REGINE DOUADY ET MARIE-JEANNE PERRIN-GLORIAN

UN PROCESSUS D'APPRENTISSAGE DU CONCEPT D'AIRE DE SURFACE PLANE

(A Learning Process for the Concept of Area of Plane Surfaces)

ABSTRACT. A learning process is built for the concept of area of plane surfaces, for pupils 9–12 years old. It is based on the following hypotheses:
- developing the concept of area as a magnitude helps the pupils to establish relations between the geometrical and the numerical setting.
- early identification between magnitudes and numbers induces confusion between length and area.

This learning process has been implemented in two classes (9–10 years, 10–11 years). Pupils have been observed in class, in interviews and through written tests. The results of these observations are presented.

RÉSUMÉ. On construit un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane, pour des élèves de 9–12 ans. Il s'appuie sur les hypothèses suivantes:
- développer le concept d'aire, en tant que grandeur, aide les élèves à établir des relations entre les cadres géométrique et numérique.
- une identification précoce entre les grandeurs et les nombres amène les élèves à faire des confusions entre longueurs et aires.

Ce processus d'apprentissage a été expérimenté dans deux classes (9–10 ans et 10–11 ans). Les élèves ont été observés en classe, dans des entretiens et à travers des tests écrits. On donne ici les résultats de ces observations.

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude de la construction de la notion d'aire chez des élèves du cours moyen (CM1–CM2, 9–11 ans).

L'objectif de l'enseignement que nous cherchons à mettre sur pied est d'associer un nombre au maximum de surfaces, en particulier à tous les polygones et les disques de façon à pouvoir faire des comparaisons et des calculs. Cependant, pour définir une application mesure entre surfaces et nombres avec suffisamment de sens pour les élèves, nous faisons l'hypothèse qu'il faut d'abord construire l'aire comme grandeur autonome en distinguant aire et surface aussi bien qu'aire et nombre.

Un autre de nos objectifs est de différencier aire et longueur avant même d'avoir un moyen de mesurer les aires, en particulier de différencier aire et périmètre que les élèves ont tendance à amalgamer: en effet, pour les élèves, le périmètre est une autre "mesure" de la surface. Nous retardons l'identification entre aire et nombre avec l'hypothèse qu'une identification précoce

Educational Studies in Mathematics **20**: 387–424, 1989.
© 1989 *Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.*

entre grandeurs et nombres favorise l'amalgame des différentes grandeurs en jeu (ici aire et longueur).

Nous avons élaboré, dans le cadre théorique de "dialectique outil-objet et jeux de cadres" (R. Douady, 1984, 1987) une *ingénierie didactique* c'est à dire, un ensemble de séquences d'apprentissage où sont à l'oeuvre nos hypothèses cognitives et didactiques. Nous avons réalisé cette ingénierie dans deux classes (un CM1, un CM2). L'analyse des productions des élèves en classe, au cours d'entretiens et à des épreuves écrites a permis de dégager les acquis, les difficultés qui résistent et les difficultés non prévues qui nous amènent à faire de nouvelles hypothèses et à modifier les séquences.

Dans la première partie, nous décrivons le cadre théorique, dans la seconde notre problématique et notre méthodologie. L'ingénierie didactique est exposée dans la troisième partie. La quatrième partie est consacrée aux conceptions des élèves. La cinquième partie donne les résultats de la recherche.

I. CADRE THÉORIQUE

Des travaux de Piaget et de l'Ecole de psychologie sociale de Genève (Doise Mugny, 1981; Perret-Clermont, 1979) nous retenons l'importance de l'action (et pour nous, la recherche d'un problème), le rôle des "déséquilibres-rééquilibrations", le rôle des conflits cognitifs entre interlocuteurs travaillant ensemble – ou à distance.

En ce qui concerne les concepts mathématiques, nous les considérons d'un double point de vue, outil et objet:

- un concept est **outil** lorsque l'intérêt est focalisé sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème ou poser des questions. Un même outil peut être *adapté* à plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème.
- un concept est **objet** lorsqu'il est considéré d'un point de vue culturel, qu'il a une place dans l'édifice structuré des connaissances d'un moment reconnues socialement.

Nous disons qu'*un élève a des connaissances en mathématiques* s'il est capable d'en provoquer le fonctionnement comme *outils explicites* dans des problèmes qu'il doit résoudre, qu'il y ait ou non des indicateurs dans la formulation du problème, s'il est capable de les adapter lorsque les conditions habituelles d'emploi ne sont pas exactement satisfaites.

En ce qui concerne l'apprentissage des élèves, nous considérons que le travail des concepts intervenant comme outils est créateur de sens. Le travail portant sur l'objet permet la décontextualisation, la capitalisation du savoir. Un travail où interviennent de façon alternée et interactive les aspects outil et objet des concepts doit permettre leur adaptation et leur réinvestissement dans des situations différentes de celles qui les ont produits, qu'il s'agisse de situations élaborées dans la cadre scolaire ou d'occasions d'emploi hors de ce champ.

Ce point de vue épistémologique conduit à une certaine organisation globale de l'enseignement dans la classe, *la dialectique outil-objet*, fondée sur la recherche de problèmes répondant à plusieurs conditions. Cette dialectique se double d'une dialectique ancien-nouveau et fait intervenir de façon essentielle des *jeux de cadres* propices au développement de phénomènes d'accommodation. Décrivons cette organisation.

1. *Jeux de Cadres*

Nous disons qu'un **cadre** est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales que le sujet asscocie à un moment donné à ces objets et ces relations. Nous admettons que les images mentales jouent un rôle important dans le fonctionnement comme outil, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. Par ailleurs la familiarité, l'expérience peuvent conduire à des conflits entre ce que le sujet attend et ce qui se produit effectivement et par suite à renouveler ses images ou à les faire évoluer. Nous concevons la notion de cadre comme une notion dynamique. Le **changement de cadres** est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui, sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés recontrées et la mise en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation.

Les **jeux de cadres** sont des changements de cadres provoqués à l'initiative de l'enseignant, à l'occasion de problèmes répondant aux conditions énoncées ci-dessous, pour faire avancer les phases de recherche et notamment pour élaborer une filiation de questions pertinentes par rapport au problème posé, lequel prend place dans une certaine situation d'apprentissage. Il s'agit du déroulement d'une procédure dans laquelle on peut distinguer trois phases:

(1) *Transfert et Interprétation*

Les élèves sont confrontés à un problème formulé dans un certain cadre. Compte tenu de leurs connaissances, de leurs pratiques et habitudes, l'examen qu'ils font du problème les conduit à traduire tout ou partie dans un autre cadre et à y interpréter certaines questions. Ce faisant, ils mettent en oeuvre des correspondances entre cadres différents (entre objets et entre relations).

(2) *Correspondances Imparfaites*

Mais les correspondances entre les cadres sont partielles soit pour des raisons mathématiques, soit à cause des connaissances insuffisantes des élèves. La situation est source de déséquilibre.

(3) *Amélioration des Correspondances et Progrès de la Connaissance*

Etendre les correspondances peut conduire à définir de nouveaux objets, à étendre les relations connues et en définir de nouvelles. La communication entre cadres et en particulier la communication avec un cadre auxiliaire de représentation favorise le processus d'accommodation. C'est un facteur de rééquilibration.

Notons que les élèves ont besoin d'une éducation à la pratique des changements de cadres pour que ceux-ci deviennent familiers et puissent remplir un rôle significatif dans l'apprentissage d'une notion ou d'une méthode. Or la tendance dans l'enseignement ordinaire serait plutôt à séparer le travail dans les différents cadres dont les élèves ont à connaitre. C'est pourquoi dans la dialectique outil-objet décrite ci-dessous, un espace et un temps leur sont réservés explicitement. Le choix des problèmes est particulièrement important à ce propos. Ainsi, la formulation d'un problème dans au moins deux cadres est-elle une condition retenue.

2. *Conditions sur les Problèmes*

Les problèmes que nous choisissons pour être source d'apprentissage remplissent les conditions suivantes:

(1) L'énoncé, contexte et questions, a du sens pour les élèves concernés:
  - le contexte se réfère à un domaine familier (dans ou hors école). L'énoncé comporte des questions: pour les élèves, la réponse n'est pas évidente, mais ils sont capables d'envisager ce que peut être une réponse, et cela indépendamment de la capacité à proposer une procédure d'accès et de validation.
  - Compte tenu de leurs connaissances, les élèves peuvent engager une procédure de résolution et en contrôler les effets.

(2) Les élèves ne peuvent pas résoudre complètement le problème pour des raisons qui peuvent être très diverses: la procédure envisagée est trop longue, source d'erreurs, incompatible avec le temps donné; il faudrait l'utiliser hors de son champ connu de validité; elle ne marche pas hors du domaine familier de fonctionnement. Il y a contradiction ou au moins conflit entre ce que l'élève conçoit et ce que le problème lui réclame.

(3) Les connaissances visées par l'apprentissage (contenu ou méthode) sont des outils adaptés au problème.

(4) le problème peut se formuler dans au moins deux cadres différents.

De plus, pour que la résolution du problème joue un rôle dans la construction de la connaissance de l'élève, il faut que celui-ci y travaille sous sa propre responsabilité. Cela suppose que la situation lui permet de contrôler la validité de ses décisions et de ses productions sans essayer de recourir à des indices extérieurs au problème pour deviner les attentes du maître. Les conditions de viabilité en classe de telles situations ont été étudiées par G. Brousseau (1987).

3. *Dialectique Outil-Objet*

Etant donné un problème convenablement choisi, que les élèves ont en charge de résoudre, la dialectique outil-objet est un processus en plusieurs phases:

(a) *Ancien, outils explicites*: des concepts mathématiques sont mis en oeuvre comme outils explicites pour résoudre au moins partiellement le problème.

(b) *Recherche, nouveau implicite*: les élèves rencontrent des difficultés pour résoudre complètement le problème. Chacun (individu ou groupe) sait qu'il a la charge, à partir de ce qu'il sait, de faire des propositions qu'il devra argumenter et confronter à celles des autres en vue de leur validation. Dans ces phases d'action et de formulation, souvent des progrès efficaces proviennent d'un changement de cadre de travail (formulation numérique d'un problème de géométrie, interprétation graphique de la forme numérique . . .). Cela est l'occasion de mettre en oeuvre implicitement des outils nouveaux.

(c) *Explicitation et institutionnalisation locale* de certains éléments qui ont joué un rôle important. Ils sont formulés soit en termes d'objets, soit en termes de pratiques, avec leurs conditions d'emploi et leur expression du moment valables au sein de la classe.

(d) *Institutionnalisation, statut d'objet, nouveau explicite*: dans l'information traitée, l'enseignant choisit et expose, avec les conventions en usage, ce qui est nouveau à retenir. Il fait le "cours". Ainsi, l'enseignant a la charge de donner un statut d'objet aux concepts qui jusque là sont intervenus comme outils. Ce faisant, il se constitue un *savoir de la classe* auquel chacun pourra se référer.

(e) *Familiarisation, réinvestissement* phase au cours de laquelle la structuration personnelle va se développer et favoriser la transformation du savoir collectif en *savoir de chacun.*

(f) = (a) *Complexification de la tâche ou nouveau problème* où le nouveau est appelé à intervenir comme outil explicite, et à prendre place comme "ancien".

II. PROBLÉMATIQUE ET MÉTHODOLOGIE

1. *Contexte*

(*a*) *L'aire Grandeur ou Nombre*?

Notre objectif est d'élaborer un processus d'apprentissage de l'aire comme moyen de rendre compte de la place occupée par une surface dans le plan.

Du point de vue mathématique, nous voulons définir une application-mesure F d'un certain ensemble Σ de surfaces planes (contenant toutes celles qu'on rencontre à l'école élémentaire et au collège) à valeurs dans $\mathbf{R}^+$. L'application F doit vérifier les propriétés suivantes:

- si S_1 et S_2 n'ont en commun que des points du bord, alors $f(S_1 \cup S_2) = F(S_1) + F(S_2)$.
- si S est d'intérieur non vide, alors $F(S) > 0$.
- pour toute isométrie g du plan et toute surface S dans Σ, $F(g(S)) = F(S)$.

F peut être définie par le choix d'une unité. Par exemple, on choisit un carré A, on pose $F(A) = 1$. Cela permet de définir l'aire de certaines surfaces. Pour les autres, on procède par encadrement et passage à la limite (voir Lebesgue, 1931, réed 1975). Si l'on change d'unité, les nombres changent mais les nouvelles mesures sont proportionnelles aux anciennes. Cependant, contrairement à ce qui se passe pour les segments, deux surfaces connexes auxquelles on associe le même nombre ne sont pas nécessairement superposables. Cela souligne la distinction entre la grandeur et l'objet géométrique.

L'usage en mathématique est d'identifier aires et mesures grâce au choix d'une unité et de ne retenir que les deux pôles: surfaces et nombres. C'est le point de vue généralement adopté dans l'enseignement. Dans ces conditions, l'aire est un invariant non pas de la surface mais du couple (surface, unité): pour une surface fixée, l'aire considérée comme nombre dépend du choix de l'unité. C'est légitime si on n'a pas l'intention de changer d'unité, mais c'est un point de vue difficile à tenir si on veut s'occuper de surfaces matérielles et si on veut que l'aire soit un invariant de la surface et d'elle seule.*

(*b*) *Présentation dans l'Enseignement Élémentaire en France*

La présentation standard actuelle consiste à recourir au pavage de surfaces, en passant rapidement au pavage avec des carrés et à compter les carreaux pour déterminer l'aire de surfaces quadrillées. Elle consiste ensuite, pour des rectangles ou carrés, à trouver des moyens économiques de comptage, puis à introduire les unités légales avec multiples et sous multiples et selon le cas, avant ou après cela, à établir les formules de calcul d'aire des rectangles en fonction des longueurs des côtés. On raccroche ensuite à ces formules celles relatives au triangle et à d'autres quadrilatères (losange, parallélogramme, trapèze).

Ainsi l'attention est essentiellement portée sur les deux pôles surfaces et nombres et ce, d'un point de vue statique. On s'intéresse rarement à l'action des transformations, à la recherche d'invariants ou de modes de variations. Quand l'aire intervient, c'est très vite comme produit de longueurs avec des expressions numériques après choix d'unités de mesure. Il y a en général très peu de travail sur l'aire comme grandeur autonome.

(*c*) *Des Travaux Antérieurs*

D'après les études de Piaget (Piaget *et al.*, 1948), les élèves de l'âge qui nous intéresse sont au stade IIIB: la conservation de l'aire par déplacement d'une surface ou par découpage et recomposition des morceaux sans chevauchement est acquise. Tout semble en place pour la construction, par les enfants, des mesures de surfaces. Toutefois, selon Piaget, si l'enfant de cet âge peut reporter une surface unité pour faire des mesures, il faut attendre le stade IV des opérations formelles pour qu'il comprenne le calcul à partir des mesures de longueurs. Piaget observe "durant tout le stade IIIB, un dualisme très frappant qui oppose les progrès de la construction euclidienne dans le domaine de la mesure linéaire aux résidus topologiques irréductibles sur le terrain des surfaces et des volumes" (Piaget *et al.*, 1948, p. 480). Dans le même ouvrage (pp. 337–338) il relève que, dans le cas des surfaces, "il intervient une circonstance particulière... un arrangement différent des parties, tout en maintenant leur somme constante, engendre une autre surface qualitative (quoique de valeur quantitative égale)... En outre, en modifiant la forme d'une surface, on augmente ou on diminue la longueur de la ligne frontière, ce qui joue un rôle du point de vue des intuitions topologiques dont part toujours l'enfant".

Nos observations d'élèves de 9–11 ans montrent que les compétences ne sont pas aussi nettement attachées aux stades: des difficultés caractéristiques d'élèves plus jeunes (stade II) subsistent longtemps dans des situations plus complexes; par contre, des élèves de 10 ans sont capables de calculer des aires à partir de mesures de longueurs dans des situations assez simples.

Vinh Bang et Lunzer (1965) ont abordé la question de la variation de l'aire dans la déformation d'une surface. Nous trouvons des résultats qui rappellent ceux qu'ils ont obtenus au cours de l'expérience suivante:

un fil de longueur fixe est tendu entre trois points A, B, M. Les points A et B sont fixes, M varie d'une position centrale M_0 à une position limite L.

Les enfants ne perçoivent pas la variation de l'aire comme continue. Ils pensent que l'aire reste constante dans toute une région autour de la position centrale, qu'elle est beaucoup plus petite quand on s'approche de la position limite.

Janine Rogalski (1983) a montré que le pavage de surfaces par des pièces non carrées n'est pas toujours disponible chez les élèves de 10–12 ans.

(*d*) *Des Erreurs Observées chez des Élèves du Cours Moyen*

Certaines difficultés et erreurs observées chez les élèves sont bien connues des enseignants:

- La surface unité étant une surface avec une certaine forme, la mesure d'une surface S est tributaire de la possibilité de paver effectivement S avec cette forme. Ainsi des élèves rencontrent des difficultés pour exprimer l'aire d'un triangle en cm^2 puisqu'on ne peut pas le paver avec des carrés.
- L'aire est attachée à la surface et ne se dissocie pas d'autres caractéristiques de cette surface:
  - si le périmètre d'une surface augmente, son aire aussi (et réciproquement
  - si deux surfaces ont le même périmètre, elles ont la même aire (et réciproquement).

- On étend des formules à des situations où elles ne sont pas valables: par exemple produit des "dimensions" pour un parallélogramme ou des "trois dimensions" d'un triangle.

2. *Notre Interprétation et Nos Hypothèses Didactiques*

Il nous semble qu'un certain nombre de difficultés sont liées au traitement par les élèves des problèmes d'aire, soit du point de vue des surfaces, soit du point de vue des nombres.

Par exemple, une diminution de l'aire est comprise comme une diminution de la surface avec sa forme et va de pair avec une diminution du périmètre: l'aire et le périmètre sont alors amalgamés à la surface et liés à sa forme: on agrandit ou diminue la surface en conservant sa forme; le périmètre c'est le contour, l'aire c'est l'intérieur.

A l'autre extrême, l'aire est un nombre: on est sur le plan du calcul et on ne relève que des éléments pertinents pour le calcul, par exemple des mesures de longueur qui paraissent caractéristiques de la surface considérée et qu'on combine dans des formules plus ou moins fondées telles que "ajouter les mesures de deux côtés d'un triangle et multiplier par la troisième", pour calculer l'aire du triangle en faisant le produit de deux longueurs. N. Balacheff (1988) fait des observations du même type.

Ainsi, au sujet de l'aire, les élèves développeraient une "conception forme" liée au cadre géométrique ou une "conception nombre" liée au cadre numérique, ou les deux, mais de façon indépendante, et ils traiteraient les problèmes sans établir de relation entre les deux points de vue. Or les problèmes d'aire mettent de façon essentielle en relation les cadres numérique et géométrique.

L'analyse que nous faisons nous amène à distinguer trois pôles: le pôle géométrique avec les surfaces considérées comme parties du plan, le pôle "grandeur" avec les aires et le pôle numérique avec les mesures. Le concept d'aire en tant que grandeur constitue à notre avis un relais entre les surfaces et les nombres. Ceci nous amène à faire une *première hypothèse*:

(H1) Le développement dans l'enseignement du concept d'aire en tant que grandeur permet aux élèves d'établir les relations nécessaires entre les deux cadres (géométrique et numérique).

Par ailleurs, un choix convenable des unités de longueur et d'aire permet d'établir des relations entre les mesures de longueur et les mesures d'aire et facilite ainsi la construction de l'application mesure F.

Or la mesure permet d'identifier toutes les grandeurs (y compris longueurs et aires) à $\mathbf{R}^+$. Ceci est précieux du point de vue de la modélisation mathématique. Toutefois une identification trop précoce nous semble favoriser l'amalgame des différentes grandeurs alors que l'objectif à cet âge est plutôt de les différencier, d'où une *deuxième hypothèse*:

(H2) Une identification trop précoce entre grandeurs et nombres favorise l'amalgame des différentes grandeurs (ici longueurs et aires).

3. *Méthodologie*

(1) *Conception d'une ingénierie didactique adaptée à nos hypothèses*: Cela conduit à choisir des problèmes dans lesquels les grandeurs (longueurs, aires) sont dissociées d'une part des objets (segments, surfaces), d'autre part des nombres, des problèmes dans lesquels jouent de façon significative les différences entre périmètre et aire avant d'aborder la mesure en fonction d'une unité choisie et les relations entre mesures de ces grandeurs. Nous attendons de la mise en oeuvre de nos hypothèses certains effets sur les conceptions des élèves et sur l'évolution de leur savoir. Suivant l'importance des effets, nous pourrons être amenées à revoir notre ingéniérie didactique ou même nos hypothèses.

(2) *Réalisation et observation* de cette ingénierie dans deux classes de la banlieue parisienne un CM1 (9–10 ans) et un CM2 (10–11 ans).

(3) *Entretiens par deux*: juste après l'apprentissage au CM1, deux mois après au CM2.

(4) *Analyse de l'évolution des élèves à* partir de plusieurs éléments: notes prises au cours des séances, productions des élèves au cours des activités proposées, réponses des élèves à deux épreuves écrites (au CM1 les 17/03 et 14/04) et aux entretiens. Confrontation des effets observés aux effets attendus.

(5) *Retour sur les hypothèses et sur l'ingénierie*

III. INGÉNIÉRIE DIDACTIQUE

1. *Nos Choix Didactiques*

L'objectif d'apprentissage est la construction et la manipulation, dans son aspect outil, d'une application mesure F entre surfaces et nombres.

Pour un choix fixé d'une surface unité A, par exemple un carré, il est facile d'associer un nombre à toute une catégorie de surfaces: celles pavables avec un nombre fini de copies de A. Le problème est d'enrichir l'ensemble des surfaces mesurables avec l'unité A. Par exemple quel nombre associer à un triangle ou à un disque?

Nos hypothèses nous amènent à distinguer trois points dans l'apprentissage:

(a) *construire la notion d'aire comme grandeur autonome*

- en comparant directement des surfaces par inclusion (éventuellement après déplacement), ou indirectement par *découpage-recollement*, c'est à dire, en découpant l'une des surfaces S en un nombre fini de pièces qu'on recolle sans chevauchement pour obtenir une nouvelle surface S' qu'on substitue à S pour la comparaison.
- en attribuant à une surface des mesures par pavage à l'aide de pavés de formes variées.

Cela nous amène à:

- dégager l'aire de la forme en différenciant aire et surface: deux surfaces de formes différentes peuvent avoir des aires égales.
- distinguer l'aire du nombre tout en contrôlant la correspondance surfaces $\rightarrow$ nombres: à une même surface peuvent correspondre des nombres différents suivant l'unité choisie, mais l'aire, elle, ne change pas.

(b) *étendre l'application mesure à des surfaces non pavables avec l'unité A.* Deux points de vue sont possibles:

(1) Utiliser le découpage-recollement pour fabriquer une surface S' de même aire que S et pavable avec A. Ceci ne permet de traiter que certaines surfaces.

(2) utiliser des encadrements de S par des surfaces pavables avec A ou des subdivisions de A qui approchent S de mieux en mieux par l'intérieur et par l'extérieur (par exemple en se servant d'un quadrillage). Mathématiquement, ceci suffit à traiter toutes les surfaces qui nous intéressent.

Cependant, nous pensons que la seule considération du deuxième point de vue ne permet pas à l'élève d'échapper à la prégnance de la forme des pièces et peut expliquer certaines des difficultés recontrées. La recherche d'économie dans la méthode de comptage des carreaux peut amener un dérapage vers d'autres moyens d'associer un nombre à la surface (tels que le recours à une procédure périmétrique) si on ne dispose pas pour le concept d'aire d'une référence autre que numérique. Nous faisons l'hypothèse que *l'utilisation du découpage-recollement est un point clé dans l'élaboration du concept d'aire*, étape-relais entre les surfaces et les nombres dans la construction de F.

(c) *pointer les différences et établir des relations entre aires et longueurs* en s'intéressant à leurs variations respectives au cours de diverses transformations.

2. *Jeux de Cadres Surfaces – Aires – Nombres*

A un moment de l'apprentissage, on va se trouver dans la situation suivante:

- dans le cadre géométrique on sait comparer certaines surfaces par déplacement ou par découpage – recollement.
- dans le cadre numérique, on dispose des nombres entiers et de leurs opérations, on a commencé à étendre le domaine des nombres et on dispose de quelques nombres fractionnaires ou décimaux mais on n'a pas encore toutes les opérations sur ces nouveaux nombres.
- on sait associer un nombre à certaines surfaces par le comptage de carreaux sur papier quadrillé; on a admis que le nombre de carreaux était invariant par déplacement de la surface et par découpage et recollement convenable.

Le jeu entre les cadres géométrique et numérique fait avancer la connaissance des élèves sur la notion d'aire, sur la mesure, sur les nombres.

• Le pavage avec des pièces qui pavent l'unité (ou plusieurs exemplaires de l'unité juxtaposés) permet d'étendre l'application mesure entre surfaces et nombres, et d'étendre la multiplication aux nombres fractionnaires et en particulier aux nombres décimaux.

Dans le jeu de cadres surfaces-aires-nombres, on recueille ainsi de l'information nouvelle dans le cadre numérique: on peut donner du sens au produit des fractions et des décimaux en s'appuyant sur les aires de rectangles.

En effet, plaçons nous à un moment de l'apprentissage où

- une unité de longueur (resp. d'aire) étant choisie, on sait utiliser des fractions pour désigner des longueurs (resp. des aires, par mesure directe)
- pour des unités de longueur et d'aire adaptées, on sait que, pour un rectangle de dimensions entières, la mesure de l'aire est le produit des mesures des dimensions.
- on cherche à évaluer l'aire d'un rectangle de dimensions fractionnaires. Par exemple $(3+4/5)$ et $(2+2/3)$

Le rectangle R_1 de dimensions $(3, 2)$ a une aire qui mesure 6 car $2\times 3=6$: il contient 6 carrés unité (Fig. 1 et 2).

Le rectangle de dimensions $(1/5, 1)$ a une aire qui mesure $1/5$ car il se reporte 5 fois dans le carré unité, on en a $4\times 2=8$ dans R_2 (Fig. 2).

Le rectangle de dimensions $(1/3, 1)$ a une aire qui mesure $1/3$ car il se reporte 3 fois dans le carré unité, on en a $3\times 2=6$ dans R_3 (Fig. 2).

Le rectangle R_4 de dimensions $(4/5, 2/3)$ contient 8 petits rectangles de dimensions $(1/5, 1/3)$; chacun de ces petits rectangles se reporte 15 fois dans le carré unité, et a donc une aire qui mesure $1/15$ (Fig. 3). La mesure de

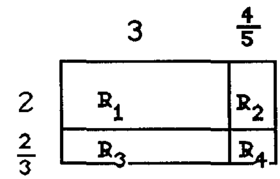

Fig. 1

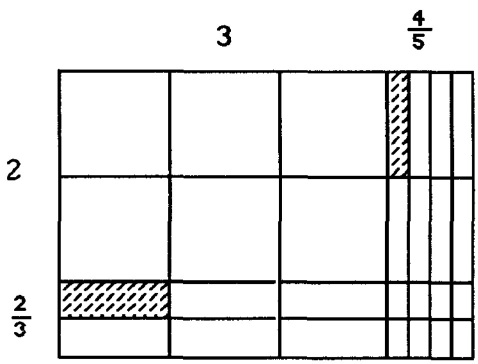

Fig. 2

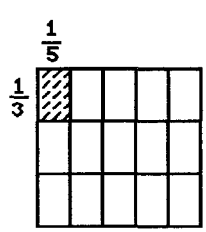

Fig. 3

l'aire du rectangle R_4 est donc 8/15. Ce résultat a été trouvé à partir des dimensions 4/5 et 2/3, du pavage et des règles d'écriture des fractions. On convient alors que $(4/5) \times (2/3) = 8/15$.

On va ainsi donner comme sens au produit de deux nombres fractionnaires la mesure de l'aire d'un rectangle de dimensions ces deux nombres.

Le rectangle de dimensions $(3 + 4/5, 2 + 2/3)$ a une aire qui mesure

$$6 + (8 \times 1/5) + (6 \times 1/3) + (8 \times 1/15) = 9 + 3/5 + 8/15$$

Nous aurons donc $(3+4/5) \times (2+2/3) = (3 \times 2) + (3 \times 2/3) + (2 \times 4/5) + (4/5 \times 2/3) = 9 + 3/5 + 8/15$ et aussi $4/5 \times 2 = 8/5$ et $3 \times 2/3 = 6/3$

Dans les deux derniers cas, ce sens de la multiplication coïncide avec celui de l'addition répétée qu'on avait pu rencontrer auparavant. D'autres situations permettront de recoller les différents sens de la multiplication qu'on peut rencontrer.

• L'extension du champ des surfaces dont on sait comparer les aires par découpage-recollement et l'extension des opérations sur les nombres permettent d'étendre l'application-mesure entre surfaces et nombres.

Dans toute la suite du travail sur les aires, le jeu de cadres surfaces-aires-nombres se poursuit, en particulier dans toutes les situations qui concernent les mesures:

- élaboration des formules de calcul d'aire des surfaces usuelles
- proportionnalité de la mesure de l'aire du rectangle à la mesure de chacune des dimensions
- bidimensionalité de l'aire: si on agrandit une surface dans un rapport k pour les longueurs, son aire est multipliée par k^2.

Pour traiter chacun de ces problèmes on s'appuie, par l'intermédiaire de divers découpages de surfaces, de pavages en même temps que d'additions et multiplications de nombres, sur l'interaction entre le cadre géométrique et le cadre numérique, l'aire étant l'invariant qui permet de relier les deux cadres.

3. *Les Séquences Didactiques*

Nous donnons ci-dessous la liste des séances réalisées dans chacune des deux classes. Chaque séance de travail durait environ 1 heure 1/4. Les séquences étaient organisées de la façon suivante: exposé du problème, précédé le cas échéant d'un bref rappel des points importants résultant du travail antérieur sur la question; travail des élèves: individuel, en équipes ou en situation de communication émetteur-récepteur; confrontation des productions en bilan collectif; institutionnalisation par le maître de ce qu'il y a à retenir.

*Séquences réalisées en CM*1

• *approche physique* (1 séance: 9.12.1982)

Il s'agit de comparer selon la masse et selon la place occupée, des pièces découpées dans un même lino A, B, C, D et des pièces découpées dans un même carton E, F, G, H répondant à certaines contraintes: A et F sont superposables mais de masses différentes, G est obtenue à partir de

F par découpage et recollement, *G* et *F* ont donc même aire mais ce n'est pas perceptible, entre *A* et *B* on a la même relation. *D* peut s'inclure dans toutes les pièces en carton mais est plus lourde. *E* contient *A*, *C*, *D*, *F*, *H* mais est plus légère que les pièces en lino. Pour les masses on a le classement *H*(*FG*)*EDC*(*AB*). Pour les aires, les comparaisons peuvent se faire en se servant, suivant les cas, de l'inclusion ou de la comparaison des masses; on a les classements partiels *DC*(*ABFG*)*E* et *DH*(*ABFG*)*E*. On ne peut pas conclure pour la comparaison entre *C* et *H* qui ne sont pas découpées dans le même matériau et qui ne peuvent se comparer facilement par inclusion. Le recours à la masse permet de comparer, à la précision de la balance près, la place occupée par deux surfaces indépendamment de leur forme, pourvu qu'elles soient réalisées dans un même matériau homogène.

- *approche géométrique* (3 séances: 16.12.82; 6.01.83; 7.01.83)
  Les élèves sont par équipes de 4. Chaque équipe dispose de 5 rectangles en carton superposables. Les rectangles de deux équipes différentes peuvent se comparer par inclusion.

Consignes:

(1) Chacun découpe un rectangle et recolle les morceaux sans en perdre et sans les faire chevaucher de façon que les quatre membres de l'équipe aient des surfaces de formes différentes.

(2) Décalquer les surfaces obtenues sur une feuille blanche et comparer dans chaque équipe, les nouvelles surfaces selon la place occupée. Le bilan permet d'introduire le mot aire.

(3) Comparer les aires des surfaces produites par toute la classe. Il est clair que deux surfaces qui ont même aire au sens géométrique (superposables après découpage et recollement), ont aussi même aire au sens physique. Toutefois, la réciproque pose problème puisqu'elle dépend d'un découpage en un nombre fini de morceaux amenant l'une des surfaces sur l'autre.

- *différenciation aire et périmètre* (3 séances: 13.01.83; 27.01.83; 3.02.83)
  Consigne: commander la longueur de ficelle juste nécessaire pour border la surface que vous avez déjà fabriquée.
  Il s'agit de mette en évidence que deux surfaces de même aire peuvent avoir des périmètres différents. le maître fournit la ficelle commandée. La validation vient de la réalisation effective du collage, avec discussion sur les erreurs acceptables et production éventuelle de contrexemple. Deux autres problèmes complètent cette étude:
  - pour une surface donnée, la consigne est de la modifier de façon à diminuer l'aire et à augmenter le périmètre.

- pour un rectangle donné, le modifier de façon à conserver l'aire et à augmenter le périmètre.

• *pavages et comparaison d'aires* (3 séances: 3.03.83; 4.03.83; 10.03.83) Pavages de 4 surfaces à l'aide de pavés différents (Fig. 4). Comparaison des aires des surfaces en ne disposant plus des surfaces elles-mêmes mais seulement des pavés et des résultats du pavage. Les pavés ont été choisis de façon qu'il y ait des relations numériques entre eux faciles dans certains cas (rapports 2 ou 4), difficiles dans d'autres cas (rapports fractionnaires: 3/2, 3/4). Les surfaces étaient pavables par au moins un des pavés, ce qui donnait des comparaisons faciles entre certaines surfaces, difficiles pour d'autres et amenait à la nécessité de rechercher une unité commune ou de trouver au moins une des relations difficiles.

Surfaces proposées

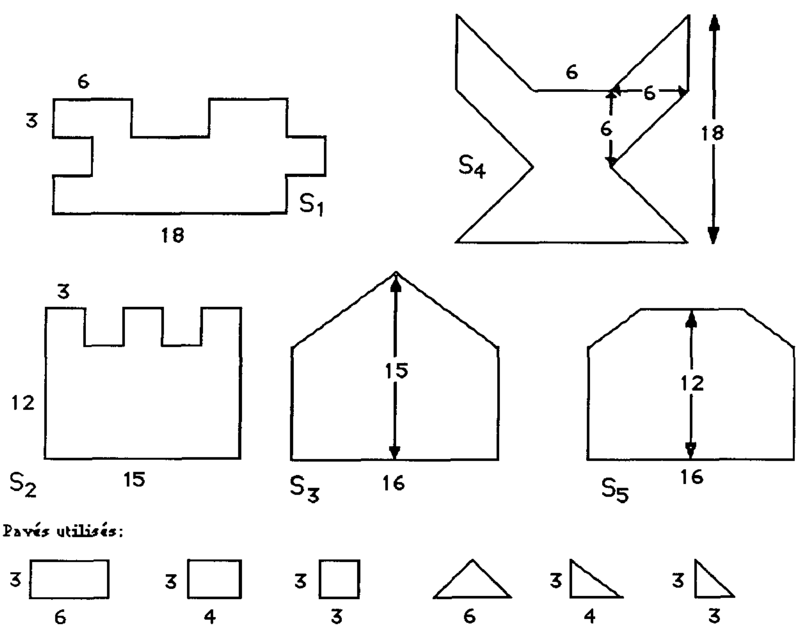

Fig. 4. Surfaces proposées (S_5 n'a été utilisée que par le CM2). Les dimensions n'étaient pas fournies aux élèves.

Séquences réalisées en CM2 (la description complète se trouve dans Perrin (thèse en cours)

Les contraintes institutionnelles nous amenaient à arriver plus rapidement à la notion de mesure. Nous avons ainsi renoncé à l'approche par la masse: elle a seulement été évoquée pour résoudre certains conflits au cours de l'approche géométrique.

- *approche géométrique* (3 séances: 10.01.83; 14.01.83; 24.01.83) les mêmes séquences qu'en CM1
- *différenciation aire et périmètre* (une séance fin janvier 83)
  Commande de fil pour border les surfaces déjà construites (cf CM1)
- *pavages* (3 séances: 17.02.83; 24.02.83; 26.02.83)
  Pavage de 5 surfaces à l'aide de pavés variés (Fig. 4); recherche de relations entre les pavés. Les pavés étaient les mêmes qu'en CM1, il y avait une surface de plus (S_5). A cette étape les relations simples entre pavés sont trouvées et rassemblées dans un tableau à double entrée, les résultats du pavage également. Le maître introduit le mot "mesure".
- *mesure et comparaison d'aires* (4 séances: 28.02.83; 4.03.83; 7.03.83; 10.03.83).
  Les élèves ne disposent plus des surfaces et doivent comparer les aires à l'aide des résultats du pavage. Cela a amené certains groupes d'élèves à introduire de nouvelles unités, d'autres à tenter de compléter le tableau des relations entre carrelages.
  On demande alors à tous les élèves de compléter ce tableau et d'exprimer les mesures de toutes les aires à l'aide de chacune des unités, y compris celles qui ont été introduites pour la comparaison. Les élèves ont ensuite à mesurer une surface qui n'est pavable avec aucun des pavés considérés (Fig. 5). Pour évaluer son aire avec les unités disponibles, on doit la couper en deux morceaux ou la remplacer par une surface de même aire et pavable.

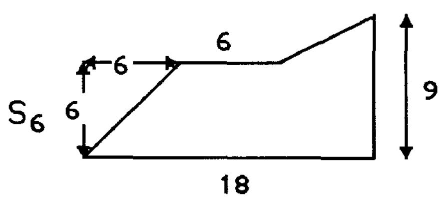

Fig. 5

- *Aires en cm²* (1 séance et demie: 15.03.83; 17.03.83)
  Recherche sur papier quadrillé au cm, de surfaces variées d'aire 1 cm²; 12 cm²
  Recherche de rectangles d'aire 12 cm².
- *Encadrements*: (1 séance et demie: 17.03.83 et 18.03.83)
  A l'aide de papier millimétré transparent, encadrements de l'aire d'une surface polygonale et d'une surface à bords arrondis (Fig. 6).

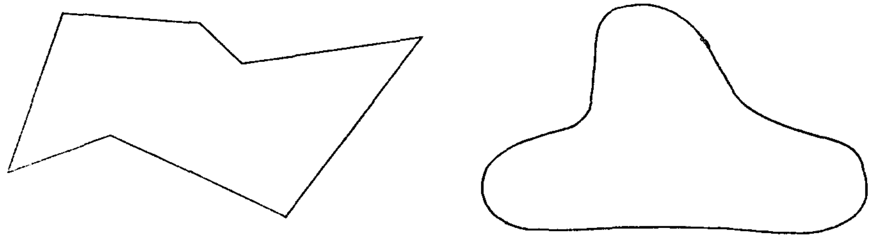

Fig. 6

- *Calcul d'aires de rectangles* (13.05.83):
  Recherche de rectangles à périmètre fixé, calcul de l'aire (l'interruption s'explique par les vacances de Pâques et un séjour en classe de nature).

IV. ETUDE DES CONCEPTIONS DES ÉLÈVES.

1. *Au Cours de l'Apprentissage*

– Au démarrage, au CM2, certains enfants ont de la place occupée par une surface *une conception liée à sa forme* et se référant plutôt à l'encombrement ou à la situation de la surface dans la feuille de papier ou même à la manière dont elle a été obtenue: pour comparer la place occupée par des surfaces obtenues par découpage recollement sans perte ni chevauchement de rectangles superposables, des élèves ne peuvent accepter qu'une surface encombrante (Fig. 7) puisse ne pas occuper plus de place qu'une autre plus "compacte" (Fig. 8).

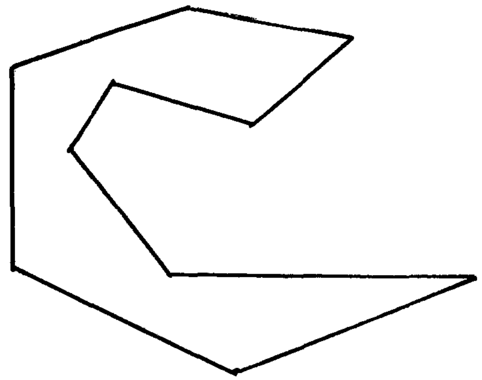

Fig. 7

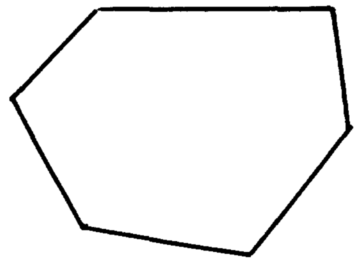

Fig. 8

D'autres élèves veulent mesurer les distances des surfaces au bord de la feuille et d'autres ajouter les périmètres de tous les morceaux.

Mais ces difficultés ne résistent pas quand on parle de quantité de carton utilisée ou quand on fait référence à l'usage d'une balance:

A la séance suivante, les élèves du CM2 recourent tous à la comparaison des rectangles pour comparer toutes les surfaces de la classe du point de vue de l'aire. Le problème est plutôt de s'entendre sur ce que l'on veut comparer. L'introduction du mot aire dans un premier travail sur papier quadrillé devrait éviter cette ambiguïté.

En CM1, le recours à la masse a évité l'ambiguïté de l'expression place occupée. Comme nous l'attendions, les élèves ont exprimé que si une surface se déduit d'une autre par découpage et recollement convenable, il est clair que la masse n'a pas changé (à la colle près) car la place des morceaux sur le plateau de la balance n'a pas d'importance et que les deux surfaces occupent autant de place (la référence est alors la quantité de papier). Inversement, il n'est pas du tout sûr pour les élèves que deux surfaces découpées dans le même carton et de même masse occupent autant de place: il faudrait trouver un découpage qui permette de reconstituer l'une à partir de l'autre.

– *L'amalgame entre aire et périmètre* apparaît à plusieurs occasions:

- quand il s'agit de commander du fil pour border les surfaces en général très irrégulières fabriquées par les élèves à partir des rectangles. Ainsi, David un élève de CM1 qui a une surface particulièrement compliquée décide de se simplifier la tâche en mesurant le bord du rectangle témoin. Cette décision est l'objet d'un conflit entre David et son binôme Bruno (les élèves travaillaient par deux). Nous le rapportons brièvement:

Bruno: il (le fil) ne pourra pas faire le tour de tous les zigzags.
David: la surface est fabriquée à partir du rectangle, elle a le même périmètre.

A la vérification, le fil se révèle beaucoup trop court. David pense qu'il s'agit d'erreurs de mesure et les reprend. Bruno, pour convaincre David de son erreur, fait le dessin ci-dessous (Fig. 9)

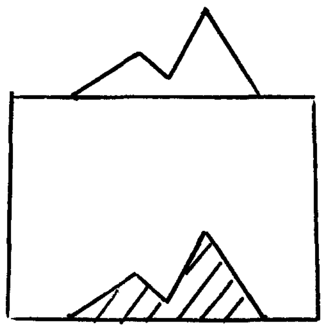

Fig. 9

- en CM1, dans les épreuves écrites du 17 mars, lorsqu'il s'agit de dessiner un triangle de même aire qu'un rectangle donné: 13 élèves sur 24 fournissent un triangle de même périmètre que le rectangle.
- en CM2, à la fin de l'apprentissage, lors d'une situation plus complexe où il s'agit d'encadrer l'aire d'une surface à bords irréguliers et arrondis en utilisant du papier millimétré transparent: un (bon) élève de la classe demande de la ficelle pour se simplifier le travail en donnant au bord de la surface une forme de rectangle.

– *La liaison entre surface et aire* apparaît quand on demande aux élèves de modifier une surface donnée pour en fabriquer une autre d'aire plus petite et de périmètre plus grand (Fig. 10).

Pour diminuer l'aire, deux procédures sont utilisées: soit enlever un morceau, soit dessiner une surface à l'intérieur de la surface donnée.

Il semble que la première procédure fasse davantage référence à une conception de l'aire indépendante de la forme et la deuxième à une conception liée à la forme. La consigne engage à une transformation: "modifier"; la première procédure opère localement en enlevant un morceau ce qui change la forme de la surface; la deuxième correspond à une vision plus globale de la surface qu'on essaie de modifier le moins possible en concevant une autre surface qui ressemble à la première mais située à l'intérieur de celle-ci: il semble que les élèves attachent de l'importance à la forme de la surface et veuillent en modifier la taille sans en modifier la forme.

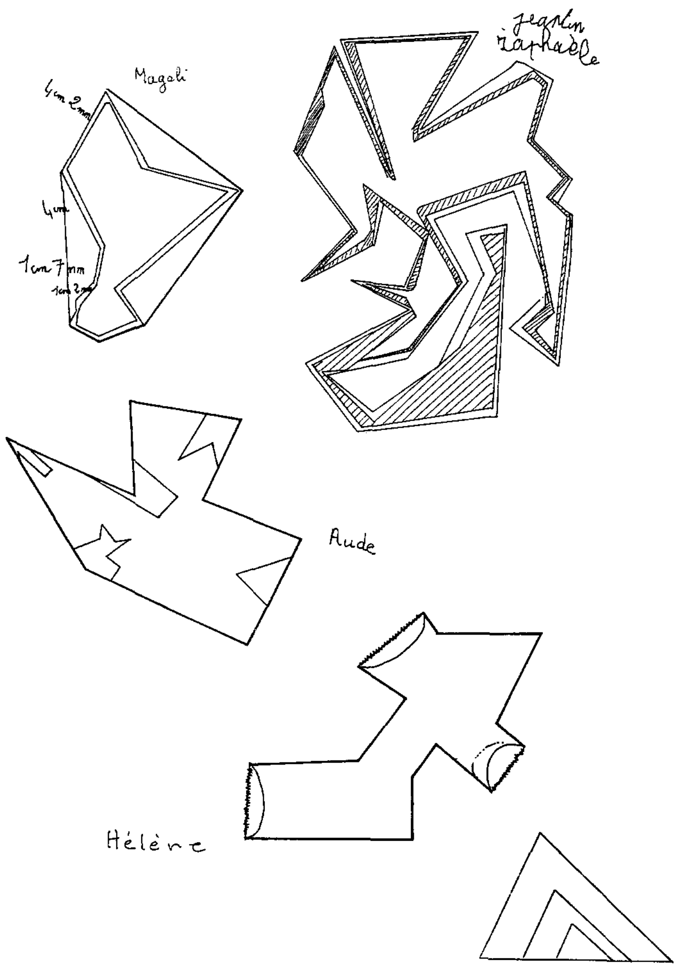

Fig. 10. Les élèves qui sont restés bloqués avaient au départ un triangle et ont produit des triangles emboiîtés.

A ces deux procédures prenant en compte la variation d'aire à effectuer correspondent deux procédures concernant la variation de périmètre:

- les uns enlèvent un morceau, et alors toujours sur le bord (enlever un morceau à l'intérieur ne leur paraît pas pertinent du point de vue du périmètre puisqu'ils ne considèrent que le périmètre extérieur) et ils s'aperçoivent assez vite que pour augmenter le périmètre, il faut remplacer un bord droit par un bord "en zigzag" ou courbe, même si leur premier essai diminuait le périmètre.

- les autres dessinent une surface à l'intérieur de la surface donnée et font en général un bord assez parallèle au bord donné. Mais ils ont diminué le périmètre. Pour rectifier, certains ont alors l'idée de "rajouter du périmètre" en doublant le bord de la surface intérieure, d'autres restent bloqués.

– *Pour ce qui est des rapports entre longueurs et aire* dans les surfaces de forme régulière, l'aire est liée à la taille de la surface et la taille est liée aux dimensions. C'est particulièrement net dans le cas du carré où le vocabulaire utilisé pour désigner les unités d'aire entretient la confusion. Ainsi $1/2\,\text{cm}^2$ est souvent vu comme un carré de côté $1/2$ cm et certains élèves ont beaucoup de difficultés à se dégager de ce point de vue même s'ils sont convaincus qu'il faut 4 petits carrés de côté $1/2$ cm pour paver un carré de côté 1 cm et qu'ainsi l'aire du petit est $1/4$ de l'aire du grand. Cela s'est produit au CM2 lors de l'examen du papier millimétré transparent, et ceci bien que tous les élèves aient auparavant produit des surfaces de formes variées et d'aire $1\,\text{cm}^2$.

– *approche de la mesure*

Les élèves n'ont pas recontré de difficulté pour associer des nombres différents à la même surface, que ce soit pour exprimer le résultat de pavages avec des unités différentes ou des mesures obtenues indirectement. Le recours aux nombres pour comparer des surfaces et la nécessité d'utiliser une même unité pour mesurer les surfaces à comparer n'ont posé de problème pour personne. Les seules difficultés étaient sur les nombres dans le cas où ils étaient fractionnaires.

Au CM1, les élèves n'ont pas produit d'unité nouvelle permettant de mesurer tous les pavés, ils n'ont pas non plus exprimé la mesure des pavés en fonction de chacun des autres: ils ont trouvé la relation $3r = 2R$ où r désigne l'aire du rectangle $(3, 4)$ et R celle du rectangle $(3, 6)$ qui permettait de mesurer toutes les aires en prenant pour unité le rectangle d'aire r par substitution de $3r$ à $2R$ et ils ont explicité quelques relations utilisant des $1/4$ ou des $1/3$. Le travail fait auparavant sur les fractions était insuffisant pour que tous les élèves expriment toutes les relations entre les pavés.

Au CM2, certains élèves ont recherché une unité commune permettant de mesurer les deux pavés rectangles: trois nouvelles unités ont été proposées, le rectangle $(1, 3)$, le rectangle $(2, 3)$ et le carré $(1, 1)$. D'autres se sont lancés dans la recherche systématique de toutes les relations entre les unités d'aires utilisées, recherche qui sera ensuite effectuée par toute la classe de façon à compléter le tableau donnant les relations entre unités.

2. *Au Cours des Entretiens par Deux*

Les entretiens ont eu lieu au CM1 deux semaines après l'apprentissage, au CM2 plus de 2 mois après l'apprentissage. Nous avons choisi d'interroger les élèves par deux pour observer, ou le cas échéant provoquer des conflits de conception. Les élèves étaint choisis de façon qu'il n'y ait pas domination de l'un par l'autre.

Le problème était de comparer les aires des surfaces ci-dessous (Fig. 11): Les figures étaient dessinées sur papier blanc, en cas de besoin, nous pouvions fournir les mêmes figures sur papier quadrillé au demi centimètre et aussi du papier blanc et du papier quadrillé au demi centimètre à volonté.

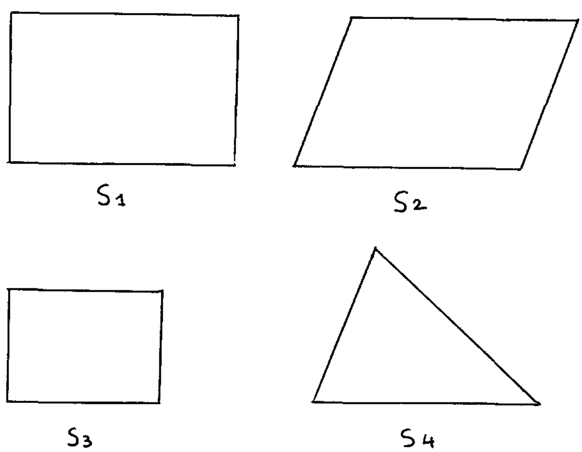

Fig. 11

Procédures Observées

(a) *Ramener la comparaison des aires à la comparaison des nombres.*
   (1) grâce au pavage: en comptant les carreaux sur papier quadrillé ou en quadrillant le papier blanc en carrés.
   (2) en faisant un produit de longueurs pour calculer les aires, en inventant au besoin des formules erronées (parallélogramme ou triangle).

   Le désir de se ramener aux nombres est très fort, particulièrement au CM2 où on avait institutionnalisé la formule de calcul de l'aire d'un rectangle et où les élèves travaillaient sur des calculs d'aires de rectangles pendant la même période en classe: beaucoup répétaient la question posée sous la forme "calculer les aires".

(b) *Ramener la comparaison des aires à la comparaison des longueurs des côtés* (pour S_1 et S_2).
(c) *Découper et recoller de façon convenable* (pour comparer S_1 et S_2; S_3 et S_4) *ou paver* (S_1 avec S_3; S_2 avec S_4).
(d) "*Redresser*" *le parallélogramme* pour en faire un rectangle; "*pencher davantage le parallélogramme.*

"redresser le parallélogramme" voulait dire, pour la plupart des élèves, faire une rotation du côté "penché" pour l'amener en position verticale (Fig 12). Pour certains, cela voulait dire glisser le côté le plus haut sur son support jusqu'à ce que les côtés obliques aient été amenés en positon verticale (Fig. 13).

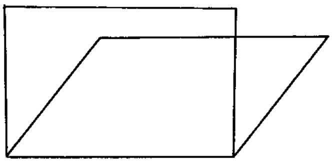

Fig. 12

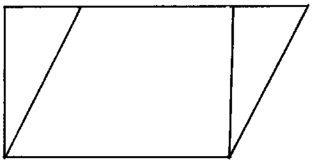

Fig. 13

Arguments Utilisés par les Élèves pour Justifier Leurs Procédures.

(a) Pour justifier un calcul:
- un parallélogramme a deux dimensions: pour calculer l'aire on multiplie les deux dimensions: $6 \times (4 + 1/2) = 27$.

  Sur demande de l'interrogateur de montrer où sont les 27 cm^2, certains élèves justifient ce calcul en produisant un pavage par des petits parallélogrammes et déclarent: On a bien 27 cm^2 (Fig. 14).
- pour le triangle de dimensions a, b, c (Fig. 15) apparaissent diverses "formules".
  - une aire c'est un produit de 2 longueurs et on fait $(a + b) \times c$ pour le triangle (ou $a \times c + b \times c$)

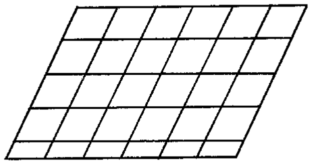

Fig. 14

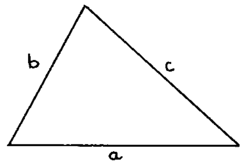

Fig. 15

- un rectangle a deux dimensions, on multiplie pour trouver l'aire, un triangle a trois dimensions donc c'est $a \times b \times c$
- $a \times b \times c$ donne un résultat beaucoup trop grand (par rapport à S_1 et S_3) et des élèves proposent alors $(a+b+c) \times 3$ ou même $a+b+c$. On assiste aussi au passage à des procédures périmétriques devant une difficulté de calcul: les côtés obliques du triangle mesurent 4 1/2 et 5 1/2, un élève veut multiplier les 3 côtés du triangle et ne sait comment multiplier 4 1/2 par 5 1/2; il décide alors de rassembler les 1/2 et finit par ajouter les 3 dimensions.

(b) Pour se ramener à la comparaison des longueurs: S_1 et S_2 ont toutes les deux un côté de 6 cm, on compare les autres côtés 4, $5 > 4$ donc l'aire de S_2 est plus grande que l'aire de S_1.

(c) Découpage-recollement: si on découpe un morceau d'une surface et qu'on le recolle sans chevauchement on conserve l'aire. Cet argument est correct et valorisé dans l'apprentissage; mais les élèves qui ne peuvent utiliser que celui-là échouent dans la comparaison de S_3 et de S_4.

(d) Déformation: En "redressant" le parallélogramme on obtient un rectangle de 4,5 cm sur 6 cm donc l'aire de S_2 est plus grande que l'aire de S_1.

Conflits et Changements de Procédure

Il semble que les élèves aient plusieurs types de conviction qui les amènent à des conclusions opposées pour la comparaison de S_1 et de S_2.

- Convictions permettant de conclure correctement $A_1 = A_2$:
  - quand on découpe une surface et qu'on recolle convenablement les morceaux on a une surface de même aire.
  - pour comparer des surfaces dessinées sur papier quadrillé on compare le nombre de carreaux qu'elles contiennent (éventuellement en regroupant des morceaux de carreaux pour faire des carreaux entiers). Au besoin on quadrille le papier pour faire apparaître des cm^2.
- Convictions amenant à la conclusion $A_1 < A_2$:
  - quand on déforme un parallélogramme "en penchant plus ou moins" on conserve l'aire, en particulier un parallélogramme de 1 cm de côté a une aire de 1 cm^2, mais aussi un parallélogramme obtenu à partir d'un carré de 1 cm de côté par découpage selon la diagonale et recollement le long d'un côté a tous ses côtés qui mesurent 1 cm.
  - l'aire du parallélogramme est le produit des dimensions, comme pour le rectangle.

Les deux types de convictions coexistent souvent chez le même élève. Pour certains groupes, on assiste même à un va et vient des arguments contradictoires repris tour à tour par l'un ou l'autre des deux partenaires.

Les élèves ont différents moyens de résoudre la contradiction:

Le conflit se produit parfois spontanément par confrontation d'une procédure (c) et d'une procédure (d) et il arrive que les élèves soient très étonnés de constater que le "côté droit" (hauteur du parallélogramme) mesure 4 cm alors que le côté penché" mesure 4,5 cm (Fig. 16). Cela suffit

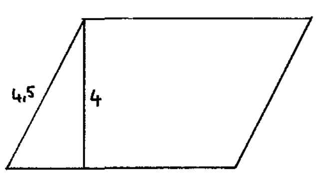

Fig. 16

parfois à résoudre la contradiction. Pour se convaincre, certains groupes dessinent sur la feuille d'autres côtés "de plus en plus penchés" et se convainquent de l'accroissement de la longueur de deux des côtés et de la conservation de l'aire du parallélogramme (Fig. 17). Inversement, cet accroissement de la longueur dans les cas extrêmes amène parfois les élèves à douter de la conservation de l'aire.

Pour d'autres groupes, le conflit se produit au moment où on leur fournit du papier quadrillé ou simplement au moment où on leur demande de dessiner les cm^2 (après une réponse $A_1 = 24\ cm^2$, $A_2 = 27\ cm^2$). Le pavage

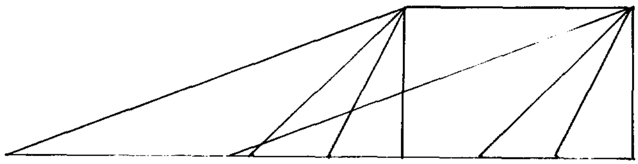

Fig. 17

du rectangle et du parallélogramme peut les amener à rassembler les deux pointes triangulaires du parallélogramme pour obtenir des carreaux entiers et ainsi passer à une stratégie de type "découpage recollement" (Fig. 18).

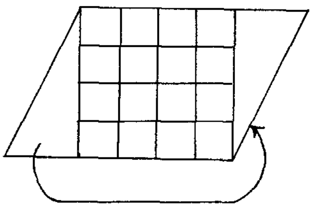

Fig. 18

Pour d'autres (procédure déformation), le changement de conviction s'opère souvent quand on leur propose de "pencher" de plus en plus le parallélogramme jusqu'à ce qu'il soit évident que l'aire est devenue très petite. Il faut d'ailleurs noter la résistance des élèves à pencher au-delà d'un certain seuil pour aboutir à des dessins comme celui-ci (Fig. 19) où on ne peut plus parler de "côté vertical".

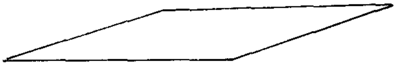

Fig. 19

Dans ce cas, la perception à elle seule oblige à remettre en question les convictions de départ puisqu'à la limite le parallélogramme aplati a une aire nulle. Cependent la variation de l'aire est perçue dans un premier temps de manière discontinue: d'abord elle ne change pas, ensuite elle devient très petite. Puis, plusieurs étapes intermédaires étant dessinées, les élèves se convainquent que l'aire diminue régulièrement, devient nulle à la limite.

Remarquons que nous retrouvons là des observations analogues à celles de Vinh Bang et Lunzer (1965).

Pour ceux qui justifient le calcul avec un pavage de S_2 par des petits parallélogrammes de 1 cm de côté, le changement de conviction s'opère quand ils peuvent pointer la différence entre les 2 parallélogrammes:

- celui qu'on obtient par découpage et recollement à partir du carré de côté 1 cm a une aire de 1 cm^2 mais les côtés ne mesurent pas tous 1 cm (Fig. 20):

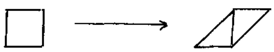

Fig. 20

- celui qu'on obtient par déformation: tous ses côtés mesurent 1 cm, mais son aire est plus petite que 1 cm^2 (Fig. 21).

Fig. 21

Notre interprétation est que beaucoup d'élèves amalgament trois transformations: l'articulation du parallélogramme autour des sommets qui conserve les longueurs des 4 côtés mais non l'aire, le glissement d'un côté sur son support qui conserve l'aire mais les longueurs de 2 côtés seulement et la rotation autour d'un sommet qui conserve à la fois longueurs et aire.

L'incidence sur la conservation des aires et des longueurs de transformations de figures par déformation continue est un point qui n'avait pas été abordé dans l'apprentissage et qui semble important pour déstabiliser des conceptions spontanées erronées des élèves à ce sujet et amorcer une autonomie des différentes notions amalgamées.

V. RÉSULTATS

1. *Les Acquis*

Le pavage (en particulier le comptage de carreaux) est un outil disponible chez tous les élèves pour comparer des aires de surfaces planes de formes différentes. Nous l'avons constaté au cours des entretiens par deux et aussi dans les résultats obtenus aux tests écrits de fin d'année. En juin 1983, nous avons proposé aux élèves certains des questionnaires utilisés par J. Rogalski. Pour les premières questions, il s'agit de paver des surfaces (carrés, parallélogrammes, triangles équilatéraux et quelconques) avec des pavés semblables dans les rapports 1/2 ou 1/3. Il s'agit aussi d'évaluer le nombre de pots de peinture nécessaires pour couvrir ces surfaces, connaissant la quantité de peinture nécessaire pour les petits pavés: pour ces questions, le pavage est alors outil.

Les réponses que J. Rogalski obtient à ces questions sont très différentes pour le carré (maîtrisé dès le CM1) et pour le triangle: "il faut une longue évolution pour que les représentations de pavage du triangle soient mobilisables (fin de 5ème). C'est seulement en fin de 4ème que ces représentations sont disponibles pour les 3/4 des élèves." Pour le pavage spontané (question 1), elle trouve 48% (resp. 39%) de réponses correctes pour le triangle équilatéral avec le rapport 2 (resp. rapport 3), toutes classes confondues (de 9 à 14 ans). Nous avons à cette question des réponses comparables à celles des élèves de 4ème (13–14 ans) soit 80% (75%) sur l'ensemble des 2 classes; on peut également noter que les résultats corrects sont du même ordre qu'il s'agisse de carrés, de triangles ou de parallélogrammes, qu'il s'agisse du rapport 2 ou du rapport 3. Le "taux de passage" d'une réponse correcte au pavage à une réponse correcte à la peinture (réussite peinture + pavage/réussite pavage) varie de 85% à 100% au CM2 et de 58% à 90% au CM1: ces taux sont comparables à ceux obtenus par J. Rogalski deux ans plus tard.

On peut penser que le travail fait dans les séquences didactiques a rendu disponible le pavage de surfaces variées, ce qui fait que les élèves sont capables, deux mois après l'apprentissage, de répondre à un certain nombre de questions classiques concernant les aires.

2. *Les Difficultés qui Résistent*

Les élèves ont fait certains progrès du point de vue de l'indépendance de l'aire par rapport à la forme, du point de vue de la différenciation aire-périmètre. Nous avons vu que les conceptions erronées peuvent réapparaître jusqu'à la fin de nos séquences dans des situations plus complexes ou quand il s'agit de figures géométriques usuelles. Il semble que dans ce dernier cas on ait davantage de points de vue qui entrent en compétition, ce qui amène les élèves à produire des réponses erronées. Toutefois, ces difficultés ont été surmontées lors des entretiens pour beaucoup de groupes, par la confrontation de différents points de vue. Le concept d'aire, tout en n'étant pas entièrement disponible dans toute sa généralité et en toutes circonstances, a une certaine fonctionnalité (cf. réussite au questionnaire de J. Rogalski un peu plus tard).

3. *Des Difficultés non Prévues*

Il est apparu au cours des entretiens, à la fin des séquences réalisées, que les élèves prennent en compte dans leurs décisions les effets de déformations, en fait continues, sur les surfaces qu'ils manipulent, surtout dans le cas de surfaces usuelles. Ainsi, certains élèves voient un parallélogramme comme un rectangle déformé, pour eux les longueurs des côtés ne varient pas dans la transformation, et l'aire non plus – qu'il s'agisse d'une articulation autour des sommets (longueurs des côtés conservées) ou du glissement d'un côté sur son support (aire conservée). D'ailleurs, n'est-ce pas ce point de vue qui faisait réclamer de la ficelle à un élève de CM2 pour "transformer en rectangle" une surface aux bords arrondis?

Cela nous conduit à distinguer dans le cadre géométrique deux points de vue sur les surfaces et la façon dont elles sont mises en relation: le *statique* où est privilégié l'aspect descriptif et le *dynamique* où sont privilégiés les effets d'actions sur les surfaces comme par exemple le glissement d'un côté d'un parallélogramme sur son support. Un nouveau type d'objets est pris en considération: les familles de surfaces. Ceci élargit le cadre géométrique de départ et amène à se poser de nouvelles questions: par exemple, comment l'aire varie au sein d'une famille? Ainsi, on peut dire que les deux points de vue fournissent des cadres qui diffèrent, ici légèrement, par les objets et la problématique. Une dialectique s'établit entre ces deux points de vue et fonctionne comme un jeu de cadres. Ainsi, lorque des élèves déforment un rectangle en parallélogramme en inclinant de plus en plus deux côtés parallèles, les deux autres conservant leur direction, il arrive un moment où ils perçoivent la surface comme plus petite. Dès lors, son aire ne saurait être mesurée par le même nombre que celle du rectangle. Dans ce cas, le point de vue dynamique permet de rejeter une conception erronée et de poser des questions: comment varie l'aire de tel parallélogramme quand on penche les côtés sans changer la longueur ou quand on fait glisser un côté sur son support, le côté parallèle restant fixe et que les autres s'allongent en se penchant? Nous rattachons l'utilisation du découpage-recollement au point de vue statique dans la mesure où il concerne une surface et non une famille de surfaces issues d'une déformation de l'une d'elles. Ceci est le moyen, pour les élèves, d'obtenir des explications. Le retour au point de vue dynamique permet d'aboutir à un énoncé plus général: "l'aire d'un parallélogramme ne change pas lorsqu'on fait glisser un côté sur son support" et à une formule de calcul d'aire, elle de l'ordre du statique.

4. *Nouvelles Hypothèses Didactiques*

Les observations faites nous amènent à ajouter des hypothèses pour la construction de nouvelles séquences didactiques. Nous avions prévu du travail dans le cadre géométrique sans prendre en compte le point de vue dynamique de la déformation.

(H3) Nous faisons maintenant l'hypothèse que, dans le cadre géométrique, une interaction entre les points de vue statique et dynamique est nécessaire dans la conceptualisation de la grandeur aire et dans sa dissociation de la longueur.

Le découpage-recollement et la déformation amènent à des conclusions contradictoires. Le comptage de carreaux sur papier quadrillé emporte la conviction et permet de trancher.

Nous prévoyons maintenant de renforcer le jeu de cadres papier blanc – papier quadrillé au début du processus d'apprentissage pour établir que, pour deux surfaces dessinées sur papier quadrillé, avoir des aires égales a le même sens, qu'on se réfère au comptage de carreaux, au déplacement ou au découpage-recollement et récolter dans les deux cadres des propriétés établies dans l'un des deux.

Un des objectifs est, en fin de processus, d'utiliser efficacement le quadrillage et ses raffinements successifs afin d'encadrer de plus en plus précisément une surface par des surfaces dont on sait mesurer les aires. Nous faisons l'hypothèse que trois points importants interviennent pour cela:

- la maîtrise du passage du cadre "papier blanc" au cadre "papier quadrillé" et réciproquement
- la dialectique statique – dynamique
- la dissociation aire – longueur.

CONCLUSION

Notre objectif était de construire la notion d'aire et une application mesure entre surfaces et nombres, de façon qu'elles prennent sens pour les élèves. Notre analyse a priori nous amenait à faire des choix didactiques basés sur des jeux de cadres surfaces-aires-nombres dans lesquels les cadres différaient par leurs objets. Plus précisément, certaines séquences ont eu pour objet de rendre concevable la comparaison d'aires sans recours à la mesure. D'autres ont eu pour objet la comparaison et le calcul d'aires en recourant à la mesure dans le cas de surfaces pavables avec des éléments "étrangers" (non superposables ou ne provenant pas d'une subdivision de l'un d'eux) et aussi dans le cas de surfaces non pavables avec un élément choisi à l'avance. Ce travail a permis aux élèves d'étendre le champ des surfaces qu'ils savaient mesurer avec une unité donnée, à des surfaces non pavables avec cette unité. En particulier, un acquis de leur apprentissage est qu'il est possible d'exprimer en cm^2 l'aire d'un triangle, d'un parallélogramme ou d'une autre surface, que le cm^2 est l'aire d'une surface qui peut prendre des formes très diverses.

Autrement dit, une des conséquences de l'apprentissage est la prise de distance par rapport à la conception de l'aire liée à la forme.

Toutefois, cette évolution n'est pas nécessairement un résultat qui intervient tout de suite après l'apprentissage. A ce moment là, au CM1, pour comparer des aires de surfaces usuelles, le découpage et recollement convenable n'a été un outil opératoire que pour la moitié des élèves environ. Dans les deux classes, pour traiter ces questions certains amalgament encore aire et périmètre. D'autres les numérisent en recourant abusivement aux longueurs des côtés. D'autres enfin font intervenir fortement un point de vue "déformation" de surfaces usuelles (ici des parallélogrammes) en surfaces plus familières qu'ils savent traiter (des rectangles). La déformation dans le cas traité pouvait conserver l'aire (glissement d'un côté du parallélogramme sur son support) ou ne pas la conserver (articulation de deux côtés autour des sommets). Elle produisait dans les deux cas une déclaration de conservation de l'aire. Les élèves concernés ont fait évoluer leur point de vue de façon déterminante lors des entretiens en binôme, et ce de façon d'autant plus marquée que leurs conceptions les conduisaient à des affirmations contradictoires.

Ainsi, l'expérience nous a appris que les jeux de cadres prévus étaient insuffisants et qu'il était important d'y ajouter des jeux entre cadres qui diffèrent par la problématique – ici statique, dynamique.

Actuellement, nous envisagerions une ingénierie didactique qui donnerait lieu au déroulement de différentes dialectiques mobilisant différents sens de l'aire et dont l'enchaînement devrait permettre l'élaboration du concept d'aire dans son double aspect outil et objet.

1. *Jeu de Cadres*: *Papier Blanc, Papier Quadrillé*

Le travail sur papier quadrillé a pour but de mobiliser une conception de l'aire mesurée par le nombre de carreaux: deux surfaces S_1 et S_2 ont la même aire quand elles sont constituées du même nombre de carreaux, qu'elles soient superposables ou qu'elles ne le soient pas. Si S_1 contient moins de carreaux que S_2, l'aire de S_1 est plus petite que l'aire de S_2.

Le travail sur papier blanc a pour but de mobiliser une autre conception de l'aire, indépendante des nombres: deux surfaces S_1 et S_2 ont même aire

- si on peut trouver un déplacement (de l'espace) qui amène S_1 sur S_2; dans ce cas elles sont superposables
- si on peut découper l'une en un nombre fini de morceaux et les recoller sans chevauchement de façon à obtenir une surface superposable à l'autre.

Si un déplacement amène S_1 sur une partie de S_2, alors l'aire de S_1 est plus petite que l'aire de S_2.

Il est alors nécessaire de proposer une situation dont l'enjeu est de montrer que deux surfaces qui ont la même aire au sens du papier blanc l'ont aussi sur papier quadrillé:

- Etant donnée une surface S dessinée sur papier blanc, les surfaces obtenues en reproduisant S dans des positions quelconques sur un papier quadrillé contiennent le même nombre de carreaux (en particulier même si le bord ne suit pas partout les lignes du quadrillage).
- Etant donnée une surface S dessinée sur papier quadrillé, toute surface obtenue à partir de S par découpage et recollement sans chevauchement contient le même nombre de carreaux que S.

Ces deux critères nous garantissent la conservation du nombre de carreaux, qu'on connaisse ce nombre ou non. Ils fournissent les moyens de déterminer le nombre de carreaux contenus dans une surface en la remplaçant au besoin par une autre en contenant autant et pour laquelle le calcul est plus commode.

L'expression "avoir même aire" n'avait de sens au départ que pour des surfaces sur papier quadrillé et dont les bords suivent les lignes du quadrillage. Par un jeu de cadres papier blanc – papier quadrillé, on étend le champ des surfaces pour lesquelles l'expression "avoir même aire" a un sens.

Remarque

On ne peut faire l'économie du travail sur papier blanc. Pour les élèves privés des procédures sur papier blanc, les comparaisons d'aires de surfaces dessinées sur papier quadrillé conduisent à un comptage du nombre de carreaux en essayant de rassembler des morceaux de façon parfois très approximative, même dans le cas où les surfaces sont superposables. Le comptage peut ainsi amener des réponses contradictoires au sein de la classe. Les moyens de contrôle relèvent de procédures sur papier blanc.

2. *Confrontation Longueur – Aire*

Nous avions prévu de différencier aire et périmètre dans un contexte de découpage et recollement, d'abord avec des surfaces "irrégulières", puis avec des rectangles où de plus intervient la mesure. Nous avons observé que des difficultés subsistaient. Les jeux de cadres prévus ont eu un certain effet sur la dissociation aire-périmètre mais ont été insuffisants à modifier de façon stable les conceptions de certains élèves.

Les séquences prévues initialement pour différencier aire et longueur nous semblent devoir être conservées, mais elles seront complétées, et c'est l'objet du paragraphe suivant, par la prise en compte d'un point de vue dynamique.

3. *Dialectique Statique – Dynamique*

Nous avons constaté au cours des entretiens que, pour comparer des aires de surfaces planes, les élèves recourent à des déformations continues des surfaces données et qu'ils ont tendance à amalgamer la conservation des aires et celle des longueurs des côtés dans de telles déformations. Nous retenons que le problème, pour les élèves, est de dissocier ces transformations de la rotation autour d'un sommet qui, elle, conserve longueurs et aires. Nous proposons de faire étudier séparément l'effet de ces différentes transformations sur les aires et sur les longueurs (côtés et diagonales) des rectangles.

(a) *Glissement d'un côté sur son support*

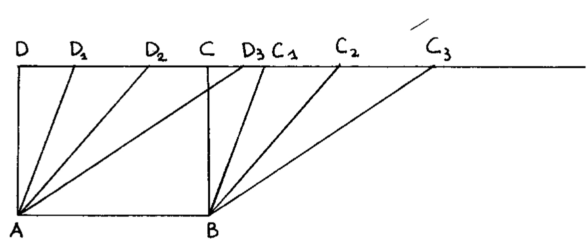

Fig. 22

On déplace *CD* sur son support (qui est la droite parallèle à *AB* portant *CD*). Le rectangle *ABCD* se transforme en parallélogramme. Comment varient les longueurs des côtés, de chaque diagonale, le périmètre, l'aire du parallélogramme (Fig. 22)?

(b) *Pivotement des côtés autour des sommets*

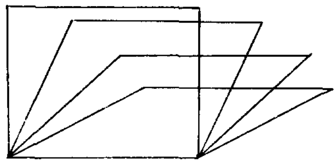

Fig. 23

On a un parallélogramme articulé: les côtés sont des barres rigides (de longueur fixe) qu'on peut faire pivoter autour des sommets. Comment varient les longueurs des côtés, des diagonales, le périmètre, l'aire (Fig. 23)?

Les transformations continues ci-dessus se situent dans un cadre dynamique. Ce point de vue incite les élèves à considérer que les caractéristiques de la figure sont conservées (en particulier aires et longueurs des côtés dans le cas (a) du glissement comme dans le cas (b) du pivotement) puisqu'il s'agit de la même figure qu'on déforme: "on penche le rectangle", "on redresse le parallélogramme". Intéressons-nous aux élèves pour lesquels un parallélogramme n'est qu'un rectangle penché et qui proposent de "redresser" le parallélogramme pour obtenir un rectangle de même aire. Ces élèves sont d'autant plus convaincus de leur démarche que le parallélogramme se présente à eux comme un rectangle peu perturbé (côtés peu penchés). Les élèves s'écartent ainsi peu de la situation de départ, ce qui leur garantit une illusion de stabilité.

Pour dépasser ce point de vue, il est nécessaire de dissocier les états de départ et d'arrivée tout en les considérant comme deux états d'une déformation qu'on peut accuser vers des cas limites de façon à en grossir les effets: parallélogramme très allongé dans le cas (a), très aplati dans le cas (b).

La perception oblige à douter mais non à renoncer immédiatement aux convictions de départ.

Des conjectures sont faites, des preuves deviennent nécessaires.

Le cadre dynamique devrait permettre de pointer les sources de difficulté, de faciliter les dissociations nécessaires: (a) glissement, (b) pivotement.

Le cadre statique est le cadre adapté pour établir des preuves.

Le cadre géométrique s'enrichit d'un théorème: invariance de l'aire par "glissement". Ce théorème justifie la formule de l'aire du parallélogramme: aire $=$ base $\times$ hauteur.

Un nouveau problème s'impose pratiquement ici:

l'aire dépend-elle du choix de la base? non d'après la formule usuelle, oui d'après les conditions de production que nous avons proposées (qu'il s'agisse de découper et recoller un triangle ou de déformer le parallélogramme par glissement d'un côté).

L'étude des problèmes de déformation ou de découpage et recollement fait partie de la construction du sens de la formule usuelle $S = b \times h$. Mais ils ne peuvent pas être tous traités à l'école élémentaire. La déformation en parallélogramme articulé peut être traitée en CM jusqu'au cas limite d'aplatissement. En revanche, le glissement d'un côté sur son support peut être abordé dans le cas où la procédure de découpage et recollement d'un triangle entrièrement situé dans le parallélogramme, pour former un rectangle, est possible, car alors elle est un moyen de contrôle à la disposition des élèves chez qui elle est familière. Ces études suffisent déjà à dissocier les effets de ces deux déformations. C'est ce que nous avons observé lors des entretiens. Les autres cas et notamment le changement de base pourraient être abordés en CM2 mais aussi différés en 6ème si le temps à consacrer aux aires n'est pas suffisant à l'école élémentaire.

Sans l'étude des problèmes de changement de base, on s'appuie implicitement sur le fait qu'une surface a une aire bien déterminée et que des procédés différents de calcul doivent aboutir au même résultat. Or, J. Rogalski a observé que ce n'est pas un acquis pour tous les élèves de 5ème dans le cas du triangle quelconque. La possibilité d'admettre l'unicité de la mesure quel que soit le moyen de calcul, peut justifier qu'on introduise les formules (parallélogramme, triangle) à l'école primaire, vu l'usage social qui en est fait. Toutefois, on voit le décalage qu'il y a entre la formule usuelle présentée dans toute sa généralité "si simple", et le travail qu'il faudrait faire pour espérer asseoir sa validité. On ne peut pas s'étonner des difficultés et des dérapages, par ailleurs couramment observés, chez des élèves de collège, voire de lycée (nombreux encore sont ceux pour lesquels l'aire d'un parallélogramme s'obtient en multipliant les longueurs de deux côtés adjacents).

4. *Jeux de Cadres Surfaces – Aires – Nombres*

C'est sur ces jeux de cadres qu'était basé notre premier processus d'apprentissage. Nous les reprenons (voir pages 12–18).

Les situations à proposer aux élèves restent à expérimenter et à mettre au point.

Nous pensons qu'après ce travail, les élèves devraient être mieux armés pour identifier aires et nombres avec un moindre risque de dérapage.

Ils pourraient même atteindre les aires de surfaces pour lesquelles le maillage carré n'est pas nécessairement le meilleur et pour lesquelles la longueur du bord n'est pas nécessairement finie. Citons par exemple la suite S_n des surfaces obtenues par un procédé itératif à partir de triangles équilatéraux, et dont nous dessinons ci-dessous les premiers termes. Chacune des surfaces de la suite a un périmètre et une aire qu'on peut calculer. Que se passe-t-il à l'infini? (cf courbe de Von Koch) (Fig. 24).

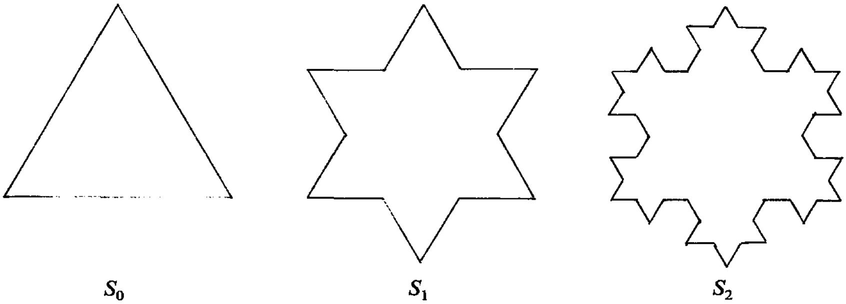

Fig. 24

On fabrique S_{n+1} à partir de S_n en ajoutant un triangle équilatéral construit sur le tiers central de chaque côté.

NOTE

* La situation ici est celle à laquelle on est confronté chaque fois qu'il s'agit d'une *grandeur* linéaire. Une grandeur (comme la longueur, la masse, la densité . . .) prend une valeur ω pour chaque objet physique d'une certaine catégorie. L'ensemble Ω de ces valeurs est défini *indépendamment du choix d'une unité*, (par exemple, comme quotient de l'ensemble des objets physiques par une certaine relation d'équivalence). Les opérations physiques permettent d'identifier Ω à un espace vectoriel E de dimension 1 sur $\mathbf{R}$ orienté (ou à une partie d'un tel espace), mais non de choisir une unité, c'est à dire un élément non nul de E (qui en fera une base puisque E est de dimension 1). Ceci peut être obtenu de plusieurs façons: par exemple,

- à partir d'une loi d'addition et d'une relation d'ordre (comme c'est le cas pour les segments) avec une certaine compatibilité.
- en définissant pour deux valeurs A et B de la grandeur un rapport A/B qui est un nombre réel > 0 avec les conditions: (1) $A/B = 1 \Leftrightarrow A = B$, (2) $A/C = A/B \cdot B/C$ (c'est le cas ici pour les aires).

Ce rapport peut être défini au niveau des objets en supposant vérifiée seulement la 2ième propriété. On définit alors l'ensemble Ω comme quotient de l'ensemble des objets par la relation "$ArB \Leftrightarrow A/B = 1$"

REFERENCES

Artigue, M. et Douady, R.: 1986, 'La didactique des mathématiques en France' (note de synthèse), *Revue Française de pédagogie* n° 76, 69–88, INRP. Paris

Balacheff, N.: 1988, *Processus de preuves chez des élèves de collège*, Thèse de doctorat d'état Université de Grenoble 1.

Brousseau, G.: 1987, 'Fondements et méthodes de la didactique', *Recherches en didactique des mathématiques* n° 7.2, 30–115, La pensée sauvage Grenoble.

Doise, W. et Mugny, G.: 1981, *Le développement social de l'intelligence*, Interéditions.

Douady, R.: 1984, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse de doctorat d'état, Université Paris VII.

Douady, R.: 1987, 'Jeux de cadres et dialectique outil-objet', *Recherches et didactique des mathématiques* n° 7.2, 5–31, La pensée sauvage Grenoble.

Douady, R. et Perrin-Glorian, M.-J.: 1983, *Mesure des longueurs et des aires*. Brochure, n° 48 IREM Université Paris 7.

Douady, R. et Perrin-Glorian, M.-J.: 1984–1985, 'Aires de surfaces planes lère partie et 2ème partie' '*Petit x*' n° 6, 5–33 et '*Petit x*' n° 8, 5–30, IREM de Grenoble.

Hadamard, J.: 1928, *Leçons de géométrie élémentaire I géométrie plane note D*. Armand Colin, Paris.

Lebesgue, H.: 1931, 'La mesure des grandeurs', *l'Enseignement Mathématique*. Blanchard Paris réed. 1975.

Perret-Clermont, A.-N.: 1979, *La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale*. P. Lang, Genève.

Perrin-Glorian, M. J.: Thèse de doctorat d'état (à paraître).

Piaget, J.: 1975, *L'équilibration des structures cognitives*, P.U.F. Paris.

Piaget, J., Inhelder, B. et Szeminska, A.: 1948, *La géométrie spontanée de l'enfant*, P.U.F. Paris.

Rogalski, J.: 1983, L'acquisition des notions relatives à la dimensionalité des mesures spatiales (longueur, surface). *Recherches en Didactique des mathématiques* n° 3.3, 343–396, La pensée sauvage.

Vinh Bang et Lunzer, E.: 1965, 'Conservations spatiales', *Etudes d'épistémologie génétique vol. 19*, PUF Paris.

IREM, Université Paris 7
2, place Jussieu
75251 Paris Cedex 05
France