Über voreuklidische „Elemente", deren Autor Proportionen vermied

BENNO ARTMANN

Vorgelegt von B. L. VAN DER WAERDEN

Einleitung

In seinem Kommentar zum I. Buch EUKLIDS überliefert PROKLOS, daß es vor EUKLID mehrere Mathematiker gegeben hat, die „Elemente" geschrieben haben. Von diesen war HIPPOKRATES von Chios der erste, weiter werden LEON und THEUDIOS genannt. Ohne Zweifel sind die Werke dieser Autoren in EUKLIDS Zusammenfassung enthalten, doch hat man Schwierigkeiten, ihre Anteile genauer festzulegen. In der vorliegenden Arbeit soll nun einem Hinweis nachgegangen werden, den PROKLOS in dieser Richtung bei seiner allgemeinen Beschreibung der Natur der „Elemente" gibt, und der bisher nicht ausgewertet wurde. Ich zitiere PROKLOS in der Übersetzung von HEATH [7, Vol. 1, p. 115]:

"... And of those who have made the attempt [to write elements] some were able to put together more and some less; some used shorter proofs, some extended their investigation to an indefinite length; some avoided the method of *reductio ad absurdum,* some avoided *proportion*; some contrived preliminary steps directed against those who reject the principles; and, in a word, many different methods have been invented by various writers of elements."

PROKLOS sagt also explizit, daß es Elemente gegeben hat, in deren Beweisen Proportionen vermieden wurden. Diese methodische Eigenheit findet man selbstverständlich auch bei EUKLID in den ersten Büchern, denn er führt ja die Proportionen erst im V. Buch ein, kann also vorher keinen Gebrauch von ihnen machen. Von PROKLOS an haben allerdings die Kommentatoren bemerkt, daß dazu an einer Reihe von Stellen außerordentliche Kunstgriffe notwendig waren, daß insbesondere eine Reihe von Sätzen sehr viel einfacher im VI. Buch hätten bewiesen werden können oder daß der eigentliche Beweisansatz im VI. Buch zu finden sei. Ich interpretiere diese Sätze als Spuren der Elemente desjenigen Autors, der in seinen Beweisen die Proportionen vermied und habe sie deshalb im folgenden zusammengestellt und genauer analysiert. Dabei tritt zu Tage, daß der Autor dieser Elemente sich offenbar altpythagoreischer Methoden bedient, um Proportionen zu umgehen, insbesondere die Flächenanlegung II 5/6 mit ihrem einfacheren Fall I, 44 und den Satz von PYTHAGORAS I, 47.

Neben der Notiz von PROKLOS und der Analyse von EUKLIDS Text findet sich eine weitere Stütze für unsere Untersuchungen bei ARISTOTELES, der sich an zwei Stellen auf den Satz II, 14 bezieht, in dem die Umwandlung eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat behandelt wird, der sog. tetragonismos. Die Bemerkungen ARISTOTELES' beziehen sich offenbar auf die Streitfrage, ob man dies Problem mit oder ohne Proportionen behandeln solle. (Einzelheiten in der Besprechung von II, 14.) Wahrscheinlich bezieht sich ARISTOTELES auf eine Auseinandersetzung, die gerade zu der Zeit aktuell war, als THEUDIOS seine Elemente schrieb. HEIBERG zählt THEUDIOS zu der Generation von PLATONS Schülern, die etwas älter als ARISTOTELES war. Wir sehen deshalb THEUDIOS als denjenigen Autor an, der in seinen Elementen die Proportionen vermied. Auch die Verwendung pythagoreischer Methoden wird gerade zu dieser Zeit in der Akademie besonders aktuell gewesen sein, in der PLATON bei der Abfassung des Timaios pythagoreisches Gedankengut in großem Umfang aufarbeitete.

Natürlich kann sich ein so spezieller methodischer Ansatz wie die Vermeidung von Proportionen nur auf ein schon vorliegendes Material beziehen, das nach dem gewählten Gesichtspunkt neu bearbeitet wird. Die genauere Durchsicht der Bücher I–IV bestätigt diese Feststellung. Bis auf die evtl. Ausnahme der Parallelentheorie in Buch I wird man danach die Bücher I–IV, deren enge Verflechtung NEUENSCHWANDER herausgearbeitet hat, in der heute vorliegenden Fassung den Elementen des THEUDIOS zuschreiben.

Das Material

Ehe wir uns einzelnen Sätzen zuwenden, werten wir einen kurzen Blick in Buch VI, wo die generelle Methode zur Vermeidung von Proportionen bereitgestellt wird. In VI, 16 ist ausgesagt:

$$a:b = c:d \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$$

für Strecken	für die (Flächen der) Rechtecke aus den Strecken

Damit läßt sich jede Aussage über das Bestehen einer Proportion für Strecken in eine Aussage über die (Flächen-) Gleichheit gewisser Rechtecke umformulieren. Dies ist, im Überblick gesehen, der Schlüssel zum Verständnis der weiter unten diskutierten Beweise. Der Satz VI, 16 für Strecken und Rechtecke steht in kompletter Analogie, bis in die Einzelheiten der Formulierungen und Beweise, zum Satz VII, 19 für Zahlen. Der gleiche Gnomon, der in VI, 14 dem Beweis von VI, 16 dient, wird auch in VII, 19 verwendet. Diese Analogie verdient weitere Beachtung, vgl. die Bemerkungen zu I, 44.

I, 44 *An eine gegebene Strecke ein einem gegebenen Dreieck gleiches Parallelogramm in einen gegebenen geradlinigen Winkel anzulegen.* Nimmt man das Parallelogramm als Rechteck, so handelt es sich um die Konstruktion einer Strecke

x mit $ax = bc$ bei gegebenen a, b, c. Die Umformulierung zu $a:b = c:x$ führt uns auf die Bestimmung der vierten Proportionalen, welche in VI, 14 mit Hilfe des Strahlensatzes geleistet wird. (So auch THAER in [3], Kommentar zu I, 44 und HEATH in [7, Vol. 2, p. 113] in der Einleitung zu Buch V.) Der Beweis läuft ähnlich wie in den oben erwähnten Sätzen VI, 14 und VII, 19 über einen Gnomon in I, 43. Der gemeinsame Ursprung dieser Ideen wird bei HEATH im Kommentar zu I, 44 [7, Vol. 1, p. 342/343] genannt: "This proposition will always remain one of the most impressive in all geometry when account is taken (1) of the great importance of the result obtained, the transformation of a parallelogramm of any shape into another with the same angle and of equal area but with one side of any given length, e.g. a *unit* length, and (2) of the simplicity of means employed, namely the mere application of the property that the complements of the 'parallelograms about the diameter' of a parallelogram are equal. The marvellous ingenuity of the solution is indeed worthy of the 'godlike men of old', as Proclus calls the discoverers of the method of 'application of areas'; and there would seem to be no reason to doubt that the particular solution, like the whole theory, was Pythagorean, and not a new solution due to Euclid himself." Zum letzten Satz von HEATH sollte man eine Einschränkung anbringen: Die Parallelogrammtheorie in I, 33–45 stammt nach den ausführlichen Untersuchungen NEUENSCHWANDERS [14, S. 364–369] aus der Zeit des jungen ARISTOTELES, insbesondere dürfte I, 43 eine nachträgliche Verallgemeinerung von Rechtecken auf Parallelogramme sein. Die Beweisidee ist davon nicht betroffen, in bezug darauf hat HEATH sicher recht. Die Übertragung der Aussage von Rechtecken auf Parallelogramme ist einfach und erfordert keine neue Anstrengung.

Die allgemein akzeptierten Argumente für den pythagoreischen Ursprung der Lehre von der Flächenanlegung findet man z.B. bei HEATH [7, Vol. 1, p. 343–45]. Neben EUDEMOS ist PLUTARCH als Quelle zu nennen (Zitat bei HEATH), der den Satz VI, 25: „*Eine geradlinige Figur zu errichten, die einer gegebenen ähnlich und zugleich einer weiteren gegebenen gleich ist*" PYTHAGORAS persönlich zuschreibt. Im Beweis von VI, 25 findet I, 44 eine wesentliche Anwendung.

I, 47 *Der Satz von Pythagoras.* Der Beweis verläuft nach einer auch in VI, 8 enthaltenen Idee, nur daß Proportionen durch Flächengleichheiten ersetzt sind. (So auch NEUENSCHWANDER [14, S. 354] und viele andere Autoren.) HEATH führt [7, Vol. 1, S. 354] einen Gnomon-Beweis an, den Bretschneider [2, S. 82] als Rekonstruktion eines alten Beweises im Sinne von Buch II vorgeschlagen hat. Diese Möglichkeit wird auch von KNORR [10, S. 176/77] und FOWLER [4, S. 22/23] für wahrscheinlich gehalten. FOWLER schlägt vor, den Satz von PYTHAGORAS mit diesem Gnomon-Beweis als Satz 8a in Buch II aufzunehmen. Folgt man diesem Vorschlag, so wären die weiteren proportionenfreien Beweise unabhängig vom Beweis des Satzes I, 47, über den PROKLOS [18, S. 462] sagt: „Bewundere ich nun schon diejenigen, die die Wahrheit dieses Theorems zuerst erforschten, so muß ich um so mehr den Verfasser der „*Elemente*" hoch schätzen: Er hat nicht nur durch den überzeugendsten Beweis dieses Theorem erhärtet, sondern auch im VI. Buche das noch umfassendere Theorem durch unwiderlegbare wissenschaftliche Beweise begründet." Die Hochschätzung des Beweises würde ich, subjektiv gesehen, teilen: Die Aussage des Satzes betrifft eine Flächengleichheit, und der in I, 47 gegebene Beweis macht dies ohne den Umweg über Proportionen (wie VI, 8) oder algebraische Hilfsmittel (Bretschneider) auf direkteste Weise sichtbar. Es geht aber nicht um die Einschätzung, sondern die Zuschreibung: Sagt PROKLOS wirklich, dieser bestimmte Beweis stamme von EUKLID persönlich? Dies ist die gängige Lesart, der man sich schwer verschließen kann. Akzeptiert man sie, so muß man wohl für EUKLIDS Vorgänger, der Proportionen vermied, den Satz von PYTHAGORAS als Satz 8a mit BRETSCHNEIDERS Beweis in Buch II aufnehmen, und dazu auch noch die einfache Flächenanlegung I, 44 in Rechtecksform, die natürlich gut zu II 5/6 paßt.

Interpretiert man dagegen PROKLOS so, daß er nur von der Aufnahme des Beweises in die ‚Elemente' spricht, nicht aber die Autorschaft des Beweises, so könnte man den Beweis dem Vorgänger EUKLIDS zuschreiben. In der Tat würde man ohne Zweifel so verfahren, wenn man nur den Text der „Elemente" ansieht, so einheitlich ist die Gedankenführung von I, 44 über I, 47 und II, 5 zu II, 14. Dann aber wäre EUKLID in den „Elementen" überhaupt nur ein Kompilator, wie v. FRITZ [5, S. 500] ein wenig bedauernd feststellt. Am Schluß der Arbeit komme ich auf diese Frage noch einmal zurück.

II, 11 *Die Konstruktion der stetigen Teilung.* Man soll eine gegebene Strecke AB in H so teilen, daß $AB \cdot BH = AH^2$ ist. – Die Verbindung zur Definition 3, Buch VI läuft natürlich über die Äquivalenz von Proportionen und Flächengleichheit VI, 16. Bei der in VI, 30 ausgeführten entsprechenden Konstruktion ist der Beweis stark mit Proportionen durchsetzt, aber auch dort ist der entscheidende Punkt eine Flächengleichheit. Ferner wird beidesmal von der Flächenanlegung (II, 6 bzw. VI, 29) ausgegangen. Deshalb wird man im Falle des Beweises von II, 11 (und ebenso bei II, 6) eher von einer Konzentration aufs Wesentliche als von einem Ausweichen vor Proportionen sprechen. Diese Sicht wird bestätigt durch die dritte Behandlung der stetigen Teilung in XIII, 1/2, wo auch (außer VI, 16/17) keine Hilfsmittel aus Buch VI herangezogen werden. Übrigens könnte man auf XIII, 1/2 auch eine Konstruktion der stetigen Teilung ohne Flächenanlegung stützen. Ganz wesentlich ist dagegen der Gebrauch ähnlicher Dreiecke (VI, 4) in XIII, 8, wo die stetige Teilung der Diagonalen des regelmäßigen Fünfecks besprochen wird, die ja eigentlich erst den Anlaß zur Bildung dieses Begriffes gibt.

II, 14 *Ein einer gegebenen Figur gleiches Quadrat zu errichten.* Nach I, 45 kann man die gegebene Figur als Rechteck annehmen. – In diesem Fall soll der Beweis wiedergegeben und als kurzes, aber typisches Beispiel analysiert werden. Vorbild ist die Konstruktion der mittleren Proportionalen in VI, 13 (mit Hilfe ähnlicher Dreiecke aus VI, 8). In Produktform gebracht ist dies der sog. Höhensatz $h^2 = pq$ für rechtwinklige Dreiecke, vgl. Figur 1. Der Kürze halber sei deshalb auch VI, 13

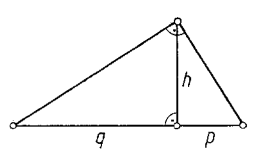


Fig. 1

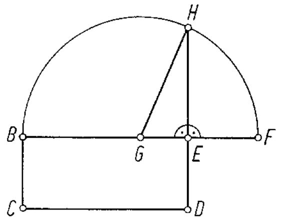


Fig. 2

als Höhensatz bezeichnet. Nun zur Lösung der Aufgabe wie in II, 14. Gegegeben ist das Rechteck $BCDE$. Man macht $EF = ED$ und zeichnet den Kreis mit Durchmesser BF und Mittelpunkt G. Nach PYTHAGORAS I, 47 gilt $EG^2 + EH^2 = GH^2$. Die Teilung der Strecke BF ist so, daß man II, 5 anwenden kann.

$$\begin{aligned} BE \cdot EF + EG^2 = GF^2 &\Rightarrow BE \cdot EF + EG^2 = GH^2 \text{ (weil } GH = GF) \\ &\Rightarrow BE \cdot EF + EG^2 = EG^2 + EH^2 \text{ (PYTHAGORAS)} \\ &\Rightarrow BE \cdot EF = EH^2 \text{ (Subtraktion von } EG^2). \end{aligned}$$

Hier sei zunächst angemerkt, daß alle Beweisschritte umkehrbar sind, also in II, 14 eigentlich

$$\text{II, 5} \Leftrightarrow \text{Höhensatz}$$

bewiesen ist. (Für einen stärker abkürzenden algebraischen Formalismus vgl. v. D. WAERDEN [21, S. 193].) EUKLID erwähnt die Umkehrung natürlich nicht, weil er VI, 8 noch nicht zur Verfügung hat. Daß ihm die Umkehrbarkeit der Schlüsse entgangen wäre, halte ich für höchst unwahrscheinlich. Nach dieser Analyse scheint es mir jedenfalls nicht mehr berechtigt (abgesehen von anderen Gründen), II, 5 als „rein geometrischen Hilfssatz zu II, 14“ zu bezeichnen, wie es SZABO [19, S. 487 und folgende] in seiner Polemik gegen die geometrische Algebra tut. Die Untersuchung von III, 35 wird die Bedeutung von II, 5 noch einmal unterstreichen. Wenn ich auch in der speziellen Beurteilung des Satzes II, 5 mit SZABO nicht übereinstimme, so scheint mir doch seine a.a.O. vertretene These der Mehrstufenentwicklung, insbesondere der arithmetischen Fassung geometrischer Sätze, sehr beachtenswert.

Schon HEIBERG hat zum Satz II, 14 eine ARISTOTELES-Stelle [De anima II.2, 413a 13–20] angeführt, die ich in der Übersetzung von SZABO [19, S. 59] zitiere. „*Was ist der tetragonismos? – Die Konstruktion eines dem Rechteck flächengleichen Quadrates.* Eine solche Definition ist ein Schlußsatz. Derjenige aber, der behauptet, daß *der tetragonismos das Auffinden der mittleren Proportionalen ist*, der macht auch den Grund der Sache namhaft.“ (Für eine ähnliche Metaphysik-Stelle des ARISTOTELES und den Hinweis auf HEIBERG vgl. SZABO [19, S. 58 bzw. S. 61] oder auch HEATH's Kommentar zu II, 14.) Die De anima-Stelle wird von HEIBERG und SZABO als Beleg für die Priorität von VI, 13 vor II, 14 gewertet, was wohl allgemein akzeptiert ist. (Vgl. auch NEUENSCHWANDER [14, S. 371/72].) Ich meine, man kann hier noch etwas weiter gehen. O. BECKER schreibt in einem analogen Zusammenhang [1, S. 330] über eine Stelle aus der Zweiten Analytik, an der ARISTOTELES die Vertauschung der Innenglieder einer Proportion (enallax, V, 16) erwähnt: „An dieser Stelle ist in erster Linie höchst bemerkenswert die Erwähnung des enallax-Satzes V, 16. An und für sich könnte das ein beliebiges Beispiel sein. Bedenkt man aber, daß dieser Satz geradezu der Schlüsselsatz für die Proportionentheorie der Gruppe B ist, so wird die Annahme seiner bloß zufälligen Erwähnung sehr unwahrscheinlich. Ebenso wie Aristoteles in der Topikstelle [mit] VI, 1 einen fundamentalen Satz der anthyphairetischen Theorie nicht zufällig herangezogen haben kann. In beiden Fällen wurden vielmehr den Hörern seiner Pragmatie *bekannte* und wichtige Beispiele in Erinnerung gebracht, diese Ausführungen sind zugleich Anspielungen auf berühmte wissenschaftliche Fragen der Zeit." Diese Einschätzung BECKERS wird in unserem Fall noch unterstrichen dadurch, daß ARISTOTELES sich sogar an zwei verschiedenen Stellen auf den tetragonismos bezieht. Es war also für ihn eine bekannte Streitfrage, ob man den tetragonismos mit oder ohne Proportionen behandeln soll, wobei er wohl für die Proportionen Partei ergreift.

Die Konstruktion der mittleren Proportionalen war den Griechen schon sehr früh geläufig, wie man z.B. den Überlegungen des HIPPOKRATES von Chios zur Würfelverdopplung entnehmen kann. Es gibt in der Tat Hinweise aus der Architektur, nach denen die mittlere Proportionale beim Tempelbau schon gut einhundert Jahre vor HIPPOKRATES verwendet wurde. Der 540 gebaute Apollontempel in Korinth ist das älteste bekannte Beispiel einer bewußten Proportionierung von Grund- und Aufriß. Die Verhältnisse sind

$$\text{Länge} : \text{Breite} = \text{Breite} : \text{Höhe}$$

$$25 : 10 = 10 : 4$$

(Nach KNELL [9, S. 28f].) Nur wenig jünger ist der ebenfalls mit

$$\text{Länge} : \text{Breite} = \text{Breite} : \text{Höhe}$$

gebaute Athenatempel in Paestum [9, S. 96]. Der Parthenon in Athen hat die entsprechenden Proportionen mit

$$81 : 36 = 36 : 16.$$

Einen Hinweis auf den tetragonismus enthält möglicherweise auch die durch PLINIUS überlieferte Beschreibung der Statuen des Polyklet (tätig etwa etwa 450–410) als ‚quadrata' oder ‚tetragona', was von Groß in PAULY [16, Bd. 4, Sp. 1002] auf deren Proportionierung bezogen wird.

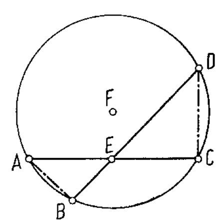


Fig. 3

III. Die Sätze über ähnliche Kreisabschnitte aus dem III. Buch diskutieren wir nach der Fünfeckskonstruktion, um hier den Gedankengang nicht zu unterbrechen.

III, 35 *Sehnensatz*. Um den Kontrast zum Beweis bei EUKLID herauszuarbeiten, erinnern wir kurz an den üblichen Beweis mit Ähnlichkeitsargumenten. Die Dreiecke ABE und DCE sind winkelgleich, denn bei E haben wir Scheitelwinkel (I, 15) und die Winkel bei A und D liegen im gleichen Abschnitt (III, 21), die letzten Winkel sind dann nach I, 32 gleich. Nach VI, 4 gilt dann

$$BE : AE = EC : ED,$$

also mit VI, 16

$$AE \cdot EC = BE \cdot ED,$$

die Behauptung des Sehnensatzes. – Lesen wir dagegen den Beweis von EUKLID, so finden wir eine ähnliche Argumentation wie bei II, 14 mit II, 5 und dem Satz von PYTHAGORAS, nur daß im Fall III, 35 der Ähnlichkeitsbeweis in keiner Weise als Vorlage in Frage kommt. Der Beweis von III, 35 ist in hohem Maß originell. Insbesondere werden die Sätze über Winkel im Kreis, welche III, 35 unmittelbar vorangehen, ignoriert. Die wesentliche Aussage des Beweises ist II, 5 $\Rightarrow$ III, 35, unter Verwendung von I, 47.

Der Höhensatz ist ein einfacher Spezialfall des Sehnensatzes. Wir brauchen in der nebenstehenden Figur nur $BE = ED$ zu beachten und erhalten $AE \cdot EC = ED^2$. Ziehen wir die oben nachgewiesene Äquivalenz von II, 5 mit dem Höhensatz heran, so können wir den Beweis von III, 35 so interpretieren: Der Spezialfall „Höhensatz" reicht aus, um den allgemeinen Sehnensatz zu beweisen – eine überraschende und interessante Einsicht!

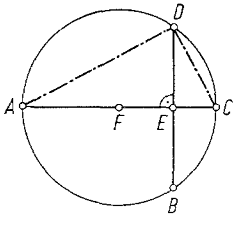


Fig. 4

Nehmen wir die von uns nachgelieferten trivialen Implikationen mit den schwierigeren Beweisteilen von Euklid zusammen, so erhalten wir insgesamt die Äquivalenz

$$\text{Höhensatz} \Leftrightarrow \text{II, 5} \Leftrightarrow \text{Sehnensatz}.$$

Bei Einbeziehung der Ähnlichkeitsgeometrie sind alle drei Aussagen wiederum zur Konstruktion der mittleren Proportionalen äquivalent.

Es ist noch anzumerken, daß der Satz III, 35 bei EUKLID im weiteren Text der „Elemente" nirgends zitiert wird, wie man NEUENSCHWANDERS Schema [14, S. 338] entnimmt.

III, 36/37 *Sekanten/Tangentensatz.* Der Satz III, 37 ist die Umkehrung von III, 36, sein Beweis stützt sich im wesentlichen auf III, 36. Deshalb können wir uns auf III, 36 konzentrieren. Im Beweis wird zuerst der Fall der durch den Mittelpunkt gehenden Sekante behandelt. Hier (wie auch in der allgemeinen Situation) wird mit der Flächenanlegung II, 6 und dem Satz von PYTHAGORAS nach der gleichen Methode wie im Beweis des Sehnensatzes gearbeitet. Auch hier kann der Ähnlichkeitsbeweis nicht zur Entwicklung der Beweisidee herangezogen werden. Ganz offenbar stammen beide Beweise – wie auch der von II, 14 – aus einer Hand. Ähnlich wie beim Sehnensatz kommt man hier zu dem Resultat

$$\text{II, 6} \Leftrightarrow \text{III, 36.}$$

Mit dem Sekanten-Tangentensatz kann man die stetige Teilung (in bekannter Weise) einfach konstruieren. Man braucht es nur so einzurichten, daß DB gleich dem Durchmesser CA des Kreises ist, und erhält $CA^2 = DC(CA + DC)$.

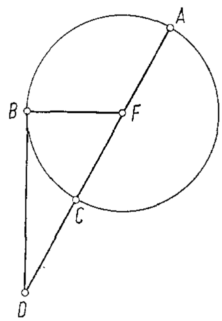


Fig. 5

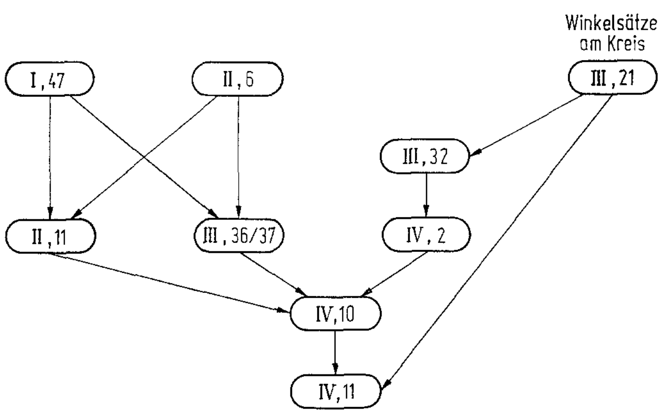
Der Sekanten-Tangentensatz spielt eine wesentliche Rolle bei der Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks in IV 10/11, aber auch nur an dieser einzigen Stelle innerhalb der „Elemente", wie NEUENSCHWANDER [14, S. 378] betont.

IV, 2 *Einem gegebenen Kreis soll ein mit einem gegebenen Dreieck winkelgleiches Dreieck einbeschrieben werden.* – Diese Aufgabe hat zwei verschiedene Funktionen. Einmal entspricht sie der Systematik von Buch IV, wo auch Quadrate, Fünfecke, Sechsecke in Kreise einbeschrieben werden. Beim Dreieck kann man dabei von der Bedingung der Regelmäßigkeit absehen. Zum anderen dient sie als Hilfsmittel bei der Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks in IV, 11.

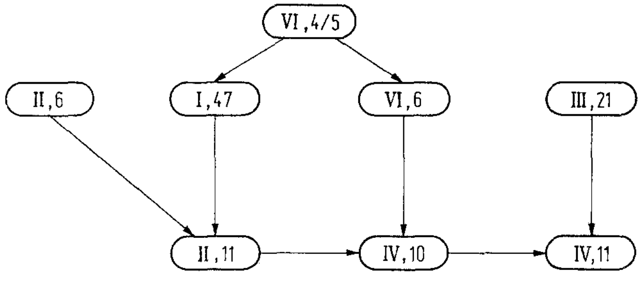
Vor der Konstruktion EUKLIDS lösen wir die Aufgabe mit anderen Mitteln. Da ein Dreieck in einen Kreis einzuzeichnen ist, wird man dem Unkreis des angegebenen Dreiecks benutzen. Das bedeutet einen Vorgriff auf IV, 5, der aber belanglos ist, weil IV, 5 nicht von IV, 2 abhängt. „Vergrößert" man nun das gegebene Dreieck im Verhältnis Umkreisradius: Radius des gegebenen Kreises, so ist die Aufgabe im wesentlichen gelöst. – EUKLID dagegen benutzt den Satz vom Sehnen-Tangentenwinkel zu einer knappen, außerordentlich eleganten Lösung. Obwohl es sich hier der Sache nach um zueinander ähnliche Dreiecke handelt, ist der Rückgriff auf die Sätze über Winkel im Kreis so überzeugend, daß man an der bewußten Vermeidung von Proportionen zweifeln kann.

IV, 10 *Die Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks mit Winkeln von 36°, 72°, 72°.* Die Konstruktion geht aus von einer in C stetig geteilten Strecke AB mit $AB \cdot BC = AC^2$. Für das gleichschenklige Dreieck ABD mit $AB = AD$ und $DB = AC$ soll die Behauptung bewiesen werden. Wie man den Rückgriff auf III, 37 und III, 32 im Beweis durch einfache Ähnlichkeitsbetrachtungen ersetzen kann, steht bei NEUENSCHWANDER [14, S. 374].

IV, 11 *Die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks.* Bei diesem Kernstück des IV. Buches ist die Vermeidung von Proportionen im Zubringer IV, 10 angesiedelt, doch lohnt sich eine globale Betrachtung. Die folgende Übersicht über die zu IV, 11 führende Argumentationskette stützt such auf NEUENSCHWANDERS Tabelle [14, S. 329–334], jedoch sind in diesem Zusammenhang weniger wichtige Sätze wie I, 32 unterdrückt, um das Diagramm nicht zu überladen.



Wie sich der Beweisgang hier an einzelnen Stellen vereinfacht, wenn Proportionen nicht vermieden werden, zeigt sich insbesondere in III, 36 und IV, 10. Zieht man dagegen die Proportionen von Anfang an in Betracht, so ergibt sich ein ganz anderes Bild. Die zentrale Rolle spielen dann die Sätze VI, 4/5 über die Ähnlichkeit von Dreiecken, etwa so zusammengefaßt: *Dreiecke sind winkelgleich* (‚haben die gleiche Gestalt') *genau dann, wenn die Seiten um entsprechende Winkel in Proportion stehen.* Hieraus folgt der Satz über die Winkelhalbierende im Dreieck VI, 6 und via VI, 8 der Satz von PYTHAGORAS. Man hätte dann etwa folgendes Schema:



Selbstverständlich ist dies nur einer von vielen Wegen zur Fünfeckskonstruktion. Auf jeden Fall ist aber die Lösung dieser Aufgabe unter Einbeziehung von Ähnlichkeitsargumenten wesentlich einfacher als in der von EUKLID präsentierten Weise.

Zum Schluß sei noch auf die zweite, von Buch IV unabhängige Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks im Kontext der Dodekaederkonstruktion XIII, 17 hingewiesen.

III, Def. 11 und III, 23/24 *Ähnliche Kreisabschnitte.* An dieser Stelle in Buch III kommt der Ähnlichkeitsbegriff explizit zur Sprache. Def. 11 sagt: „*Ähnliche Kreisabschnitte sind solche, die gleiche Winkel fassen, oder in denen die Winkel einander gleich sind.*" Wie vielfach bemerkt, setzt diese Definition den Peripheriewinkelsatz voraus. Es wird mit einer (relativ) verborgenen Invarianten statt mit dem näherliegenden Sehnen-Tangentenwinkel gearbeitet. (Vgl. v. FRITZ [5, S. 448/49] und MILLER [13, S. 195f].) Das mathematische Reflexionsniveau ist wesentlich höher als bei der Definition des HIPPOKRATES von Chios, die bei v. D. WAERDEN [21, S. 218] wiedergegeben ist. – Die bei NEUENSCHWANDER [14, S. 370/71] erhobenen Bedenken gegen die Exaktheit der Beweise von III, 23/24 sind durch v. FRITZ [5, S. 449f.] ausgeräumt. NEUENSCHWANDER konstatiert S. 376/77 explizit den pythagoreischen Ursprung und die spätere Überarbeitung dieser Sätze.

III, 30 *Einen gegebenen Bogen zu halbieren.* Der einfache Beweis hätte auch per Winkelhalbierung mit einem Hinweis auf VI, 33 (Bögen verhalten sich wie Mittelpunktswinkel) geführt werden können, doch fällt es in dieser Situation schwer, von der Vermeidung von Proportionen zu sprechen. Dazu kommen die Schwierigkeiten beim Beweis von VI, 33, die in HEATH's Kommentar vermerkt sind. (M.E. handelt es sich beim Beweis von VI, 33 um eine unbedachte Übernahme der Eudoxischen Begriffe aus Buch V, während die korrekte Beweisführung mit einem Wechselwegnahme-Argument, wie es für VI, 1 bekannt ist, zu erfolgen hätte. MILLER [13, S. 203] sagt zum Beweis: "... it seems reasonably clear that Euclid has lost sight of the concrete geometric sense of his argument.")

Diskussion des Materials

Die Beweismuster der aufgezählten Sätze gestatten die Einteilung in zwei deutlich getrennte Typen, von denen der erste noch einmal zu unterteilen wäre. Zuerst handelt es sich um offenbare Modifikationen von Beweisen aus der Ähnlichkeitsgeometrie. MILLER [13, S. 173] konstatiert zu I, 47, II, 11 und II, 14: "In each case of the proof the earlier proposition appears to be a reworking of the proof of the later". Ebenso wird man mit NEUENSCHWANDER IV, 10 beurteilen. Dagegen könnte man bei der stetigen Teilung II, 11 wie schon in der Besprechung gesagt, eher von einer Konzentration aufs Wesentliche sprechen. Dies scheint mir ebenso auf I, 44 zuzutreffen, und wie HEATH würde ich hier einen Rückgriff auf noch ältere pythagoreische Beweismuster sehen und nicht eine Überarbeitung etwa von

VI, 30 zu II, 11. THAER vermutet [3, S. 437] aus sprachlichen Gründen verschiedene Vorlagen für II, 11 und VI, 30.

Der zweite Typ besteht aus den Beweisen von III, 35/36. Obwohl die virtuose Kombination der Flächenanlegung II, 5/6 mit dem Satz von PYTHAGORAS I, 47 in II, 14 vorbereitet wird, ist ein Vorbild in der Ähnlichkeitsgeometrie nicht auszumachen.

Beide Beweistypen sind allerdings durch II, 14 und IV, 10 so eng miteinander verflochten, daß mir die Annahme eines einzigen Autors dieser Beweise unumgänglich erscheint. (VAN DER WAERDEN [23, S. 357] weist auf die Möglichkeit eines altpythagoreischen Beweises von III, 35 mit II, 5 und I, 47 hin.)

Eine Eigenart dieses Autors scheint mir bei der Verwendung der Winkelsätze am Kreis hervorzutreten. In III, Def. 11, IV, 2 und IV, 10 tritt uns ein gewisses „Um-die-Ecke-denken“ entgegen, bei dem nicht naheliegende, aber überaus elegante Schlüsse mit Hilfe der Winkelsätze vollzogen werden. In diese Kategorie gehört auch der Beweis von III, 22 über das Kreisviereck.

Damit tritt uns die Person des Autors, der nach PROKLOS' Aussage in seinen ‚Elementen‘ die Proportionen vermied, schon etwas deutlicher entgegen. Er hatte ein umfangreiches Material vorliegen, in der Tat wohl die gesamten Bücher I–IV, das er nach einem speziellen methodischen Gesichtspunkt bearbeitet hat. Dabei bedient er sich, auch in den Beweisen von III, 35/36, pythagoreischer Muster oder Hilfsmittel. Eine gewisse Ausnahme im Stoff mögen die Parallelentheorie I, 27–31 und die Parallelogrammtheorie I, 33–45 bilden, wie die Untersuchungen von NEUENSCHWANDER [14, S. 363–367] nahelegen. Die für den Beweis von I, 47 wichtigen Flächensätze I, 36/37 kann man sich leicht in der von NEUENSCHWANDER [14, S. 368] vermuteten Form für Rechtecke vorstellen, in der sie auch in I, 47 gebraucht werden.

Die weiteren Ergebnisse von NEUENSCHWANDER [15] und VAN DER WAERDEN [23, S. 337f.], [22] in bezug auf den Ursprung der Bücher I–IV bleiben in diesem Zusammenhang unberührt, denn unsere Untersuchungen betreffen ein Zwischenstadium zwischen den von diesen beiden Autoren untersuchten Vorformen und der Endfassung bei EUKLID. Nur zwei Bemerkungen seien noch angefügt.

Die erste betrifft die Zitierweise in den Büchern I–IV, insbesondere den Winkelsummensatz I, 32. Die enge Verflechtung der Bücher durch viele, z.T. wörtliche Zitate ist von NEUENSCHWANDER [14] herausgearbeitet worden und spricht ebenfalls für einen einzigen Autor. VAN DER WAERDEN [23, S. 339/41] stellt einen Stilvergleich zwischen dem Beweis bei EUKLID I, 32 und einem durch EUDEMOS (bei PROKLOS) überlieferten Beweis desselben Satzes durch die Pythagoreer an. Der für uns wesentliche Unterschied ist die Aussage bei EUKLID, daß der Außenwinkel am Dreieck der Summe der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel gleich ist. Prüft man die Zitate dieses Satzes bei späteren Gelegenheiten, wie sie bei Neuenschwander aufgelistet sind, so ergibt sich: Vom Außenwinkel wird nur in den Büchern III und IV Gebrauch gemacht (in III, 20/31/32 und IV, 10), die insgesamt 8 Zitate in Buch VI sagen dagegen immer nur: Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel gleich sind, so auch die dritten. Da der Außenwinkel auch in IV, 10 verwendet wird, möchte ich die Formulierung von I, 32 auch zu den „Elementen“ rechnen, in denen Proportionen vermieden wurden.

Die zweite Bemerkung betrifft das Buch IV insgesamt. Ein bei NEUENSCHWAN-

DER [14, S. 372] und VAN DER WAERDEN [23, S. 348] zitiertes Scholion sagt: „Die siebzehn Theoreme dieses Buches stammen von den Pythagoreern“. Das Buch enthält in seiner heutigen Fassung nur 16 Sätze. Zwei weitere kleine Unstimmigkeiten betreffen die Definitionen IV, Def. 1, 2 über einander ein- und umbeschriebene geradlinige Figuren, die im Buch überhaupt nicht benutzt werden, sowie die Def. 7 über eine dem Kreis einbeschriebene Strecke, die der Stellung des betreffenden Satzes nach eigentlich an den Anfang gehörte. Beachtet man den von den anderen Büchern der Elemente deutlich verschiedenen rigorosen Aufbau und das einheitliche Thema des Buches, so kommt man zu dem Eindruck, daß hier ursprünglich eine pythagoreische Monographie vorlag, die als Ganzes in die „Elemente“ des Autors, der Proportionen vermied (oder eines noch früheren Autors), aufgenommen wurde, aber außer der Modifikation von IV, 10 durch diesen Autor im Laufe der verschiedenen Übertragungen noch andere kleinere Veränderungen erfahren hat. Auf die stilistischen Unterschiede des IV. von den anderen Büchern weist schon PROKLOS hin [17, S. 222]. Selbstverständlich setzt eine solche Monographie einen Bereich elementarer Kenntnisse voraus, die ohne weiteres benutzt werden können, z.B. die Winkelsätze am Kreis.

Der Autor und seine Motive

Vordergründig ist ein Motiv für die Vermeidung von Proportionen in EUKLIDS Büchern I–IV leicht anzugeben: Die Proportionentheorie wird erst im (Eudoxischen) Buch V entwickelt, darf also vorher nicht benutzt werden. Die lange Liste der Autoren, die dies bemerken, aufzuzählen, erübrigt sich. (Der erste ist PROKLOS, z.B. in den Kommentaren zu I, 38 und I, 47.) VAN DER WAERDEN [21, S. 322] und NEUENSCHWANDER [14, S. 371] führen didaktische Gründe an: So können auch mittelmäßige Schüler wenigstens die ersten vier Bücher in sich aufnehmen. – Das mag so sein, wirkt aber eigentlich doch nicht ganz überzeugend. In dieser Hinsicht böten sich auch anderen Arrangements an, und insbesondere die Beweise von III, 35/36 sind in der vorliegenden Fassung viel schwieriger als unter Verwendung von Proportionen. Wenn didaktische Gründe ausschlaggebend waren, warum wurde dann der Sehnensatz III, 35 nicht ins Buch VI verlegt, zumal er überhaupt nirgends mehr gebraucht wird? (Ähnlich fragt MILLER [13, S. 240].) Warum wurde am Ende von Buch I nicht die einfachere Rechtecks-Theorie beibehalten?

KNORR schreibt die proportionenfreie Theorie insbesondere der Bücher I und III schon HIPPOKRATES von Chios zu [10, S. 306]. Er sagt weiter: "The gratuitons assumption of a primitive form of congruent geometry based on proportions, later supplanted by Euclid for formal reasons, has no supporting documentation; moreover, it reverses what we would expect to be the natural mode of developement: from the elementary congruent-form to the more refined similar-form." Beide von KNORR angeführte Argumente sind nicht stichhaltig. Zunächst hat wohl niemand behauptet, die gesamte Kongruenzgeometrie sei auf der Ähnlichkeitsgeometrie gegründet gewesen. Dann haben wir PROKLOS' Aussage über die proportionenfreien „Elemente“ als Dokumentation. Schließlich entspricht die heute übliche systematisch-deduktive Behandlung der Kongruenzgeometrie vor der Ähnlichkeitsgeometrie *nicht* der natürlichen Entwicklung der

Geometrie. Alle Pläne von Architekten, die schon lange vor einer formalen Mathematik in Gebrauch waren, beruhen auf dem Ähnlichkeitsprinzip. (Zum Komplex „gleich und ähnlich" siehe auch VON FRITZ [5].) KNORR selbst bemerkt in einer Arbeit zum X. Buch EUKLIDS [11, S. 56]: "It is a notorious aspect of the classical geometry, and surely of other periods in mathematical history, that the order of formal presentation of results frequently, if perhaps not invariably, alters the order of discovery."

Möglicherweise kam der Anstoß zur Entwicklung der proportionenfreien Theorie von einer ganz anderen Seite. Wir kommen zu einer zeitlichen Fixierung durch die Bemerkungen des ARISTOTELES zu II, 14, nach denen es eine kontroverse Diskussion um die Benutzung von Proportionen gegeben hat. ARISTOTELES hatte während seiner Zeit an PLATONS Akademie (~366–348) engen Kontakt mit der aktuellen mathematischen Forschung. Zur gleichen Zeit arbeitete PLATON an seinem ‚Timaios', der in großem Maße altpythagoreisches Gedankengut wiedergibt. Genau das gleiche Gedankengut tritt uns bei der proportionenfreien Fassung der aufgeführten Beweise entgegen. Wenn von hier aus eine Anregung – etwa bei II, 14 oder II, 11 – gegeben war, so ist unschwer vorstellbar, wie erste Erfolge eine eigene Dynamik entwickeln und die Theorie weiter vorangetrieben wurde bis zu einem so überragenden Ergebnis wie der proportionenfreien Fünfeckskonstruktion. Die um die gleiche Zeit begonnene Ausarbeitung der allgemeinen Proportionentheorie durch EUDOXOS und seine Schule mag nun als zweites, verstärkendes Motiv hinzukommen. Man will sehen, was man ohne dies schwierige Werkzeug leisten kann. Dabei ist die bewußte Beschränkung der Hilfsmittel der griechischen Mathematik durchaus geläufig: Die Geometrie muß ohne Einschiebekonstruktionen mit Zirkel und Lineal auskommen, der Gebrauch des Zirkels ist sogar noch eingeschränkt. Am Anfang von Buch I wird ohne Parallelen gearbeitet. TOOMER [20, S. 37] berichtet von einem neu aufgefundenen Text von PAPPOS, in dem mit einer einzigen festen Zirkelöffnung konstruiert wird. PROKLOS [18, S. 217] spricht über den Ausschluß von Widerspruchsbeweisen.

In Anbetracht der etwa gleichzeitigen Bemühungen der Schule des EUDOXOS um die allgemeine Proportionentheorie bot es sich nun an, ein Lehrbuch mit den neu gewonnenen Ergebnissen in seinen ersten Teilen proportionenfrei aufzubauen, wobei natürlich auch der berechtigte Wunsch nach einer angemessenen Präsentation der eigenen Ergebnisse eine Rolle gespielt haben wird.

Hier stellt sich die Frage, ob man den Autor der proportionenfreien Elemente auch namentlich fixieren kann. Über die Mathematiker in der Akademie erhalten wir via PROKLOS durch EUDEMOS Auskunft [18, S. 212/13]. Nach den etwas älteren EUDOXOS, AMYNTAS, MENAICHMOS und DEINOSTRATOS werden THEUDIOS von Magnesia, ATHENAIOS, HERMOTIMOS und PHILIPPOS von Medma genannt. Über sie heißt es: „THEUDIOS ferner aus Magnesia war hervorragend auf dem Gebiete der Mathematik und der anderen Wissenschaften. Denn er brachte die Elementarlehre in ein geordnetes System und gab vielen definitionsartigen Bestimmungen eine allgemeinere Fassung (oder: vielen speziellen Sätzen). Auch der Kyzikener ATHENAIOS, der derselben Zeit angehört, machte sich durch seine Leistungen auf dem Gebiete der anderen mathematischen Disziplinen und besonders der Geometrie einen Namen. Alle diese lebten miteinander in der Akademie und betrieben gemeinsam ihre Forschungen. HERMOTIMOS aber von Kolophon entwickelte die

Ergebnisse des EUDOXOS und THEAITETOS weiter, leistete einen beträchtlichen Beitrag zu den „*Elementen*“ und schrieb einiges über (geometrische) Örter. PHILIPPOS von Medma ferner, PLATONS Schüler und von diesem zum Studium der Mathematik angeregt, betrieb seine Forschungen nach Anleitung PLATONS und stellte sich nur solche Aufgaben, von denen er sich eine Förderung der platonischen Philosophie versprach. Bis auf diesen herab führen die Geschichtsschreiber die Entwicklung dieser Wissenschaft zurück. Nicht viel jünger als diese ist EUKLID ...“. HERMOTIMOS und PHILIPPOS werden spezielle Leistungen zugeschrieben, welche außerhalb unseres Themas liegen. ATHENAIOS stammt aus Kyzikos, wird also der Schule des EUDOXOS zuzurechnen sein. Es bleibt THEUDIOS, der „Elemente“ schrieb und dabei entweder ‚vielen Definitionen‘ oder ‚vielen speziellen Sätzen‘ eine allgemeinere Fassung gab. Eine Entscheidung zwischen den beiden Lesarten ist nach VON FRITZ [6] nicht möglich. Glücklicherweise würden aber beide auf einen Autor passen, der, wie wir gesehen haben, einen beträchtlichen Teil des ihm vorliegenden Materials umarbeitete. Zur Vermeidung von Proportionen waren sowohl Definitionen wie auch Sätze neu zu fassen. (MORROW [17, S. 56] liest in seiner Übersetzung nur “many partial theorems”, ohne seine Entscheidung zu begründen.) Allerdings bietet sich für die Lesart „vielen speziellen Sätzen“ noch eine weitere Interpretation an. Es gibt m.E. nur eine klar identifizierbare Passage bei EUKLID, die offenbar aus ‚Verallgemeinerungen spezieller Sätze‘ besteht: Die Parallelogrammtheorie am Ende des I. Buches, evtl. mit einigen Sätzen des VI. Buchs. NEUENSCHWANDER [14, S. 364–367] weist darauf hin, daß hier offenbar Verallgemeinerungen von Sätzen über Rechtecke vorliegen. Er kommt durch Vergleich mit den stereometrischen Büchern zu dem Schluß, daß wahrscheinlich EUDOXOS der Autor der Verallgemeinerungen ist. Trifft dies zu, so hätten die betreffenden Sätze dem THEUDIOS wohl zur Verfügung gestanden und wir könnten ihn mit hoher Wahrscheinlichkeit, als denjenigen Autor identifizieren, welcher die proportionenfreien „Elemente“ schrieb.

Schon HEIBERG [8, S. 3/4] nennt THEUDIOS als unmittelbaren Vorgänger EUKLIDS, ebenso HEATH [7, Vol. 1, S. 117]. HEIBERG rechnet HERMOTIMOS und PHILIPPOS zur Generation des ARISTOTELES und THEUDIOS zu der diesen unmittelbar vorangehenden Gruppe von Schülern PLATONS. Er hat in der Arbeit [8] versucht, aus den mathematischen Stellen bei ARISTOTELES Aufschlüsse über THEUDIOS’ Elemente zu erhalten. Die Ergebnisse überzeugen nicht, auch VON FRITZ [6] beurteilt den Versuch als wenig erfolgreich. HEIBERG sagt explizit „... die Elemente Euklids bieten nur spärliche Handhaben für Rückschlüsse auf die Vorarbeiten“ [8, S. 4], eine Meinung, die sicher durch viele seither geschriebene Untersuchungen widerlegt ist und die auch im direkten Gegensatz zur vorliegenden Arbeit steht.

Zusammenfassung

Sehen wir zunächst noch einmal das Material der Bücher I–IV im Einzelnen an. Im I. Buch finden wir nach NEIUENSCHWANDER [14, 15] und VAN DER WAERDEN [22] viel Material, das bis auf HIPPOKRATES von Chios bzw. die Pythagoreer zurückgeht. Jüngeren Datums sind die Parallelenlehre I, 27–I, 31 mit dem dazugehörigen Parallelenaxiom (Post. 5) aus der Zeit kurz vor EUKLID [14, S. 363], die Parallelogrammtheorie I, 33–45 von Eudoxos oder aus der Gruppe der mit ihm zusammenarbeitenden Mathematiker [14, S. 366/67] und schließlich der Satz von Pythagoras mit dem Beweis von Euklid oder seinem Vorgänger.

Das II. Buch in seiner heutigen Fassung wurde von Theätet noch nicht benutzt, wie man mit van der Waerden [21, S. 283] aus dem Anfang von Buch XIII schließen kann. Fowler [4, S. 26/27] interpretiert Buch II als knappe Zusammenfassung der mit Wechselwegnahme begründeten, evtl. von Theätet benutzten Proportionentheorie, die insbesondere auch für Buch X wichtig ist, an dem Theätet und Hermotimos gearbeitet haben. Es mag den Satz von Pythagoras als Satz 8.a und weitere Sätze enthalten haben, die uns verloren sind. Dies betrifft wohlgemerkt nur die Abfassung von Buch II, einzelne dort aufgeführten Sätze, wie II, 5, 6, 14 sind sicher erheblich älter. (II, 1 ist nach Neuenschwander [14, S. 371] eine spätere Hinzufügung, und II, 11–14 unterscheiden sich sprachlich vom Rest.)

Buch III ist in seinen Hauptbestandteilen alt [14, S. 374–78].

Buch IV ist, wie schon gesagt, im wesentlichen pythagoreisch und nach meiner Einschätzung eine Monographie, die elementaren Stoff wie den Peripheriewinkelsatz als bekannt voraussetzte.

Wie viel von diesem Material schon in den „Elementen" des Leon enthalten war, muß offen bleiben. Nach der durchgeführten Analyse scheint es mir sicher, daß jedenfalls die Bücher II–IV in ihrer heutigen Form zu den Elementen des Theudios gehörten. (Evtl. mit Ausnahme von Kleinigkeiten wie II, 1.) Er war der Autor, der bei der Abfassung seiner „Elemente" den Proportionen aus dem Wege ging, und die Beweise von II, 14, III, 36/37, IV, 10 in ihrer heutigen Fassung sind ihm zuzuschreiben.

Hinsichtlich des Endes von Buch I bleiben Zweifel. Die Parallelensätze mögen später sein. Die Paralleleogrammthorie könnte bei Theudios gestanden haben oder auch nicht. Der Beweis des Satzes von Pythagoras allerdings paßt so gut zu den Büchern II–IV, daß ich Proklos dahingehend interpretieren möchte, daß Euklid den Beweis in die „Elemente" aufnahm, aber nicht selbst verfaßte.

Literatur

1. Becker, Oskar: Eudoxos-Studien I. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie & Physik, Abt. B: Studien: Band **2**, S. 311–333 (Berlin 1933).
2. Bretschneider, C. A.: Geometrie und die Geometer vor Euklides. B. G. Teubner, Leipzig 1870.
3. Euklid: Die Elemente. Herausgegeben und ins Deutsche übersetzt von Clemens Thaer. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1962.
4. Fowler, D. H.: Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan Theory of Ratio. Arch. Hist. Exact Sciences **22** (1980), p. 5–36.
5. von Fritz, Kurt: Gleichheit, Kongruenz und Ähnlichkeit in der antiken Mathematik bis auf Euklid. In: Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft. de Gruyter, Berlin 1971, S. 430–508.
6. von Fritz, Kurt: Artikel „Theudios" in Pauly-Wissowa: Realenzyklopädie der klassischen Altertumswissenschaften, Bd. VI A 1 Sp. 244.

7. HEATH, T. L.: The Thirteen Books of Euclid's Elements. Vol. 1, 2, 3. Translated with Introduction and Commentary by Sir THOMAS L. HEATH. Dover, New York ²1956.
8. HEIBERG, J. L.: Mathematisches zu Aristoteles. In: Abhandlung zur Geschichte der mathematischen Wissenschaft XVIII (1904), S. 1–49.
9. KNELL, HEINER: Grundzüge der griechischen Architektur. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1980.
10. KNORR, W. R.: The Evolution of the Euclidean Elements. Reidel, Dordrecht/Boston 1975.
11. KNORR, W. R.: "La croix des mathematiciens": The Euclidean theory of irrational lines. Bull (new ser.) Amer. Math. Soc. **9** (1983), S. 41–69.
12. MALMENDIER, N.: Eine Axiomatik zum 7. Buch der Elemente von Euklid. Math. Phys. Sem. Ber. **22** (1975), S. 240–254.
13. MILLER, I.: Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements. MIT Press Cambridge (Mass.)/London 1981.
14. NEUENSCHWANDER, E.: Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids. Arch. Hist. Exact Sciences **9** (1972), 325–380.
15. NEUENSCHWANDER, E.: Beiträge zur Frühgeschichte der griechischen Geometrie I. Arch. Hist. Exact Sciences **11** (1973), p. 127–133.
16. Der kleine Pauly. Lexikon der Antike in fünf Bänden. Deutscher Taschenbuch Verlag, München 1979.
17. PROCLUS (= PROKLOS): A Commentary on the First Book of Euclid's Elements. Translated by G. R. MORROW, Princeton Univ. Press, Princeton 1970.
18. PROKLUS DIADOCHUS (= PROKLOS): Kommentar zum ersten Buch von Euklids „Elementen". Übersetzt von P. LEANDER SCHÖNBERGER OSB, hrsg. von MAX STECK, Halle 1945.
19. SZABO, A.: Anfänge der griechischen Mathematik. Oldenbourg, München-Wien 1969.
20. TOOMER, G. J.: Lost Greek Mathematical Works in Arabic Translation. Math. Intelligencer **6** (1984), No. 2, p. 32–38.
21. VAN DER WAERDEN, B. L.: Erwachende Wissenschaft. Birkhäuser, Basel ²1966.
22. VAN DER WAERDEN, B. L.: Die Postulate und Konstruktionen in der frühgriechischen Geometrie. Arch. Hist. Exact Sciences **18** (1978), S. 343–357.
23. VAN DER WAERDEN, B. L.: Die Pythagoreer. Artemis, Zürich 1979.

T. H., Fachbereich Mathematik
Darmstadt

(Eingegangen am 1. November 1984)