n'est pas algébrique, l'intégrale d'une différentielle rationnelle est toujours réductible à la quadrature de l'hyperbole (si le logarithme est réel) ou à celle du cercle (si le logarithme est imaginaire). Sa conclusion est donc correcte, mais sans que soit donnée de preuve générale car, si le résultat apparaissait bien établi dans le cas réel, dans l'autre, s'ajoutait alors à la confusion sur la nature des imaginaires, celle sur le statut des logarithmes [19]. La conviction de J. BERNOULLI apparaît liée aux cas particuliers traités dans la dernière partie de son article, consacrée à l'exposé de "Manières abrégées de transformer les différentielles composées en simples, et réciproquement, et même les simples imaginaires en réelles composées" [BERNOULLI 1702, 399]. Il y remarque notamment que $a\,dz : (bb + zz)$ correspond d'une part, à une différentielle de secteur circulaire réel et, d'autre part, en décomposant en éléments simples, à la somme des deux différentielles de logarithmes imaginaires

$$\tfrac{1}{2}\, a\,dz : \left(bb + bz\sqrt{-1}\right) + \tfrac{1}{2}\, a\,dz : \left(bb - bz\sqrt{-1}\right) .$$

"On voit, conclut-il, que les logarithmes imaginaires se doivent prendre pour des secteurs circulaires réels: parce que la compensation, qui se fait de ces grandeurs imaginaires ajoutées ensemble, les détruit, de manière que la somme en devient toute réelle" [*op. cit.*, 400].

LEIBNIZ, quant à lui, après avoir rappelé que les éléments simples réels font intervenir la quadrature de l'hyperbole, aborde le cas des racines imaginaires à partir de l'exemple $1/(x^4 - 1)$ qui conduit aux deux intégrations $\int dx/\left(x\sqrt{-1} - 1\right)$ et $\int dx/\left(x\sqrt{-1}^{\,4} + 1\right)$ lesquelles, indique-t-il, ne peuvent être rapportés qu'à une hyperbole imaginaire. Cependant, il note que l'on peut regrouper entre elles les racines imaginaires de manière à obtenir une décomposition réelle, soit ici:

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{(4x+1)} - \frac{1}{2(xx+1)} .$$

Ceci fait apparaître que l'intégrale $\int dx/(x^4 - 1)$ dépend en même temps de la quadrature de l'hyperbole et de celle du cercle, puisque LEIBNIZ rappelle qu'il a montré antérieurement que l'intégrale $\int dx/(xx + 1)$ se rapporte à la quadrature du cercle. Il remarque que, d'une façon générale, on aura de même une intégrale ne dépendant que de la quadrature du cercle ou de l'hyperbole, à chaque fois que le dénominateur de la fraction rationnelle ne possède que des diviseurs réels du premier ou du second degré. Se plaçant ainsi systématiquement dans le cadre réel, LEIBNIZ pose alors le problème de façon claire:

"Hic jam ordo nos ducit ad maximi momenti Quaestionem, utrum omnes quadraturae rationales ad Quadraturam Hyperbolae et Circuli reduci possint, quae huc redit in nostra hac Analysi: utrum omnis Aequatio Algebraica seu formula realis integra quad indeterminatam rationalis possit resolvi in divisores reales simplices aut planos." [*op. cit.*, 359] [20].

Ce texte est essentiel pour notre sujet: le problème de calcul intégral de la réductibilité des quadratures rationnelles à celles du cercle et de l'hyperbole y apparaît comme dépendant directement d'un problème de théorie des équations algébriques qui correspond à l'énoncé exact du TFA sous la forme (c). Or, à cette question tout à fait précise, LEIBNIZ donne explicitement une réponse *négative*: il ne pense pas que l'on puisse obtenir une telle factorisation réelle pour tous les polynômes et justifie cette réponse en avançant le fameux "contre-exemple" du polynôme

$x^4 + a^4$ [*op. cit.*, 359–360]. Considérant les décompositions successives

$$(xx - aa\sqrt{-1})(xx + aa\sqrt{-1})$$

puis

$$\left(x + a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x - a\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(x + a\sqrt{(-\sqrt{-1})}\right)\left(x - a\sqrt{(-\sqrt{-1})}\right)$$

du polynôme, il affirme que, de quelque façon que l'on combine deux de ces quatre facteurs, il n'est pas possible de faire que leur produit donne un trinôme réel. Ainsi, LEIBNIZ aboutit à la conclusion fausse que l'intégrale $\int dx/(x^4 + a^4)$ ne peut pas être ramenée aux quadratures du cercle ou de l'hyperbole, et qu'elle correspond à une nouvelle quadrature originale.

Les mémoires de G. W. LEIBNIZ et de J. BERNOULLI constituent une étape importante de l'histoire du calcul intégral, car ils ouvrent la voie à l'intégration en termes finis d'une classe étendue de différentielles: les différentielles rationnelles (et les différentielles irrationnelles qui s'y ramènent), dans un domaine où les résultats généraux étaient plutôt rares [21]. Mais, par ailleurs, le double aspect du texte de LEIBNIZ — énoncé précis du TFA et refus de l'admettre pour vrai — lui confère un rôle essentiel pour l'historiographie de la théorie des équations algébriques. D'une part, en effet, est posé, pour la première fois à notre connaissance, le problème du TFA sous une forme à la fois générale et précise: tout polynôme (à coefficients réels) peut-il se décomposer en facteurs réels du premier ou du second degré [22]? D'autre part, la réponse négative qui est apportée à cette interrogation fait apparaître clairement la dualité entre le TFL, que LEIBNIZ admet comme un principe indiscuté, et le TFA qu'il refuse. Sur le premier repose la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples à dénominateurs linéaires dans un cadre général; le second commande la possibilité d'une décomposition *réelle* à dénominateurs linéaires ou quadratiques.

Le refus du TFA est clairement lié, chez LEIBNIZ, à une conception des imaginaires considérés comme classables en diverses espèces, irréductibles les unes aux autres. Ainsi, son erreur sur l'exemple $x^4 + a^4$, provient bien sûr de ce qu'il ne voit pas que les racines quatrièmes de -1 peuvent s'exprimer sous la forme $a + b\sqrt{-1}$ avec a et b réels [23]. Pour LEIBNIZ, cette complexité croissante des imaginaires [24] se retrouve au niveau des logarithmes et de l'intégration des éléments simples:

"Logarithmi autem veri coincidunt cum quadratura Hyperbolae, Logarithmi imaginarii primi grados coincidunt cum quadratura Circuli. Sed quia dantur Logarithmi imaginarii infinitorum graduum altiorum [...] hinc etiam totidem dantur Quadraturarum gradus, a quadraturis Circuli et Hyperbolae independentes" [LEIBNIZ 1703, 362] [25].

Il s'agit d'une critique directe de la conclusion de J. BERNOULLI qui reposait sur la supposition que les logarithmes imaginaires correspondent toujours à la quadrature du cercle (voir aussi [*op. cit.*, 366]).

Plusieurs auteurs ont signalé la connexion qui s'est établie, au début du XVIII^e siècle, entre l'analyse infinitésimale et l'algèbre [26]. N. BOURBAKI, par exemple, indique:

"Il semble que ce soient les besoins de la nouvelle analyse qui aient peu à peu ranimé l'intérêt porté à l'algèbre. L'intégration des fractions rationnelles, effectuée par Leibniz et Johann Bernoulli, et la question des logarithmes imaginaires qui s'y rattache étroitement, donnent l'occasion d'approfondir le calcul sur les nombres imaginaires, et de reprendre la question de la décomposition d'un polynôme en facteurs du premier degré (*théorème fondamental de l'algèbre*)." [*Histoire*, 98–99].

Ainsi, ce qui se passe alors est souvent décrit comme une reprise de la question après une période de sommeil des études algébriques, le calcul intégral conduisant à poser à nouveau, de façon plus précise, le problème du TFA. En réalité, nous pensons que, plus fondamentalement, les travaux de LEIBNIZ le conduisent non à reposer, mais à *poser* le problème du TFA, sous la forme de la possibilité de décomposer tout polynôme en facteurs linéaires ou quadratiques réels. C'est en effet un nouvel énoncé de théorie des équations qui apparaît ainsi en 1702, lié à un problème analytico-géométrique: l'intégration en termes finis des différentielles rationnelles dans le cadre réel, c'est-à-dire la réduction des quadratures des courbes d'ordonnée rationnelle à une combinaison finie d'aires de sections coniques. La réponse négative apportée par LEIBNIZ à ce problème de factorisation illustre bien l'absence de continuité entre cet énoncé et le principe de factorisation linéaire issu du XVII^{e} siècle qui subsiste parallèlement, identique à lui-même. Mais si la formulation du TFA n'apparaît ainsi que pour être refusée, la nature erronée de la réponse de LEIBNIZ a sans doute moins d'importance que sa question. En effet, à côté de l'énoncé du TFL dont le caractère général mais vague le rend peu susceptible d'une démonstration, apparaît alors celui, précis, du TFA sous la forme (c), justiciable d'une recherche effective. S'ouvre ainsi une période de travaux autour du thème de la décomposition réelle des polynômes en facteurs du 1er ou du 2^{e} degré, dont les mémoires d'EULER et de D'ALEMBERT au milieu du XVIII^{e} siècle constitueront un achèvement relatif, en réalisant le consensus des mathématiciens sur une réponse positive à la question soulevée par LEIBNIZ. On peut ainsi considérer que le mémoire de 1702 de LEIBNIZ constitue le point de départ de la préhistoire du TFA, dont nous allons décrire quelques moments dans le paragraphe suivant.

4. Intégration en termes finis et décomposition réelle des binômes et trinômes

Un personnage a joué un rôle important pour notre problème dans le premier tiers du XVIII^{e} siècle, c'est le mathématicien anglais ROGER COTES. Ce rôle, il l'a d'ailleurs joué largement de manière posthume puisqu'il meurt prématurément en 1716 et que la plupart de ses œuvres ne seront publiées qu'en 1722 par R. SMITH dans l'ouvrage *Harmonia mensurarum*. Le 5 mai, un mois avant sa mort, COTES a écrit à W. JONES une lettre importante par son contenu et ses effets [1716] [27]. Il y indique qu'il est parvenu à ramener aux mesures des rapports et des angles, c'est-à-dire aux fonctions logarithmes et circulaires, les fluentes des fluxions (binômes) de la forme $\left(d\dot{z}\, z^{\theta\eta + \frac{\delta}{\lambda}\eta - 1}\right)/(e + fz^{\eta})$ avec d, e, f constantes, θ un entier positif ou négatif, et δ/λ une fraction (δ *et* λ entiers naturels tels que $\delta/\lambda < 1$). Cela généralise, remarque-t-il, des résultats de NEWTON, qui correspondaient aux cas particuliers $\delta/\lambda = 0$ et $\delta/\lambda = \frac{1}{2}$ [28]. COTES fait ensuite allusion à l'article de LEIBNIZ de 1702 et souligne que son travail permet de répondre à la question alors posée de la nature des fluentes de $\dot{x}/(x^4 + a^4)$, $\dot{x}/(x^8 + a^8)$, *etc.*, mais de manière contraire à celle du philosophe allemand.

Il indique d'ailleurs qu'il est aussi parvenu à ramener aux mesures des rapports et des angles, la fluente des fluxions (trinômes) de la forme [29]:

$$\left(d\dot{z}\, z^{\theta\eta + \frac{\delta}{\lambda}\eta - 1}\right)/(e + fz^{\eta} + gz^{2\eta})$$

avec les mêmes hypothèses que ci-dessus sur les symboles, mais λ désignant ici une puissance de deux [30]. Puis il conclut:

"In truth I am inclined to believe, that Mr. Leibniz's grand question ought to be determined the contrary way, and that it will be found at last, that the fluent of any rational fluxion whatever does depend upon the measures of ratios and angles, excepting those which may be had in finite terms even without introducing measures" [*op. cit.*, 147–148].

COTES conjecture donc le résultat correct mais sans pouvoir en donner de preuve, ses résultats étant trop partiels. R. SMITH, qui indique dans l'*Harmonia mensurarum* que cette lettre l'a poussé à analyser de près les manuscrits de COTES, révèle les aspects essentiels de la méthode de celui-ci [1722, 113–119]. Il ressort que, pour une large part, le fondement en est un théorème (appelé depuis théorème "de Cotes") qui donne la décomposition en facteurs réels linéaires ou quadratiques des polynômes de la forme $a^n \pm x^n$, grâce à l'établissement de relations géométriques dans un cercle de rayon a divisé en n parties égales [31]. Par un changement de variable du type $x^{\lambda} = \left|\frac{f}{e}\right| z^{\eta}$, la fluxion binôme de COTES se met en effet sous la forme $kx^r\dot{x}/(1 \pm x^{\lambda})$ (avec k constante et r entier relatif), et l'application du théorème précédent aboutit à la décomposition du dénominateur en facteurs réels irréductibles du 1er ou du 2e degré, permettant d'exprimer la fluente à l'aide des seules fonctions algébriques, logarithmiques et trigonométriques.

Dans ce travail de calcul intégral, comme dans d'autres domaines, Cotes se situe dans la tradition newtonienne, notamment, on l'a vu, par les types de fluxions étudiés [32]. Cependant, il connaît aussi les travaux de LEIBNIZ de 1702, et, comme lui, ramène les problèmes d'intégration en termes finis à une question d'algèbre réelle: la décomposition des polynômes en facteurs du 1er ou du 2e degré. Il s'oppose certes à la conclusion de LEIBNIZ mais cela même a pu constituer une motivation au développement de ses travaux, dans le contexte de rivalité de l'époque.

En tout cas, les résultats de COTES allaient être utilisés pour nourrir la concurrence entre les savants anglais et ceux du continent. En 1719, TAYLOR se sert (sans le dire) du contenu de la lettre à Jones de 1716 pour lancer un défi aux géomètres non anglais, par l'intermédiaire de MONTMORT. Sans oublier, en passant, de souligner l'erreur de LEIBNIZ quant à l'intégration de $\dot{x} : (x^4 + a^4)$, il demande de trouver par la quadrature du cercle ou de l'hyperbole la fluente de la fluxion trinôme indiquée ci-dessus [33], le problème devant être résolu "without limitation by impossible roots" (voir [HERMANN 1719, 352]). Très rapidement, la même année 1719, deux mathématiciens du continent, JEAN(I) BERNOULLI et JACOB HERMANN, résolvent, indépendamment semble-t-il, ce problème "de Taylor", dont il apparaîtra seulement en 1722 lors de la publication de ses œuvres posthumes qu'il s'agissait en fait d'un problème de COTES. Dans son introduction, JEAN BERNOULLI [1719], donne la décomposition de $x^4 + a^4$ en les deux trinômes réels

$$x^2 + ax\sqrt{2} + a^2 \quad \text{et} \quad x^2 - ax\sqrt{2} + a^2$$

et en déduit que l'intégrale $\int (dx : (x^4 + a^4))$ s'exprime à l'aide de deux quadratures circulaires et de deux quadratures hyperboliques. Rappelant son ancienneté dans ce genre de problème, compte tenu de ses travaux de 1702 sur l'intégration des fractions rationnelles, il se propose d'adapter sa méthode à la contrainte posée par TAYLOR de ne pas employer les racines imaginaires. JEAN BERNOULLI s'astreint effectivement ici à travailler dans le cadre réel tant pour la factorisation des polynômes que pour la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples. Par le changement de variable $z^\eta = x^\lambda$, la différentielle trinôme proposée prend la forme $kx^r\,dx : (e + fx^\lambda + gx^{2\lambda})$ (avec k constante, r entier relatif et $\lambda = 2^p$), différentielle dont l'intégration est ramenée aux quadratures du cercle et de l'hyperbole grâce à des décompositions successives de la fraction rationnelle $1 : (e + fx^\lambda + gx^{2\lambda})$ en sommes de deux fractions donts le dénominateurs sont des trinômes réels de degré moitié λ. Si J. BERNOULLI n'établit pas rigoureusement la récurrence, les cas $\lambda = 2$ et $\lambda = 4$ traités correctement montrent la généralité du procédé. Ainsi, pour $\lambda = 2$, il écrit que le trinôme $e + fx^2 + gx^4$ où l'on peut prendre $e > 0$ et de la forme b^2, se décompose en un produit de deux binômes réels $(b + mx^2)(b + nx^2)$ si $f^2 > 4eg$, et en un produit de deux trinômes réels $(b + nx + mx^2)(b - nx + mx^2)$ si $f^2 < 4eg$, et calcule explicitement à chaque fois les coefficients par identification [34]. Dans le deuxième cas, par exemple, il vient: $m = \sqrt{g}$, $n = \sqrt{-f + 2\sqrt{eg}}$. On obtient en fait, quel que soit $\lambda = 2^p$ $(p \geqq 1)$, une factorisation

$$b^2 + fx^\lambda + gx^{2\lambda} = (b + nx^{\lambda/2} + mx^\lambda)(b - nx^{\lambda/2} + mx^\lambda)$$

avec les mêmes coefficients n et m (faire $x^\lambda = y^2$). La démonstration du fait que l'intégrale trinôme s'exprime à l'aide des quadratures du cercle et de l'hyperbole résulte donc de la possibilité de décomposer effectivement le trinôme $e + fx^\lambda + gx^{2\lambda}$ en facteurs réels du second degré grâce à l'hypothèse que λ est une puissance de 2. Dans ce problème, il n'était donc pas nécessaire pour factoriser d'utiliser le théorème de COTES; la méthode classique des coefficients indéterminés suffisait [35].

La solution donnée par HERMANN la même année, si elle diffère dans la forme de l'exposition (il présente d'emblée le cas général), est analogue quant au fond à celle de BERNOULLI. Notons qu'il expose le problème de façon particulièrement claire, en indiquant que la réduction de la différentielle aux éléments du cercle ou de l'hyperbole dépend de la décomposition du trinôme $e + fx^{\lambda} + gx^{2\lambda}$ en ses diviseurs primitifs ("divisores primitivos") [HERMANN 1719, 353]. Il appelle ainsi ceux qui ne peuvent se résoudre en d'autres plus simples sans que s'introduisent des quantités imaginaires; dans le présent problème, ce sont, dit-il, les trinômes de la forme $x^2 + mx + n$. HERMANN donne donc une bonne définition de la notion de polynôme irréducible dans $\boldsymbol{R}[x]$ mais il n'énonce pas que ces polynômes sont dans tous les cas de degré $\leqq 2$.

ABRAHAM DE MOIVRE, dans son ouvrage *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis* [1730], non seulement expose les résultats de COTES parus en 1722, mais les améliore en levant l'hypothèse restrictive $\lambda = 2^p$ dans la différentielle trinôme de ce dernier. Cela est rendu possible grâce à la décomposition en facteurs quadratiques réels des trinômes du type $A + Bx^m + Cx^{2m}$ (m entier naturel). Plus précisément, MOIVRE considère les expressions de la forme $1 \pm 2lz^n + z^{2n}$ avec $0 < l < 1$ et n entier positif, que, grâce à une généralisation du théorème de COTES sur le cercle, il parvient à décomposer en un produit de facteurs quadratiques du type $1 - 2xz + z^2$ où, si on pose $l = \cos A$, x est de la forme $\cos((\pm A + kC)/n)$, C étant l'arc correspondant au cercle entier de rayon 1 ($k = 0, 1,$ *etc.*). On trouve chez MOIVRE les mêmes éléments caractéristiques que précédemment: l'intégration en termes finis (c'est-à-dire à l'aide des quadratures des sections coniques) de différentielles binômes ou trinômes est obtenue grâce à une décomposition en fractions simples réelles [36], qui nécessite la factorisation de polynômes à l'aide de diviseurs réels du premier ou du second degré. Dans un corollaire concluant son étude sur les fluentes des quantités $z^{\theta}\dot{z}/P$ où P est un polynôme, il indique que la courbe correspondante aura une quadrature exacte ou se ramenant à celles des sections coniques si P se décompose en facteurs binômes ou trinômes [*op. cit.*, 63]. Mais, cet énoncé présente un caractère conditionnel, MOIVRE n'affirmant pas que la propriété est générale, qu'une telle décomposition est effectivement toujours possible.

Cependant, si l'on ne trouve pas chez lui d'énoncé général correspondant au TFA [37], il faut signaler un résultat intéressant de MOIVRE dans la décomposition réelle des polynômes réciproques [*op. cit.*, 67 sq.]. Il donne en effet une analyse presque complète de la décomposition d'un polynôme réciproque du 4^e degré $z^4 + pz^3 + qz^2 + pz + 1$ en un produit de deux trinômes réels. Considérant d'abord la décomposition sous la forme $(z^2 + az + 1)(z^2 + bz + 1)$, il constate que les coefficients a et b, obtenus par la méthode des coefficients indéterminés, peuvent être imaginaires, ce qui, dit-il, ne doit pas conduire à conclure que la factorisation en trinômes n'est pas possible. Il cherche alors dans ce cas la décomposition sous la forme $(z^2 + az + b)(z^2 + a/b\, z + 1/b)$, exprimant le fait que chaque racine a son inverse non plus dans le même mais dans l'autre facteur trinôme. Sa démonstration que a et b sont alors réels mériterait d'être précisée, mais le principe en est correct; MOIVRE donne ensuite la décomposition effective dans l'exemple du polynôme $z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 4z + 1$. Le résultat sur le degré 4 lui permet alors d'obtenir la décomposition pour le polynôme réciproque général de degré 6: $z^6 + pz^5 + qz^4 + rz^3 + qz^2 + pz + 1$ [*op. cit.*, 69]. Au-delà, si sa méthode permet de ramener le calcul des coefficients des facteurs d'un polynôme réciproque de degré pair à la résolution d'une équation de degré moitié, le caractère réel des racines de cette dernière équation n'est plus assuré.

MOIVRE a par ailleurs précisé ses idées sur la division des angles à l'occasion de deux lettres, aux contenus voisins, envoyées l'une le 29 avril 1740 à l'éditeur de *The elements of algebra* de SAUNDERSON [MOIVRE 1740], l'autre à W. JONES [MOIVRE 1738][38]. Ne se plaçant plus dans le seul cadre réel comme dans son ouvrage de 1730, il détermine les racines cubiques ou plus généralement les racines n-ièmes de l'expression $a + \sqrt{-b}$. Supposant cette racine n-ieme de la forme $x + \sqrt{-y}$, il trouve les valeurs de x et y grâce aux lignes trigonométriques d'arcs d'un cercle divisé en n parties égales. Il est clair, bien que MOIVRE ne l'indique pas ici, que ce résultat permettait de retrouver la factorisation réelle des trinômes du type $A + Bz^m + Cz^{2m}$ obtenue dans les *Miscellanea analytica.*

A l'issue de cette période 1702–1740, la situation se présente donc ainsi: des progrès ont été accomplis quant à la décomposition effective en facteurs réels linéaires ou quadratiques de certains types de polynômes (de la forme $x^n \pm a^n$ ou $x^{2n} + px^n + q$, notamment), ce qui a permis de réduire l'intégration de plusieurs classes de différentielles à la quadrature des sections coniques. Mais si, en particulier, les "contre-exemples" de LEIBNIZ sont reconnus comme erronés, il ne semble pas y avoir jusqu'à la fin des années 1730 d'affirmation claire de l'énoncé général du TFA. On trouve par contre dans les textes de l'époque une utilisation générale du TFL fonctionnant comme un principe *a priori.*

5. Le rôle d'Euler

Vers 1740, le problème général de la nature des intégrales des différentielles rationnelles reste donc non résolu; il est d'ailleurs souvent plutôt évité que posé. C'est ce que l'on peut constater, par exemple, dans l'important ouvrage de MACLAURIN *A treatise of fluxions* [1742]. L'auteur expose en détail les méthodes d'intégration pour les divers types de fractions rationnelles [39], remarquant, selon les cas, que la fluente s'exprime par des quantités algébriques, des arcs circulaires ou des logarithmes [1742 II, 628–645]. Puis, il formule ainsi l'une de ses conclusions dont la prudence est manifeste:

"And thus it appears how the fluent of

$$\frac{x^r\dot{x}}{x^{2n} - Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} - \text{etc.}}$$

is assignable by circular arcs and logarithms *when* the denominator is the product of any quadratic divisors "[*op. cit.*, 639] (souligné par nous).

Ainsi, évitant de se prononcer sur la généralité d'une telle factorisation du dénominateur (*cf.* MOIVRE, *supra*), MACLAURIN n'énonce pas de conclusion générale sur la nature de l'intégrale pour une fraction rationnelle quelconque. Il se contente de remarquer, à propos des polynômes du type $y^{2n} - 2zy^n + 1$ [*op. cit.*, 626], que, de ce que les facteurs d'une décomposition sont imaginaires, on ne doit pas conclure qu'on ne peut pas obtenir des diviseurs quadratiques réels. Ainsi MACLAURIN évite-t-il de se prononcer sur la propriété générale des polynômes qui correspond au TFA, alors que, par ailleurs, il utilise systématiquement le TFL [40].

Alors que celui de l'intégration des fractions rationnelles n'admet toujours pas de réponse complète et sûre, un autre problème de calcul intégral va également soulever la question du TFA et contribuer à en faire un objet central d'étude dans les années 1740: il s'agit de l'intégration des équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants, sans second membre. Ce problème est, on le sait, posé de manière générale et résolu par EULER dans son mémoire "De integratione aequationum differentialium altiorum graduum" [EULER, *Opera* (1) XXII, 108–124] publié en 1743. En cherchant les solutions sous la forme $y = e^{px}$ (p constante), il ramène la résolution de l'équation différentielle

$$(*) \qquad 0 = Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + N\frac{d^ny}{dx^n}$$

à celle de l'équation algébrique

$$(**) \qquad 0 = A + Bp + Cp^2 + \ldots + Np^n.$$

Supposant systématiquement la décomposition des polynômes en facteurs linéaires ou quadratiques à coefficients réels, EULER discute tous les cas, suivant que l'équation (**) a des racines simples ou multiples, réelles ou imaginaires. A chaque fois, il exhibe n intégrales particulières indépendantes de l'équation (*), exprimées en termes finis réels, et en déduit l'intégrale générale comme combinaison linéaire.

Ce travail a constitué une étape importante de l'histoire de la théorie des équations différentielles car EULER obtient, pour une classe étendue d'équations différentielles d'ordre n, une intégration complète "en des termes finis tout d'un coup sans avoir besoin des intégrations autant de fois réitérées qu'il y a de degrés des différentielles, et même, il n'entre dans l'intégrale d'autres quadratures que celle du cercle et de l'hyperbole", selon les termes de sa lettre à CLAIRAUT du 31 octobre 1741 [EULER, *Opera* (4A) V, 95].

Cependant, ce résultat général de calcul intégral apparaît clairement tributaire de l'exactitude du TFA, EULER utilisant systématiquement dans son mémoire le fait que les racines imaginaires peuvent être associées par paires dont la somme et le produit sont réels [*op. cit.*, 117–118]. Dès sa lettre de Petersbourg à JEAN BERNOULLI datée du 15 septembre 1739, EULER annonçait les découvertes précédentes sur les équations différentielles et manifestait sa conviction quant à la généralité de la décomposition de tout polynôme en facteurs réels du premier ou du second degré:

"Haec expressio $[1 - ap + bp^2 - cp^3 + dp^4 - ep^5 + \text{etc.} = 0]$ si fieri potest in factores simplices reales hujus formae $1 - \alpha p$ resolvatur: si autem hoc fieri nequeat, resolvatur in factores duarum dimensionum hujus formae $1 - \alpha p + \beta pp$, quae resolutio realiter semper institui potest, hocque modo prodibit superior expressio sub forma producti ex factoribus vel simplicibus $1 - \alpha p$ vel duarum dimensionum $1 - \alpha p + \beta pp$, omnibus realibus." [EULER, En. 1905, 37–38] [41].

Cela constitue, à notre connaissance, le premier énoncé général et *positif* du TFA. Dans un long échange de lettres avec EULER sur le thème des équations différentielles linéaires à coefficients constants [42], JEAN BERNOULLI, en s'appuyant notamment sur son mémoire de 1719 consacré au problème de COTES, cherchera à faire valoir une priorité sur plusieurs points. L'originalité d'EULER apparaît cependant indiscutable, par son soucisystématique d'exprimer l'intégrale complète de l'équation différentielle linéaire générale en termes finis réels, par l'utilisation et la formulation du TFA [43].

Dans une lettre du 1er septembre 1742 à NICOLAS (I) BERNOULLI, EULER réaffirme à propos de l'intégration d'une fraction rationnelle décomposée en éléments simples, que, dans le cas où il y a des racines imaginaires du dénominateur, non seulement elles sont en nombre pair mais que l'on peut les associer deux à deux de façon à obtenir un résultat réel. Il énonce alors à nouveau le TFA [44]:

> "Ut omnis expressio algebraica $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. quotcunque fuerit dimensionum, si non in factores simplices $p + qx$ omnes reales resolvi queat, ea saltem in factores trinomiales $p + qx + rxx$, qui omnes sint reales, semper resolubilis existat." [EULER, *Opera post.* I, 525] [45].

Mais il avoue en même temps qu'il n'a pas encore de démonstration générale de ce théorème. Dans sa réponse du 24 octobre de la même année, [EULER, FUSS II, 695], NICOLAS BERNOULLI conteste la valeur générale de cette factorisation réelle des polynômes [46]. Il avance ainsi le "contre-exemple" du polynôme $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$ dont les quatre racines imaginaires $1 + \sqrt{2 + \sqrt{-3}}$, $1 - \sqrt{2 + \sqrt{-3}}$, $1 + \sqrt{2 - \sqrt{-3}}$, $1 - \sqrt{2 - \sqrt{-3}}$ ne peuvent, pense-t-il, être associées deux à deux de façon à obtenir des facteurs quadratiques réels. EULER reconnaîtra, dans une lettre à CHRISTIAN GOLDBACH du 15 décembre 1742 [EULER, FUSS I, 170–171], que cet exemple l'avait, dans un premier temps, fait douter de son énoncé. Mais, dès sa lettre à N. BERNOULLI du 10 novembre 1742 [EULER, *Opera post.* I, 528 sq.], il réaffirme d'autant plus sa conviction de l'exactitude du TFA qu'il pense avoir maintenant une démonstration "rigoureuse" pour les polynômes de degré $\leqq 4$; en particulier, il donne explicitement les deux facteurs quadratiques réels du polynôme proposé par BERNOULLI. Insistant sur l'importance exceptionnelle de ce problème de factorisation réelle, tant pour l'intégration des différentielles rationnelles, que pour la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants, EULER exhorte alors N. BERNOULLI à contribuer à la recherche d'une solution qui y apporte une réponse définitive dans un sens positif ou négatif.

Cet appel d'EULER, on le verra, sera entendu; mais la réponse de N. BERNOULLI se fera attendre durant cinq mois. Dans l'intervalle, EULER va discuter du problème dans une correspondance avec CHRISTIAN GOLDBACH. Dans la lettre de Berlin du 15 décembre 1742, déjà évoquée, EULER informait GOLDBACH du contenu de sa réponse à N. BERNOULLI, et donnait l'énoncé général du théorème [47]. La réponse de GOLDBACH du 5 février 1743, depuis Petersbourg [EULER, FUSS I, 193], où il utilise l'exemple d'un polynôme du type $x^4 + px + q$, fait aussi apparaître son scepticisme quant à la possibilité de toujours combiner deux à deux les racines imaginaires d'une équation de manière à obtenir un résultat réel. Dans sa lettre du 26 février suivant, EULER, après avoir corrigé une erreur de calcul de GOLDBACH sur le polynôme correspondant aux quatre facteurs présentés [48], donne la décomposition en diviseurs quadratiques réels dans un cas englobant l'exemple numérique de celui-ci. Il annonce qu'il possède d'ailleurs maintenant une démonstration du théorème pour les équations de degré inférieur à 6 et pour celles de la forme

$$\alpha x^{5n} + \beta x^{4n} + \gamma x^{3n} + \delta x^{2n} + \varepsilon x^{n} + \zeta = 0.$$

Ces dernières affirmations reposent certainement sur sa conviction d'avoir démontré que toute équation du 4ᵉ degré pouvait se décomposer en un produit de deux facteurs réels [49]. EULER donne d'ailleurs explicitement dans sa lettre les deux facteurs qui correspondent aux quatre racines de l'équation générale du 4ᵉ degré [50]. Sans contredire explicitement EULER, la réponse de GOLDBACH du 23 mars 1743 [EULER, FUSS I, 210] témoigne d'une perplexité persistante.

Cet échange de lettres entre EULER, N. BERNOULLI et C. GOLDBACH dans la période fin 1742—début 1743, montre non seulement qu'il n'y avait pas alors d'accord entre les mathématiciens sur la valeur du théorème général de factorisation réelle des polynômes (c'est-à-dire le TFA), mais que le débat portait même sur le cas apparemment simple du 4ᵉ degré. Quarante ans après l'erreur de LEIBNIZ à propos du polynôme $x^4 + a^4$, on retrouvait donc les mêmes objections sur l'impossibilité éventuelle de combiner deux à deux les racines imaginaires pour obtenir des facteurs quadratiques réels. Certes, DESCARTES avait donné dans *La Géométrie* [1637, 383] une méthode pour décomposer un polynôme $x^4 + px^2 + qx + r$ en un produit de deux facteurs du second degré $x^2 + yx + a$ et $x^2 - yx + b$; elle consistait à utiliser le fait que le coefficient indéterminé y est solution de l'équation du 6ᵉ degré (cubique en y^2):

$$(***) \qquad y^6 + 2py^4 + (p^2 - 4r)\,y^2 - q^2 = 0.$$

Cependant, utilisant cette dernière équation essentiellement pour trouver d'éventuels facteurs à coefficients entiers, il n'avait pas posé le problème général de l'existence de la décomposition dans le cadre réel [51]. Dans sa réponse à EULER du 6 avril 1743 [EULER, FUSS II, 702–704], NICOLAS BERNOULLI reconnaissant l'erreur qui figurait dans sa lettre du 24 octobre 1742, en situe la source précisément à ce niveau de l'équation résolvante de DESCARTES: il n'avait pas vu, indique-t-il, que l'équation (***) a non seulement une racine réelle au moins en y^2, mais qu'elle en a toujours une positive [52]. Convaincu désormais que la proposition d'EULER est vraie. N. BERNOULLI affirme qu'elle peut être démontrée si l'on admet — ce que personne ne niera, dit-il — que toute quantité imaginaire est une fonction (sous-entendue élémentaire) de quantités de la forme $b \pm \sqrt{-a}$; car elle pourra alors s'écrire aussi sous la forme $B \pm \sqrt{-A}$, comme il le montre dans le cas des racines carrées et cubiques.

Dans sa réponse du 14 mai 1743 [*Opera post.* I, 536–537], EULER, tout en approuvant l'affirmation de BERNOULLI sur la forme $a \pm \sqrt{-b}$ de toute racine imaginaire, indique qu'il ne voit pas cependant comment le démontrer rigoureusement [53]. Poursuivant donc dans sa voie de recherche directe d'une décomposition réelle des polynômes, il fait la remarque intéressante que les coefficients des facteurs quadratiques d'un polynôme de degré $2n$ sont solutions d'équations de degré n dont les coefficients peuvent être choisis réels, comme racines de polynômes dont il est possible *a priori* sans calcul explicite, de déterminer le caractère impair du degré [54]. La réponse de NICOLAS BERNOULLI ne vient que six mois plus tard, le 29 novembre 1743 [EULER, FUSS II, 710–713], mais elle est très importante pour l'histoire du TFA. BERNOULLI montre d'abord les faiblesses de la méthode proposée par EULER qui, si elle conduit à des équations à coefficients réels, ne permet pas d'établir ce même caractère réel pour leurs racines, c'est-à-dire pour les coefficients des facteurs trinômes. Il propose alors de considérer plutôt, selon la méthode de DESCARTES, une équation de degré n dont on a annulé le terme de degré $n-1$, et de chercher directement à caractériser les équations satisfaites par les coefficients des facteurs quadratiques cherchés. Ainsi, pour l'équation du 4^e degré $x^4+qx^2+rx+s=0$, il montre la possibilité de la décomposer en deux équations quadratiques $x^2+\alpha x+\beta=0$ et $x^2-\alpha x+\delta=0$ à coefficients réels, à partir du fait que α^2 est solution d'une équation du 3^e degré à terme constant $-r^2$ négatif. C'est exactement la démonstration que présentera EULER dans son mémoire de 1749 [*op. cit.*, 93–94] [55]. De plus, NICOLAS BERNOULLI apporte dans sa lettre deux idées essentielles pour la démonstration générale. Il remarque que le problème de la décomposition en facteurs quadratiques des équations de degré quelconque se réduit à celle des équations de degré 2^n et que pour la décomposition de ces dernières en deux facteurs:

$$x^{2^{n-1}}+\alpha x^{2^{n-1}-1}-1+\text{etc.}\quad \text{et}\quad x^{2^{n-1}}-\alpha x^{2^{n-1}-1}-1+\text{etc.}$$

il s'agit de trouver une solution positive α^2 d'une équation de degré impair. N. BERNOULLI s'arrête alors devant la difficulté de traiter de telles équations de degré élevé (35, par exemple, si $n=3$) [56]. La réponse d'EULER du 4 février 1744 [EULER, *Opera post.* I, 539–540] montre qu'il a parfaitement compris l'importance des remarques de son correspondant, les utilisant immédiatement pour aller plus loin. En soulignant qu'il suffit, pour obtenir le résultat cherché, d'établir l'existence d'une racine α réelle, même si on ne sait pas la trouver effectivement, EULER montre que α vérifie une équation de degré pair à terme constant négatif. Il donne alors une "démonstration" qu'une telle équation a toujours une racine réelle, ce qui assure la conclusion. On constate donc que, grâce à l'aide de NICOLAS BERNOULLI, EULER dispose alors, au début de 1744, des éléments essentiels pour construire la démonstration du TFA qu'il publiera en 1751.

Mais auparavant va paraître, en 1748, le célèbre ouvrage *Introductio in analysin infinitorum* [EULER, 1748] qui, visant à établir la présentation du calcul infinitésimal sur une base algébrique, jouera, on le sait, un rôle historique considérable. Examinant son contenu relativement au problème de la factorisation des polynômes, nous y trouvons d'abord, dans le chapitre II, "De la transformation des fonctions" (*De transformatione functionum*), un énoncé du TFL:

> "*Perspicuum autem est* factorem duplicem duos complecti factores simplices, factorem triplicem tres simplices et ita porro. Hinc functio ipsius z integra, in qua exponens summae potestatis ipsius z est $=n$, continebit n factores simplices" [*Opera* (1) VII, 34] [57] (souligné par nous).

Cela est présenté comme une évidence, ne nécessitant pas de démonstration: c'est un principe. Un peu plus loin, apparaît un énoncé du TFA pour le 4^e degré:

"Si fuerit Q productum reale ex quator factoribus simplicibus imaginariis, tum idem hoc productum Q resolvi poterit in duos factores duplices reales" [*op. cit.*, 35] [58]. EULER en fournit une démonstration lacunaire, puisqu'il suppose *a priori* que Q peut toujours s'écrire comme produit de deux facteurs quadratiques à coefficients imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$ [59]. Elle semble cependant l'autoriser à généraliser:

"Quanquam autem eundem demonstrandi modum ad altiores potestates extendere non licet, *tamen extra dubium videtur* esse positum eandem proprietatem in quotcunque factores imaginarios competere, ita ut semper loco $2n$ factorum simplicium imaginariorum induci queant n factores duplices reales. Hinc omnis function integra ipsius z resolvi poterit in factores reales vel simplices vel duplices" [*op. cit.*, 37] [60] (souligné par nous).

Il ajoute: "Quod quamvis non summo rigore sit demonstratum, tamen eius veritas in sequentibus magis corroborabitur" [*op. cit.*, 37] [61], et renvoie en fait le lecteur au chapitre IX.

Dans ce chapitre, intitulé "De la recherche des facteurs trinômes" (*De investigatione factorum trinomialium*), EULER, en utilisant la formule dite "de Moivre": $(\cos\phi \pm \sqrt{-1}\sin\phi)^n = \cos n\phi \pm \sqrt{-1}\sin n\phi$ (n entier naturel), donne la décomposition en facteurs réels des polynômes des types $a^n \pm z^n$ et $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n}$. Il écrit alors: "*Confirmatur* ergo etiam his exemplis omnem functionem integram in factores reales sive simplices sive duplices resolvi posse" [*op. cit.*, 164] [62] (souligné par nous). Puis, utilisant le fait qu'un polynôme de degré impair a au moins une racine réelle, ainsi que le résultat du chapitre II sur les polynômes du 4^e degré déja évoqué, EULER peut affirmer que la même décomposition en facteurs réels simples ou doubles est toujours possible pour les polynômes des types

$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n}, \qquad \alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n}$$

et

$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n} + \zeta z^{5n}.$$

Il conclut: "Quare si ullum dubium mansisset circa huiusmodi resolutionem omnium functionum integrarum, hoc nunc *fere penitus tolletur*" [*op. cit.*, 165] [63] (souligné par nous).

Les expressions d'EULER que nous avons soulignées, montrent certes sa conviction quant à la justesse du TFA et sa volonté de la faire partager au lecteur, mais elles témoignent aussi de l'absence alors d'une démonstration générale du théorème. Comment expliquer une telle présentation incomplète dans un ouvrage fondamental paru en 1748? Essentiellement, nous semble-t-il, par l'écart entre les dates d'élaboration et de parution de l'*Introductio*. Dans une lettre à D'ALEMBERT du 28 septembre 1748, en réponse aux critiques de ce dernier, EULER indiquait en effet:

"Vos remarques sur mon Introduction ne sont que trop bien fondées; mais vous ne serez plus surpris des fautes qui s'y trouvent par rapport aux facteurs trinômes [...], quand je vous dirai que cet ouvrage a été presque trois ans à Lausanne

et que je l'avais achevé déjà quelque temps auparavant. Alors, j'avoue franchement que je n'avais pas encore une démonstration solide, que toute expression algébrique est résoluble en facteurs trinômes réels." [EULER, *Opera* (4A) V, 294].
Ces indications fournies par EULER sont cohérentes avec ce qui ressort de sa correspondance étudiée précédemment: le contenu de l'*Introductio* correspond sur ce sujet à l'état des connaissances d'EULER au cours de l'année 1743, tel qu'il apparaissait dans sa lettre à C. GOLDBACH du 26 février, avant qu'il ait reçu celle de N. BERNOULLI datée du 29 novembre.

Le grand mémoire d'EULER sur le TFA, "Recherches sur les racines imaginaires des équations", paraît, lui, en français, en 1751 dans les *Mémoires de l'académie de Berlin* pour 1749 [EULER 1749] [64]. Dans une première partie, EULER développe sa démonstration principale qui se situe dans la continuité du contenu de la correspondance étudiée précédemment: il s'agit d'établir directement la décomposition des polynômes en facteurs réels. Il inverse ensuite sa démarche [*op. cit.*, 114–121], en se proposant de montrer d'abord que toute racine d'une équation algébrique est de la forme $M + N\sqrt{-1}$ (M et N réels), pour en déduire la factorisation réelle. Ici est évoqué, de façon d'ailleurs ambiguë [65], le travail de D'ALEMBERT. EULER établit la stabilité des symboles $M + N\sqrt{-1}$, notamment dans les opérations algébriques fondamentales, d'une façon analogue à celle du mathématicien français, puis en déduit que toutes les racines imaginaires d'une équation sont de cette forme, en utilisant que leurs expressions générales en fonction des coefficients de l'équation, bien qu'inconnues, "ne contiennent point d'autres opérations que l'extraction des racines, outre les quatre opérations vulgaires, et l'on ne saurait soutenir que des opérations transcendantes s'y mêlassent" [*op. cit.*, 120]. Cette dernière affirmation, erronée, invalide bien sûr totalement la deuxième "démonstration" du TFA donnée par EULER [66].

Revenons à la première partie [*op. cit.*, 78–113] du mémoire, qui contient sa démonstration principale du TFA. Notre propos n'est pas ici d'exposer celle-ci en détail, il nous suffira d'expliciter la structure de la théorie des équations, telle qu'elle apparaît dans le texte, et la place qu'y tient le TFA. Cette démonstration inaugure la tradition des démonstrations dites algébriques du théorème; la partie analytique minimale nécessaire y est clairement isolée de la partie algébrique de la démonstration, cette dernière consistant à réduire le problème de la factorisation réelle à celui de l'existence d'une solution réelle d'une équation d'un type traité dans la partie analytique. Outre des lacunes mathématiques [67] qui seront comblées par LAGRANGE dans son mémoire "Sur la forme des racines imaginaires des équations" [1772], ce texte contient une lacune de principe que GAUSS, on le sait, a mise en évidence [1799, 14]. La démonstration d'EULER de la décomposition de tout polynôme en facteurs réels linéaires ou quadratiques, implique que toute racine est de la forme $a + b\sqrt{-1}$. Mais pour aboutir à ce résultat, il suppose *a priori* l'existence de n racines et il calcule avec, comme si elles étaient justiciables des opérations algébriques habituelles sur les nombres, alors que leur nature est inconnue. Il y a là une contradiction qui constitue une véritable lacune *logique* de la démonstration.

Examinons plus précisément les premières pages du mémoire, où EULER formule les énoncés généraux ainsi admis *a priori* [*op. cit.*, 78–80]. Remarquant que, pour trouver les racines d'une équation algébrique $x^n + Ax^{n-1} + \ldots + N = 0$, il suffit de chercher les facteurs simples de la forme $x + \alpha$ du polynôme du premier membre, EULER affirme:

"si nous posons ces facteurs: $(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma)(x + \delta)$ etc. il est d'abord clair que le nombre de ces facteurs doit être égal à l'exposant n, et partant le nombre de toutes les racines qui seront $x = -\alpha, x = -\beta, x = -\gamma, x = -\delta$ etc. sera aussi égal à ce même exposant n, puisqu'un tel produit

$$(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma)(x + \delta) \text{ etc.}$$

ne saurait devenir égal à zéro, à moins qu'un de ses facteurs n'évanouisse. Toute équation donc, de quelque degré qu'elle soit, aura toujours autant de racines, que l'exposant de la plus haute puissance contient d'unités".

Il précise, à l'aide d'un exemple simple, que "quand nous disons que chaque équation a autant de racines que l'exposant de son degré indique, cela se doit entendre de toutes les racines tant réelles qu'imaginaires [68]". Puis, réaffirmant plus loin:

"nous concevons donc, que de quelque degré que soit l'équation proposée $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + N = 0$, elle puisse toujours être représentée par une telle forme: $(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma)(x + \delta) \ldots (x + \nu) = 0$ où le nombre des facteurs simples soit $= n$",

il en déduit le système des n relations entre les coefficients $A, B, C, \ldots, N$ et les racines de l'équation.

On constate donc que dans ces premières pages de son mémoire, EULER présente trois énoncés:

(i) le résultat de factorisation linéaire, sans démonstration, considéré comme un principe évident;

(ii) le résultat sur le nombre des racines égal au degré de l'équation, qu'il déduit de (i), sans d'ailleurs que soit évoquée l'unicité de la décomposition;

(iii) les relations entre coefficients et racines, déduites aussi de (i), par un calcul sur les racines comme s'il s'agissait de nombres ordinaires.

Tout cela est présenté et fonctionne dans le mémoire d'EULER, comme un ensemble de propriétés générales constituant la base algébrique, indiscutée et indépendante du TFA, de la théorie des équations. Le contraste est donc net entre ces premières affirmations se rattachant au TFL, qui ne semblent pas poser de problème, et le contenu de la trentaine de pages suivantes où EULER multiplie les démonstrations sur la décomposition en facteurs réels. Etudiant divers cas particuliers, puis le cas général, présentant deux manières de ramener les polynômes de degré quelconque à ceux de degré 2^n, EULER n'hésite pas à donner à l'exposé de sa démonstration principale un caractère répétitif, cherchant par tous les moyens à convaincre le lecteur de la justesse du TFA. Le mémoire imprimé d'EULER fait ainsi apparaître clairement la dualité qui existait alors dans l'architecture de la théorie des équations.

On a pu constater que, durant toutes ces années 1740, alors que le TFA fait l'objet de recherches nombreuses, longues et difficiles, comportant des controverses entre mathématiciens, l'énoncé du TFL, lui, n'est à aucun moment contesté ni démontré; ces deux résultats se situent bien sur des axes historiques différents. Les importantes contributions de LAGRANGE [1772] et de LAPLACE [1795, 63–65] à l'histoire des démonstrations algébriques du TFA, maintiendront ce caractère dual de la théorie des équations, qui sera remis en cause explicitement par GAUSS à la fin du siècle [1799]. Mais, avant d'aborder ce point, nous allons examiner l'apport de D'ALEMBERT.

6. Le travail fondateur de d'Alembert

La démonstration du théorème fondamental de l'algèbre par D'ALEMBERT figure, on le sait, dans la première partie d'un mémoire intitulé "Recherches sur le calcul intégral" qui, envoyé à l'Académie de Berlin le 6 décembre 1746 [69], a paru en 1748 dans les *Mémoires* de cette institution pour l'année 1746. Ce travail sur le TFA se situe explicitement dans le cadre de l'étude de l'intégration des fractions rationnelles et plus précisément de la réduction générale de ces intégrales à la quadrature du cercle ou de l'hyperbole. L'intégration en termes finis des différentielles algébriques — intégration exacte ou réduction à la quadrature des sections coniques, à leur rectification, *etc.* — est un thème dont D'ALEMBERT s'est beaucoup occupé, dès le début de sa carrière. Des mémoires portant sur ce sujet, restés inédits, avaient déjà été présentés à l'Académie des sciences de Paris en 1739 [70], 1740 [71] et 1745. Ce dernier mémoire, intitulé "Recherches sur le calcul intégral" nous intéresse particulièrement ici. Annoncé dès la séance du 23 décembre 1744, il est lu, en six fois, entre le 6 mars et le 7 avril 1745 et une copie du texte présenté figure dans les registres académiques [*PV* 1745, 102–123].

Ce texte contient une grande partie (avec souvent une correspondance mot à mot) de l'article de même titre publié dans les *Mémoires* de Berlin pour 1746 ainsi que des passages des suites parues dans les recueils pour 1748 et 1750. On ne trouve pas par contre dans ce manuscrit la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre qui figure dans le mémoire imprimé à Berlin. Cependant, il n'a pas, semble-t-il, été remarqué (*cf.* [EULER, *Opera* (4A) V, 254]) que ce travail de 1745 commençait lui aussi, dans le premier paragraphe consacré à l'intégration des fractions rationnelles, par une "démonstration" de ce théorème, très différente de celle de 1746 [*PV* 1745, 102–103] (nous la publions en annexe à cet article). D'ALEMBERT, systématisant et généralisant les connaissances de l'époque, montre d'abord la stabilité des symboles $a + b\sqrt{-1}$ (a et b réels) par les opérations algébriques et analytiques élémentaires [72]. Pour lui, une fonction "quelconque" de grandeurs du type $x + y\sqrt{-1}$ pourra donc toujours s'écrire sous la forme $p + q\sqrt{-1}$ (corollaire 7). Il en déduit qu'une racine imaginaire d'une équation est toujours une quantité de cette forme $p + q\sqrt{-1}$ et, montrant qu'il en existe alors nécessairement une autre du type $p - q\sqrt{-1}$, il parvient à la proposition (numéro 2): "Une équation dont les racines sont imaginaires, peut se diviser en trinômes, dont les coefficients soient réels".

Cette "démonstration" de D'ALEMBERT est évidemment erronée puisqu'elle suppose que la racine d'une équation algébrique s'exprime en termes finis à l'aide des fonctions élémentaires explicites, mais elle est intéressante à plusieurs égards. Elle confirme le lien étroit qui existait à l'époque dans l'esprit des mathématiciens entre les deux résultats généraux: sur la forme des "quantités" imaginaires, c'est-à-dire des fonctions explicites des symboles $a + b\sqrt{-1}$ d'une part et sur celle des "racines" imaginaires des équations algébriques d'autre part (D'ALEMBERT ne distinguant d'ailleurs pas ces deux notions en 1745). EULER, NICOLAS BERNOULLI, on l'a vu précédemment, ainsi que l'abbé de GUA [1741, 480–481], ont dans ce sens exposé ou esquissé des démonstrations du TFA reposant sur le résultat, admis alors, que toute racine d'une équation algébrique s'exprimait à l'aide de radicaux. Mais cette première "démonstration" de D'ALEMBERT permet aussi de préciser chronologiquement l'évolution de la pensée de l'encyclopédiste qui l'année suivante, en 1746, y a substitué une démonstration directe du résultat sur les "racines", sans supposition sur leur expression en termes finis en fonction des coefficients. En l'absence de démonstration envisageable sur ce dernier point, la dissociation des deux énoncés, sur les "racines" et sur les "quantités", lui est apparue indispensable à la recherche d'une démonstration rigoureuse de ce qui va devenir le théorème fondamental de l'algèbre. C'est ce qu'il indique clairement dans ses *Observations* datées du 15 juin 1752:

"j'ai démontré
1° que toute quantité imaginaire d'une forme quelconque, peut se réduire à $A + B\sqrt{-1}$, A et B étant des quantités réelles.
2° que toute racine imaginaire d'une équation quelconque pouvait s'exprimer par $A + B\sqrt{-1}$, et qu'en ce cas il y en avait une autre représentée par $A - B\sqrt{-1}$, d'où j'ai conclu que toute quantité algébrique rationnelle, ou si l'on veut, toute équation était réductible en facteurs trinômes réels [...].

A l'égard de la seconde proposition, il semble d'abord qu'elle soit une suite nécessaire de la première, mais il faudrait pour cela avoir démontré [...] que l'on peut toujours supposer une forme imaginaire quelconque à une racine non réelle; cette supposition peut être fort vraisemblable, mais elle est en même temps fort difficile ⟨et impossible peut-être⟩ [73] à démontrer rigoureusement. J'ai donc cherché une méthode directe, et indépendante de la forme qu'on peut donner aux racines imaginaires des équations." [EULER, *Opera* (4A) V, 343–344].

La seconde démonstration de D'ALEMBERT [1746] est, elle, bien connue et a été déjà commentée (voir notamment [PETROVA 1974], [HOUZEL 1989]). Rappelons l'énoncé donné alors du théorème (Proposition II) et l'idée de la démonstration:

"Soit un multinôme quelconque $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + fx + g$, tel qu'il n'y ait aucune quantité réelle qui étant substituée à la place de x, y fasse évanouir tous les termes, je dis qu'il y aura toujours une quantité $p + q\sqrt{-1}$ à substituer à la place de x, et qui rendra ce multinôme égal à zéro" [*op. cit.*, 189].

La méthode de D'ALEMBERT consiste d'abord à considérer la courbe d'équation $G(x, y) = x^m + ax^{m-1} + \ldots + fx + y = 0$ et à développer x en série de puissances fractionnaires par rapport à y au voisinage de zéro: $x = ay^{m/n} + by^{r/s} +$ etc. Il obtient ainsi que pour y voisin de 0, positif ou négatif, x apparaît sous la forme $p + q\sqrt{-1}$ [74]. En raisonnant par l'absurde et grâce à une application de la propriété locale précédente au point d'ordonnée α supposée représenter la dernière valeur des y tels que la valeur de x associée soit de la forme $p + q\sqrt{-1}$ avec p et q réels, il étend le résultat à un y réel quelconque. En prenant $y = g$, il obtient alors l'existence d'au moins un x de la forme $p + q\sqrt{-1}$ vérifiant l'équation $P(x) = x^m + ax^{m-1} + \ldots + fx + g = 0$. En déduisant, comme dans le manuscrit de 1745, que si P est divisible par $x - p - q\sqrt{-1}$, il l'est aussi par $x - p + q\sqrt{-1}$, D'ALEMBERT donne l'autre forme du TFA (Proposition III):

"Les mêmes choses étant supposées que dans l'art. 6 [Proposition II], je dis que le multinôme pourra toujours se diviser en facteurs $xx + hx + i$, $xx + lx + m$, etc. dont les coefficients soient réels" [*op. cit.*, 190–191] [75].

Le texte de D'ALEMBERT a été considéré par la plupart des historiens comme la première tentative sérieuse de démonstration du TFA à être publiée [76]. Cependant, les lacunes de cette preuve ont aussi été mises en évidence: notamment, elle n'assure ni la convergence locale de la série de puissances fractionnaires représentant x, ni le fait que la borne α de l'ensemble des y considérés possède la même propriété. Mais, par-delà ces lacunes dont les commentateurs cités signalent, à juste titre, qu'elles peuvent être comblées, se pose la question essentielle du statut du théorème chez D'ALEMBERT. GAUSS, en effet, a présenté contre cette démonstration une objection de même type que celle avancée au sujet des exposés d'EULER et de LAGRANGE: "D'Alembert nullum dubium movet de *existentia* valorum ipsius x [...], sed illam supponit, solamque *formam* istorum valorum investigat" [GAUSS 1799, 9] [77]. L'opinion s'est alors répandue que l'on avait affaire, chez D'ALEMBERT, à un théorème sur la forme des racines imaginaires [78], et que le théorème fondamental de l'algèbre n'avait acquis un statut de théorème d'existence qu'avec les travaux de GAUSS.

En réalité, nous pensons qu'il est possible de dire que le TFA a bien chez D'ALEMBERT, contrairement à ce qui se passe chez ses contemporains, un statut de théorème d'existence [79]. Déjà au niveau de l'énoncé du théorème, il y a un écart significatif entre une formulation d'EULER comme: "toutes les racines imaginaires que [l'équation algébrique] peut avoir, sont toujours comprises dans cette forme générale $M + N\sqrt{-1}$" [1749, 119], où l'existence des racines imaginaires apparaît nettement admise *a priori*, avant même la détermination de leur nature, et celle de D'ALEMBERT: s'il n'y a pas de racine réelle, "il y aura toujours une quantité $p + q\sqrt{-1}$ à substituer à la place de x" et qui annulera le polynôme [1746, 189]. Cependant, cet argument portant sur la forme de l'énoncé serait à lui seul insuffisant car l'on trouve parfois chez D'ALEMBERT des formulations ambiguës, se rapprochant de celles d'EULER. On peut constater, plus profondément, que si EULER avait besoin, pour conduire sa démonstration algébrique du TFA, de supposer l'énoncé du TFL c'est-à-dire l'existence *a priori* des racines dans un surcorps, il n'en est pas de même pour D'ALEMBERT. Celui-ci, avec sa méthode analytique ou, si l'on veut, analytico-géométrique, n'a en effet pas besoin d'utiliser le TFL et peut démontrer directement l'existence d'au moins une racine dans l'ensemble des quantités $p + q\sqrt{-1}$. De plus, on a une autre source importante qui permet de confirmer le statut du TFA et de préciser la structure de la théorie des équations chez D'ALEMBERT, ce sont ses articles de l'*Encyclopédie* [80], particulièrement les entrées "Equation", "Imaginaire", "Racine", et "Fraction rationnelle". Tous ces textes ne sont certes pas d'une égale clarté et nous utiliserons essentiellement l'article "Equation", paru dans le tome V en 1755, où D'ALEMBERT développe sa théorie de manière particulièrement longue et cohérente. Après une première partie consacrée à une traduction de l'article correspondant de l'encyclopédie de CHAMBERS, inspiré de l'*Arithmetica universalis* de NEWTON, D'ALEMBERT se propose de compléter l'exposé de la théorie des équations, car: "quoique la matière ait été fort maniée dans un grand nombre d'ouvrages, nous espérons montrer, écrit-il, qu'elle a été traitée d'une manière insuffisante à plusieurs égards, et la présenter d'une manière presque entièrement nouvelle".

Indiquons les grandes lignes de l'exposé de D'ALEMBERT sur le sujet qui nous concerne ici. Considérant l'équation à résoudre $x^m + px^{m-1} + \ldots + r = 0$, il "suppose" qu'on ait trouvé une quantité a, "positive ou négative, réelle ou imaginaire", qui, substitutée à x, satisfasse l'équation. Il montre ensuite, par la division euclidienne, que $(x - a)$ divise le premier membre de l'équation et en recommençant le raisonnement sur les quotients successifs, il parvient classiquement à la factorisation linéaire $(x - a)(x - b)(x - c) \ldots = 0$ de l'équation. Suit alors cette remarque, essentielle:

"'La démonstration précédente, dira-t-on, suppose qu'il y a toujours une quantité a possible, qui substituée à la place de x dans une quantité algébrique, $x^m + px^{m-1}$, etc. fera évanouir tous les termes. Sans doute; mais cette supposition est légitime. J'ai démontré le premier, *Mém. de l'ac. de Berlin*, 1746, qu'il y avait toujours en effet une telle quantité, laquelle sera ou réelle, ou égale à $m + n\sqrt{-1}$, m et n étant réelles, et m pouvant être $=0$. *Cette proposition fondamentale de l'algèbre et même du calcul intégral* [...] n'avait été démontrée par personne avant moi" (souligné par nous).

Ce passage montre que l'encyclopédiste écarte la supposition d'existence *a priori* des racines (correspondant alors à l'énoncé du TFL), en considérant que cette existence est assurée par son théorème de 1746. D'ALEMBERT en déduit alors la factorisation linéaire:

"De là il s'ensuit qu'une équation est le produit d'autant de quantités simples, $x - a, x - b, x - c$, etc. qu'il y a d'unités dans le degré de l'équation; quelques-unes des quantités a, b, c, ou toutes, peuvent marquer des quantités réelles, égales ou inégales, imaginaires simples comme $n\sqrt{-1}$, ou mixtes imaginaires comme $m + n\sqrt{-1}$."

Il poursuit alors son exposé en montrant que la décomposition du polynôme en facteurs linéaires est unique (il en donne d'ailleurs deux démonstrations). Cette preuve de l'unicité rend rigoureuse la conclusion sur le nombre des racines égal au degré:

"dans toute équation, écrit D'ALEMBERT, l'inconnue ne peut avoir qu'autant de valeurs, soit réelles, soit imaginaires, qu'il y a d'unités dans le degré de l'équation. Voilà encore une proposition qu'aucun auteur n'avait suffisamment prouvée."

L'encyclopédiste souligne en outre qu'il a démontré "le premier", la proposition selon laquelle les racines imaginaires "vont toujours deux à deux", $a - b\sqrt{-1}$ étant racine si $a + b\sqrt{-1}$ en est une. Il en déduit que les équations de degré impair ont au moins une racine réelle, résultat dont il donne aussi la démonstration connue basée sur l'utilisation de la propriété des valeurs intermédiaires (bien sûr non prouvée alors rigoureusement).

On peut donc constater que l'apport de D'ALEMBERT dans ce domaine, ne se réduit pas au fait d'avoir publié le premier une tentative sérieuse de démonstration du TFA; il réside surtout dans le statut qu'il donne à ce théorème et dans la place que celui-ci prend alors dans la théorie des équations algébriques. En effet, la démonstration du TFA de D'ALEMBERT, si elle comporte des lacunes mathématiques, ne contient pas d'erreur de principe, de cercle vicieux, bref de lacune logique [81]. En particulier, contrairement à ce qui se passe dans les démonstrations algébriques d'EULER et de LAGRANGE, le TFL, en tant qu'énoncé autonome et *a priori*, ne figure pas chez D'ALEMBERT, le TFA apparaissant alors, chez lui, comme un véritable théorème d'existence des racines. Par ailleurs, au niveau de la structure de la théorie générale des équations algébriques, D'ALEMBERT la réorganise et l'unifie sur la base du TFA, théorème d'existence qui en assure le fondement rigoureux et qui apparaît alors explicitement comme la "proposition fondamentale de l'algèbre" [82]. Le TFA se présente chez D'ALEMBERT sous les formes équivalentes (a′), (b′) et (c) (voir *supra* l'introduction), mais aussi sous les formes (a) et (b). Il faut en effet souligner que dans un mémoire postérieur, il a étendu le théorème au cas où les coefficients du polynôme sont de la forme $p + q\sqrt{-1}$ [D'ALEMBERT 1769, 74–75] [83]. Quand on sait que GAUSS n'a pas fourni une telle extension du TFA avant sa quatrième démonstration de 1850 [84], on peut mesurer la profondeur de l'apport de D'ALEMBERT, qui maîtrise bien l'idée de clôture de l'ensemble des expressions $a + b\sqrt{-1}$, ensemble dont il montre la stabilité par les opérations algébriques explicites ou implicites (et par les opérations transcendantes élémentaires).

Ainsi, un fondement solide est donné à la théorie des équations algébriques, mais c'est un fondement analytique. Situation paradoxale qui a beaucoup gêné les contemporains de D'ALEMBERT, qui voulaient qu'une démonstration purement algébrique fût à la base d'un théorème fondamental d'algèbre [85]. Cependant, c'est précisément ce caractère analytique qui a permis de sortir du cercle vicieux dominant à l'époque sur cette question, compte tenu de l'absence alors de démonstration possible du TFL. Avec les travaux contemporains de D'ALEMBERT et d'EULER, on est ainsi entré, au milieu du XVIII^{e} siècle, dans l'histoire (au sens strict) du TFA, le premier mathématicien inaugurant la tradition des démonstrations dites analytiques, le second celle des démonstrations dites algébriques du théorème.

7. La théorie moderne et la place de Gauss

Il ne s'agira pas dans ce dernier paragraphe de suivre, même à grands traits, l'évolution de la théorie au cours des XIX^{e} et XX^{e} siècles. Nous ferons seulement quelques remarques sur certains points qui concernent les rapports du TFA et du TFL et la conception de l'histoire du TFA.

Dans l'introduction de son quatrième mémoire consacré au TFA et publié en 1850, GAUSS caractérise ainsi lui-même son premier travail sur la question:

"Die im Jahre 1799 erschienene Denkschrift, *Demonstratio* [...], hatte einen doppelten Zweck, nämlich erstens, zu zeigen, dass sämtliche bis dahin versuchte Beweise dieses wichtigsten Lehrsatzes der Theorie der algebraischen Gleichungen ungenügend und illusorisch sind, und zweitens, einen neuen vollkommen strengen Beweis zu geben." [*Werke* III, 73] [86].

Une telle description a été largement reprise par les historiens [87]. Par un double mouvement de dévalorisation des démonstrations antérieures, parce qu'elles ne donneraient pas au TFA le statut de théorème d'existence, et de surestimation de la rigueur et de la modernité de celles de GAUSS, les travaux de celui-ci ont été souvent présentés comme constituant à la fois un commencement et une sorte d'achèvement de la théorie. Sans nier l'importance particulière de l'œuvre de GAUSS dans l'histoire du TFA, il apparaît cependant nécessaire de relativiser cette interprétation historique.

Comme l'a rappelé le mathématicien S. SMALE dans un article récent [1981, 4–5], la démonstration de GAUSS de 1799 n'a pas la rigueur absolue affirmée, mais comporte des lacunes qui n'ont d'ailleurs pas été comblées avant le XX^e siècle (voir [OSTROWSKI 1927]). Ceci, joint à l'analyse du statut du théorème chez D'ALEMBERT donnée précédemment, réduit sensiblement la distance souvent instaurée entre les travaux des deux savants. Certaines critiques faites par GAUSS à la démonstration de D'ALEMBERT sont d'ailleurs loin d'être pertinentes. Ainsi le reproche de l'usage de considérations géométriques ou concernant les séries, pour établir le théorème fondamental de la théorie des équations ("theorema fondamentale doctrinae aequationum") [GAUSS 1799, 8 et 10], apparaît curieux de la part de GAUSS, quand on sait qu'il s'apprête lui aussi, dans ce même mémoire, à présenter une méthode analytico-géométrique pour éviter l'utilisation *a priori* du théorème de factorisation linéaire. En outre, l'affirmation selon laquelle D'ALEMBERT supppose l'existence de la racine et en cherche seulement la forme [*op. cit.*, 9] n'est pas justifiée, on l'a vu au paragraphe précédent. D'ailleurs, GAUSS conclut l'ensemble de son analyse en affirmant que le nerf de la démonstration de D'ALEMBERT n'est pas brisé par ces objections [*op. cit.*, 11]. Son opinion sur le travail de D'ALEMBERT émise en 1799, ne correspondait donc pas exactement à celle, très négative, formulée en 1850 à l'égard de toutes les démonstrations du XVIII^e siècle.

On peut d'ailleurs constater une similitude de démarche des deux mathématiciens au plan de l'organisation de la théorie des équations algébriques, unifiée sur la seule base du TFA, l'utilisation d'un énoncé autonome du TFL étant écartée. Déterminant l'existence et les propriétés essentielles des racines, ce théorème, constitue alors le fondement unique et rigoureux de toute la théorie, et apparaît donc bien comme la "proposition fondamentale de l'algèbre" [D'ALEMBERT, *Equation*] ou comme le "théorème fondamental de la théorie des équations" [GAUSS 1799, 10]. Ces deux appellations fleuriront dans les titres des nombreux mémoires consacrés à ce sujet au XIX^e siècle (voir, par exemple, les bibliographies de LORIA [1891 a, b]). Cependant, tant par le contenu mathématique de la démonstration proposée du TFA que par ses analyses critiques et l'accent mis explicitement sur les questions d'existence, il faut noter que le mémoire de GAUSS de 1799 représente certainement l'expression d'une plus grande conscience de la nature des problèmes et constitue un progrès substantiel dans la théorie, notamment au niveau de la rigueur [88].

Si l'on considère maintenant la critique de GAUSS à l'encontre des démonstrations algébriques antérieures, on constate, là encore, à la fois sa pertinence et la nécessité de la nuancer. Pertinence quand il objecte à la deuxième démonstration d'EULER, qu'il semble plus judicieux de conjecturer que les racines d'une équation de degré >4 ne peuvent pas en général s'exprimer à l'aide de radicaux [*op. cit.*, 17–18]. Pertinence aussi quand, dans la première démonstration d'EULER ainsi que dans celles de FONCENEX et de LAGRANGE, il décèle une même erreur logique consistant à admettre *a priori* que l'équation de degré n se décompose en n facteurs linéaires et possède donc n racines avec lesquelles on peut calculer [*op. cit.*, 14 et 19–20]. Cependant, GAUSS va jusqu'à considérer leur raisonnement comme basé sur une véritable pétition de principe ("petitio principii") [GAUSS 1816, 40], comme si EULER ou LAGRANGE supposaient. à peu de chose près, ce qu'ils étaient censés démontrer [89]. I. BACHMACOVA, notamment, a remarqué que cette appréciation de GAUSS, qui conduirait à ruiner totalement les démonstrations de ses prédécesseurs, était inexacte, car "on peut construire un corps de décomposition pour chaque équation algébrique sans recourir à l'existence du corps des nombres complexes" [1960, 215]. Dit autrement, ce que supposent EULER et LAGRANGE c'est l'énoncé du TFL, non celui du TFA, et les travaux postérieurs montreront effectivement la possibilité d'établir le premier théorème indépendamment du second, permettant ainsi de donner un fondement exact à ce type de démonstration du TFA.

En 1816, on le sait, GAUSS parvenait, en évitant l'usage du TFL, à donner une démonstration algébrique du TFA, techniquement compliquée mais rigoureuse (si on suppose établi le théorème des valeurs intermédiaires qui en constitue la partie "transcendante"). KRONECKER s'est inspiré de la méthode de GAUSS dans son mémoire *Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik* [90] où, à l'aide de congruences de polynômes, il montre que l'on peut décomposer en un produit de facteurs linéaires, tout polynôme à coefficients rationnels ou appartenant à un domaine de rationalité ("Rationalitätsbereich") [KRONECKER 1887a] [91].

STEINITZ a donné de ce théorème qui correspond à l'existence d'un corps de décomposition, une version plus générale, pour un polynôme dont les coefficients sont dans un corps commutatif quelconque, obtenant la forme actuelle de ce que l'on a appelé ici le TFL [1910, §§ 6 et 8] [92]. Quelque temps après, les travaux d'E. ARTIN et O. SCHREIER ont conduit à l'établissement d'une théorie des corps réels (ou ordonnés) dans laquelle figure la généralisation suivante du TFA:

"Besitzt in einem geordneten Körper K jedes positive Element eine Quadratwurzel und jedes Polynom ungeraden Grades mindestens eine Nullstelle, so ist der durch Adjunktion von i entstehende Körper algebraisch abgeschlossen" [1927, 89] [93].

Ce théorème s'énonce aussi: si K est un corps réel clos, alors le corps $K(i)$ est algébriquement clos [94]. ARTIN et SCHREIER font certes encore référence à GAUSS [95], mais leur démonstration de ce théorème, qui correspond à celle de la partie algébrique du TFA [96], se fonde, elle, sur l'utilisation du résultat d'existence de n racines dans une extension de K, pour un polynôme donné de degré n dans $K[x]$, c'est-à-dire, sur le TFL. On constate ainsi que, tout en représentant un moment essentiel de l'histoire du TFA, par les diverses démonstrations apportées et par le souci manifesté d'un fondement logiquement cohérent appuyé sur un véritable théorème d'existence, les travaux de GAUSS ne constituent ni le premier ni le dernier mot de la théorie.

Dans la première édition de son ouvrage resté classique, *Moderne Algebra*, VAN DER WAERDEN notait, à propos du TFA (considéré comme l'énoncé: le corps C est algébriquement clos):

> "In der modernen Algebra hat der Satz seine fundamentale Bedeutung verloren, weil man von der Existenz der Wurzeln in einem anderen, mehr symbolischen Sinn [...], zu reden gelernt hat und daher auch, ohne auf komplexe Zahlen Bezug zu nehmen, von den Eigenschaften der Wurzeln einer Gleichung reden kann." [1930, 229 (n. 2)] [97].

Si le théorème a perdu de fait dans la théorie moderne son statut de "théorème fondamental de l'algèbre", bien que l'appellation subsiste très largement [98], ce changement n'est pas seulement dû à ce que l'algèbre ne s'identifie plus à la théorie des équations algébriques à coefficients réels ou complexes; cela est aussi lié, comme le suggère VAN DER WAERDEN, au fait que le TFA a été supplanté par le TFL comme théorème général d'existence des racines d'un polynôme. Ainsi trouve-t-on dans la théorie moderne des équations algébriques, une situation de dualité qui n'est pas sans rappeler, à un autre niveau, celle qui existait au XVIII^{e} siècle chez EULER, LAGRANGE ou LAPLACE, avec deux énoncés distincts: le TFL et le TFA. Le premier, purement algébrique, exprimant les propriétés des polynômes quelconques et lié aux notions de décomposition et d'adjonction formelle, assure l'existence générale des racines et la possibilité de calculer avec dans un surcorps. Le second correspond aux propriétés de clôture des corps particuliers $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{C}$ et comporte un contenu non algébrique irréductible; il peut d'ailleurs être démontré directement d'une manière analytique, notamment dans le cadre de la théorie des fonctions de variable complexe [99].

8. Conclusion

Nous avons indiqué combien, à notre avis, l'historiographie classique du TFA reste de manière excessive influencée par les travaux et les remarques de GAUSS en la matière et ne prend pas suffisamment en compte les progrès essentiels réalisés en algèbre à la fin du XIX^{e} et au début du XX^{e} siècle. La distinction mathématique qui apparaît aujourd'hui entre le TFA et ce que l'on a appelé ici le TFL (théorème de KRONECKER) permet en effet de reprendre l'analyse historique et conduit, nous espérons l'avoir montré, à une nouvelle conception de la structure globale de l'histoire du TFA, dans le cadre de celle de la théorie générale des équations algébriques.

La présentation courante, tout en valorisant particulièrement la contribution de GAUSS, place sur un même axe historique les divers travaux effectués sur le thème de l'égalité entre le degré d'un polynôme et le nombre de ses racines [100]. Elle conduit ainsi à une histoire du TFA qui comporte une préhistoire allant du début du XVII^e jusqu'à la fin du XVIII^e siècle (avec un moment fort au milieu de ce siècle) et une histoire (au sens strict) débutant avec le mémoire de GAUSS de 1799. Mais, on l'a vu, cette conception ne permet pas de rendre compte de la présence dans la plupart des travaux du XVIII^e siècle sur le sujet, d'une dualité essentielle entre deux énoncés de statuts différents sur la factorisation des polynômes; dualité qui révèle l'existence de deux filiations distinctes dans l'histoire de la théorie des équations algébriques. Pour l'une de ces filiations, qui correspond au TFL, la préhistoire s'étend sans doute du début du XVII^e jusqu'à la fin du XIX^e siècle où les travaux de KRONECKER en inaugurent l'histoire (au sens strict). Pour l'autre, correspondant au TFA, sa préhistoire débute plus tardivement, vers 1700 chez LEIBNIZ, et apparaît beaucoup plus courte puisqu'elle s'achève un demi-siècle après, lorsque les mémoires de D'ALEMBERT et d'EULER ouvrent l'histoire (au sens strict) du théorème.

Nous avons vu, de plus, le rôle joué par le calcul intégral dans l'émergence du problème du TFA et dans son développement au cours de la première moitié du XVIII^e siècle. Il existe un lien historique essentiel entre le problème analytico-géométrique de l'intégration en termes finis de certaines classes d'expressions ou d'équations différentielles (réductibilité des intégrales aux quadratures de l'hyperbole ou du cercle) et la question d'algèbre réelle (réductibilité des polynômes en produits de facteurs réels du 1er ou du 2^e degré) qui va constituer le fondement de la théorie correspondante. On trouve ainsi à l'origine de l'histoire du TFA cette influence extérieure au domaine de la théorie algébrique des équations, dans le cadre de laquelle se situait au contraire alors les énoncés liés au TFL.

Le déroulement historique fait donc apparaître également la différence de nature de ces deux théorèmes. Certes, on trouve dans l'histoire de la théorie des équations algébriques des interactions importantes entre des travaux correspondant au TFL et d'autres concernant le TFA, portant particulièrement sur les aspects algébriques de ce dernier [101]. Cependant, et c'est là l'aspect essentiel sur lequel nous voulions insister ici, le TFA et le TFL sont fondamentalement situés sur des axes historiques distincts; leurs histoires n'ont ni la même origine, ni le même rythme, ni la même durée.

Remerciements: Je tiens à exprimer ma gratitude à Madame COLETTE COTTÉ ainsi qu'à ma femme MARTINE, pour leur aide précieuse dans l'établissement de plusieurs traductions. Je remercie aussi CHRISTIAN HOUZEL pour sa lecture attentive du manuscrit et ses remarques pertinentes.

Notes

1. Les articles de LORIA [1891 a, b] et celui de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* [1907] peuvent fournir des matériaux pour un tel travail.

2. On peut citer encore: [STRUIK 1969, 81, 99, 115], [SMITH 1925, 473–474], [HOFMANN 1967 I, 108–109; II, 124].

3. La notion d'histoire d'un théorème va sans doute moins de soi que celle d'histoire d'une théorie. Aussi n'est-il pas inutile de préciser quelque peu le vocabulaire utilisé dans cet article: nous parlons de début de l'"histoire (au sens strict)" quand, dans le cadre d'une théorie, apparaît un texte où figurent à la fois un énoncé relativement précis et une démonstration assez sérieuse (même si elle est lacunaire) du théorème. Nous nommons alors "préhistoire" du théorème la séquence antérieure où figurent de premières formes du théorème, manquant d'exactitude ou de généralité; c'est une période qui non seulement précède mais prépare l'histoire (au sens strict). Enfin, dans l'histoire (au sens large), ou "histoire" tout court, nous comprenons tous les éléments figurant dans la préhistoire ou dans l'histoire (au sens strict) du théorème.

4. La dénomination de "théorème fondamental de l'algèbre" mériterait à elle seule une étude historique. Voir *infra* quelques remarques à ce sujet dans les paragraphes 6 et 7.

5. Nous avons pris l'option de moderniser l'orthographe dans les citations en langue française.

6. Il était déjà connu que l'existence d'une racine équivalait à l'existence d'un diviseur linéaire correspondant.

7. Nous n'aborderons pas ici la question de savoir si GIRARD a été réellement le premier à formuler un tel énoncé.

8. C'est en particulier l'interprétation qui figure dans [*ESM* 1907, 191].

9. L'intérêt historique de ces pamphlets a été signalé par J. ITARD [1969].

10. Cependant, on sait que WALLIS accorde souvent la priorité à HARRIOT sur DESCARTES.

11. L'acceptation du TFL était sans doute facilitée par la croyance d'alors en la possibilité de résolution des équations à l'aide des seules opérations algébriques élémentaires.

12. Notons cependant la présence alors dans la théorie, d'un énoncé général correct (mais sans démonstration satisfaisante) concernant le nombre nécessairement pair des racines imaginaires (voir, par exemple, [REYNEAU 1708 I, 68–69]).

13. Voir *infra*, note 24.

14. "Une fois ôtés les termes non fractionnaires, je prétends pouvoir montrer qu'une telle expression est égale à une somme de fractions ayant pour numérateur une constante, ne faisant pas intervenir x, et un dénominateur simple, c'est-à-dire toutes de la forme $\frac{a}{x+b}$" [PARMENTIER 1989, 388].

Dans l'ensemble de cet article, nous faisons figurer en note la version française des citations en latin ou en allemand, la référence éventuelle correspondant à la traduction indiquée dans la bibliographie (si elle existe).

15. "Grâce à l'algèbre, je suppose connus, de quelque manière que ce soit, les diviseurs simples de toute expression rationnelle non fractionnaire. [...] Ainsi, en admettant la résolution algébrique des équations, nous disposons des diviseurs des formules; mon analyse infinitésimale suppose l'analyse algébrique comme le supérieur suppose l'inférieur" [*op. cit.*, 388–389].

16. LEIBNIZ n'a, semble-t-il, jamais douté de la possibilité d'obtenir finalement une telle résolution algébrique des équations.

17. La correspondance entre LEIBNIZ et J. BERNOULLI en 1702 (voir lettres des 10 juin, 24 juin et 12 août dans [LEIBNIZ, *MS* III_2, 702 sq.]) atteste du caractère indépendant de leurs découvertes sur ce sujet.

18. Sa correspondance avec P. VARIGNON [BERNOULLI, *Briefwechsel* II, III] permet de donner quelques précisions à cet égard. Il apparaît notamment que c'est VARIGNON qui a soulevé le problème des racines égales dans une lettre du 18 décembre 1702 où il indique

à J. BERNOULLI, sur un exemple de racine double, que l'on parvient alors, en cherchant les coefficients, à un système d'équations incompatibles. J. BERNOULLI répond le 20 janvier 1703 que sa méthode n'est pas en cause, la contradiction à laquelle on aboutit révélant seulement que la différentielle contient encore une partie intégrable absolument qu'il faut d'abord séparer. Plus tard, dans une lettre du 16 juin 1703 à VARIGNON, BERNOULLI se plaint que sa solution "du cas de la contradiction" n'ait pas été insérée dans le mémoire des *Acta eruditorum* ([BERNOULLI 1703]) et suggère que LEIBNIZ s'en est inspiré pour son propre travail sur le cas des racines égales publié dans la même livraison. On remarquera que la publication dans les *MARS* 1702, contient, elle, un court paragraphe évoquant ce cas "de la contradiction" [BERNOULLI 1702, 394], qui ne figurait pas dans le texte original lu à l'Académie [*PV* 1702, 459]. Cependant, on est loin de la théorie générale systématique du cas des racines multiples donnée par LEIBNIZ.

Nous remercions vivement JEANNE PEIFFER, coéditeur de la correspondance de J. BERNOULLI et P. VARIGNON, de nous avoir communiqué la transcription de ces lettres, qui seront publiées dans le troisième volume de [BERNOULLI, *Briefwechsel*].

19. On sait d'ailleurs qu'une controverse opposera LEIBNIZ et J. BERNOULLI en 1712–1713, sur le thème des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires, la question n'ayant été clarifiée que plus tard par EULER.

20. "Nous sommes donc logiquement conduits à la question la plus importante, toutes les quadratures rationnelles peuvent-elles se ramener à celle de l'hyperbole et du cercle, question qui dans l'analyse que je suis en train de mener, peut se formuler ainsi: toute équation algébrique, autrement dit, toute expression réelle entière, rationnelle par rapport à l'indéterminée peut-elle se décomposer en diviseurs réels simples ou plans?" [*op. cit.*, 399].

21. Mis à part le cas simple des polynômes, on ne savait alors intégrer en termes finis guère plus que quelques cas de différentielles (dites binômes ou trinômes) du type $kx^m A^p dx$ avec $A = a + bx^n$ ou $A = a + bx^n + cx^{2n}$, pour certaines valeurs rationnelles particulières de m, n et p.

22. Autrement dit, les polynômes du 1^{er} ou du 2^e degré sont-ils les seuls polynômes irréductibles dans $\boldsymbol{R}[x]$? Il faut noter qu'existait alors dans la théorie des équations un domaine de recherches sur la décomposition de certains polynômes en facteurs "irréductibles" de tel ou tel type. Etait posé particulièrement le problème de la détermination des diviseurs "rationnels" de polynômes à coefficients entiers, dans la lignée des travaux algébrico-géométriques de DESCARTES [1637, Livre III] (voir [REYNEAU I, Livre IV], [NEWTON, *MP* V, 370–386]). NEWTON étudie de plus la factorisation de certains polynômes à l'aide de diviseurs "irrationnels" de types particuliers, notamment ceux dont les coefficients ne font intervenir que l'opération racine carrée (*cf. infra* note 32). Dans l'ensemble, ces recherches sur la réduction des équations étaient, au XVII^e siècle, orientées vers le calcul effectif des facteurs pour certains polynômes particuliers, surtout à coefficients entiers. Chez LEIBNIZ, par contre, est posé le problème *général* de la décomposition dans le cadre réel et de la caractérisation de la classe correspondante des polynômes irréductibles.

23. Si, pour LEIBNIZ, les racines imaginaires vont par deux et que leur nombre est pair, condition nécessaire pour obtenir un résultat réel (affirmation classique à l'époque), elles ne sont donc pas considérées comme conjuguées deux à deux au sens actuel.

24. Les degrés de complexité apparaissent liés à l'ordre des radicaux selon les puissances successives de 2, suivant une conception qui rappelle celle de J. PRESTET évoquée au paragraphe précédent. Notons que PRESTET avait ainsi abordé, de fait, la question de la nature des polynômes irréductibles à coefficients réels, mais sans envisager le problème du TFA.

25. "Or les logarithmes véritables coïncident avec la quadrature de l'hyperbole, les

logarithmes imaginaires du premier degré avec la quadrature du cercle. Mais comme il existe une infinité de logarithmes imaginaires de degrés supérieurs, [...] il existe donc également autant de degrés de quadratures indépendantes de celles du cercle et de l'hyperbole" [*op. cit.*, 404].

26. On peut citer notamment ROBIN E. RIDER, dans l'introduction à son excellent inventaire bibliographique sur l'algèbre entre 1500 et 1800 [RIDER 1982, 8].

27. SMITH fait aussi référence à cette lettre dans [COTES 1722, 113 sq.].

28. Il s'agit des formes I et II figurant dans la table de NEWTON des courbes dont les aires s'expriment à l'aide des sections coniques ([1704] et [*MP* VIII, 136–137]). Notons que COTES, dans une lettre à NEWTON du 18 août 1709, avait corrigé deux erreurs figurant dans cette table [NEWTON, *Correspondence V*, 3–4].

29. Ce type de fluxion généralise les cas V et VI de la même table de NEWTON ([1704] et [*MP* VIII, 140–141]).

30. COTES annonce encore un résultat identique pour les fluxions ayant le même numérateur et le quadrinôme $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta}$ pour dénominateur.

31. Par exemple, si on divise en 5 parties égales grâce aux points A, B, F, D, E, la circonférence du cercle de rayon CA unité, alors, si K est un point de CA, on a: $CA^5 - CK^5 = KA \times KB \times KF \times KD \times KE = KA \times KB^2 \times KF^2$ d'où l'on déduit, en posant $CK = x$:

$$1 - x^5 = (1 - x)(1 - 2x \cos 72^\circ + x^2)(1 - 2x \cos 144^\circ + x^2).$$

La relation géométrique dans le cercle détermine à la fois l'existence de la factorisation et le calcul des coefficients.

32. Les cas considérés par NEWTON conduisaient, après changement de variable, à des polynômes dont les facteurs ne dépassaient pas le degré deux. Un manuscrit inédit [*MP* IV, 205–213] fait apparaître ses essais pour décomposer des polynômes du type $1 \pm x^m$ en facteurs quadratiques, dès les années 1675–1676. En partie infructueuses, ces recherches de NEWTON montrent cependant qu'il a connu vraisemblablement assez tôt la décomposition réelle de $x^4 + a^4$ (voir aussi [*MP* V, 86 et 386 sq.], [*Correspondence*, 156]). Soulignons que, chez lui aussi, ces travaux algébriques apparaissent liés aux recherches de calcul intégral.

33. Le dénominateur est un trinôme $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}$ c'est-à-dire, à l'époque, une expression comprenant trois termes dont les exposants de la variable sont en progression arithmétique, mais pas nécessairement entiers. Dans le présent problème, c'est le changement de variable qui conduit à étudier un trinôme ("simple") à exposants entiers naturels: $e + fz^{\lambda} + gz^{2\lambda}$.

34. Au sens strict, ce raisonnement montre seulement l'unicité de la factorisation, une vérification étant nécessaire pour en assurer l'existence.

35. Il en est de même pour l'intégrale quadrinôme, proposée aussi par TAYLOR, puisque $e + fz^{\lambda} + gz^{2\lambda} + hz^{3\lambda}$ est toujours le produit d'un facteur binôme du type $(A + Bz^{\lambda})$ et d'un facteur trinôme $(C + Dz^{\lambda} + Ez^{2\lambda})$.

36. La décomposition donnée par MOIVRE dans le cas des racines égales, comprenant des termes $N/(1 - mx)^{\lambda}$ avec degré $(N) < \lambda$, est moins bonne que celle de LEIBNIZ. MOIVRE affirme d'ailleurs n'avoir connu que tardivement, en 1722, les articles de ce dernier sur la question (voir [MOIVRE 1722]).

37. Par contre, comme cela apparaît notamment dans sa décomposition des fractions rationnelles (voir [MOIVRE 1722], [MOIVRE 1730, 56 sq.]), il suppose *a priori* un principe général de factorisation qui correspond au TFL.

38. La lettre à JONES est en fait postérieure (voir [SCHNEIDER 1968]).

39. Utilisant notamment les travaux de LEIBNIZ [1702, 1703] et ceux de MOIVRE [1730], l'exposé de MACLAURIN sur ce sujet est sans doute l'un des meilleurs de l'époque, avant que ne paraisse celui d'EULER dans l'*Introductio* [1748], qui restera classique.

40. On peut lire ainsi dans son ouvrage posthume *A treatise of algebra*: "And an equation of any dimension may be considered as produced by the multiplication of as many simple equations as it has dimensions" [MACLAURIN 1748, 132].

41. "On résout si possible cette expression en facteurs simples réels de la forme $1 - \alpha p$: mais si cela ne peut être fait, on la résout en facteurs de dimension deux de la forme $1 - \alpha p + \beta pp$, résolution qui peut toujours être faite; de cette façon, l'expression ci-dessus pourra apparaître sous la forme d'un produit de facteurs simples $1 - \alpha p$ ou de dimension deux $1 - \alpha p + \beta pp$, tous réels".

42. Les lettres de J. BERNOULLI sont datées des 9 décembre 1739; 19 janvier, 16 avril, 20 juin, 31 août et 18 octobre 1740; 18 février et 28 octobre 1741 (voir [EULER, En. 1897 et 1905] et [EULER, FUSS II]).

43. S'il affirme sa priorité pour la décomposition de $x^4 + a^4$ en deux facteurs quadratiques réels. J. BERNOULLI, dans ces lettres, ne se prononce pas clairement sur le TFA.

44. Certains auteurs ont cité cette lettre comme marquant la première formulation de l'énoncé général du TFA chez EULER (voir, par exemple, [EULER, *Opera* (4A) V, 253]).

45. "Pour toute expression algébrique [...] quelle que soit sa dimension, si elle ne peut pas être résolue en facteurs simples $p + qx$ tous réels, il est du moins toujours possible de la résoudre en facteurs trinômes $p + qx + rxx$ tous réels."

46. Cela a été signalé notamment par E. CARTAN dans [*ESM* 1907, 191].

47. Des auteurs ont cité cette lettre comme correspondant à l'apparition de l'énoncé général du TFA chez EULER (voir, par exemple, [SMITH 1929, 292]).

48. Il obtient $x^4 + 24\sqrt{2}\,x - 20$ alors que GOLDBACH avait écrit $x^4 + 7x - 20$.

49. En faisant $x^n = z$, on se ramène à une équation du 5[e] degré qui a toujours une racine réelle et la décomposition annoncée se réduit alors à celles des polynômes de la forme $x^n \pm a^n$ et $x^{2n} + px^n + q$ réalisées par COTES et MOIVRE.

50. EULER présente ici de façon concentrée la démonstration lacunaire qui figurera dans l'*Introductio* (voir *infra*).

51. *Cf. supra*, note 22.

52. On trouve la même erreur, par exemple, dans [SAUNDERSON 1740 II, 738].

53. EULER redira la même chose dans sa lettre ultérieure du 4 février 1744. Par contre, dans son mémoire imprimé [EULER 1749], il donnera une deuxième démonstration du TFA qui sera du type préconisé par N. BERNOULLI (voir *infra*).

54. Son raisonnement, soulignons-le, suppose l'utilisation du TFL.

55. Supérieure à celle qu'EULER donnait auparavant et qui figurera encore dans l'*Introductio* [1748, ch. II], cette démonstration n'est cependant pas sans lacune. En effet, outre le fait qu'elle admet *a priori* l'existence d'une factorisation du polynôme, elle ne considère pas le cas particulier $r = 0$ où l'on peut avoit α réel sans que β et δ ne le soient.

56. Curieusement, N. BERNOULLI est arrêté par le même type de difficulté que celle qui l'avait conduit à l'erreur de sa lettre du 24 octobre 1742 sur l'équation du 4[e] degré.

57. "*Il est clair d'ailleurs* qu'un facteur double renferme deux facteurs simples; un facteur triple, trois facteurs simples, ainsi de suite. Donc une fonction entière de z, dans laquelle l'exposant de la plus haute puissance $= n$, contiendra n facteurs simples" [LABEY 1796, 16].

58. "Si Q est un produit réel de quatre facteurs simples imaginaires, je dis que ce même produit pourra être résolu en deux facteurs doubles réels" [*op. cit.*, 17].

59. D'ALEMBERT n'a pas manqué de souligner ce point dans sa lettre du 7 septembre 1748 [EULER, *Opera* (4A) V, 289–290], où il reproche à EULER de supposer "ce qui a besoin d'être démontré".

60. "Quoique la même manière de démontrer ne s'étende pas aux puissances plus élevées, *il paraît cependant hors de doute* que cette propriété convient également à un nombre quelconque de facteurs, de sorte qu'à la place de $2n$ facteurs simples imaginaires, on

pourra supposer un nombre n de facteurs doubles réels. Donc, toute fonction entière de z pourra être décomposée en facteurs réels, ou simples ou doubles." [*op. cit.*, 18–19].

61. "Si la vérité de cette proposition n'est pas démontrée ici en toute rigueur, elle acquerra dans la suite un nouveau degré de force" [*op. cit.*, 19].

62. "Ces exemples, sont *propres à confirmer* que toute fonction entière peut être résolue en facteurs réels, soit simples, soit doubles" [*op. cit.*, 115].

63. "Ainsi, s'il restait quelque doute sur la décomposition de toutes les fonctions entières, il sera maintenant *presque entièrement levé*" [*op. cit.*, 115–116].

64. Cependant, EULER avait présenté dès le 10 novembre 1746, devant l'Académie, une version latine de son travail dont il a été remarqué [EULER, *Opera* (4A) V, 349] qu'elle devait être quelque peu différente de la version française. Cette dernière comprend en effet une allusion au mémoire de D'ALEMBERT sur le même sujet qui n'a été envoyé à l'Academie de Berlin qu'en décembre 1746.

65. Ce que D'ALEMBERT relèvera dans un texte de 1752 (voir [EULER, *Opera* (4A) V, 345]).

66. On peut se demander pourquoi EULER présente dans son mémoire imprimé une telle preuve qu'il considérait encore comme non rigoureuse dans sa correspondance avec N. BERNOULLI (voir *supra*). Son affirmation sur l'expression des solutions par radicaux figurant déjà dans un article de 1732 [EULER *Opera* (1) VI, 1–19], on peut penser que l'élément nouveau intervenu entre-temps est qu' EULER dispose maintenant d'une démonstration générale de la stabilité de l'ensemble des expressions $a + b\sqrt{-1}$ par l'opération racine n-iéme. Ce résultat qui, bien que déjà prouvé par MOIVRE vers 1740, n'apparaît pas dans l'*Introductio*, figure précisément dans les mémoires de D'ALEMBERT de 1746.

67. La démonstration comporte essentiellement deux lacunes mathématiques. La première consiste en l'absence de démonstration solide des deux caractéristiques essentielles de l'équation vérifiée par le premier coefficient inconnu des facteurs — son degré "impairement pair" et son terme constant négatif —, qui permettent d'assurer l'existence d'une racine réelle. La seconde lacune réside dans l'affirmation d'EULER selon laquelle si ce premier coefficient est réel, alors les autres coefficients sont aussi nécessairement réels comme fonctions rationnelles du premier.

68. EULER écrit: "On nomme quantité imaginaire, celle qui n'est ni plus grande que zéro, ni plus petite que zéro, ni égale à zéro" [*op. cit.*, 79]. Autrement dit, c'est une quantité non réelle. Mais, il ajoute: "ce sera donc quelque chose d'impossible, comme par exemple $\sqrt{-1}$, ou en général $a + b\sqrt{-1}$; puisqu'une telle quantité n'est ni positive, ni négative, ni zéro". La formulation est ambiguë, mais $a + b\sqrt{-1}$ ne représente sans doute ici pour lui qu'un exemple, sinon la démonstration qui suit n'aurait pas de sens.

69. D'après la lettre de D'ALEMBERT à EULER du 24 mars 1747 [EULER, *Opera* (4A) V, 262].

70. D'après le rapport du 29 juillet 1739 signé par CLAIRAUT et BRAGELOGNE (voir [*PV* 1739, 145–146]), ce mémoire visait à corriger des lacunes concernant des intégrales binômes qui figuraient dans l'*Analyse démontrée* du père REYNEAU [1708 II], ouvrage dont une réédition, posthume, venait de paraître.

71. Ce mémoire, "Recherches sur l'intégration des fractions rationnelles", présenté à l'Académie en décembre 1740, a fait l'objet d'un rapport le 18 janvier 1741 signé par CLAIRAUT et DORTOUS DE MAIRAN (voir [*PV* 1741, 23–24]). D'après le résumé figurant dans ce rapport, on peut penser, avec G. MAHEU [1967], que l'essentiel du contenu de ce mémoire se retrouve dans les chapitres X à XII du tome I du *Traité de calcul intégral* de BOUGAINVILLE [1754].

72. Il n'est pas inutile de remarquer que ces résultats, qui figurent dans le mémoire *Sur la cause générale des vents* [D'ALEMBERT 1747, 141–143] sont ainsi apparus auparavant dans le cadre d'un mémoire de mathématiques pures.

73. Les mots que nous avons ajoutés entre crochets figurent, barrés, sur le brouillon autographe du manuscrit (Bibliothèque de l'Institut, Ms 1787, f° 22). Ils nous paraissent confirmer l'évolution de D'ALEMBERT par rapport à son mémoire de 1745 et rendre plus claire sa motivation dans la recherche d'une démonstration directe du TFA, motivation apparemment différente d'ailleurs de celle qui a guidé EULER (*cf. supra*, note 66).

74. Ici, D'ALEMBERT utilise le résultat sur la stabilité des symboles $a + b\sqrt{-1}$ par les opérations algébriques explicites: produit, somme, extraction de racines.

75. On remarque que les deux énoncés (propositions II et III) de D'ALEMBERT de 1746, comme celui de 1745, portent sur les polynômes sans racine réelle (donc de degré pair). C'est, en effet, le cas difficile auquel se réduit immédiatement la démonstration du cas général où il y a aussi éventuellement des racines réelles. On trouve l'énoncé du TFA pour un polynôme quelconque dans [*Equation*] (voir *infra*), et dans [*Fraction rationnelle*] sous la forme: "toute quantité algébrique rationnelle $mx^p + rx^{p-1} + \ldots + t$ d'un degré quelconque, est réductible ou en facteurs simples, tels que $x + a$, ou en facteurs trinômes, tels que $xx + bx + c$, a, b, c étant des quantités réelles".

76. La démonstration d'EULER, contemporaine, n'a paru que trois ans plus tard.

77. "D'ALEMBERT ne met pas en doute l'*existence* des valeurs de x [...], mais il la suppose, et cherche seulement la *forme* de ces valeurs".

78. Citons, par exemple, D. J. STRUIK: "As a matter of fact, d'Alembert did not even prove the existence of a root, but only showed the form the root takes" [1969, 99].

79. Notons d'ailleurs que GAUSS, en 1799, nuance son propos en ajoutant à la phrase citée précédemment: "Quamvis vero haec objectio per se gravissima sit, tamen hic ad solam dictionis formam pertinet, quae facile ita corrigi potest" [*op. cit.*, 9] ("Bien que cette objection soit en elle-même très grave, cela ne concerne ici que la manière de dire qui peut être facilement corrigée").

80. Faute d'un traité ou même d'un mémoire complet sur le sujet, l'*Encyclopédie* est une source privilégiée permettant d'avoir une vue d'ensemble sur l'œuvre algébrique de D'ALEMBERT, qui est loin d'être mineure. Il faut évidemment, comme l'a remarqué justement G. MAHEU [1967], distinguer à chaque fois l'apport propre de D'ALEMBERT, de ce qui est simplement transposé de l'encyclopédie de CHAMBERS.

81. Cela ressort clairement des articles de S. PETROVA [1974] et C. HOUZEL [1989].

82. Et "même du calcul intégral", ajoute-t-il, le TFA permettant en effet d'établir un résultat général — celui sur la réduction de toutes les quadratures rationnelles à celles du cercle et de l'hyperbole —, dans un domaine où il y en avait peu.

83. Cela a été signalé par E. CARTAN dans [*ESM* 1907, 192].

84. Notons qu'Argand étudiera, lui, le cas des coefficients complexes dès 1806 (voir, par exemple, [PETROVA 1974]).

85. LAGRANGE, par exemple, écrit en 1772: "Cette démonstration [de D'ALEMBERT] est très ingénieuse et ne laisse, ce me semble, rien à désirer du côté de l'exactitude; mais elle est indirecte, étant tirée de la considération des courbes et des suites infinies, et elle porte naturellement à croire qu'on peut arriver au même but par une analyse plus simple, fondée uniquement sur la théorie des équations" [1772, 479].

86. "Le mémoire paru en 1799, *Demonstratio* [...], avait un double but, d'abord de montrer que toutes les démonstrations tentées jusque-là du plus important théorème de la théorie des équations algébriques, étaient insuffisantes et illusoires, et ensuite de donner une nouvelle preuve parfaitement rigoureuse".

87. Voir, par exemple, les deux citations données dans notre introduction. On peut ajouter cette affirmation de D. E. SMITH, accompagnant une présentation de la phrase précédente de GAUSS: "The significance of his first proof in the development of mathematics is made clear by his own words in the introduction to the fourth proof [...]"

[SMITH 1929, 292–293]. La vision de GAUSS de la place de son propre travail dans l'histoire est ainsi reprise telle quelle, de manière acritique.

88. Il n'est sans doute pas superflu de signaler que la première démonstration du TFA donnée par CAUCHY (lue à l'Académie le 23 décembre 1816 et publiée en janvier 1817), s'inspirait de celle de GAUSS, en remplaçant les considérations géométriques par l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions continues réelles. C'est, très vraisemblablement, la démonstration qu'il a enseignée dans son cours de l'Ecole polytechnique en mars 1817, alors qu'il commençait à rénover les bases de l'analyse (voir [GILAIN 1989, 9]).

89. Un exposé comme celui de [*ESM* 1907] garde encore, au début du XX^{e} siècle, la marque de cette critique de GAUSS, notamment en ne distinguant pas clairement, au niveau de leur valeur, la première démonstration d'EULER (lacunaire) et la seconde (erronée).

90. Pour l'analyse des rapports entre les travaux de GAUSS et ceux de KRONECKER, on pourra se reporter à [BACHMACOVA 1960].

91. Chez KRONECKER, la théorie des équations algébriques apparaît unifée sur la base de son théorème, désigné comme théorème fondamental de l'arithmétique générale et qui est une forme du TFL. L'énoncé classique du TFA est d'ailleurs, lui, écarté par KRONECKER qui, voulant fonder la théorie sur la seule base des nombres rationnels et des constructions finies à partir d'eux, est conduit à restreindre le champ des coefficients des équations et à modifier l'énoncé du problème de l'existence des racines (voir [KRONECKER 1887b]).

92. STEINITZ montre aussi dans ce mémoire le théorème, plus fort, qui porte son nom et énonçant qu'un corps (commutatif) quelconque admet une clôture algébrique [1910, § 17].

93. "Si dans un corps ordonné K chaque élément positif possède une racine carrée et chaque polynôme de degré impair a au moins un zéro, alors le corps obtenu par l'adjonction de i est algébriquement clos" (i désignant une racine de l'équation $x^2 + 1 = 0$).

94. Certains auteurs ont aussi nommé "théorème fondamental de l'algèbre" cette généralisation (par exemple, ZASSENHAUS [1967]). Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, nous réservons ici l'appellation TFA au théorème qui énonce que $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}(i)$ est algébriquement clos, ce qui reste l'usage le plus courant.

95. Il s'agit clairement d'une allusion à la démonstration de 1816 où GAUSS, écrivant le degré du polynôme f considéré sous la forme $2^m \cdot k$ (k impair) fait un raisonnement par récurrence sur l'exposant m en introduisant un polynôme auxiliaire F qui, si a, b, c, *etc.* sont les racines de f, a pour racines les expressions du type $(a + b)\,x - ab$ (avec x indéterminé). En réalité, ces éléments importants de la méthode de GAUSS figurent déjà, à peu de chose près, dans la démonstration donnée par LAPLACE [1795, 63–65].

96. Cette caractérisation peut justifier la dénomination de "théorème d'EULER-LAGRANGE" employée par BOURBAKI [*Eléments*, "Algèbre", ch. 6, 39], encore qu'il eût été juste de ne pas oublier LAPLACE [*op. cit.*] qui a fourni la démonstration algébrique la plus simple.

97. "Dans l'algèbre moderne, le théorème a perdu sa signification fondamentale, parce qu'on a appris à parler de l'existence des racines dans un sens différent, plus symbolique [...], et par conséquent aussi, on peut parler des propriétés des racines d'une équation, sans prendre en considération les nombres complexes."

98. Cette appellation, courante dans les traités américains ou soviétiques, est par contre souvent remplacée en France par celle de "théorème de D'ALEMBERT" ou "de D'ALEMBERT-GAUSS".

99. Il faut cependant remarquer que dans de très nombreux ouvrages, même consacrés uniquement à l'algèbre, le TFA est présenté aujourd'hui avec une démonstration

analytique. L'architecture de la théorie des équations algébriques à coefficients réels ou complexes qui apparaît alors, se rapproche plutôt de celle donnée par D'ALEMBERT.

100. Nous remercions UMBERTO BOTTAZZINI d'avoir attiré notre attention sur l'article historico-mathématique de R. REMMERT [1983]. Bien que restant, pour l'essentiel, dans le cadre de l'historiographie traditionnelle du TFA, certaines remarques de l'auteur (notamment sur GAUSS) nous semblent correspondre aux nôtres.

101. Ainsi, par exemple, le mémoire de GAUSS de 1816, contenant sa deuxième preuve du TFA, a fortement inspiré KRONECKER pour sa démonstration du TFL. Inversement, le TFL dans sa version générale donnée par STEINITZ, a déterminé un renouveau des démonstrations algébriques du TFA, qui ont pu alors allier rigueur et simplicité.

Bibliographie

Abréviations

- [*PV*] *Procès-verbaux de l'Académie royale des sciences de Paris* (manuscrits).
- [*MARS*] *Mémoires de l'académie royale des sciences de Paris.*
- [*Encyclopédie*] *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, Diderot et d'Alembert éd., Paris, 17 vol. de texte, 1751–1765.
- [*ESM*] *Encyclopédie des sciences mathématiques*, Paris-Leipzig. [1907] article I_9, "Les fonctions rationnelles" par R. LE VAVASSEUR (avec des notes historiques de G. ENESTRÖM et E. CARTAN notamment), t. I, vol. **2**, fasc. 1, 1907; d'après l'article de E. NETTO dans *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, IB1a, Leipzig, 1899.

ALEMBERT Jean le Rond d'

[1745] "Recherches sur le calcul intégral", *PV* 1745, 102–123.

[1746] "Recherches sur le calcul intégral", *Mémoires de l'académie de Berlin* 1746 (1748), 182–224.

[1747] *Réflexions sur la cause générale des vents*, Paris, 1747.

[1769] "Recherches sur le calcul intégral", *MARS* 1769 (1772), 73–146.

[*Equation*] article "Equation" de l'*Encyclopédie* (t. V, 1755); même type de référence pour les autres articles de l'*Encyclopédie.*

ARTIN Emil et SCHREIER Otto

[1927] "Algebraische Konstruktion reeller Körper", *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* **5** (1927), 85–99.

BACHMACOVA Isabella

[1960] "Le théorème fondamental de l'algèbre et la construction des corps algébriques", *Archives internationales d'histoire des sciences*, **13** (1960), 211–222.

BERNOULLI Jean (I)

[*Opera*] *Opera omnia*, 4 vol., Lausanne et Genève, 1742.

[*Briefwechsel*] *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Birkhäuser, Basel; vol. **1** (1955), vol. **2** (1988), vol. **3** (à paraître).

[1702] "Solution d'un problème concernant le calcul intégral", *MARS* 1702, 289–297; cité d'après [*Opera* I, 393–400].

[1703] "Problema exhibitum a Jo. Bernoullo", *Acta eruditorum* (janvier 1703), 26–31.

[1719] "Clar. Taylori mathematici angli problema analyticum, quod omnibus geometris non-anglis proposuit", *Acta eruditorum* (juin 1719), 256–270; cité d'après [*Opera* II, 402–418].

BOUGAINVILLE Louis Antoine de

[1754] *Traité du calcul intégral*, t. I, Paris, 1754.

BOURBAKI Nicolas
[*Histoire*] *Eléments d'histoire des mathématiques*, Paris, Hermann, 1960.
[*Eléments*] *Eléments de mathématique*, Paris.
BOYER Carl B.
[1968] *A history of mathematics*, New York-London-Sydney, John Wiley and Sons, 1968.
COTES Roger
[1716] Lettre à W. Jones du 5 mai 1716, dans "An account of a book intituled *Harmonia mensurarum*", *Philosophical transactions* **32** (1722), 139–150.
[1722] *Harmonia mensurarum*, R. SMITH éd., Cambridge, 1722.
DESCARTES René
[1637] *La Géométrie*, Leyde, 1637.
EULER Leonhard
[*Opera*] *Leonhardi Euleri Opera omnia*, Berlin-Göttingen-Leipzig-Heidelberg, (1911–). Exemple: référence (1) VI = série 1, tome VI.
[1748] *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne, 1748, t. I; cité d'après [*Opera* (1) VIII].
Trad. fr., J. B. LABEY, *Introduction à l'analyse infinitésimale*, Paris, 1796.
[1749] "Recherches sur les racines imaginaires des équations", *Mémoire de l'académie de Berlin* 1749 (1751), 222–288; cité d'après [*Opera* (1) VI, 78–150].
[FUSS] *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^e siècle*, 2 t., P. H. FUSS éd., Petersbourg, 1843.
[*Opera post.*] *Leonhardi Euleri Opera postuma mathematica et physica*, 2 t., P. H. et N. FUSS éd., Petersbourg, 1862.
[En. 1897] G. ENESTRÖM: "Sur la découverte de l'intégrale complète des équations différentielles linéaires à coefficients constants", *Bibliotheca Mathematica*, (2) **11** (1897), 43–56.
[En. 1905] G. ENESTRÖM: "Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I Bernoulli", *Bibliotheca Mathematica*, (3) **6** (1905), 16–87.
GAUSS Carl Friedrich
[*Werke*] *Carl Friedrich Gauss Werke*, 12 vol., Leipzig-Berlin (1863–1933).
[1799] "Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse", Helmstadt, 1799; *Werke* III, 1–30.
[1816] "Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse", Göttingen, 1816; *Werke* III, 31–56.
GILAIN Christian
[1989] "Cauchy et le cours d'analyse de l'Ecole polytechnique", *Bulletin de la SABIX*, n° 5, juillet 1989.
GIRARD Albert
[1629] *Invention nouvelle en l'algèbre*, Amsterdam, 1629.
GUA DE MALVES Jean Paul de
[1741] "Recherche du nombre des racines réelles ou imaginaires, réelles positives ou réelles négatives, qui peuvent se trouver dans les équations de tous les degrés", *MARS* 1741 (1744), 435–494.
HERMANN Jacob
[1719] "J. Hermani solutio duorum problematum", *Acta eruditorum* (août 1719), 351–361.
HOFMANN Joseph Ehrenfried
[1967] *The history of mathematics to 1800* (trad. de l'allemand), Totowa, Littlefield-Adams & Co., 2 t. en 1 vol., 1967.

HOUZEL Christian

[1989] "D'Alembert et le théorème fondamental de l'algèbre", dans *Jean d'Alembert, savant et philosophe: portrait à plusieurs voix*, 351–360, Paris, Editions des archives contemporaines, 1989.

ITARD Jean

[1969] *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes*, Publication de l'APMEP, Paris, 1969.

KRONECKER Leopold

[1887a] "Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **100** (1887), 490–510 = *Werke* III, 211–240 (rééd. Chelsea, New York, 1968).

[1887b] "Ueber den Zahlbegriff", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **101** (1887), 337–355 = *Werke* III, 251–274.

LAGRANGE Joseph Louis

[1772] "Sur la forme des racines imaginaires des équations", *Nouveaux mémoires de l'Académie de Berlin* 1772, 222–258 = *Œuvres* III, 479–516.

LAPLACE Pierre Simon

[1795] "Leçons de mathématiques données à l'Ecole normale en 1795"; dans *Œuvres* XIV, 10–177.

LEIBNIZ Gottfried Wilhelm

[*MS*] *Leibnizens Mathematische Schriften*, 7 vol., C. I. GERHARDT éd., Berlin-Halle, 1849–1863.

[1702] "Specimen novum analyseo pro scientia infiniti circa summas et quadraturas", *Acta eruditorum* (mai 1702), 210–219; cité d'après [*MS* V, 350–361]. Trad. fr., M. PARMENTIER dans *Leibniz*: *La naissance du calcul différentiel*, 387–401, Paris, Vrin, 1989.

[1703] "Continuatio analyseos quadraturam rationalium", *Acta eruditorum* (janvier 1703), 19–26; cité d'après [*MS* V, 361–366], Trad. fr., *op. cit.*, 402–408.

LORIA Gino

[1891a] "Il teorema fondamentale della Teoria delle equazioni algebriche", *Rivista di Matematica* **1** (1891), 185–248.

[1891b] "Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche", *Bibliotheca Mathematica* (2) **5** (1891), 99–112.

MACLAURIN Colin

[1742] *A treatise of fluxions*, 2 vol., Edinburgh, 1742.

[1748] *A treatise of algebra*, London, 1748.

MAHEU Gilles

[1967] *La vie et l'œuvre de Jean d'Alembert. Etude bio-bibliographique*, thèse, 3 vol., Paris, 1967.

MOIVRE Abraham de

[1722] "De fractionibus algebraicis radicalitate immunibus ad fractiones simpliciores reducendis", *Philosophical transactions* **32** (1722), 162–178.

[1730] *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, London, 1730.

[1738] "De reductione radicalium ad simpliciores terminos", *Philosophical transactions* **40** (1738), 463–478.

[1740] Lettre du 29 avril 1740, dans [SAUNDERSON 1740 II, 744–748].

NEWTON Isaac

[*MP*] *The mathematical papers of Isaac Newton*, 8 vol., D. T. WHITESIDE éd., Cambridge, The University Press, 1967–1981.

[*Correspondence*] *The Correspondence of Isaac Newton*, 7 vol., Cambridge, The University Press, 1959–1977.

[1704] "Tractatus de quadratura curvarum" dans *Opticks*, London, 1704; (*cf.* [*MP* VIII]).

[1707] *Arithmetica universalis*, Whiston éd., Cambridge, 1707; (*cf.* [*MP* V]).

OSTROWSKI Alexander

[1927] "Über den ersten und vierten Gaussschen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra", dans [GAUSS, *Werke*, X (2), Abh. 3, 1–18].

OZANAM Jacques

[1702] *Nouveaux éléments d'algèbre*, Amsterdam, 1702.

PETROVA Svetlana

[1974] "Sur l'histoire des démonstrations analytiques du théorème fondamental de l'algèbre", *Historia Mathematica* **1** (1974), 255–261.

PRESTET Jean

[1689] *Nouveaux éléments des mathématiques*, 2 vol., Paris, 1689.

REMMERT Reinhold

[1983] "Fundamentalsatz der Algebra", dans: K. LAMOTKE éd., *Grundwissen der Mathematik I, Zahlen*, 78–97; Springer, 1983.

REYNEAU Charles René

[1708] *Analyse démontrée*, 2 vol., Paris, 1708 (1re éd.).

RIDER Robin E.

[1982] *A bibliography of early modern algebra* (1500–1800), Office for History of Science and Technology, University of California, Berkeley, 1982.

SAUNDERSON Nicholas

[1740] *The elements of algebra in ten books*, 2 vol., Cambridge, 1740–41.

SCHNEIDER Ivo

[1968] "Der Mathematiker Abraham de Moivre", *Archive for History of Exact Sciences*, **5** (1968–1969), 177–317.

SMALE Steve

[1981] "The fundamental theorem of algebra and complexity theory", *Bulletin of the American Mathematical Society* (4) **1** (1981), 1–36.

SMITH David Eugene

[1925] *History of mathematics* (vol. II), Boston, Ginn, 1925; rééd. Dover, 1958.

[1929] *A source book in mathematics*, New York, McGraw Hill, 1929; rééd., Dover 1959.

STEINITZ Ernst

[1910] "Algebraische Theorie der Körper", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **137** (1910), 167–302.

STRUIK Dirk J.

[1967] *A concise history of mathematics*, New York, Dover, 1967 (3e éd.).

[1969] *A source book in mathematics, 1200–1800*, Cambridge, Harvard University Press, 1969.

TANNERY Paul

[*Mémoires*] *Mémoires scientifiques*, t. VI, Paris-Toulouse, 1926.

VAN DER WAERDEN Bartel Leendert

[1930] *Moderne algebra*, vol. 1, Berlin, Springer, 1930 (1re éd.).

WALLIS John

[1685] *A treatise of algebra, both historical and practical*, London, 1685.

ZASSENHAUS Hans

[1967] "On the fundamental theorem of algebra", *American Mathematical Monthly* **74** (1967), 485–497.

Annexe
Premier texte de d'Alembert sur le théorème fondamental de l'algèbre

[*PV* 1745, 102–103]
(fragment du mémoire *Recherches sur le calcul intégral* [1745])

I

*Sur l'intégration des fractions rationnelles**

1. Pour pouvoir réduire généralement à la quadrature de l'hyperbole ou à celle du cercle une fraction rationnelle différentielle, suivant la méthode de M. Bernoulli, il faut démontrer que tout multinôme rationnel et sans diviseur composé d'une variable x et de constantes, peut toujours se diviser lorsqu'il est d'un degré pair, en facteurs trinômes $xx + fx + g$ dont tous les coefficients soient réels, ou ce qui revient au même qu'une équation d'un degré pair dont x est l'inconnue, peut être supposée représentée par le produit de plusieurs trinômes $xx + fx + g$, $xx + hx + i$, etc. dont tous les coefficients soient réels, ce qui ne souffre de difficulté que quand l'équation a des racines imaginaires. Je vais tâcher de résoudre entièrement cette difficulté que MM. Cottes, Moivre, Herman, etc. n'ont résolu que pour quelques cas particuliers.

Problème 1^er^

2. Trouver une grandeur imaginaire $m + n\sqrt{-1}$ dans laquelle les coefficients m et n soient réels, et qui soit égale à $\dfrac{f + g\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}}$.

Supposant le problème résolu, on aura $f + g\sqrt{-1} = ma - bn + (an + bm)\sqrt{-1}$ d'où l'on tire $f = ma - bn$, $g = an + bm$, et par conséquent $m = \dfrac{af + bg}{aa + bb}$ et $n = \dfrac{ag - bf}{aa + bb}$.

Corollaire 1^er^

3. Donc $(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ peut être supposé $= x + y\sqrt{-1}$ car prenant les logarithmes, et différentiant, on aura

$$(m + n\sqrt{-1})\,\frac{da + db\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}} = \frac{dx + dy\sqrt{-1}}{x + y\sqrt{-1}}$$

* Pour la transcription, nous avons choisi de moderniser l'orthographe (à l'exception des noms propres). Les erreurs du copiste dans le texte ou les formules ont été, autant que possible, corrigées (sans mention particulière), en utilisant [d'Alembert 1746].

c'est-à-dire

$$\left(m+n\sqrt{-1}\right)\frac{(a\,db-b\,da)\sqrt{-1}+a\,da+b\,db}{aa+bb}$$
$$=\frac{x\,dx+y\,dy+(x\,dy-y\,dx)\sqrt{-1}}{xx+yy}.$$

Donc

$$\operatorname{Log}\sqrt{xx+yy}=m\operatorname{Log}\sqrt{aa+bb}-n\int\frac{a\,db-b\,da}{aa+bb},$$

et

$$\int\frac{x\,dy-y\,dx}{xx+yy}=m\int\frac{a\,db-b\,da}{aa+bb}+n\operatorname{Log}\sqrt{aa+bb}.$$

Par conséquent y et x sont les sinus et cosinus d'un angle dont le rayon est

$$c^{m\operatorname{Log}\sqrt{aa+bb}\,-n\int\frac{adb-bda}{aa+bb}}=\left(\sqrt{aa+bb}\right)^m\times c^{-n\int\frac{adb-bda}{aa+bb}},$$

et dont la valeur est $m\int\frac{a\,db-b\,da}{aa+bb}+n\operatorname{Log}\sqrt{aa+bb}$; pour avoir $\int\frac{a\,db-b\,da}{aa+bb}$ on remarque que cette quantité est l'intégrale de

$$d\left(\frac{b}{a}\right)\Big/\left(1+\frac{bb}{aa}\right),$$

c'est-à-dire qu'elle est l'expression d'un angle dont 1 est le rayon, et b/a la tangente.

Corollaire 2

4. Donc $(a+b\sqrt{-1})^m$ peut être supposé égal à $x+y\sqrt{-1}$ en prenant les sinus et cosinus d'un angle dont le rayon soit $(aa+bb)^{\frac{1}{2}m}$ et qui soit à l'angle dont a et b sont les cosinus et sinus, comme m à 1, d'où l'on voit que si $m=1/d$ il y a un nombre d de quantités possibles qui étant élevées à la puissance d, rendront $a+b\sqrt{-1}$.

Corollaire 3

5. Donc si les sinus et cosinus b, a, et le nombre m sont tels que l'angle puisse se diviser géométriquement en d parties égales, on peut assigner la valeur analytique de x et de y. Donc 1° si $m=1/2^n$, n étant un nombre entier positif, on pourra assigner la valeur analytique de x et de y quelle que soit la valeur de a et de b; 2° comme on peut inscrire dans le cercle un polygone de 5, de 3, et de 15 côtés, il s'ensuit qu'on pourra toujours assigner la valeur analytique de $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ si b et a sont les sinus et cosinus d'un angle $=k\cdot 360°/2^n\cdot 5$ ou $k\cdot 360°/2^n$, k et

n étant des nombres entiers positifs, celle de $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{5}}$ si l'angle est $=$ à $k \cdot 360°/2^n \cdot 3$ ou à $k \cdot 360°/2^n$, et enfin celle de $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{15}}$ si l'angle est égal à $360°/2^n$.

Corollaire 4

6. Si on a une quantité composée de tant de quantités imaginaires qu'on voudra, de tel degré d'imaginaire qu'on jugera à propos, combinées ensemble d'une manière quelconque, je dis qu'on pourra toujours supposer cette quantité $=$ à $x + y\sqrt{-1}$. En effet on commencera par faire évanouir le 1[er] radical imaginaire, c'est-à-dire celui qui est le plus à la droite, en supposant ce radical égal à $g + h\sqrt{-1}$, ce qui (art. 4) est toujours possible. On fera ensuite évanouir le radical le plus voisin de celui-là, et ainsi on détruira de suite tous les radicaux, et la proposée se trouvera réduite à $x + y\sqrt{-1}$. S'il se trouve dans la proposée des fractions ou des exposants imaginaires, on les réduira toujours par les articles 2 et 3 à $p + q\sqrt{-1}$, et s'il y a des quantités sous le signe $\int$, nous allons faire voir dans le corollaire suivant qu'on peut aussi les réduire à la forme $m + n\sqrt{-1}$.

Corollaire 5

7. Si on a une quantité sous le signe $\int$, composée de tant de variables qu'on voudra réelles ou imaginaires, élevées à des puissances réelles ou imaginaires, et combinées avec d'autres variables réelles ou imaginaires, on pourra toujours supposer cette quantité $= p + z\sqrt{-1}$. Car la quantité qui est sous le signe $\int$ étant une différentielle, on pourra toujours la diviser en deux parties, l'une infiniment petite, l'autre finie, et qui pourront par les propositions précédentes être supposées égales à $dt + ds\sqrt{-1}$ et $q + v\sqrt{-1}$. Donc leur produit sera

$$= q\,dt - v\,ds + (q\,ds + v\,dt)\sqrt{-1},$$

et par conséquent l'intégrale proposée pourra être supposée

$$= \int q\,dt - v\,ds + \sqrt{-1} \times \int q\,ds + v\,dt = p + z\sqrt{-1}.$$

Corollaire 6

8. Donc si on a une quantité composée de tant de variables imaginaires qu'on voudra, et de tant de signes $\int$ qu'on voudra, combinés ensemble de quelque manière que ce puisse être, on pourra en faisant évanouir successivement tous les signes $\int$, de la droite vers la gauche, réduire cette quantité à $p + z\sqrt{-1}$.

Corollaire 7

Donc une fonction quelconque de tant et de telles grandeurs imaginaires qu'on voudra peut toujours être réduite, ou supposée égale à $p + q\sqrt{-1}$, p et q étant des grandeurs réelles.

Proposition 2

9. Une équation dont les racines sont imaginaires, peut se diviser en trinômes, dont les coefficients soient réels.

Car nous venons de prouver que toute quantité imaginaire pouvait être supposée égale à $(p + q\sqrt{-1})$ pour x. Dans la proposée on formera deux équations dont p et q seront les inconnues, et dont l'une contiendra toutes les quantités réelles qui se trouveront dans la proposée après cette substitution, et l'autre toutes les quantités affectées de $\sqrt{-1}$. Or la première de ces équations ne contiendra que des puissances paires de b, la seconde ne contiendra que des puissances impaires, et de plus pourra être divisée par $b\sqrt{-1}$, puisque $b\sqrt{-1}$ est à tous ses termes. Donc ces deux équations ne contiendront chacune que des puissances paires de b. Par conséquent, elles continueraient d'avoir lieu, si au lieu de $p + q\sqrt{-1}$ on substituait $p - q\sqrt{-1}$ à la place de x. Donc si $p + q\sqrt{-1}$ est une racine de l'équation, $p - q\sqrt{-1}$ en sera une autre, et par conséquent $xx - 2px + pp + qq$ un des facteurs de l'équation. Donc il y a autant de facteurs trinômes possibles à coefficients réels, qu'il y a de paires de racines imaginaires.

Remarque

10. On voit par là que dans toute équation les racines imaginaires vont toujours en nombre pair, et que leur produit donne toujours $+$, ce qui est fort mal démontré dans tous les livres d'algèbre.

Usage des Propositions précédentes

11. Il est donc facile de voir maintenant que toute fraction rationnelle différentielle, peut toujours se réduire à la quadrature d'une des sections coniques. Donc toutes les différentielles affectées de radicaux qu'on peut réduire par transformation à des fractions rationnelles, sont intégrables par la quadrature de quelque section conique. [...].

Laboratoire de Mathématiques Fondamentales
Université Pierre et Marie Curie
Paris

(Manuscrit reçu le 1er novembre 1990)