

Das Eindringen äußerer thermischer Störungen in den Körper homoiothermer Lebewesen, Teil I

B. Theves

Institut für angewandte Physiologie und medizinische Klimatologie
der Christian-Albrechts-Universität Kiel, D-2300 Kiel, Bundesrepublik Deutschland

Penetration of External Thermal Perturbations into Homeothermic Organisms, Part I

Summary. The general importance of the mean surface curvature for heat conduction problems is explained and a special symmetry with constant mean curvature on the isothermal surfaces is defined. The applicability for the body shapes of homeothermic organisms is demonstrated and the partial differential equation of heat conduction for this case is derived. The definition: heat release = real heat production + convective pseudoproduction eliminates the term of convective heat transfer through the blood stream and allows the reduction to a mere heat conduction problem. Formulas for the heat loss to the environment and for steady state temperature profiles are given. In case of sudden change of heat loss the partial differential equation is solved and a formula is derived, using dimensionless coordinates of time and distance. The mean surface curvature has strongest influence to the interior temperature field. The solution shows clearly the importance of thermal inertia of the homeothermic organism, for the external temperature wave penetrates into the body with a long phase displacement in time.

Key words: Homeothermia — Equation of heat conduction — Mean surface curvature — Heat loss — Temperature profile.

Zusammenfassung. Es wird die allgemeine Bedeutung der mittleren Krümmung für Wärmeleitungsprobleme begründet und eine Symmetrie mit konstanter mittlerer Gesamtkrümmung der Isothermenflächen definiert. Die Anwendbarkeit auf Körperformen homoiothermer Lebewesen wird dargelegt und die Wärmeleitungsgleichung für diesen Fall aufgestellt. Im Zusammenhang mit der Quellenfunktion wird durch Definition der Wärmefreisetzung = Wärmeproduktion + konvektive Scheinproduktion die Reduktion auf ein Wärmeleitungsproblem erreicht, auch wenn konvektiver Wärmetransport im Körper des Homoiothermen vorliegt. Es werden Formeln für die Wärmeabgabe und Gleichgewichts-Tempe-

raturprofile im Körperinnern gebracht. Für den Fall sprunghafter Änderung der Wärmeabgabe wird die Wärmeleitungsgleichung gelöst und eine einfache Formel unter Verwendung dimensionsloser Koordinaten abgeleitet. Die mittlere Krümmung \bar{H} erweist sich als der Parameter, der den örtlich-zeitlichen Temperaturverlauf am stärksten beeinflusst. Die Lösung läßt unschwer die Bedeutung der thermischen Trägheit des Warmblüterkörpers erkennen, weil die äußeren Störungen stark zeitlich phasenverschoben in den Körper eindringen.

Schlüsselwörter: Homoiothermie – Wärmeleitungsgleichung – Flächenkrümmung – Wärmeabgabe – Temperaturprofil.

1. Problemstellung und theoretische Voraussetzungen

Die komplizierten geometrischen Formen homoiothermer Lebewesen lassen sich nur schwer exakt mathematisch erfassen und darstellen. Bevor dieses Problem aber nicht gelöst war, konnte eine theoretische Bearbeitung der Fragen der Wärmeausbreitung im Körper und der Wärmeabgabe an die Umwelt kaum erfolgen oder mußte sich auf spezielle, vereinfachte Fälle beschränken. (Entsprechende Untersuchungen und Hinweise finden sich bei Fanger [3], Hensel [6], Hensel [7], Reinders [9], Rohles u. Nevins [10], Wenzel [13].)

Es konnte schon früher gezeigt werden (Theves [11]), daß eine Symmetrie mit konstanter mittlerer Gesamtkrümmung \bar{H} sich gut auf die Körperform des Homoiothermen anwenden läßt, um Wärmeausbreitungsvorgänge darzustellen. Dieser Symmetrieart sind nämlich einige Besonderheiten eigen, die sie hierfür besonders geeignet erscheinen lassen.

1.1 Allgemeine Bedeutung der mittleren Krümmung für die Wärmeleitung

Die in dem folgenden benutzten mathematischen Symbole und Zeichen sind am Ende der Arbeit zusammengestellt und erläutert. Weitergehende mathematische Erklärungen, Definitionen und Herleitungen sind in einem Anhang wiedergegeben.

Zunächst ist zu zeigen, daß die mittlere Krümmung \bar{H} die entscheidende geometrische Größe ist, die ganz allgemein den Vorgang der Wärmeleitung in einem (festen) Medium bestimmt. Anschaulich läßt sich dies auf folgende Weise erkennen. Die drei geläufigen Symmetriearten der parallelen Ebenen, der Zylinder- und der Kugelsymmetrie bedeuten für ein Wärmeleitungsproblem, daß die Isothermenflächen stets Ebenen, Zylindermäntel oder Kugelflächen sind. Hierbei ist stillschweigend vorausgesetzt, daß eventuell vorhandene Quellen der betreffenden Symmetrie entsprechend angeordnet sind. Für diese drei Fälle lauten die partiellen Differentialgleichungen der Wärmeleitung:

Parallele Ebenen:

$$T_t = aT_{xx} + P_E \quad 2H = 0 \quad (1)$$

Zylindersymmetrie:

$$T_t = aT_{xx} + \frac{1}{x} aT_x + P_z \quad 2H = \frac{1}{x} \quad (2)$$

Kugelsymmetrie:

$$T_t = aT_{xx} + \frac{2}{x} aT_x + P_K \quad 2H = \frac{2}{x} \quad (3)$$

Daraus läßt sich entnehmen, daß bei dem Glied mit der ersten örtlichen Ableitung neben der Temperaturleitfähigkeit a stets der doppelte Wert $2H$ der mittleren Krümmung als Faktor steht, d. h. die mittlere Krümmung der Isothermenfläche an der betreffenden Stelle x bestimmt vom Geometrischen her die Wärmeausbreitung. Diese Tatsache läßt sich aber noch verallgemeinern. Unter Vernachlässigung der Voraussetzung, daß die Wärmequellen der betreffenden Symmetrie entsprechend angeordnet sein sollen, ergibt sich ganz allgemein für den Vorgang der Wärmeleitung im Raum bei beliebiger Quellenanordnung folgendes: Die Wärmestromlinien bilden eine räumliche Schar von Kurven, die die Isothermenflächen orthogonal durchsetzen. Es läßt sich zeigen, daß für jede Wärmestromlinie der Bogenlänge s die partielle Differentialgleichung der Wärmeleitung die Form annimmt:

$$T_t = aT_{ss} + 2H(s)aT_s + P \quad (4)$$

(Anhang, Punkt 1). Hierbei ist wieder $H(s)$ die mittlere Krümmung der Isothermenfläche an der Stelle s . Damit ist ganz allgemein gezeigt, daß die mittlere Krümmung der Isothermenflächen die geometrisch ausschlaggebende Größe ist, denn Gleichung (4) beschreibt *jedes* Wärmeleitungsproblem.

1.2 „Wärmefreisetzung“, Definition

Diese Überlegungen gelten nicht nur für ein Medium mit festem Aggregatzustand (Theves [11]), in dem ohnehin Wärmetransport nur durch Leitung erfolgen kann, sondern auch z. B. im tierischen und menschlichen Körper, in dem insbesondere durch den Blutstrom ein konvektiver Transport von Wärme erfolgt. Richtige Aussagen über das örtlich-zeitliche Temperatur- und Wärmestromfeld sind gleichzeitig nur dann möglich, wenn der konvektive Wärmetransport als positive oder negative Wärmescheinproduktion aufgefaßt und den echten Wärmequellen hinzugefügt wird. Dabei ist das über den ganzen Körper erstreckte räumliche Integral dieser Scheinproduktion natürlich null.

Mit der so definierten Quellenfunktion der „Wärmefreisetzung“ U (= konvektive Scheinproduktion + echte Wärmeproduktion) wird deren analytische Darstellung nicht schwieriger, sondern einfacher.

1.3 Symmetrie konstanter mittlerer Krümmung

Bei Kugel- und Zylindersymmetrie zeichnet sich eine herausgegriffene Isothermenfläche dadurch aus, daß auf ihr alle Punkte dieselbe Krümmung haben, aber auf jeder anderen Isothermenfläche ist eine – wieder von Punkt zu Punkt gleiche – unterschiedliche Krümmung. Innen liegende, kleinere Flächen sind stärker gekrümmt als sie umhüllende, größere Flächen. Man ist wohl geneigt, diese Tatsache

unzulässig zu verallgemeinern, indem man sagt, daß kleinere Körper stets stärker gekrümmt sind als größere. Tatsächlich ist diese Aussage aber nur für konvexe Körper zutreffend, allgemein stimmt sie nicht. Eine allgemeine Körperoberfläche, die auch konkav geformte Flächenteile aufweist, hat dann allerdings auch keine von Punkt zu Punkt konstante Krümmung mehr. Wird stattdessen ein Mittelwert der mittleren Krümmung verwendet (mittlere Gesamtkrümmung \bar{H}), so ist es sehr wohl möglich, daß dieser Wert auf kleineren und auf sie umhüllenden größeren Isothermenflächen gleichbleibt. Die verschiedenen Oberflächen können dann aber nicht mehr geometrisch ähnlich sein, sondern je kleiner die inneren Flächen werden, desto „rundlicher“ werden sie, während größere, äußere Flächen zunehmend längere „Auswüchse“ zeigen, die aus Gebieten hyperbolischer Krümmung hervorstechen. Wesentlich ist hierbei, daß die Gestalt einer Fläche vorgegebener Größe F , Krümmung \bar{H} und umschlossenen Volumens V nicht eindeutig festgelegt ist. Für jedes Wertetripel F, \bar{H}, V bleibt eine Formenmannigfaltigkeit erhalten. Die so definierte Symmetrie konstanter mittlerer Gesamtkrümmung \bar{H} , angewandt auf ein Wärmeleitungsproblem in einem homogenen, isotropen Medium, erfaßt also nicht nur *eine* Schar sich umhüllender Isothermenflächen – wie etwa bei Kugelsymmetrie –, sondern es gibt unendlich viele mögliche verschiedene Scharen, weil jede einzelne Fläche – bei gleicher Größe – verschiedene Formen haben kann. Welche Schar im konkreten Fall tatsächlich vorliegt, hängt von der räumlichen Anordnung der Wärmequellen ab. Letztere ist aber nicht völlig frei, sondern muß, wie bei den anderen Symmetriearten auch, auf den möglichen Isothermenflächen örtlich konstante Quellendichte aufweisen, da gerade dadurch bei Vorhandensein von Quellen die Symmetrie erzwungen wird. Im Gegensatz zu den anderen Symmetriearten sind hier aber für eine Temperatur verschiedene mögliche Formen der Isothermenfläche erlaubt; je nach Verteilung der Quellen wird dann eine festgelegt.

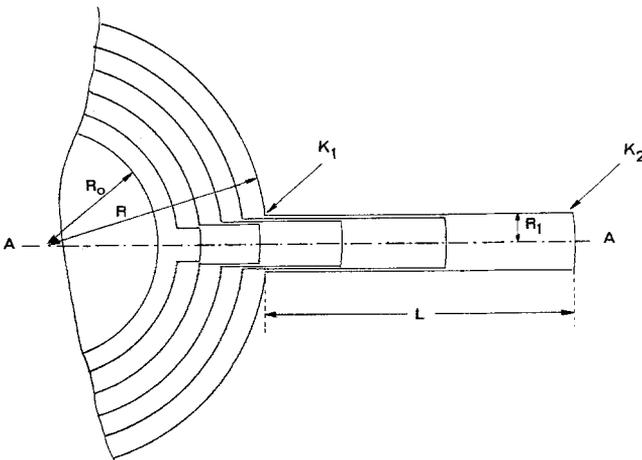


Abb. 1. Beispiel für verschiedene Oberflächen mit gleicher mittlerer Krümmung $\bar{H} = 1/R_0$. Die Flächen sind zusammengesetzt aus jeweils einer Kugelfläche und sechs gleichen Zylindermänteln, wovon aber nur je einer dargestellt wurde. Die größeren Flächen umhüllen die kleineren völlig, ohne sie zu schneiden. Die kreisförmigen Kanten, wie z. B. K_1 und K_2 , haben entgegengesetzt gleiche Krümmung und beeinflussen den Mittelwert nicht. Der Schnitt ist rotationssymmetrisch zur Achse $A-A$ zu denken

Ein einfaches Beispiel für eine Flächenschar mit $dF/dV = 2 \bar{H} = \text{const.}$ zeigt Abbildung 1. Läßt man aus einer Kugel mit dem Radius R einen Zylinder der Höhe L und des Radius R_1 hervorstechen, der außen mit dem fehlenden Stück der Kugelfläche abgedeckt ist, so ist der hyperbolische Krümmungsanteil auf seinem Basiskreis K_1 absolut gleich dem auf dem äußeren Randkreis K_2 , aber die Vorzeichen sind verschieden. Somit leisten diese beiden Kanten keinen Beitrag zur mittleren Krümmung. Wächst nun der Kugelradius und wird dadurch die Krümmung der Kugelfläche kleiner, so kann dieses Defizit durch die stärkere Krümmung des Zylindermantels ausgeglichen werden. Die Abbildung 1 zeigt eine solche Flächenschar unter der Voraussetzung, daß sechs gleichartige Auswüchse vorhanden sind. Der konstante Krümmungsparameter der Schar ist hierbei der reziproke Radius der innersten Kugelfläche ohne Auswuchs.

Während die Mannigfaltigkeit der Form einer Isothermenfläche bestimmter Größe im Innern eines Körpers und die Beschränkung der Vielfalt auf eine spezielle Form durch Festlegung der Quellenverteilung immer möglich ist, so ergeben sich Schwierigkeiten an der Körperoberfläche selbst. Diese ist nicht veränderbar, hier gibt es keine Vielfalt möglicher Formen. Unter der Voraussetzung, daß die Körperoberfläche eine der erlaubten Formen der betrachteten Symmetrie hat, d. h. als eine mögliche Isothermenfläche angesehen werden kann, so ist durch ihre Form und Größe auch der Wert \bar{H} der gesamten Symmetrie vorgegeben.

1.4 Anwendung auf Körper homoiothermer Lebewesen

Diese für allgemeine physische Körper angestellten Überlegungen werden im folgenden auf Körper homoiothermer Lebewesen spezialisiert. Die Hautoberfläche stellt dabei zweifellos eine mögliche Isothermenfläche dar, ebenso unzweifelhaft ist aber, daß normalerweise lokale Unterschiede der Hauttemperatur bestehen. Es ist aber unbestreitbar, daß eine mittlere Hauttemperatur sinnvoll verwendbar ist, z. B. wird mit ihr die Wärmeabgabe des Körpers an die Umgebung als Funktion von Klimaelementen und anderen einflußnehmenden Parametern berechnet. In diesem Zusammenhang ist auch auf eine ältere Arbeit von Büttner [2] zu verweisen. Daher erscheint es vertretbar, aus der existierenden Mannigfaltigkeit der Scharen von möglichen, nach der Symmetrie erlaubten Isothermenflächen jeweils solche auszuwählen, die einerseits stets die Hautoberfläche enthalten und andererseits zum Körperinnern hin mehr und mehr streng als Isothermenflächen angesehen werden können. Den dazwischenliegenden Flächen wird jeweils eine Mitteltemperatur zugeschrieben.

Für die weitere mathematische Behandlung wird noch eine geeignet definierte Ortskoordinate s benötigt, deren Charakter als mittlerer Abstand zwischen den Symmetrieebenen ausgedrückt wird durch die Gleichung

$$dV = Fds . \quad (5)$$

Als weitere Bedingung ergibt sich nach [11]

$$\frac{dF}{dV} = 2 \bar{H} . \quad (6)$$

Damit läßt sich die partielle Differentialgleichung der Wärmeleitung einschließlich der Quellenfunktion für die Symmetrie mit $\bar{H} = \text{const.}$ und unter Benutzung der oben definierten Abstandskoordinate s (Anhang, Punkt 2) darstellen:

$$T_t = aT_{ss} + 2\bar{H}aT_s + \frac{U_s}{gcF(s)}. \quad (7)$$

Die hierbei auftretende Größe der Symmetrieflächen $F(s)$ ergibt sich durch Integration aus den Gleichungen (5) und (6) zu

$$F = F_0 e^{2\bar{H}s} \quad (8)$$

und für das Volumen erhält man

$$V = \frac{F_0}{2\bar{H}} (e^{2\bar{H}s} - 1). \quad (9)$$

Ist s_H der mittlere Abstand zwischen F_0 und der Körperoberfläche F_H und definiert man

$$s_H - s = r, \quad (10)$$

so läßt sich diese Ortskoordinate r , die von der Körperoberfläche nach innen positiv gerechnet wird, oft vorteilhafter verwenden als s . Statt (8) und (9) ergibt sich damit z. B.

$$F = F_H e^{-2\bar{H}r}, \quad (8a)$$

$$V = V_H - \frac{F_H}{2\bar{H}} (1 - e^{-2\bar{H}r}). \quad (9a)$$

Wenn berücksichtigt wird, daß eine Kugel vom Radius $1/\bar{H}$ auch eine erlaubte Fläche der Schar ist, so ergibt sich aus (8a) und (9a) die Beziehung zwischen F_H und V_H :

$$F_H - 2\bar{H}V_H = \frac{4\pi}{3\bar{H}^2} = F_0. \quad (11)$$

Diese Beziehung gilt unabhängig davon, ob in einer speziellen Flächenschar eine Kugel tatsächlich vorkommt oder nicht, denn die zuerst verwendete Integrationskonstante F_0 bezeichnet die Restfläche, bei der das Volumen $V = 0$ wird. Diese läßt sich aber unabhängig von der Annahme der Existenz einer Kugelfläche in der Schar aus (8) und (9) erhalten, wenn die Gleichungen auf die Körperoberfläche bezogen werden. Daher hat Gleichung (11) die Form einer Doppelgleichung, die den Beweis der Behauptung impliziert.

Es wurde eine Gesetzmäßigkeit hergeleitet (Theves [11]), wie Körperoberfläche und -volumen verschiedener Warmblüter allein durch die mittlere Gesamtkrümmung ihrer Oberfläche und durch ganzzahlige Formfaktoren n dargestellt werden können.

In etwas verbesserter Form ist

$$F_H = \frac{4\pi}{3\bar{H}^2} \left[1 + 18 \left(1 + \frac{n}{\pi} \right)^3 \right] \quad (12)$$

und

$$V_H = \frac{12 \pi}{\bar{H}^3} \left(1 + \frac{n}{\pi}\right)^3. \quad (13)$$

Der Formfaktor $n = 1$ bezieht sich z. B. auf menschliche Säuglinge und Kleinkinder, durch $n = 2$ werden z. B. Oberfläche und Volumen von erwachsenen Menschen erfaßt. Eliminiert man aus (12) und (13) $(1 + n/\pi)^3$, so ergibt sich wieder Gleichung (11). Hierbei ist zu beachten, daß die Gleichungen (12) und (13) auf empirischen Daten von F_H und V_H beruhen (Theves [11]) und zumindest für konstanten Formfaktor n eine neue Bedingung liefern; denn nun sind nicht mehr zwei der Größen F_H , V_H und \bar{H} nötig, um die dritte zu bestimmen [wie etwa nach Gleichung (11)], sondern es genügt eine, um die beiden anderen zu erhalten.

Weitere Zuordnungen anderer homoiothermer Lebewesen zu bestimmten Formfaktoren n konnten bisher aus Mangel an Daten für Oberfläche und Volumen noch nicht erfolgen.

Eine Betrachtung des Verlaufs der zunehmenden Auskühlung des zu Anfang völlig isotherm angenommenen menschlichen Körpers ergibt folgendes Bild: Die größten Temperaturabfälle erfolgen an den am stärksten gekrümmten Körperteilen wie Fingern, Nase, Ohren usw. (Durch Bekleidung können die Verhältnisse natürlich stark modifiziert werden, ändern sich aber im Prinzip nicht. Die hiermit zusammenhängenden Fragen werden in einer gesonderten Publikation dargelegt werden.) Gehören z. B. die Hände gerade nicht mehr dem Kernbereich an, so hat sich auch die Form der 37° C-Isothermenfläche geändert. Im Zuge weiterer Abkühlung zieht sie sich vornehmlich in den Extremitäten immer weiter zurück, wobei der Restkern zunehmend rundlicher wird, je mehr die „Auswüchse abschmelzen“. Genau diese Eigenschaften sind aber typisch für die hier betrachtete Symmetrie konstanter mittlerer Gesamtkrümmung.

Gleichung (7) läßt sich naturgemäß in die Bilanzgleichung überführen. Die in einem Volumen V pro Zeiteinheit gespeicherte Wärme Q_t ist gleich der hier freigesetzten U abzüglich der durch die Oberfläche F abfließenden Wärme W :

$$Q_t(r, t) = U(r, t) - W(r, t). \quad (14)$$

Diese Zusammenhänge sind im Anhang (Punkt 3) näher dargestellt.

2. Darstellung äußerer thermischer Störungen

Thermische Störungen des Wärmehaushalts des Homoiothermen können endogen oder exogen bedingt sein. Endogene Störungen sind vornehmlich Änderungen der Wärmeproduktion und notwendig damit verbunden auch der Verteilung der Wärmequellen im Körper. Exogene Störungen lösen Änderungen der Wärmeabgabe aus. Letztere können auf unterschiedliche Art verursacht werden, nämlich sowohl durch Änderungen von einem oder mehreren Klimaelementen, als auch durch Änderung der Bekleidungsstärke d oder des Nässegrades B der Hautoberfläche. Hierdurch wird jeweils die Wärmeabgabe von der Hautoberfläche an die Umgebung beeinflusst, außerdem ist noch eine wechselnde Wärmeabgabe durch die Atmung zu berücksichtigen.

2.1 Berücksichtigung der Wärmeabgabe bei der Atmung

Ist \bar{U}' die Wärmeproduktion im Körper und \bar{U} der Anteil davon, der nicht beim Atmungsvorgang selbst schon abgegeben wird (letzterer beträgt somit $\bar{U}' - \bar{U}$), so ergibt sich:

$$\bar{U} = \bar{U}' \left\{ 1 - 0,00105 \left[T_i - T_L + 2,13 \frac{760}{p} (E_i - e_L) \right] \right\}. \quad (15)$$

Dieser halbempirischen Beziehung liegt die Annahme zugrunde, daß das Atemvolumen der Wärmeproduktion im Körper proportional ist. Die Proportionalität zwischen Energieumsatz und Atemvolumen ist im Prinzip besser gesichert, aber da thermisch nur der Anteil des Energieumsatzes relevant ist, der im Körper als Wärme anfällt, so wurde ein mittlerer Wirkungsgrad von 15% angenommen, um den also \bar{U}' kleiner ist als der Energieumsatz. Die exaktere Darstellungsform unter Verwendung des Energieumsatzes und des Wirkungsgrades bietet keinerlei Schwierigkeiten, wenn trotzdem darauf verzichtet wird, so nur deshalb, weil der Wirkungsgrad selten genau bekannt ist und ohnehin abgeschätzt werden müßte. Gleichung (15) ist daher hinreichend genau, zumal die Wärmeabgabe bei der Atmung nur in der Größenordnung von 10% der Gesamtwärmeabgabe liegt.

Der Anteil \bar{U} der Wärmeproduktion, der nicht bei der Atmung abgegeben wird, wird im folgenden kurz als „Wärmeproduktion“ bezeichnet und in diesem Sinne bereits in Gleichung (14) verwendet.

Ein grundsätzlicher Unterschied zwischen der Wärmeabgabe bei der Atmung und der über die Haut liegt darin, daß die erste eine Funktion der Wärmeproduktion ist, letztere aber nicht.

2.2 Wärmeabgabe von der Körperoberfläche

Das Ziel dieser Ausführungen ist die Berechnung thermischer Veränderungen im Körperinnern als Folge äußerer Störungen bei unveränderten inneren Bedingungen, d. h. bei Konstanz der Höhe und räumlichen Verteilung der Wärmeproduktion. Somit kann sich auch die Wärmeabgabe bei der Atmung nur insoweit ändern, als Änderungen der Lufttemperatur T_L oder des Luftdampfdrucks e_L erfolgen. Dadurch erscheint es gerechtfertigt, die äußeren thermischen Störungen primär auf Veränderungen der Wärmeabgabe über die Hautoberfläche zu beziehen. Letztere ist darstellbar in der Form (Theves [12])

$$W_H = \frac{2 \bar{H} \lambda_L F_H \left[T_H - T_0 + 2,13 \frac{760}{p} B(E_H - E_0) \right]}{1 - e^{-2 H(d + A\delta)}} \quad (16)$$

mit

$$A\delta = \frac{1}{\frac{1}{\delta} + \frac{\alpha_s}{\lambda_L(1 + 2,66 B)}}. \quad (16a)$$

Die hierin enthaltene Temperaturgröße T_0 bzw. ϑ_0 ist eine Funktion der Klimaelemente und wird später genauer erklärt.

Es ist

$$\vartheta_0 = \frac{\alpha_L \left[\vartheta_L + 2,13 \frac{760}{p} B(e_L + 6,24) \right] + \alpha_s \vartheta_a + \varepsilon_s \frac{s + 2h}{4}}{\alpha_L \left[1 + 2,66 \frac{760}{p} B \right] + \alpha_s} \quad (16b)$$

Der in den Formeln auftretende Nässegrad B der Hautoberfläche kann theoretisch zwischen 0 und 1 liegen. Dabei würde $B = 0$ eine völlig trockene, $B = 1$ eine völlig nasse Oberfläche bedeuten. Die Hautoberfläche homoiothermer Lebewesen hat aber niemals den Nässegrad null oder eins, für den Menschen dürfte der Minimalwert bei $B_{\min} = 0,10$, der Maximalwert bei $B_{\max} = 0,7$ liegen. Daß $B_{\min} > 0$ ist, kommt daher, daß einerseits das Körperinnere als 100% naß angesehen werden muß, andererseits die Haut insgesamt einen begrenzten Diffusionswiderstand hat. Hieraus folgt, daß eine ständige Diffusion von Wasser vom Körper durch die Haut in die Umgebung erfolgt, die zum ganz wesentlichen Teil das ausmacht, was man als Perspiratio insensibilis bezeichnet (Heerd u. Ohara [5]).

Steigt der Nässegrad der Haut über diesen Minimalwert an, so resultiert dies aus einer verstärkten Schweißsekretion und ist somit gewöhnlich dem Wesen nach keine äußere thermische Störung, sondern eine Thermoregulationsmaßnahme des Organismus. Wenn nun z. B. eine Erhöhung der Lufttemperatur erfolgt und dadurch die Wärmeabgabe W_H kleiner wird, so kann dieser Effekt durch Erhöhung des Nässegrades ganz oder teilweise kompensiert werden. Als Störung ist dann der verbleibende Rest der Änderung der Wärmeabgabe zu betrachten.

2.3 Sprunghafte Änderungen der Wärmeabgabe

Es sollen zunächst sprunghafte Veränderungen der Wärmeabgabe betrachtet werden, weil diese einer Berechnung leichter zugänglich sind. In einem solchen Fall erfolgt zum Zeitpunkt $t = 0$ eine plötzliche Veränderung eines oder mehrerer Klimaelemente, der Bekleidungsdicke oder auch – im oben erwähnten Sinne – des Nässegrades der Haut. War zu Anfang die Hauttemperatur T_{H0} , so nähert sich diese allmählich einem Grenzwert $T_{H\infty}$ während alle anderen zuvor erwähnten Parameter von $t = 0$ bis $t \rightarrow \infty$ konstant bleiben. Somit ist für jeden Zeitpunkt $t > 0$ die Wärmeabgabe eine Funktion der Hauttemperatur, und man kann statt der Änderung der Wärmeabgabe $W_{H0} - W_{H\infty}$ zur Beschreibung der thermischen Störung auch die Hauttemperaturänderung $T_{H0} - T_{H\infty}$ verwenden, auch wenn die explizite Darstellung wegen der komplizierten Hauttemperaturfunktion des Sättigungsdampfdrucks E_H nicht oder nur näherungsweise möglich ist. Der Vorteil liegt darin, daß die gesuchte Funktion der partiellen Differentialgleichung ebenfalls eine Temperatur ist, deren Randwerte auf der Hautoberfläche bei $t = 0$ durch T_{H0} und bei $t \rightarrow \infty$ durch $T_{H\infty}$ festgelegt sind.

Bei Beschränkung auf ein konstantes $B = 0,10$ kann man durch Verwendung einer linearen Näherung für den Sättigungsdampfdruck, die für Hauttemperaturen

zwischen 15 und 35° C hinreichend genau ist, sowie mit einer quadratischen Näherung für die Exponentialfunktion statt Gleichung (16) die Wärmeabgabe W_H als lineare Funktion der Hauttemperatur ϑ_H darstellen. Hierbei ist die Einführung einer Klimasummentemperatur ϑ_0 hilfreich [Gleichung (16b)], die anschaulich die Hauttemperatur bei der Wärmeabgabe $W_H = 0$ darstellt.

$$W_H \approx \lambda_L F_H \left(\bar{H} + \frac{1}{d + A\delta} \right) \cdot \left(1 + 0,29 \frac{760}{p} \right) (\vartheta_H - \vartheta_0). \quad (17)$$

Aus Gleichung (17) läßt sich entnehmen, daß bei einer sprunghaften Änderung von ϑ_0 dieselbe Wärmeabgabe erst wieder erreicht wird, wenn auch ϑ_H eine gleich große Änderung in derselben Richtung erfahren hat.

2.4 Thermische Trägheit (Vergleich: Luft–Körper)

Das Medium Luft (einschließlich der Bekleidung, deren Isolationseigenschaften auch nur darauf beruhen, daß die Luft in unbewegtem Zustand gehalten wird) hat thermische Eigenschaften, die in ihrer Relation zum Körper nicht immer richtig eingeschätzt werden. So hat die Luft zwar eine sehr geringe Wärmeleitfähigkeit, die nur etwa 6% derjenigen der Körpersubstanz beträgt, aber ihre Temperaturleitfähigkeit (Zur Definition der Wärme- und Temperaturleitfähigkeit siehe Anhang, Punkt 5.) ist fast 200mal größer als die des Körpers. Das bedeutet, daß thermische Veränderungen im umgebenden Medium Luft viel rascher erfolgen als im Organismus des Homoiothermen. Die Wärmeabgabe durch die Kleidung hindurch an die Umgebung erfolgt somit quasistationär, d. h. so, als ob jeweils ein Wärmegleichgewicht bei der betreffenden Wärmeabgabe W_H vorläge. Im Gegensatz dazu dringt eine äußere Störung (der Wärmeabgabe oder der Hauttemperatur) nur mit großer zeitlicher Phasenverschiebung in den Körper ein. Die Gleichungen (16) und (16b) gelten also unabhängig davon, ob W_H und ϑ_H zeitlich konstant sind oder nicht. Demgegenüber sind thermische Veränderungen im Körperinnern – wie sie durch die partielle Differentialgleichung (7) dargestellt werden – ungleich schwieriger zu erfassen, denn dazu muß zuerst die den Randbedingungen angepaßte Lösung dieser Gleichung gefunden werden. Existiert zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Temperaturprofil $T(r, 0)$ im Körper und wird bei $t \rightarrow \infty$ das Profil $T(r, \infty)$ erreicht, so unterscheiden sich beide nur dadurch, daß eine Parallelverschiebung erfolgte. Dies folgt aus den konstanten endogenen Produktionsverhältnissen. Der Betrag der Parallelverschiebung ist

$$T(r, \infty) - T(r, 0) = T_{H\infty} - T_{H0}. \quad (18)$$

Wann zwischen $t = 0$ und $t \rightarrow \infty$ eine bestimmte Hauttemperatur $T_H(t)$ erreicht wird, hängt aus den oben geschilderten Gründen nicht mehr von den äußeren Wärmeabgabeverhältnissen ab, sondern praktisch allein von der großen thermischen Trägheit des Körpers. Die äußere thermische Störung ist zwar in der Lage, ein thermisches Ungleichgewicht zu erzeugen, die Umwelt hat aber keinen Einfluß darauf, wie rasch der Körper (mit seiner großen thermischen Trägheit) einen neuen Gleichgewichtszustand anzusteuern vermag.

3. Gleichgewichts-Temperaturprofile im Körper

Eine Voraussetzung zur Ermittlung des örtlich-zeitlichen Temperaturverlaufs im Körper, wie er sich infolge einer äußeren Störung ergibt, ist die Kenntnis des Ausgangszustandes zum Zeitpunkt $t = 0$. Es sei angenommen, daß zu Anfang Wärme-gleichgewicht im Körperinnern war. Für solche Fälle läßt sich das Temperaturprofil berechnen (Theves [11]):

$$T(r, 0) = T_{H0} + \frac{\sqrt{\pi}\bar{U}}{2\bar{H}\lambda F_H} y e^{y^2} \left\{ \Phi(y) + \Phi\left(\frac{\bar{H}r}{y} - y\right) \right\}. \quad (19)$$

Hieraus ergibt sich die Kerntemperatur T_{i0} bei $t = 0$, wenn man $r \rightarrow \infty$ gehen läßt; dann wird das zweite Gaußsche Fehlerintegral in der geschweiften Klammer gleich eins.

Die dimensionslose relative Schalendicke y nimmt für den Ruhezustand mit der Gesamtwärmeproduktion \bar{G} den Wert $y_0 = 0,5$ an, außerdem ist bei dem unteren Grenzfall $\bar{U} = 0$ der Wert 1 sinnvoll, beim oberen Grenzfall $\bar{U} \rightarrow \infty$ ist $y = 0$.

In grober Abschätzung dürfte etwa gelten

$$\frac{\bar{U}}{\bar{G}} = \frac{y_0}{y} \cdot \frac{0,5 + y}{0,5 + y_0} \cdot e^{y_0^2 - y^2} = 0,642 \frac{0,5 + y}{y} \cdot e^{-y^2}. \quad (20)$$

Die Gleichungen (19) wie auch (20) beziehen sich auf den Gesamtkörper, d. h. alle Temperaturen sind Mittelwerte auf den zugehörigen Flächen, ebenso die Wärme-ströme. Auch die relative Schalendicke y ist nur für den ganzen Körper definiert. Insofern liegen hier dieselben Bedingungen vor, die auch für Gleichung (7) gelten. Bei einer später erstrebten Erweiterung der Aussagemöglichkeit im Sinne eines Be-zugs auf Teilgebiete des Körpers und seiner Oberfläche stehen allerdings keine For-meln für Gleichgewichtsprofile analog zu (19) zur Verfügung.

4. Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung (7) für sprunghaft verlaufende äußere thermische Störungen

Die Quellenfunktion des zu behandelnden Problems besteht in einer auf der Körper-oberfläche bei $t = 0$ erfolgenden Wärmefreisetzung vom Betrag $W_{H0} - W_{H\infty} = W_{H0} - \bar{U}$. Bei $t > 0$ bleibt hiervon jeweils der Teil $W_H(t) - \bar{U}$ erhalten, d. h. die Quellen fließen weiter und bedürfen einer zeitlichen Superposition. Aus den bereits geschilderten Gründen wird statt der Wärmeabgabedifferenz besser die zugehörige Haut-temperaturdifferenz verwendet. Die in Gleichung (7) explizit auftretende Quellenfunktion des Körperinnern kann wegen ihrer zeitlichen Konstanz durch eine einfache mathematische Operation eliminiert werden. Dazu wird

$$T(r, t) - T(r, 0) = \Delta T(r, t) \quad (21)$$

gesetzt. Außerdem werden beide Koordinaten substituiert:

$$\bar{H}r = u, \quad (22a)$$

$$a\bar{H}^2 t = v. \quad (22b)$$

Diese Koordinaten u und v sind beide dimensionslos. Durch eine weitere Substitution

$$\Delta T(u, v) = \Theta(u, v) \cdot e^{u-v}, \quad u \neq 0 \quad (23)$$

wird die Wärmeleitungsgleichung (7) auf die einfachste Form

$$\Theta_v = \Theta_{uu} \quad (24)$$

gebracht. Die Quellenfunktion tritt äußerlich nicht auf, weil sie nur bei $u = 0$ sitzt und der übrige Raum quellenfrei ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die „Temperatur“ $\Theta(u, 0) = 0$ für jedes $u \neq 0$, bei $u = 0$ ist aber

$$\Theta(0, v) = (T_{H\infty} - T_{H0})e^v. \quad (25)$$

Damit ergibt sich die Lösung durch zeitliche Superposition:

$$\Theta(u, v) = \int_{v'=0}^{v'=v} \frac{T_{H\infty} - T_{H0}}{\sqrt{\pi} \sqrt{v-v'}} \cdot e^{v' - \frac{u^2}{4(v-v')}} dv'. \quad (26)$$

Im Anhang (Punkt 4) finden sich einige Erläuterungen hierzu. Mit Gleichung (23) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} T(u, v) - T(u, 0) \\ = (T_{H\infty} - T_{H0}) \cdot \int_{v-v'=0}^{v-v'=v} \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{v-v'}} \cdot e^{-\left(\sqrt{v-v'} - \frac{u}{2\sqrt{v-v'}}\right)^2} d(v-v') \end{aligned} \quad (27)$$

Die Integration in geschlossener Form ist möglich, wenn man beachtet, daß

$$\frac{d(v-v')}{\sqrt{v-v'}} = d\left(\sqrt{v-v'} - \frac{u}{2\sqrt{v-v'}}\right) + d\left(\sqrt{v-v'} + \frac{u}{2\sqrt{v-v'}}\right)$$

und

$$\left(\sqrt{v-v'} - \frac{u}{2\sqrt{v-v'}}\right)^2 = \left(\sqrt{v-v'} + \frac{u}{2\sqrt{v-v'}}\right)^2 - 2u$$

ist. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} \kappa(u, v) &= \frac{T(u, v) - T(u, 0)}{T_{H\infty} - T_{H0}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi\left(\sqrt{v} - \frac{u}{2\sqrt{v}}\right) - e^{2u} \left[1 - \Phi\left(\sqrt{v} + \frac{u}{2\sqrt{v}}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Die Einführung der relativen Temperaturänderung $\kappa = \kappa(u, v)$ erweist sich als praktisch, weil dann unmittelbar zu ersehen ist, wieviel Prozent der Gesamttemperaturänderung an einer bestimmten „Stelle“ u zu einem „Zeitpunkt“ v bereits erfolgt ist. Ebenso ist die Beibehaltung der allgemeinen Koordinaten u und v empfehlens-

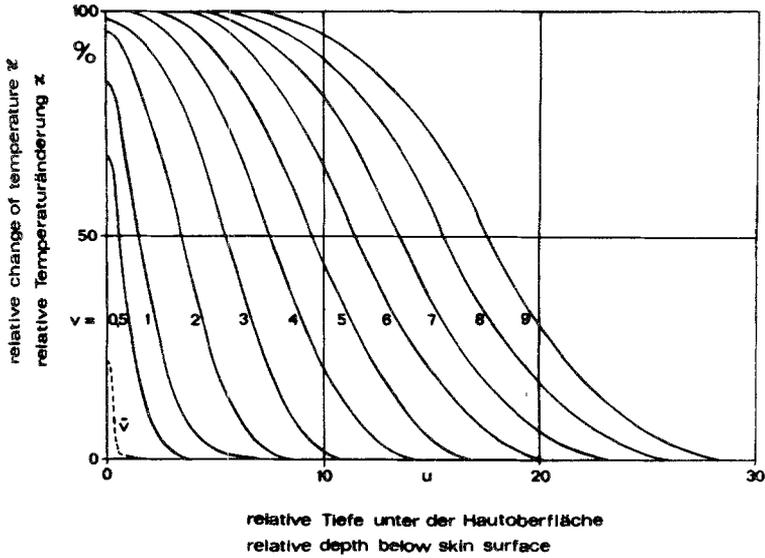


Abb. 2. Die relative Temperaturänderung κ in Abhängigkeit von den dimensionslosen Koordinaten u (relative Tiefe unter der Oberfläche) und ν (relative Zeit). Zum Vergleich: Mit $\bar{H} = 0,133 \text{ cm}^{-1}$ (entspricht erwachsenen Menschen) ergibt sich nach $2000 \text{ s} = 33,3 \text{ min}$ die mit $\bar{\nu}$ bezeichnete Kurve; mit $H = 2 \text{ cm}^{-1}$ (Krümmung der Spitze des kleinen Fingers) ist nach derselben Zeit $\nu = 8$

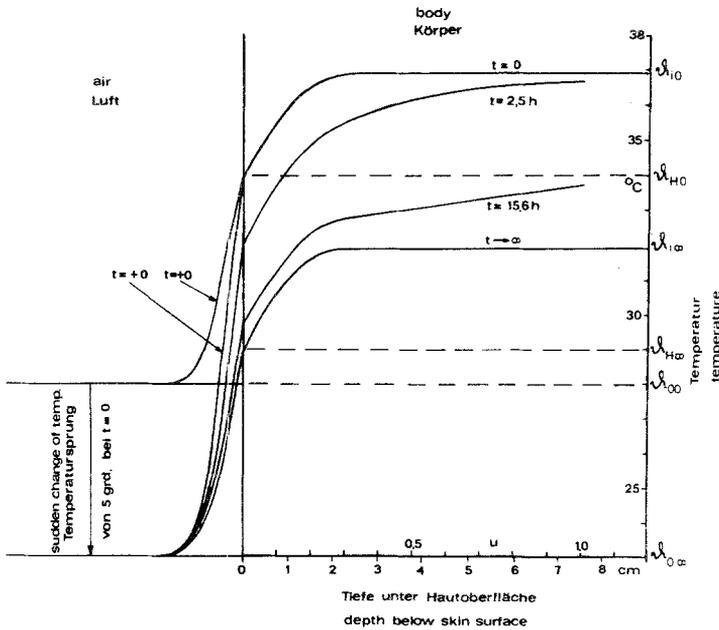


Abb. 3. Ein anfangs bestehendes Wärmegleichgewicht wird durch eine sprunghafte Senkung der Klimazummentemperatur ϑ_0 um 5 grad zur Zeit $t = 0$ gestört. Das neue Gleichgewichtsprofil ($t \rightarrow \infty$) wird praktisch niemals erreicht, wie die Kurven für $t = 2,5 \text{ Std}$ und $t = 15,6 \text{ Std}$ deutlich machen. Temperaturverlauf in der Grenzschicht nur schematisch. (Gesamtwärmeproduktion im Körper $\bar{U} = 40 \text{ cal} \cdot \text{s}^{-1} = 2,4 \text{ kcal} \cdot \text{min}^{-1}$; Krümmung $\bar{H} = 0,133 \text{ cm}^{-1}$; Temperaturleitfähigkeit $a = 10^{-3} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)

wert, weil hiermit durch Gleichung (28) ganz allgemein das Eindringen sprunghafter äußerer Störungen in den Körper jedes beliebigen Homiothermen erfaßt wird. Im Einzelfall ist dann die Umrechnung mit den Gleichungen (22a, b) ohne Schwierigkeiten möglich. In Abbildung 2 ist die relative Temperaturänderung κ als Funktion von u und v nach Gleichung (28) graphisch dargestellt.

Abbildung 3 zeigt ein realistisches Beispiel eines Auskühlungsvorganges infolge einer sprunghaften Senkung der Temperatur ϑ_0 um 5 grad zur Zeit $t = 0$. Der Endzustand, das mit $t \rightarrow \infty$ bezeichnete Temperaturprofil, wird praktisch niemals erreicht, denn nach 2,5 Std ist die Hauttemperatur erst um 2,1 grad (42%), die Kerntemperatur in 5 cm Tiefe erst um 0,5 grad (10%) abgesunken. Sogar nach 15,6 Std betragen die Werte erst 4,2 grad (84%) bzw. 3,6 grad (72%). Die Temperaturleitfähigkeit a der Körpersubstanz bei verschiedenen Homiothermen zeigt keine wesentlichen Unterschiede. Demgegenüber ist aber ihre mittlere Gesamtkrümmung \bar{H} um mindestens eine Zehnerpotenz verschieden. Somit werden die allgemeinen Koordinaten u und v — außer natürlich von r und t — maßgeblich durch \bar{H} bestimmt. Es lassen sich auf diese Weise auch bei verschiedenen homiothermen Lebewesen äquivalente Tiefen unter der Oberfläche und äquivalente Zeitdifferenzen definieren. So entspricht z. B. der Tiefe unter der Hautoberfläche von 1 cm beim Menschen eine solche von 0,4 cm bei einem Kaninchen, einer Zeit von 1 min beim Menschen ist eine solche von nur 9 s beim Kaninchen äquivalent. Der damit verbundenen Gefahr zu starker Abkühlung kleiner Homiothermer bei ungünstigen Umweltbedingungen wirkt deren höherer Energieumsatz pro Masseneinheit entgegen. Dadurch können diese Lebewesen im zeitlichen Mittel zwar ihre Wärmebilanz ausgleichen, können aber zeitweilig zu große Wärmeverluste nicht ebenso lange tolerieren wie ein größeres Lebewesen; denn der Auskühlungsprozeß, wie er durch Gleichung (28) beschrieben wird, verläuft für kleine Lebewesen absolut gesehen schneller.

Liste der verwendeten Symbole und Zeichen siehe Teil 2, S. 126; Literatur S. 131.