RAYMOND DUVAL

STRUCTURE DU RAISONNEMENT DEDUCTIF ET APPRENTISSAGE DE LA DEMONSTRATION

ABSTRACT. Deductive thinking does not work like argumentation. However these two kinds of reasoning use very similar linguistic forms and propositional connectives. This is one of the main reasons why most of the students do not understand the requirements of mathematical proofs. In this article we present a cognitive analysis of deductive organisation versus argumentative organisation of reasoning, and the didactical applications of this analysis. We present also proofs written by young students for geometrical problems, in the frame of an experience, the goal of which was to realize dissociation between content and operative status of propositions. The analysis of proofs written by the students requires a second distinction between truth value and epistemic value of propositions: by splitting content and operative status, students discover how deductive reasoning works and, at the same time, become aware that deductive reasoning change also the epistemic value of the proved proposition.

RESUME. Le raisonnement déductif ne fonctionne pas comme une argumentation. Cependant ces deux formes de raisonnement emploient souvent les mêmes connecteurs et se traduisent par des démarches linguistiques très voisines. C'est une des raisons pour lesquelles la plupart des élèves ne parviennent pas à percevoir les exigences propres d'une démonstration en mathématique. Cet article présente une analyse cognitive de l'organisation déductive du raisonnement par opposition à son organisation argumentative. La distinction entre contenu et statut opératoire des propositions y apparaît fondamentale. Pour illustrer cette analyse nous présentons des textes de démonstration rédigés par des élèves de quatrième, sur des problèmes de géométrie, au cours d'une expérience d'enseignement organisée pour faire mettre en oeuvre cette distinction. L'analyse de ces textes et l'interprétation de l'évolution observée au cours de cette expérience conduisent à prendre en compte une seconde distinction: celle entre la valeur de vérité et la valeur épistémique des propositions. Car la découverte du fonctionnement du raisonnement déductif s'accompagne, pour les élèves, d'une prise de conscience: il change la valeur épistémique de la proposition démontrée.

Les problèmes de géométrie constituent en général le domaine des premières rencontres des élèves de Collège (12–15 ans) avec les exigences d'une démonstration. Les difficultés et l'ennui que la plupart éprouvent pour comprendre ce qu'est une démonstration constituent l'un des obstacles les plus résistants auquel se heurte l'enseignement des mathématiques. Or quand on regarde ce que recouvre l'activité de démonstration dans les problèmes de géométrie on s'aperçoit que la pratique du raisonnement déductif en constitue l'une des tâches décisives. La simple utilisation de définitions et de théorèmes relève déjà de cette pratique. En outre, le raisonnement déductif présente cette particularité d'être intégré à d'autres formes de raisonnement comme, par exemple, le raisonnement

Educational Studies in Mathematics **22**: 233–261, 1991.

par l'absurde. La compréhension du fonctionnement de ce type de raisonnement apparaît comme la condition préalable à l'activité de démonstration.

Ce type de raisonnement est moins évident et moins facilement identifiable qu'on ne le suppose habituellement dans l'enseignement. D'une part il est radicalement différent d'un autre type de raisonnement, l'argumentation, laquelle apparaît spontanément lorsqu'il s'agit d'examiner une thèse, ou de convaincre dans une discussion. D'autre part il s'exprime linguistiquement dans des formes et avec des connecteurs assez proches de ceux utilisés dans une argumentation. Il y a entre ces deux types de raisonnement des ressemblances de surface suffisamment grandes pour que les élèves ne puissent pas percevoir la différence de structure profonde qui les sépare. On peut donc se demander si les répugnances et les difficultés de la majorité des élèves vis-à-vis de la démonstration ne tiendraient pas à une méconnaissance persistante du fonctionnement du raisonnement déductif. L'une des clés de l'"apprentissage" de ce qu'est une démonstration ne tiendrait-elle pas dans la prise de conscience de la différence entre raisonnement déductif et argumentation? Comment alors préparer les élèves à cette prise de conscience?

Ces questions nous invitent à ne pas considérer seulement les situations susceptibles de motiver la nécessité d'une preuve, mais à examiner aussi les démarches spécifiques qui entrent dans l'activité de démonstration (Arsac, 1988). C'est cette direction de recherche que nous allons présenter. Pour cela, nous commencerons par mettre en évidence les différences qui, d'un point de vue cognitif, séparent le raisonnement déductif et l'argumentation. Puis nous décrirons les tâches qui permettent de faire prendre conscience de ces différences de fonctionnement. Ensuite nous présenterons quelques productions typiques obtenues dans une classe de quatrième (13–14 ans), lorsque ces tâches sont proposées. Enfin nous analyserons la signification des transformations radicales observées dans la production des élèves. D'un point de vue théorique deux distinctions se révéleront essentielles: la première, celle entre contenu et statut opératoire des propositions, et la seconde, celle entre valeur logique et valeur épistémique des propositions. La prise en compte de ces distinctions s'impose, dans une perspective aussi bien cognitive que didactique, pour expliquer la façon dont les élèves expriment leur découverte du raisonnement déductif.

I. ANALYSE COGNITIVE DU RAISONNEMENT DEDUCTIF

Dans le fonctionnement d'une démarche de raisonnement, il importe de distinguer deux types de passage: celui qui correspond à un pas de raisonnement, et celui qui consiste dans la transition d'un pas de raisonnement au pas suivant. Le premier type de passage est une "inférence", le second est un "enchaînement". Ils sont de nature très différente.

(1) *Le passage "inférence"*

C'est le passage de propositions données comme prémisses ou comme hypothèses (les propositions d'entrée) à une autre proposition (la conclusion) en vertu d'une règle explicite ou implicite. Cette règle peut relever:

d'une théorie locale:	*ou de la structure d'une langue*:
un corpus d'axiomes, de définitions, de théorèmes, ...	les oppositions sémantiques propres à un lexique, le jeu de la négation, ...

Lorsque ce passage se fait en fonction d'une règle explicite relevant d'une théorie locale, le pas de raisonnement a une organisation ternaire. Un pas de déduction est de ce type. Cela introduit une première différence importante entre le raisonnement déductif et le raisonnement argumentatif. Celui-ce recourt à des règles implicites qui relèvent en partie de la structure de la langue, et en partie des représentations des interlocuteurs: le contenu sémantique de propositions y est donc primordial. Au contraire, dans un pas de déduction, les propositions n'interviennent pas directement en fonction de leur **contenu** mais en fonction de leur **statut opératoire**, c'est à dire de la place qui leur est préalablement assignée dans le fonctionnement du pas.

Comme on le voit sur le diagramme ci-dessus, il y a seulement trois statuts opératoires possibles pour une proposition dans un pas de déduction: proposition d'entrée, règle d'inférence ou conclusion. Les statuts opératoires de proposition d'entrée ou de règle d'inférence sont fixés

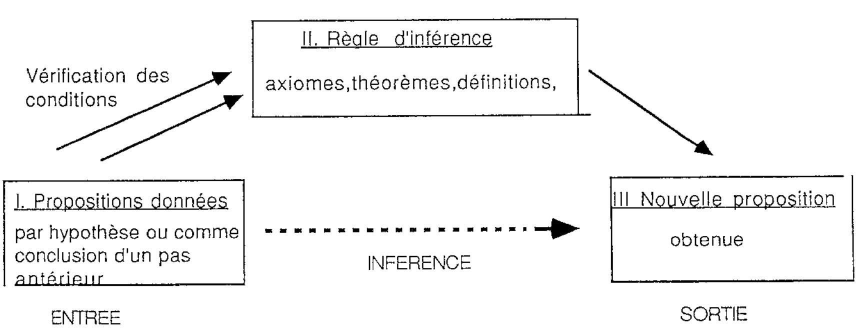


Fig. 1. Diagramme représentant le fonctionnement ternaire d'un PAS de déduction.

préalablement à l'exécution du pas de déduction. En outre les propositions d'entrée et la conclusion apparaissent comme une reprise des propositions déjà mises en relation binaire dans la règle utilisée. Du point de vue du discours ordinaire cela ressemble à une répétition. Autrement dit, dans un pas de déduction, les propositions ne sont pas reliées en fonction des relations sémantiques entre leurs contenus respectifs (opposition, synonymie, particularisation . . .), mais uniquement en vertu de leur statut préalablement fixé (hypothèses de départ ou conclusions déjà obtenues et règles d'inférence). Ce statut peut changer selon les situations: une même proposition peut être prise comme hypothèse dans une situation, être la conclusion-cible dans une autre et être utilisée comme règle d'inférence dans une troisième. Cela ne dépend pas de son contenu. Cette variabilité du statut opératoire d'une proposition dépend du cadre théorique admis au départ: elle déconcerte souvent les élèves qui ne voient le plus souvent dans les propositions que leur contenu.

La présence de connecteurs entre les propositions qui forment un pas de déduction ne peut donc pas refleter les relations logiques définies dans la logique des propositions (implication matérielle, équivalence, . . .): ces relations logiques définissent seulement la structure binaire du théorème utilisé. *Dans un pas de déduction les connecteurs remplissent une autre fonction que celle d'opérateur: ils marquent exclusivement le statut opératoire des propositions qu'ils introduisent.* Et de ce fait, ils ne sont pas indispensables pour marquer les articulations internes à un pas de déduction. Les expressions appelées "attitudes propositionnelles" peuvent également remplir ce rôle: "on sait que . . . (propositions d'entrée), je suis sûre que . . . (conclusion), grâce au théorème . . . ". Nous verrons que c'est à de telles expressions que les élèves recourent d'eux-mêmes lorsqu'il prennent conscience du fonctionnement de la démarche déductive.

Cette distinction entre contenu et statut opératoire d'une proposition est spécifique au raisonnement déductif. Dans le raisonnement argumentatif, par exemple, les propositions n'ont pas de statut opératoire. L'inférence y repose sur le contenu des propositions, sur les relations d'hyperonymie ou d'antonymie entre leurs expressions prédicatives, c'est-à-dire sur des relations d'inclusion ou d'exclusion entre des significations. Les connecteurs de la langue naturelle ("or", "donc", "puisque", "si . . . alors . . ", "mais" . . .) deviennent alors importants: ils servent à expliciter le contenu de la relation établie entre *deux* propositions: opposition, justification, explication, renforcement, conséquence, etc. . . . (van Dijk, 1981, pp. 265–282).

Cette distinction est donc essentielle pour la compréhension de ce qu'est un pas de déduction. Or généralement les élèves s'en tiennent uniquement au contenu des propositions, ou ne savent pas comment prendre en compte leur statut opératoire. Cela provoque comme un “point aveugle”, ainsi que l'illustre l'observation suivante, faite en classe de quatrième, juste avant l'expérience, à l'occasion de cet exercice:

O, B, C, sont trois points non alignés. I est le milieu de [BC] et D le point tel que OBID soit un parallélogramme.

On appelle M le milieu de [ID]. Pourquoi M est-il le milieu de [OC]?

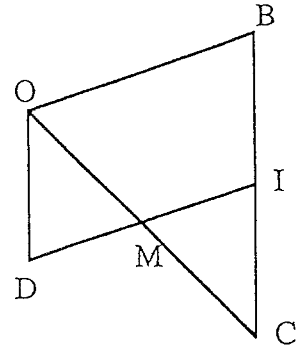


Fig. 2.

Parmi les réponses proposées par les élèves deux avaient été retenues et écrites au tableau:

Elève MB: “*OICD est un parallélogramme parce que ses diagonales* [*OC*] *et* [*ID*] *se coupent en leur milieu*”.

Elève SM: “*Si M est le milieu de* [*ID*] *et si OICD est un parallélogramme alors M est le milieu de* [*OC*] *parce que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu*”.

Et il avait été demandé de les comparer et de dire si l'une des deux était correcte. Il se produisit alors quelque chose de surprenant: tous les élèves de la classe, y compris MB et SM, refusèrent de voir une différence de sens entre les deux réponses. Et ils maintinrent leur position contre l'enseignante qui essayait d'attirer leur attention sur le fait que ces deux phrases n'exprimaient pas le même raisonnement. Cela était d'autant plus surprenant qu'un travail sur l'importance et l'utilisation des hypothèses en mathématique avait été fait au cours d'une premier trimestre (Egret, 1990). Or, ici, ils ne voyaient plus que l'hypothèse, “OICD est un parallélogramme”, devenait une conclusion dans l'une des deux réponses et restait hypothèse dans l'autre. Comment expliquer ce fait que pour tous les élèves ces deux réponses ne pouvaient que dire la même chose?

Oublions les mots-outils qui marquent le statut de chaque proposition. On retrouve alors dans les deux phrases *des propositions semblables* qui apparaissent *dans le même ordre discursif*:

Elève MB	**Elève SM**
	M est le milieu de ID
OICD est un parallélogramme	OICD est un parallélogramme
	M est le milieu de OC
Ses diagonales OC et ID	Les diagonales d'un ...
se coupent en leur milieu.	se coupent en leur milieu.

Si on s'en tient au seul contenu des propositions en méconnaissant le statut opératoire marqué par les mots-outils, la réaction des élèves apparaît tout à fait légitime. Le texte de l'élève SM est simplement plus détaillé que celui de l'élève MB.

Pour sortir de cette impasse, et pour faire découvrir l'importance du statut opératoire marqué ici par les mots-outils "si" et "parce que", il fut proposé, lors de la séance suivante, de relier les différentes propositions formant ces deux phrases par des flèches. Cette tâche avait l'avantage de proposer deux choix à effectuer, en dehors du langage naturel: d'une part sur le sens des flèches à mettre entre deux propositions, d'autre part sur la possibilité de mettre, ou non, deux flèches de sens contraires. Or cette tâche a aussitôt donné lieu à des solutions différentes selon les élèves: pour la même phrase, il y avait des choix différents, et, pour les deux phrases, la plupart n'obtenaient pas la même représentation. Cette divergence immédiate dans cette tâche de représentation a prouvé aux élèves que les deux phrases ne pouvaient pas signifier la même chose. Et, après confrontation des différentes représentations, l'idée que l'articulation des propositions se faisait selon le statut opératoire, et non pas selon le contenu, fut pressentie. En particulier la variation de sens de la même proposition, "*OICD est un parallélogramme*", en fonction de ses statuts différents dans les deux phrases est apparue. Mais cela ne fut réalisé que par le détour d'une traduction de ces deux phrases en un graphe orienté. En effet, si on insère les propositions à leur place dans le diagramme de l'organisation ternaire d'un pas de déduction (Fig. 1), on obtient pour les deux phrases les représentations suivantes (Fig. 3).

Le travail fait au cours de cette séance a donc essentiellement porté sur l'organisation d'UN pas de déduction, en dehors de tout enchaînement avec d'autres pas. Le recours à une représentation par flèches (reliant des propositions) a permis de déplacer, sans aucune explication verbale, l'attention du contenu vers le statut opératoire. En effet la place d'une proposition dans l'organisation d'un graphe orienté correspond à son statut: elle

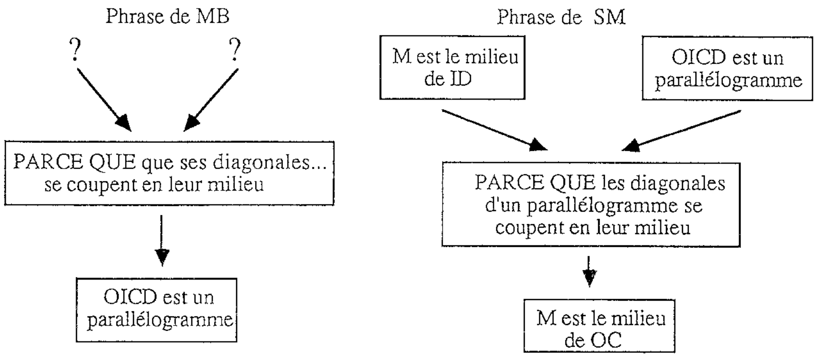


Fig. 3.

est immédiatement visible et contrôlable. Par elle on peut voir et manipuler différentes organisations pour les mêmes propositions.

(2) *Le passage "enchaînement"*

Le plus souvent, le raisonnement ne se limite pas à une seule inférence ou à un seul argument, mais il doit en articuler plusieurs. L'enchaînement est ce passage qui établit le lien entre deux pas de raisonnement. Or ce lien n'est pas de même nature selon qu'il s'agit du raisonnement déductif ou du raisonnement argumentatif.

Pour que deux pas de déduction s'enchaînent en un même raisonnement, il faut que la conclusion du premier pas soit condition d'application de la règle d'inférence du second. Autrement dit, la conclusion du premier pas devient le point de départ du pas suivant. Cela se traduit par le fait que les deux pas ont une proposition commune qui prend dans chacun un statut opératoire différent: conclusion dans l'un, et proposition d'entrée dans l'autre. Et, dans la rédaction d'un texte, cela entraîne le **recyclage** en proposition d'entrée, de la proposition obtenue comme conclusion dans le pas précédent. Ce recyclage se fait soit par la répétition de la proposition soit par une expression qui y réfère explicitement. L'enchaînement se faisant ainsi par **recouvrement** d'une même proposition, le lien entre deux pas de déduction n'est donc pas formé par une relation logique, ou par une relation sémantique, entre deux propositions différentes appartenant respectivement aux pas reliés. Le recours à des connecteurs "or", "donc" "si . . . alors" . . . ne peut donc pas traduire un enchaînement déductif.

Il faut donc bien distinguer dans le raisonnement déductif deux niveaux d'organisation. Le premier est celui du pas de déduction: la prise en compte du statut opératoire des propositions est le principe d'organisation de ce premier niveau. Des connecteurs peuvent y être utilisés pour marquer le statut opératoire des propositions. Le second est celui de l'enchaînement des pas de déduction: le recyclage de chaque conclusion obtenue est le principe d'organisation de ce second niveau. Les connecteurs ne peuvent plus être utilisés de façon pertinente à ce second niveau. Le texte de **SC**, reproduit ci-dessous, illustre bien la perception de ces deux niveaux d'organisation.

ABC est un triangle.
Sur [AB], on place les points I et J tels que: AI = IJ = JB.
Sur [AC], on place les points K et L tels que: AK = KL = LC.
Montrer que les droites (IK), (JL) et (BC) sont parallèles.

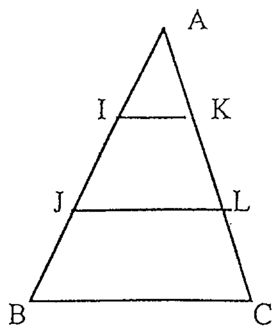


Fig. 4.

**Je prouve que IK ∥ JL*

Je me place dans le triangle AJL. Sachant que I est le milieu de AJ et que K est le milieu de AL, en passant par le théorème des milieux je sais que IK ∥ JL.

**Je prouve que M est le milieu de KB*

Je trace KB et j'appelle M l'intersection de cette droite et de JL.

Je me place dans le triangle IKB. Sachant que IK est parallèle à JL et que J est le milieu de IB, en passant par le théorème réciproque des milieux je conclue que M est le milieu de KB.

**Je prouve que JL ∥ BC*

Je me place dans le triangle KBC. Sachant que M est le milieu de KB et que L est le milieu de KC, en pasant par le théorème des milieux, je sais que ML ∥ BC.

**Je prouve que IK ∥ JL ∥ BC*

Sachant que IK ∥ JL et que JL ∥ BC, en passant par le théorème d'Euclide (1 droite ∥ à une autre, elle-même parallèle à une 3ème est ∥ à cette même 3ème) je peux conclure que IK ∥ JL ∥ BC.

Le raisonnement propre à l'argumentation présente une toute autre organisation. Les arguments s'ajoutent les uns aux autres soit pour se renforcer mutuellement, soit pour s'opposer. Les propositions qui peuvent apparaître soit comme des conclusions ou comme des propositions admises (il n'y a pas ici de partage préalable entre des propositions qui sont des hypothèses et un corpus précis de définitions et de théorèmes) ne sont pas recyclées mais réinterprétées sous des points de vue différents. Le passage d'un argument à un autre repose sur ces relations qui doivent donc être explicitées par des connecteurs ou par des expressions: "or", "raison de plus", "a fortiori", "mais", etc . . . L'enchaînement dans une argumentation se fait par ainsi par **connexion extrinséque**. A la différence du raisonnement déductif c'est le même principe d'organisation que nous retrouvons dans l'argumentation pour les passages de type "inférence" et de type "enchaînement". On ne peut donc distinguer, dans l'argumentation, deux niveaux d'organisation comme dans le cas du raisonnement déductif. En revanche on peut y distinguer deux plans de discours, en fonction de la confrontation de deux points de vue, ou du caractère "dialogique", inhérent à l'argumentation (J. B. Grize, 1983).

La distinction entre ces deux types d'enchaînement est importante. L'enchaînement par recouvrement apparente le déroulement d'un raisonnement déductif à celui d'un calcul: il y a substitution successive de résultats intermédiaires (les conclusions) jusqu'au résultat cherché (la conclusion-cible). Au contraire, l'enchaînement par connexion extrinséque apparente le déroulement de l'argumentation à celui d'un discours: les phrases successives ne viennent pas se remplacer les unes les autres, mais s'ajouter les unes aux autres en respectant une cohérence thématique globale (Duval, 1990b).

Ainsi, aussi bien au niveau du passage "inférence" qu'à celui du passage "enchaînement", il y a donc des différences radicales de fonctionnement entre le mode déductif de raisonnement et le mode argumentatif, plus naturel. Or ces différences restent presque toujours masquées pour les élèves, du fait que le raisonnement déductif s'exprime ou s'explique dans le cadre du discours naturel. Il se produit ainsi:

- une focalisation de l'attention sur le contenu des propositions, puisque normalement c'est en fonction de leurs relations de contenu que les propositions s'organisent dans le discours naturel,
- une écrasement des deux niveaux d'organisation du raisonnement déductif en seul comme s'il s'agissait d'une simple argumentation,
- une prédominance accordée à certains connecteurs ("si . . . alors",

"donc") pour marquer un raisonnement et le différencier d'une simple explication. Cette prédominance se trouve quelquefois renforcée par un enseignement qui tend à codifier les formes discursives de la démonstration, ne serait-ce que pour des raisons de brièveté et d'économie.

Tout cela renforce les ressemblances de surface entre le raisonnement déductif et l'argumentation, et cela au détriment d'une découverte de la démarche déductive. Il n'est alors pas étonnant que beaucoup d'élèves se sentent, de façon durable, dans des situations de confusion ou d'incompréhension comme celle que nous avons évoquée plus haut.

Toute cette analyse cognitive montre l'importance et la nécessité d'un travail spécifique qui soit d'abord centré sur la découverte de ce qu'est un pas de déduction et sur un enchaînement des pas par recyclage des propositions. Comment un tel travail peut-il être conduit en classe et quels peuvent en être les effets?

II. UNE APPROCHE DIDACTIQUE DE LA DÉMONSTRATION

Pour introduire les élèves, et même de jeunes élèves (13–14 ans), dans le raisonnement déductif, il faut leur proposer un type de tâche qui les conduise à percevoir et à utiliser des propositions en fonction de leur statut opératoire, et non pas seulement en fonction de leur contenu. Nous avons vu, en effet, que c'est la prise en compte de ce statut opératoire qui constitue le principe d'organisation d'un pas de déduction et que c'est là le "point aveugle" des élèves concernant la démonstration. Pour atteindre ce but la tâche proposée doit dissocier la production de l'organisation déductive des propositions et la production linguistique d'un texte: car cette dernière centre spontanément l'attention sur le contenu des propositions. Il faut, en outre, que cette tâche soit proposée dans une situation telle que toute l'activité de l'élève ait pour seul but l'élaboration et le contrôle de cette organisation déductive. Il ne faut pas, par exemple, que cette tâche coïncide avec la recherche de la solution du problème.

La construction d'un graphe propositionnel orienté permet la production non linguistique d'une organisation déductive de propositions. Elle peut donc, sous certaines conditions que nous préciserons plus loin, constituer une tâche qui réponde à ces deux exigences. Nous avons vu d'ailleurs que c'est par le recours à une représentation de ce genre que des élèves de 13–14 ans ont réussi à comprendre la différence de sens entre deux phrases.

La construction d'un graphe propositionnel orienté n'est cependant pas suffisante pour que l'élève prenne conscience de l'originalité de la démarche déductive par rapport à l'argumentation. Il faut qu'il puisse articuler cette production avec une production linguistique, laquelle comporte des principes d'organisation hétérogènes par rapport aux deux principes d'organisation de la démarche déductive (priorité au statut opératoire et recyclage de certaines propositions). Il faut en particulier qu'il puisse exprimer le statut opératoire des propositions dans le registre d'expression qui, au contraire tend à en privilégier le contenu. D'où l'importance d'une tâche de rédaction. D'ailleurs, indépendamment de l'examen des graphes construits par les élèves, elle peut constituer le meilleur moyen de contrôle pour vérifier s'il y a eu, ou non, prise de conscience du fonctionnement de la démarche déductive.

(1) *La tâche de construction d'un graphe propositionnel orienté et la prise en compte du statut opératoire des propositions*

Le recours à des graphes propositionnels orienté ne présente rien de réellement nouveau. Son rôle a été signalé il y a déjà longtemps pour présenter des démonstrations (Truong-Cong-Nghe, 1972; Reynes, 1981). De même, le recours à des graphes est devenu presque systématique dans l'élaboration de modèles de compréhension de textes (Rumelhart, 1977; Kintsch, 1978). Mais les graphes peuvent être présentés de différentes manières; toutes ne permettent pas d'atteindre l'objectif fixé, à savoir la prise en compte des propositions en fonction de leur statut opératoire. Il y a ainsi deux utilisations didactiques différentes des graphes pour introduire au raisonnement déductif en géométrie. Dans chacune de ces deux utilisations, les tâches proposées aux élèves ne sont pas les mêmes.

Dans la première, on place respectivement en haut et en bas d'une feuille, ou d'un écran, les extrémités initiales du graphe, lesquelles correspondent aux hypothèses, et l'extrémité finale, laquelle correspond à la conclusion-cible (Anderson, 1987). La tâche consiste alors à les relier en trouvant les noeuds intermédiaires. Ce type d'introduction privilégie l'appréhension globale de l'organisation déductive dans ses enchaînements, et plus particulièrement, la progression non-linéaire vers une conclusion-cible. Il montre la possibilité de deux parcours, l'un en descendant vers la conclusion-cible, l'autre remontant vers les hypothèses. Cette possibilité d'un double parcours peut faciliter la découverte d'une démonstration. Mais elle centre l'attention sur la recherche des théorèmes à utiliser et non pas sur la façon dont les théorèmes sont utilisés. Elle pourrait éventuellement avoir une fonction heuristique.

Dans la seconde utilisation on donne seulement quelques règles pour construire le graphe (Egret). Et ces règles concernent seulement le statut des propositions dans un pas de déduction:

- les hypothèses ne peuvent être que le point de départ d'une flèche vers une autre proposition et jamais un point d'arrivée
- de la conclusion-cible aucune fléche ne peut partir
- le passage d'une hypothèse à une conclusion se fait par une règle de substitution (théorème ou définition).

Rien n'est indiqué sur l'organisation globale du graphe, puisque les extrémité du graphe ne sont plus données ou indiquées. Ce type d'introduction privilégie l'appréhension locale du fonctionnement d'un pas de déduction. La tâche ne porte plus ici sur la recherche des noeuds intermédiaires pour obtenir un chemin entre les extrémités fixées mais sur le choix de l'ordre des propositions constituant chaque pas de déduction. Ce choix exige la prise en compte des propositions en fonction de leur statut: il s'agit pour l'élève de ne pas se tromper sur la place, dans le graphe qu'il construit lui-même, entre les hypothèses et les conclusions. Les élèves peuvent aussi à l'aide de ces règles contrôler visuellement la légitimité des choix faits. Cette seconde utilisation permet donc de proposer une tâche spécifique d'organisation déductive des propositions. Naturellement cela présuppose que l'on sépare strictement la phase de recherche, au terme de laquelle il y a mise en commun sur l'idée de la solution du problème, et la phase de travail sur l'organisation déductive.

(2) *Rédaction et explicitation de l'organisation déductive*

La construction d'un graphe propositionnel orienté n'est pas une tâche suffisante à elle seule. Car lorsqu'on effectue quelque chose on n'est pas nécessairement conscient de tout ce qui est mis en oeuvre à travers l'action exécutée. Toutes les caractéristiques de l'organisation déductive ne sont pas également évidentes sur un graphe orienté. Il faut en particulier donner un sens aux places occupées par les propositions dans les différents noeuds ainsi qu'aux flèches qui les relient. Ainsi il ne faut pas confondre les théorèmes et les conclusions intermédiaires: sur le graphe ils apparaissent tous les deux comme points d'arrivée et comme points de départ de flèches. Le sens donné aux places et aux flèches dépend naturellement des choix faits lors de la construction: ceux-ci peuvent se trouver oubliés devant la représentation obtenue. Une tâche d'expression libre, c'est-à-dire sans aucun exemple préalable de texte de démonstration et sans aucune indication sur les conventions de rédaction est nécessaire pour permettre cette explicitation. Nous retrouvons ici l'une des idées sur lesquelles Piaget s'était appuyé dans ses premiers travaux: le langage naturel est le lieu privilégié où le sujet prend conscience des opérations qu'il accomplit (Piaget, 1967).

Insistons ici sur le fait qu'il s'agit d'une rédaction libre. Les élèves peuvent employer les expressions qu'ils souhaitent et ils peuvent être concis ou redondants. L'important ici n'est pas qu'ils reproduisent le style mathématique souhaité pour une démonstration, mais qu'ils explicitent ce qu'ils ont représenté. Aussi la seule consigne donnée pour cette tâche est-elle: "expliquez maintenant la démarche qui est représentée par le graphe que vous avez construit". Car il ne s'agit pas ici d'interpréter une représentation graphique proposée par l'enseignant, ou par un autre élève, mais celle que l'on a soi-même construite. L'interprétation d'une représentation graphique toute faite serait une tâche de nature différente.

La construction d'un graphe orienté à partir de règles concernant le statut du contenu des propositions, et la rédaction d'un texte décrivant la démarche représentée apparaissent donc comme deux tâches complémentaires. C'est seulement dans le passage d'une production dans un mode à la production correspondante dans l'autre mode que les élèves peuvent prendre conscience de la spécificité du raisonnement déductif. Le va-et-vient et l'interaction entre *deux présentations sémiotiquement différentes d'une organisation déductive de propositions* est ici décisif. Nous reviendrons plus loin sur l'importance de cette condition, que nous avons appelé par ailleurs "l'articulation de registres", pour tout apprentissage mathématique.

Une expérience en classe. A la suite de l'observation que nous avons rapportée plus haut, l'expérience suivante a été faite avec 27 élèves de 13–14 ans (Egret, 1989): pour chaque problème de géométrie donné, le travail était systématiquement organisé de façon à bien séparer l'activité heuristique et les tâches d'organisation déductive. Toute l'expérience portait naturellement sur l'introduction des deux tâches complémentaires d'organisation telles que nous venons de les présenter. Pour chaque problème, le déroulement du travail se faisait de la façon suivante:

- une première séance centrée sur la recherche d'une solution. Cette séance s'achève par une mise en commun des "idées" de solution trouvées. Les théorèmes et les définitions à utiliser sont ainsi sélectionnés. Après cette mise en commun, il ne reste plus qu'à mettre en ordre ce qui a été trouvé.
- une seconde centrée sur l'organisation déductive des propositions pour obtenir une démonstration. C'est au cours de cette deuxième séance que

les deux tâches complémentaires d'organisation déductive, construction d'un graphe puis rédaction, sont successivement proposées.

D'un problème à l'autre aucun graphe ni aucun texte "corrigés" n'ont été proposés, pour ne pas donner de modèle à reproduire. Pour construire leur graphe, les élèves ne disposaient que des règles indiquées ci-dessus: le travail préalable d'analyse de deux phrases des élèves MB et SM en a évidemment facilité l'introduction. Ce type de représentation n'a été introduit qu'à titre d'"objet transitionnel"[1] pour faire découvrir une organisation des propositions à partir de leur statut opératoire et non plus à partir de leur contenu. En d'autres termes les graphes étaient commes des "brouillons".

Pour rédiger le texte, il n'y avait que la consigne que nous avons indiquée plus haut. En revanche l'attention était attirée, individuellement, sur ce qui pouvait ne pas marcher. Après quelques séances, l'enseignante n'a plus demandé que la tâche de rédaction; les élèves pouvaient faire ou ne pas faire de graphe. La plupart ont continué puis ont progressivement abandonné pour rédiger directement les démonstrations (Egret, 1990). Ce type de représentation avait rempli sa fonction et leur était devenue inutile.

Cette expérience en classe s'est déroulée sur une période de dix semaines environ, à raison de deux fois cinquante minutes par semaine. Elle a donné lieu à une modification qualitative spectaculaire des textes produits ainsi qu'à un changement complet d'attitude lors des séances de recherche.

III. L'EVOLUTION DES PRODUCTIONS DES ELEVES AU COURS DE L'EXPERIENCE

Pour rendre compte de l'importance de l'évolution accomplie, et pour en analyser la portée et la signification, nous allons présenter et comparer des textes écrits au début avec ceux écrits vers la fin de cette expérience. Entre temps il y a eu des productions intermédiaires, dont l'intérêt principal est de révéler les difficultés et les confusions que les élèves ont été conduit à dépasser. Dans le cadre de cet article nous ne pourrons que les mentionner. L'analyse des transformations observées entre le début et la fin de l'expérience nous semble d'abord plus importante, car elle va nous permettre de mieux comprendre comment les élèves ont perçu la priorité accordée au statut des propositions dans le fonctionnement du raisonnement déductif. Nous avons choisi deux élèves dont l'évolution est représentative de celle de la majorité de la classe (2/3). Nous aurions pu aussi bien retenir pour cette analyse les textes des élèves **SC** (voir plus haut 1ère partie) ou **RH** (voir plus loin 4ème partie). Nous présentons ailleurs des textes d'autres élèves (Duval, d).

Production des élèves au début de l'expérience

Texte de **ALE**:

$$\begin{array}{ll} DO = IB & DO \parallel IB \\ IB = CI & CI \parallel IB \\ \underline{DO = CI} & \underline{DO \parallel CI} \\ \underline{CD \parallel IO} & \underline{CD = IO} \end{array}$$

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu I. DOIC parallélogramme donc elles se coupent en leur milieu.

Ce texte présente quelques caractéristiques évidentes:

- il consiste principalement en une simple liste de relations,
- la proposition à démontrer est oubliée
- les relations d'inférence ne sont pas toutes indiquées: que DOIC soit un parallélogramme n'apparaît pas comme une conclusion des hypothèses données.

D'une façon plus générale, ce texte peu explicite et peu structuré suit un ordre qui est plus argumentatif que démonstratif: on présente ce que l'on veut prouver comme un cas particulier d'une formulation plus générale.

Cette présentation argumentative est encore plus nette avec le texte de **AE**:

"*Si ODCI est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.*
Explications:
ODCI est un parallélogramme car:
$IB = \text{et} \parallel DO$
$IB = CI$. *Ces deux segments sont confondus, donc* $CI = \text{et} \parallel DO$
Conclusion:
M est le milieu de $[DI]$ *et de* $[OC]$."

Une règle d'inférence est d'abord présentée comme une thèse; elle est suivie par des explications qui en sont la justification; et la conclusion reprend de façon plus précise la conclusion introduite par "alors", dans la thèse. Naturellement un enseignant peut interpréter ce texte comme une démonstration correcte en y voyant un fonctionnement du modus ponens:

Si A alors B, on a A ("Explications"), donc B ("conclusion")

Cette interprétation est matériellement légitime. Mais il s'est avéré que cet élève n'avait pas compris le fonctionnement d'une démonstration et ne l'a découvert que par la suite ainsi qu'il l'a lui-même expliqué à l'enseignante!

En effet, les textes écrits juste après par cet élève, sur d'autres problèmes, présentent la caractéristique suivante: les théorèmes sont utilisés sans aucune référence aux hypothèses qui en permettent l'application. Celles-ci sont passées sous silence. L'examen des premiers graphes construits pour préparer ces textes montre qu'il ne s'agit pas là d'un hasard: toutes les hypothèses données dans l'énoncé sont regroupées en bloc dans une "étiquette", initiale et ne sont pas reliées aux autres noeuds, alors que les différents pas de déduction exigeaient leur réutilisation séparée[2]. Pour cet élève, un théorème paraissait alors fonctionner exactement comme un argument invoqué pour justifier une conclusion: il n'y avait pas besoin de vérifier d'abord que les conditions d'application sont données, sous forme d'hypothèses ou sous formes de conclusions antérieures. C'est sur ce point que les productions ultérieures de cet élève vont se modifier: les théorèmes sont explicitement introduits par les propositions qui en permettent l'application, ou même il se contente de donner les propositions d'entrée et la conclusion sans mentionner la définition ou le théorème permettant le pas. Le texte écrit quelques semaines plus tard (voir plus loin p. 20) montre que l'évolution accomplie correspond à un changement d'organisation de son discours par rapport à ses premières productions, dont celle donnée ci dessus. Ce changement est le passage d'un fonctionnement argumentatif du raisonnement, essentiellement discursif, à un fonctionnment déductif, de caractère plus opératoire.

Ces textes sont typiques de ce que les élèves produisent généralement quand on leur demande une démonstration. Sur les 27 élèves de la classe, deux seulement avaient écrit des textes exprimant clairement chaque inférence et les articulant correctement. On pourrait évidemment mettre en cause les difficultés d'expression écrite de la majorité des élèves. On peut aussi estimer que la démonstration représente une activité complexe, artificielle et peu adaptée pour leur âge et pour leur niveau d'enseignement. Ces types d'explication ne tiennent pas devant les textes suivants écrits par les mêmes élèves quelques semaines plus tard.

Quelques semaines plus tard. Le problème suivant (Fig. 5) a été donné au cours d'une seule séance et il n'y a eu aucune mise en commun des idées trouvées avant la rédaction. Cette dérogation à l'organisation du travail a été faite à des fins de contrôle.

Voici le texte de **ALE**. C'est un texte dont le style et l'organisation sont totalement différents de ceux qu'il écrivait au début de l'expérience. Toutes les caractéristiques de l'organisation déductive des propositions y sont explicitement marquées: organisation ternaire des pas de déduction avec

ABCD est un parallélogramme. I est le point d'intersection des diagonales, E est le milieu de [CB] et F celui de [CD]. Les droites (AC) et (EF) se coupent en M. Montrer que M est le milieu de [EF].

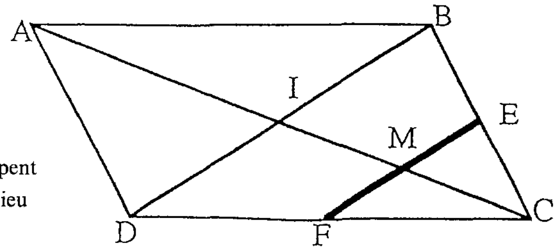


Fig. 5.

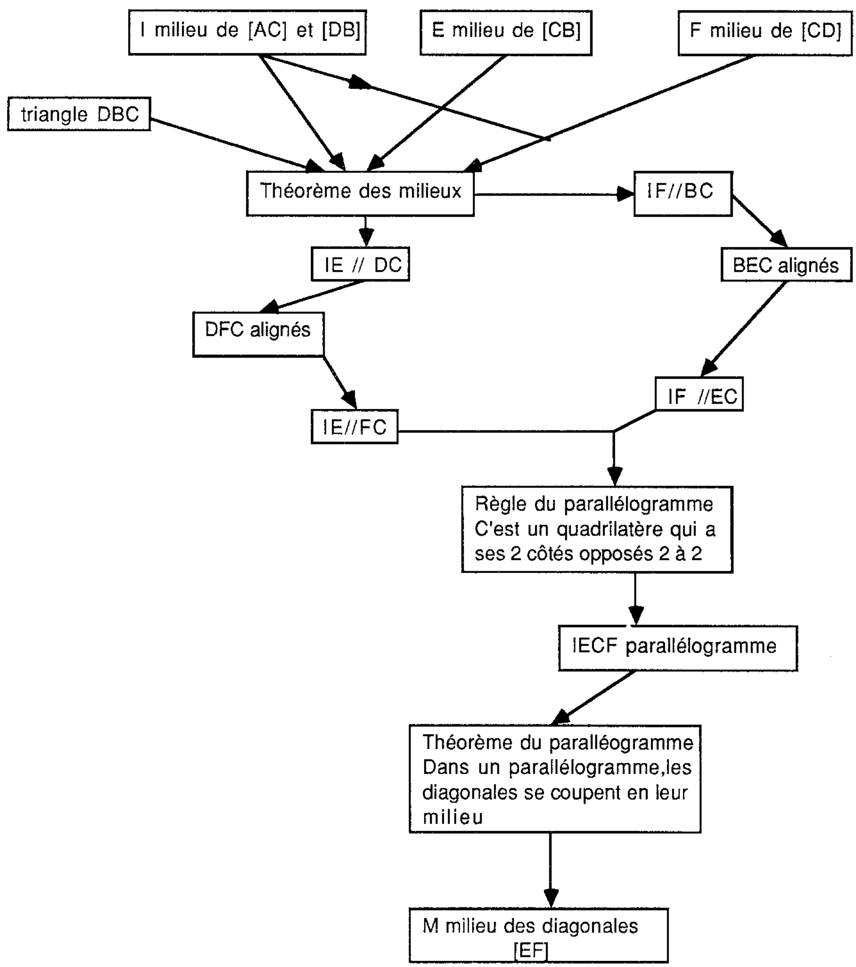
prise en compte du statut des propositions, recyclage pour l'enchaînement des pas, non linéarité de certains enchaînements. Cela permet d'y reconnaître immédiatement trois pas de déduction que nous avons notés I, II, et III; nous avons noté O la justification qui accompagne la proposition d'entrée du premier pas non donnée dans les hypothèses.

Pour trouver qu'un point est le milieu de deux segments cela peut être les diagonales d'un parallélogramme. IL SUFFIT QUE JE PROUVE que IE ∥ FC et IF ∥ CE. *Il suffit d'appliquer le théorème des milieux dans le triangle DBC.*	Présentation de l'idée directrice de la démarche de démonstration
I.1a. *On sait que E est le milieu de BC*	première proposition d'entrée donnée par hypothèse ("on sait que . . . ")
I.1b. *MAIS IL NOUS FAUT UN AUTRE MILIEU.* *Ce sera I milieu de DB*	deuxième proposition d'entrée
O. *puisque I est l'intersection des diagonales d'un parallélogramme et qu'elles se coupent en leur milieu.*	pas donnant la deuxième proposition d'entrée, présenté comme une justification, et emboîté dans le pas I.
I.2. *Donc on peut appliquer le théorème des milieux.*	
Dans le triangle DBC, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui passe par le milieu du côté opposé, cette droite est parallèle au troisième côté.	règle d'inférence

I.3. *JE SUIS SURE que IE* $\parallel$ *FC*	conclusion ("je suis sûre que . . . ")
MAINTENANT JE FAIS le théorème des milieux pour que IF $\parallel$ *EC.*	annonce un nouveau pas indépendant du précédent
II.1a. *On sait que I est le milieu de DB* (*voir plus haut*) *dans le triangle DBC.*	première proposition d'entrée, obtenue comme en O ("voir plus haut")
II.1b. *On sait que F est le milieu de CD PUISQUE ILS NOUS LE DISENT.*	deuxième proposition d'entrée donnée par hypothèse ("puisqu'ils nous le disent")
II.2. *Alors la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui va au milieu du côté opposé, cette droite est parallèle au* 3° *côté.*	règle d'inférence
II.3. et III.1a. *Donc maintenant je sais que IF* $\parallel$ *EC*	conclusion "je sais que . . . " et recyclage pour le pas suivant "donc maintenant . . . "
III.1b. et *IE* $\parallel$ *FC* III.3. *donc c'est un parallélogramme*	compactification d'un pas de déduction avec omission de la règle d'inférence (ici la définition du parallélogramme)
Et puisque les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu *alors M est le milieu de* [*EF*].	conclusion cible

Il suffit de comparer ce texte à celui écrit quelques semaines plus tôt pour voir l'évolution accomplie. Voici le graphe construit par ALE pour ce texte de démonstration.

GRAPHE



Par delà l'expression évidente d'un raisonnement déductif, deux phénomènes intéressants peuvent être observés dans ce texte: la compactification et l'apparition d'expressions d'attitudes propositionnelles.

La compactification du pas III peut avoir deux explications. La première est celle du recouvrement de ce pas avec l'idée directrice de la démonstration telle qu'elle exprimée au début du texte. La seconde est celle d'une automatisation de certaines définitions conduisant à traiter la définition et ce qu'elle définit comme deux expressions ou comme deux termes synonymes.

Mais le phénomène le plus important que ce texte révèle concerne l'apparition d'attitudes propositionnelles pour exprimer le statut opératoire des propositions ("on sait que . . . ", "je suis sûre que . . . "), à la place des connecteurs familiers aux enseignants de mathématiques! Et cette apparition d'attitudes propositionnelle s'accompagne de deux autres manifestations, inhabituelles dans les textes scientifiques des élèves: celle de la prise en charge personnelle des énoncés décisifs ("je . . . ") et celle d'un métadiscours explicatif pour indiquer l'idée générale de la démarche, ou pour faire le point sur la démarche en cours ("mais il nous manque un autre milieu", "maintenant je fais . . . "). C'est autant cette apparition que la production d'un texte exprimant un raisonnement déductif qui permet d'affirmer qu'il y a vraiment eu prise de conscience et compréhension de la manière dont fonctionne une démonstration et de ce en quoi elle diffère d'une argumentation ou d'une explication. Mais avant de mettre en évidence le lien profond entre l'apparition des attitudes propositionnelles et la prise de conscience de ce qu'est une démonstration, poursuivons la présentation de quelques productions d'élèves.

Voici maintenant le texte de **AE** sur ce même problème:

"*On se place dans le triangle BDC*
On sait que E est le milieu de (*BC*), *et que F est celui de* (*DC*). *En employant le théorème des milieux*: *la droite qui passe par les milieux de* 2 *côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté, donc* (*EF*) $\|$ (*DB*).
MC est la médiane de BDC passant par le sommet C.
La médiane AC coupe (*EF*) *et comme* (*EF*) *est parallèle à* (*BD*) *et que AC coupe* (*BD*) *en son milieu elle en fait de même pour* (*EF*), *le milieu est donc M.*"

Le lecteur pourra aisément vérifier que ce texte, comme celui de ALE que nous venons d'analyser, met bien en évidence toutes les caractéristiques d'une organisation déductive. Le progrès que montre la comparaison de ces deux productions de **AE**, à quelques semaines d'intervalle, concerne l'application déductive des théorèmes: il est présenté ici avec son statut opératoire de règle permettant de passer de propositions de départ à une conclusion. Il n'est plus présenté en tête du texte, séparé de ses conditions d'application et de sa conclusion. Chez beaucoup d'autres élèves nous avons observé cette même évolution, de façon plus spectaculaire encore: la plupart mentionnaient les théorèmes sans jamais les mettre en relation avec les propositions d'entrée permettant de les utiliser, ou se contentaient d'une seule condition d'application, ou encore sans jamais utiliser les hypothèses (Duval, d). Et ce comportement était d'autant plus révélateur qu'au premier trimestre, un travail avait été fait sur les hypothèses comme conditions d'application des théorèmes.

Nous ne pouvons, dans le cadre de cet article, ni donner d'autres textes de ces mêmes élèves sur d'autres problèmes, certains étant donnés bien après cette expérience, ni donner les textes des autres élèves sur ces mêmes problèmes. A la fin de l'expérience les deux tiers des élèves écrivaient, pour les problèmes de géométrie, des textes présentant la même qualité d'organisation et de précision que ceux de **SC** de **ALE** ou de **AE**, alors qu'au début de l'expérience leurs textes étaient du type de ceux que nous avons donné pour ALE, SE ou RH (plus loin). Cette transformation radicale et durable s'est accompagnée d'une évolution analogue dans leurs attitudes au cours des phases de recherche. On a vu ces élèves développer plus rapidement et plus subtilement des stratégies heuristiques quand ils eurent pris conscience de la façon dont fonctionne une démonstration. Tout s'est passé comme si l'apprentissage de l'organisation déductive leur avait donné un cadre pour voir et pour intégrer les transferts possibles des stratégies heuristiques rencontrées. Pour les autres élèves il y a eu soit une évolution sur quelques points (disparition de la globalisation descriptive dans l'application des théorèmes, (Duval, d) soit quelques uns en sont restés au premier type de texte.

Quand nous disons qu'il y a eu une évolution pour les deux tiers des élèves nous prenons donc comme critères de réussite:

- la présence explicite de toutes les caractérisques du raisonnement déductif telles que nous les avons degagées par comparaison avec l'argumentation. L'analyse des textes des élèves doit mettre en évidence la présence de ces caractéristiques, comme nous l'avons fait plus haut pour le texte d'**ALE**. Une grille d'analyse peut d'ailleurs être facilement élaborée pour examiner les textes ou même les graphes.
- la modification profonde des attitudes au cours des phases de recherche, modification vécue par les élèves sous la forme d'un gain de plaisir et d'initiative.

La comparaison des résultats obtenus avec ceux observés dans d'autres cadres d'enseignement n'a donc de sens que si l'on applique de façon précise les mêmes critères que ceux que nous avons appliqués. On peut évidemment en prendre d'autres, apparemment moins exigeants, mais alors la comparaison n'a plus de sens. Rappelons, enfin, que nous nous sommes contentés de présenter deux tâches sémiotiquement différentes, en séparant soigneusement phase heuristique et phase d'organisation déductive. Rappelons aussi que l'enseignante n'a jamais donné de corrigé ou de modèle.

Autrement dit les caractéristiques du raisonnement déductif n'ont pas fait l'objet d'un enseignement et leur apparition n'était aucunement un objectif de l'enseignante. Elles se rélèvent cependant un instrument indispensable pour comprendre les réactions, les productions, les difficultés des élèves et pour décrire les évolutions assez spectaculaires que nous avons enregistrées dans leurs textes.

IV. DECOUVERTE DE LA DEMONSTRATION ET DU CHANGEMENT DE LA VALEUR EPISTEMIQUE DE CERTAINES PROPOSITIONS

Il nous faut revenir maintenant au phénomène le plus significatif qui s'est manifesté à travers cette évolution des élèves: l'apparition, dans les premiers textes exprimant de façon explicite et maîtrisée un raisonnement déductif, d'attitudes propositionnelles, là où on attendrait simplement des connecteurs. Pourquoi, dans cette phase de prise de conscience du raisonnement déductif, les élèves ont-ils spontanément eu recours à ce type d'expressions, pour marquer le statut opératoire des propositions? Cette question est importante non seulement pour apprécier le degré de compréhension auquel les élèves ont pu parvenir, mais aussi pour préciser sur quoi joue réellement une démarche de démonstration.

Pour comprendre l'apparition d'attitudes propositionnelles, il nous faut prendre en compte une seconde distinction celle entre valeur épistémique et valeur logique des propositions: c'est cette distinction qui permet de voir ce qu'une démonstration apporte. La valeur épistémique des propositions s'exprime spontanément par des attitudes propositionnelles. En marquant le statut opératoire des propositions par des attitudes propositionnelles, les élèves font davantage que reproduire le fonctionnement du raisonnement découvert dans la construction du graphe: ils expriment leur perception du changement de la valeur épistémique de certaines propositions opéré par le raisonnement déductif.

Valeur épistémique des propositions et attitudes propositionnelles. On ne retient d'une proposition, en général, que sa valeur logique: elle est vraie ou elle est fausse. Mais indépendamment de cette valeur, ou en relation avec elle, une proposition a d'autres valeurs: elle peut apparaître évidente, incontestable, vraisemblable, incertaine, conjecturale, absurde, indécidable, etc . . . La **valeur épistémique** est le degré de certitude ou de conviction attaché à une proposition[3]. Toute proposition a ainsi une valeur épistémique par le simple fait que son contenu est considéré comme relevant ou d'une opinion, ou d'une croyance, ou d'une supposition, ou d'une évidence commune, ou d'un fait établi, ou d'une convention, etc... Lorsque quelqu'un veut exprimer la valeur épistémique d'une proposition, il recourt spontanément à ces constructions linguistiques que Russel et Carnap ont, les premiers, étudiées sous le titre d'"attitudes propositionnelles": "je suis sûr que...", "je crois que...", "je pense que...", "on dit que" etc,... Ces expressions permettent d'expliciter la valeur épistémique qui est attachée à une proposition dans une situation donnée. En mathématiques, il y a une classification des valeurs épistémiques admises: cette classification apparaît à travers la catégorisation des propositions comme définition, comme axiome, comme théorème, comme conjecture, comme hypothèse, ou comme règle. Mais en dehors des mathématiques le domaine des valeurs épistémiques est plus riche.

Cette distinction entre valeur logique et valeur épistémique nous conduit tout de suite à deux constats:

1. *Toutes les propositions vraies n'ont pas la même valeur épistémique.* Certaines propositions vraies peuvent n'avoir que la valeur épistémique d'une croyance et les autres celles d'une certitude; et cette certitude peut avoir une nature différente selon qu'elle s'appuie simplement sur une constatation ("ça se voit tout de suite sur le dessin"), ou sur une démonstration ("c'est un théorème"). Cette différence de certitude est essentiellement modale: c'est celle qui sépare l'énoncé d'une observation contingente et une conclusion nécessaire. Selon les domaines la correspondance entre valeur logique de vérité et valeur épistémique n'est pas la même. Dans la mesure où psychologiquement la valeur de vérité d'une proposition découle de sa valeur épistémique, on voit qu'un raisonnement, pour convaincre ou pour prouver, doit être en mesure de modifier la valeur épistémique d'une proposition (la thèse ou la conclusion-cible).
2. *En mathématiques, on restreint le domaine des propositions vraies à celles qui ont une valeur épistémique particulière, l'apodicticité*, c'est-à-dire la certitude liée à une conclusion nécessaire[4]. Les propositions ayant une valeur épistémique de certitude ou d'évidence relevant d'une constatation, d'une mesure ou d'une perception directe sont donc exclues du domaine des propositions vraies, alors que dans les autres domaines de connaissance elles y appartiennent. C'est cette restriction de la liaison entre valeur logique et valeur épistémique qui est en fait difficilement comprise par les élèves. Le texte suivant, sur le problème présenté au début de l'expérience (cfrt lère partie), illustre bien l'incompréhension de cette restriction.

RH: "*AVEC DESSIN*: *les droites CO et DI se coupent en leur milieu donc CIDO est un parallélogramme.*

SANS DESSIN: [CI] et [IB] forment un même segment [CB] donc [CI] même longueur que [DO], sachant que IDOB forme un parallélogramme; donc [CI] ‖ [DO]
donc OICD est un parallélogramme".

Ce texte présente deux raisonnements. Le premier, celui avec "dessin", prend comme prémisse une proposition équivalente à la conclusion à démontrer. La valeur épistémique de la proposition "Les droites CO et DI se coupent en leur milieu" y est celle d'une certitude de constatation. Cette valeur épistémique est associée à la valeur logique "vrai" elle ne saurait donc devenir la cible d'un raisonnement. En revanche la proposition "CIDO est un parallélogramme" a une valeur épistémique plus faible qui n'implique pas sa vérité: le parallélisme de OI et de DC n'apparait pas directement sur le dessin puisque ces deux segments ne sont pas tracés. Cette proposition peut donc devenir la cible d'un raisonnement, celui présenté "sans dessin": il paraît donner un début de démonstration. Mais ce raisonnement s'arrête à la même conclusion que le raisonnement "avec dessin"! Tout se passe ici comme si la liaison entre la valeur épistémique de certitude de constatation et la valeur logique "vrai" ne pouvait pas être rompue pour la proposition "Les droites CO et DI se coupent en leur milieu". Pourquoi? Parce que la démarche reste exclusivement centrée sur le contenu des propositions et que la valeur épistémique est spontanément liée à ce contenu. Pour **RH** le raisonnement ne peut avoir pour résultat de modifier la valeur épistémique initiale de la proposition à démontrer. Comment la découverte du fonctionnement d'un pas de déduction peut-elle faire prendre conscience de cette modification?

La "productivité" de la démonstration: modification de la valeur épistémique et statut opératoire des propositions. Revenons au fonctionnement du raisonnement déductif. Nous avons vu qu'il requiert que les propositions y interviennent en fonction de leur statut opératoire. Or ce statut opératoire est déterminé en fonction de la valeur épistémique explicite des propositions: les définitions, les axiomes et les théorèmes ont le statut opératoire de règles d'inférence, les hypothèses ont celui de propositions d'entrée. L'organisation d'un pas de déduction conduit ainsi d'une certaine manière à "traduire" la valeur épistémique en statut opératoire. *Autrement dit dans le raisonnement déductif la valeur épistémique se trouve déplacée du contenu de la proposition vers son statut opératoire.* Et au terme d'un pas de déduction, ou d'un enchaînement de pas, les propositions qui ont le statut opératoire de conclusion acquièrent immédiatement la valeur épistémique d'apodicticité.

C'est ce transfert, de la valeur épistémique, du contenu vers le statut opératoire qui permet permet de voir ce que la démonstration apporte de nouveau: la modification de la valeur épistémique dans le sens de l'apodicticité. Toute démonstration conduit, en effet, à deux résultats. Le premier est l'informativité du contenu de la proposition démontrée: elle peut être nulle si, avant la démonstration, le contenu était intuitivement évident ("ça se voit tout de suite sur la figure"), elle peut être forte si le contenu est inattendu ou a priori peu vraisemblable. Ce premier résultat, le fait, trivial ou surprenant, établi, peut être énoncé et utilisé indépendamment de la démarche de démonstration. *Le second résultat est la modification de la valeur épistémique de la proposition démontrée: elle-ci devient certaine et nécessaire.* La démonstration confère la même valeur épistémique, et par conséquent la même force d'assertion, à ce qui apparaissait déjà intuitivement évident qu'à ce qui apparait surprenant. Ce deuxième résultat est inséparable de la démarche de démonstration. L'incompréhension, voire l'aversion, de la grande majorité des élèves devant une démarche de démonstration tient à ce que cette démarche n'entraîne jamais pour eux une modification de la valeur épistémique de ce qui est démontré: ils ne voient pas comment un raisonnement déductif, ou une démonstration, pourraient inverser ou renforcer la valeur épistémique d'une proposition évidente par simple constatation visuelle. Le texte de **RH** est à cet égard typique de leur incompréhension.

Dans ces conditions demander une démonstration pour des propositions non triviales ou surprenantes (c'est-à-dire lorsque la démonstration est heuristiquement nécessaire), comme cela est parfois avancé, ne peut pas constituer une voie pour faire découvrir ce qu'est une démonstration.

Les attitudes propositionnelles et la liaison entre valeur épistémique et statut opératoire. Nous pouvons maintenant mieux comprendre pourquoi dans la phase de prise de conscience du raisonnement déductif les élèves ont spontanément eu recours à des attitudes propositionnelles pour marquer le statut opératoire des propositions. D'une part les attitudes propositionnelles sont l'expression directe des valeurs épistémiques que l'on attribue aux propositions. D'autre part les valeurs épistémiques doivent être "traduites" en l'un des trois statuts opératoires pour que les propositions puissent être reliées déductivement. En proposant aux élèves une tâche qui leur permette de "manipuler" effectivement les propositions selon leur statut opératoire, sans que le contenu vienne parasiter cette manipulation, les élèves ont pu découvrir la modification de la valeur épistémique dans le sens de l'apodicticité que produisait le raisonnement déductif. Et lorsqu'ils ont rédigé leur texte décrivant le fonctionnement représenté par le graphe construit, ils ont exprimé le sens du statut opératoire, c'est-à-dire ils ont retraduit le statut opératoire en valeur épistémique. C'est pour cela que l'on peut affirmer que de tels textes reflètent bien une prise de conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

D'ailleurs indépendamment de cette apparition des attitudes propositionnelles, on a observé trois autres phénomènes: le brusque allongement des textes (voir par exemple plus haut les deux textes de ALE) la rapidité croissante de leur rédaction et la prise en charge personnelle des énoncés ("Je . . . "). Ce ne sont pas là nécessairement des qualités aux yeux du mathématicien, mais tout se passe ici comme si la parole des élèves (13–14 ans) se trouvait libérée: ceux-ci n'hésitent pas à expliquer en détail la démarche qu'ils ont comprise.

Depuis les travaux de Piaget sur la logique de l'adolescent, la question de l'accès à la "pensée formelle", a été transformée en celle de la formation d'une structure opératoire isomorphe au calcul des propositions (Piaget, 1955). Par suite la question de l'accès au raisonnement déductif s'est presque trouvée identifiée à celle d'une bonne manipulation du connecteur qui semble le plus difficile, le "si . . . alors . . . " de l'implication matérielle (Wason, 1972; Radford, 1985). C'est une perspective toute différente qu'ouvre l'analyse que nous venons d'esquisser. Elle conduit à formuler deux thèses plus générales concernant le raisonnement. La première concerne la spécificité de toute démarche de raisonnement (argumentation, déduction . . .) par rapport aux autres démarches discursives (description, narration, instructions . . .): cette spécificité tient à ce qu'un raisonnement joue sur des différences de valeurs épistémiques entre des propositions et vise la modification de la valeur épistémique d'une proposition. La seconde concerne la spécificité du raisonnement déductif par rapport au raisonnement argumentatif: cette spécificité tient à ce que le passage d'une proposition à l'autre y fonctionne par substitution et non plus par accumulation comme dans un texte. En d'autres termes il y a entre le raisonnement déductif et le raisonnement argumentatif la distance qu'il y a entre une procédure de calcul et une procédure discursive: dans un pas de déduction la régle d'inférence fonctionne comme une règle de substitution.

CONCLUSION

La prise de conscience de ce qu'est un raisonnement déductif ne peut pas être subordonnée à l'appropriation d'un problème mathématique particulier ou à une bonne connaissance des théorèmes. Savoir comment fonctionne une démonstration et "savoir démontrer qu'un quadrilatère non croisé est un parallélogramme (ou un rectangle, ...)" relèvent de compétences hétérogènes. "Savoir démontrer que ..." renvoie exclusivement à l'aspect heuristique: ceux qui insistent sur ce "savoir démontrer que ..." proposent chaque fois plusieurs idées de démonstration. Naturellement un tel savoir n'est pas transférable puisqu'il faut expliciter autant de listes différentes de solutions qu'il y a de propositions différentes à démontrer. Et un tel savoir ne donne pas le sens de ce qu'est une déduction. Un mathématicien pourra être irrité par cette insistance mise sur la tâche d'organisation déductive et par l'indépendance qui lui est ainsi reconnue. Dans un problème de géométrie, l'heuristique reste l'aspect le plus important et le plus difficile; et s'il n'y a aucune idée de la solution, la tâche d'organisation déductive devient impossible. Cela n'impose-t-il pas que l'on mette d'abord l'accent sur les aspects heuristiques? Pour faire naître des stratégies heuristiques, au moins en géométrie, il faudrait développer davantage tout un travail d'appréhension des figures (Guin, 1989; Mesquita, 1989b) et ne pas se contenter d'admettre naïvement leur rôle intuitif. Mais la découverte du raisonnement déductif s'est révélé être un facteur très favorable.

Il en a été, d'ailleurs, pour l'accès à la démonstration comme pour d'autres apprentissages mathématiques. Le va-et-vient et l'interaction entre *deux présentations sémiotiquement différentes d'une organisation déductive de propositions* s'est révélé décisif. L'articulation de deux registres sémiotiquement différents semble être un seuil de compréhension que beaucoup d'élèves ne franchissent pas spontanément, en raison même des problèmes de non-congruence que soulève le passage de l'un à l'autre (Duval, 1988a). Ainsi l'écriture algébrique des fonctions les plus simples et leur représentation graphique constituent deux registres dont l'articulation reste étrangère à la grande majorité des élèves. Ayant appris à construire la représentation graphique à partir d'une équation, les élèves ne peuvent effectuer le passage inverse: ils ne savent, par exemple, à laquelle des deux bissectrices des axes attribuer respectivement les équations $y = x$ et $y = -x$ (Duval, 1988c). Et cette séparation semble être l'une des sources principales de difficulté dans l'apprentissage des fonctions (Guzmann, 1990). De même, en géométrie, l'articulation entre le registre des figures et celui, discursif, des définitions et des théorèmes se révèle extrêmement complexe: il y a risque de confusion entre l'évidence perceptive des figures et l'évidence mathématique que donne un raisonnement s'appuyant sur des définitions et sur des théorèmes (Mesquita, 1989a). Et cette articulation se révèle d'autant plus difficile que, dans le registre sémiotique du discours, il y a aussi risque de confusion de l'organisation déductive du raisonnement avec l'argumentation! Pour éviter cette double confusion, un véritable apprentissage en géométrie doit jouer sur la différence et sur l'articulation de trois registres sémiotiques: celui des figures représentant les objets, celui des graphes ou des réseaux représentant les relations entre les concepts ou entre les propositions concernant ces objets, et celui du discours exprimant les démarches de pensée (Duval, 1988b).

NOTES

Je tiens à remercier M.A. Egret avec qui a été menée l'expérience évoquée dans cet article, et aussi D. Guin qui m'a largement fait bénéficier de ses remarques.

[1] On appelle "objets transitionnels", les objets intermédiaires entre les représentations propres à un individu et les contraintes du milieu extérieur qui permettent à cet individu d'assumer progressivement les exigences objectives de ce milieu (Winnicott, 1971, pp. 11–14).

[2] Un exemple de ces productions (texte et graphe) est donné et analysé en détail dans (Duval, d).

[3] La valeur épistémique d'une proposition doit être soigneusement distinguée de ce que les linguistes appellent, depuis Austin, la valeur illocutoire d'un énoncé. Celle-ci renvoie à l'acte de parole accompli par le locuteur dans l'énonciation de l'énoncé: promesse, demande, ordre, question ... Cette valeur est liée à des marques qui ne correspondent pas généralement à des propositions. Souvent implicite, la valeur épistémique se traduit au contraire par une proposition liée à la proposition simple: la valeur épistémique de la proposition "p" peut s'expliciter comme "je crois que p", ou comme "il est nécessaire que p" ... Depuis Hintikka, de nombreux travaux relatifs à la logique épistémique tentent de systématiser les règles d'inférence légitimes concernant les propositions relatives aux attitudes propositionnelles (Hintikka, 1962; Lenzen, 1980).

[4] Cette restriction est relativement récente, puisque les axiomes ont longtemps été acceptés comme des vérités évidentes par elles-mêmes avant d'être considérés comme des "conventions" utiles ou nécessaires. Ce fait, souvent rappelé, n'est pas toujours bien interprété. Si la valeur épistémique des axiomes a changé, leur rôle dans le fonctionnement d'une démonstration n'a pas changé: ils gardent leur statut opératoire de règle de substitution. Pour l'apprentissage de la démonstration, d'une part ce deuxième aspect est plus important que le premier, et, d'autre part la difficulté de la restriction des propositions vraies ne se joue pas sur les axiomes mais sur les énoncés constatifs.

REFERENCES

Anderson, J. R. et Franklin Boyle, C.: 1987, 'Cognitive principles in the design of computer tutors', in Morris, P. (ed), *Modelling Cognition*, John Wiley & Sons Ltd.

Arsac, G.: 1988, 'Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France', *Recherches en Didactique des Mathématiques* **3**, 247–280.

van Dijk, T. A.: 1981, *Studies in the Pragmatics of Discourse*, Mouton Publishers, The Hague.

Duval, R.: 1988a, 'Ecarts sémantiques et cohérence mathématique', *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **1**, 7–25.

Duval, R.: 1988b, 'Approche cognitive des problèmes de géométrie', *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **1**, 57–74.

Duval, R.: 1988c, 'Graphiques et equations: l'articulation de deux registres', *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **1**, 235–253.

Duval, R.: d, 'Analyse des modes d'expression et de représentation du fonctionnement du raisonnement déductif' (à paraître dans *Publications de L'Institut de Recherche de Mathématique de Rennes*, Fascicule: Didactique des Mathématiques).

Egret, M. A. et Duval, R.: 1989, 'Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration', *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **2**, 41–64.

Egret, M. A.: 'Proposition pour introduire des élèves de collège à l'activité de démonstration', (à paraître dans *Publications de L'Institut de Recherche de Mathématique de Rennes*, Fascicule: Didactique des Mathématiques).

Grize, J. B.: 1983, 'Opérations et logique naturelle', in M. J. Borel, J. B. Grize, D. Miéville (eds.), *Essai de Logique Naturelle*, Peter Lang, Paris.

Guin, D.: 1989, 'Réflexions sur les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie', *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **2**, 89–109.

Guzman-Retamal, I.: 1990, *Le rôle des représentations dans l'appropriation de la notion de fonction*, Thèse, IRMA, Strasbourg.

Hintikka, J.: 1962, *Knowledge and Belief*, Cornell University Press.

Kintsch, W. et Van Dijk, T. A.: 1978, 'Toward a model of text comprehension and production', *Psychological Review* **85**, 363–394.

Lenzen, W.: 1980, *Glauben, Wissen und Wahrscheinlichkeit. Systeme der epistemischen Logik*, Wien, New York.

Mesquita, A. L.: 1989a, 'Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie', *Educational Studies in Mathematics* **20**, 55–57.

Mesquita, A. L.: 1989b, *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie*, Thèse U.L.P.–IRMA, Strasbourg.

Piaget, J. et Inhelder, B.: 1955, *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*, P.U.F., Paris.

Piaget, J.: 1967, *Le Jugement et le raisonnement chez l'enfant*, Delachaux-Nestlé, Neuchâtel.

Radford, L.: 1985, *Interprétations d'énoncés implicatifs et traitement logique*, Thèse U.L.P.–IRMA, Strasbourg.

Reynes, F.: 1981, 'Langage, synonymie et démonstration', *Bulletin de l'A.P.M.E.P.* **331**, 835–851.

Rumelhart, D. E.: 1977, 'Understanding and summarizing stories', in D. Laberge et S. T. Samuels (eds.), *Basic Process in Reading: Perception and Comprehension*, Erlbaum, Hillsdale.

Truong-Cong-Nghe: 1972, *Sur quelques théorèmes importants pour les variétés différentielles infinies*, Diplôme, Université de Saigon.

Wason, P. C. et Johnson-Laird, P. N.: 1972, *Psychology of Reasoning, Structure and Content*, Batsford, London.

Winnicott, D. W.: 1975, *Jeu et Réalité* (tr. C. Monod et J. B. Pontalis), Gallimard, Paris.

Université Louis Pasteur
IREM de Strasbourg
10, rue du général zimmer,
F.67084 Strasbourg Cedex