# *Inductions électromagnétiques en relativité générale et principe de Fermat*

PHAM MAU QUAN

*Mémoire transmis par* A. LICHNEROWICZ

## Sommaire



## Indroduction

Ce mémoire est consacré à l'étude des inductions électromagnétiques en relativité générale. On y trouve exposée une démonstration du principe de FERMAT basée sur les propriétés des caractéristiques des équations de MAXWELL.

Les champs et inductions électriques, magnétiques sont introduits comme l'ont fait GORDON, WEYL, LICHNEROWICZ, à l'aide de deux champs de tenseurs antisymétriques d'ordre 2: le tenseur champ électrique — induction magnétique $H_{\alpha\beta}$ et le tenseur induction électrique — champ magnétique $G_{\alpha\beta}$. Des équations de liaison expriment les relations linéaires entre inductions et champs. C'est l'ensemble des deux tenseurs $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ qui constitue le champ électromagnétique. Le schéma énergétique où il intervient est un schéma «fluide chargé conducteur» dont l'étude a été faite antérieurement* et dont on rappelle les résultats essentiels sur l'intégration des équations du champ.

En présence d'inductions, les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL ne sont pas identiques aux variétés caractéristiques des équations d'EINSTEIN. On sait que ces dernières sont tangentes en chacun de leurs points aux cônes élémentaires $\mathfrak{C}_x$ de l'espace-temps. Les cônes caractéristiques $\overline{\mathfrak{C}}_x$ pour les équations de MAXWELL sont intérieurs aux cônes élémentaires. Les variétés caractéristiques tangentes aux cônes $\overline{\mathfrak{C}}_x$ sont orientées dans le temps et les bicaractéristiques sont les géodésiques de longueur nulle de la métrique associée**

$$d\bar{s}^2 = \left(g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) u_\alpha u_\beta\right) dx^\alpha dx^\beta .$$

où $u^\alpha$ désigne le vecteur vitesse unitaire d'univers et les scalaires $\varepsilon$, $\mu$ le pouvoir diélectrique et la perméabilité magnétique en chaque point du milieu considéré.

Or les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL jouent le rôle de surfaces d'ondes électromagnétiques et les bicaractéristiques, celui de rayons électromagnétiques correspondants. On est conduit à introduire naturellement la variété riemannienne $\overline{\mathfrak{V}}_4$ définie par la variété différentiable portant l'espace-temps et munie de la métrique associée $d\bar{s}^2$.

Les équations de MAXWELL peuvent s'exprimer directement dans cette variété où elles affectent une forme simple symétrique de celles de la théorie électrodynamique de LORENTZ. Les rayons électromagnétiques sont géodésiques de longueur nulle de $\overline{\mathfrak{V}}_4$. L'étude géométrique des rayons électromagnétiques dans l'espace fournit l'énoncé du principe de FERMAT.

Pour faire cette étude, nous avons commencé par généraliser au cas du fluide parfait chargé conducteur la notion de mouvements permanents liée à l'existence pour l'espace-temps $\mathfrak{V}_4$ d'un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales à trajectoires orientées dans le temps et ne laissant invariant aucun point de $\mathfrak{V}_4$***. Si le mouvement du fluide considéré est permanent, il est défini dans la variété $\overline{\mathfrak{V}}_4$ un groupe d'isométries induites par le groupe de l'espace-temps. Nous sommes dans un cas où la «méthode de descente» de LICHNEROWICZ**** s'applique. En projetant les géodésiques de longueur nulle de $\overline{\mathfrak{V}}_4$ sur la variété quotient de $\overline{\mathfrak{V}}_4$ par la relation d'équivalence définie par son groupe d'isométries, nous obtenons un théorème qui généralise le principe de FERMAT en relativité. Ce théorème est valable pour un milieu en mouvement permanent quelconque. En particulier dans le cas d'un espace-temps sans gravitation de MINKOWSKI, il fournit comme conséquence une démonstration de la formule relativiste de la composition des vitesses.

* Etude électromagnétique et thermodynamique d'un fluide relativiste chargé [Jour. Rational Mechanics and Analysis 5, No. 3, 473–583 (1956)].

** GORDON a trouvé cette métrique par voie algébrique.

*** LICHNEROWICZ, A.: Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, chap. IV, III, pp. 83–90. Masson 1955.

**** *Ibid.*, Livre II, chap. 1er.

*Notations employées*

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \partial_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \ : \ \text{dérivées partielles}$$

$$\nabla_\alpha \qquad : \ \text{dérivée covariante}$$

$\alpha, \beta, \ldots$, tout indice grec $= 0, 1, 2, 3$.

$i, j, \ldots$, tout indice latin $= 1, 2, 3$.

## I. Inductions électromagnétiques. Intégration des équations de MAXWELL

### 1. Les équations de Maxwell dans l'espace-temps $\mathfrak{B}_4$

Soit dans la variété espace-temps $\mathfrak{B}_4$ de la relativité générale, munie de la métrique d'univers

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

un domaine $\mathfrak{D}$ occupé par une distribution matérielle schématisée sous forme de fluide — champ électromagnétique. $\vec{u}$ désigne le vecteur vitesse unitaire en chaque point $x$ de $\mathfrak{D}$. On appelle *repère propre* en $x$, un repère orthonormé dont le premier vecteur $\vec{V}^{(0)}$ coïncide avec $\vec{u}$ et dont les trois autres vecteurs $\vec{V}^{(i)}$ orientés dans l'espace sont normés par la condition

$$g_{\alpha\beta} V^{(i)\alpha} V^{(i)\beta} = -1.$$

Les phénomènes électromagnétiques sont caractérisés par les deux champs de tenseurs antisymétriques d'ordre 2: le tenseur champ électrique — induction magnétique $H_{\alpha\beta}$ et le tenseur induction électrique — champ magnétique $G_{\alpha\beta}$, dont les composantes relatives à un repère propre au point $x$ considéré ont pour valeurs

$$(H_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & D_1 & D_2 & D_3 \\ -D_1 & 0 & H_3 & -H_2 \\ -D_2 & -H_3 & 0 & H_1 \\ -D_3 & H_2 & -H_1 & 0 \end{pmatrix}$$

et vérifient les relations

$$G_{0i} = \varepsilon H_{0i}, \qquad H_{ij} = \mu G_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

où les scalaires $\varepsilon$ et $\mu$ représentent respectivement le pouvoir diélectrique et la perméabilité magnétique du milieu considéré.

Nous introduisons les tenseurs adjoints

$$\overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} H_{\gamma\delta}, \qquad \overset{*}{G}{}^{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} G_{\gamma\delta} \tag{1.3}$$

où $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le tenseur complètement antisymétrique attaché à la forme élément de volume de $\mathfrak{B}_4$. Les relations (1.2) peuvent alors s'écrire sous la forme invariante

$$G_{\alpha\beta} u^\alpha = \varepsilon H_{\alpha\beta} u^\alpha, \tag{1.4}$$

$$\mu \overset{*}{G}_{\alpha\beta} u^\alpha = \overset{*}{H}_{\alpha\beta} u^\alpha \tag{1.5}$$

valable dans un système de coordonnées locales quelconque. Ces relations sont appelées les ***équations de liaison.***

Les deux champs de tenseur $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ doivent satisfaire aux équations de MAXWELL qui s'écrivent

$$\nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} = 0, \tag{1.6}$$

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = J^\beta. \tag{1.7}$$

$J^\beta$ est le vecteur courant électrique. Le premier groupe des équations de MAXWELL peut encore s'écrire

$$\tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla_\alpha H_{\beta\gamma} = 0.$$

Il exprime qu'il existe localement un champ de vecteur $\varphi_\alpha$ dont $H_{\alpha\beta}$ est le rotationnel, c'est-à-dire

$$H_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha.$$

L'évolution du champ électromagnétique est déterminée, si l'on connaît $J^\beta$ c'est-à-dire la distribution de l'électricité. On peut supposer pour un milieu non conducteur que $\vec{J}$ est colinéaire au vecteur vitesse

$$J^\alpha = \delta u^\alpha.$$

$\delta$ s'appelle la densité propre de charge électrique, et le courant électrique est un courant de convection. Plus généralement, on est conduit à faire l'hypothèse

$$J^\alpha = \delta u^\alpha + \sigma u_\varrho H^{\varrho\alpha}$$

où $\delta$ est encore la densité propre de charge électrique et $\sigma$ un scalaire caractérisant la conductivité électrique du milieu. $\vec{J}$ possède alors une composante colinéaire à $\vec{u}$ et une composante $\Gamma^\alpha = \sigma u_\varrho H^{\varrho\alpha}$ orthogonale à $\vec{u}$. La première représente le courant de convection et la seconde, le courant de conduction qui satisfait à l'hypothèse d'OHM.

Les équations (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) constituent les équations de l'électromagnétisme en présence d'inductions dans la matière. Dans le vide, on a l'égalité

$$\varepsilon\mu = 1 \tag{1.8}$$

et les équations de MAXWELL deviennent

$$\nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} = 0, \tag{1.9}$$

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0, \tag{1.10}$$

tandis que les équations de liaison se réduisent à

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\alpha\beta} = \varepsilon H_{\alpha\beta}. \tag{1.11}$$

Nous désignerons dans la suite par $\vec{\mathscr{E}}$ et $\vec{\mathscr{D}}$ les vecteurs qui figurent au premier membre des équations de MAXWELL, soit

$$\mathscr{E}^\beta \equiv \nabla_\alpha \overset{*}{H}{}^{\alpha\beta}, \tag{1.12}$$

$$\mathscr{D}^\beta \equiv \nabla_\alpha G^{\alpha\beta}. \tag{1.13}$$

On démontre que leurs divergences sont nulles:

(1.14) $$\nabla_\alpha \mathcal{E}^\alpha = 0,$$

(1.15) $$\nabla_\alpha \mathcal{D}^\alpha = 0.$$

Ces deux équations sont appelées les *conditions de conservation* relatives aux équations de MAXWELL. Elles expriment la conservation de l'électricité. Ainsi, on tire de (1.7) et (1.15)

$$\nabla_\alpha J^\alpha = 0.$$

### 2. Expression des $G_{\alpha\beta}$ en fonction des $H_{\alpha\beta}$

Les équations de liaison (1.4) et (1.5) traduisent le caractère linéaire des relations entre inductions et champs. Elles montrent que les deux champs de tenseurs $H_{\alpha\beta}$ et $G_{\alpha\beta}$ ne sont pas indépendants l'un de l'autre. On peut exprimer les $G_{\alpha\beta}$ en fonction des $H_{\alpha\beta}$.

En effet, à partir de (1.4) nous pouvons former l'égalité

(2.1) $$(G_{\alpha\beta} u_\gamma + G_{\beta\gamma} u_\alpha) u^\beta = \varepsilon (H_{\alpha\beta} u_\gamma + H_{\beta\gamma} u_\alpha) u^\beta.$$

D'autre part, (1.5) peut s'écrire sous la forme équivalente

$$G_{\alpha\beta} u_\gamma + G_{\beta\gamma} u_\alpha + G_{\gamma\alpha} u_\beta = \frac{1}{\mu} (H_{\alpha\beta} u_\gamma + H_{\gamma\beta} u_\alpha + H_{\gamma\alpha} u_\beta)$$

vraie pour tout groupe de valeurs données à $\alpha, \beta, \gamma$. Par multiplication contractée de cette relation avec $u^\beta$, puis en retranchant (2.1) de l'égalité ainsi obtenue, nous avons

$$G_{\gamma\alpha} = \frac{1}{\mu} (H_{\alpha\beta} u_\gamma + H_{\beta\gamma} u_\alpha + H_{\gamma\alpha} u_\beta) u^\beta - \varepsilon (H_{\alpha\beta} u_\gamma + H_{\beta\gamma} u_\alpha) u^\beta.$$

Nous en déduisons

(2.2) $$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\alpha\beta} + \frac{1 - \varepsilon\mu}{\mu} (H_{\sigma\alpha} u^\sigma u_\beta - H_{\sigma\beta} u^\sigma u_\alpha).$$

C'est la relation cherchée. En composantes contravariantes, on a

(2.3) $$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H^{\alpha\beta} + \frac{1 - \varepsilon\mu}{\mu} (H^{\sigma\alpha} u_\sigma u^\beta - H^{\sigma\beta} u_\sigma u^\alpha).$$

### 3. L'intégration des équations de MAXWELL-EINSTEIN

Le champ électromagnétique $(H_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta})$ et la métrique $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ sont liés par les équations de MAXWELL-EINSTEIN. Si le milieu meublant le domaine $\mathfrak{D}_4$ considéré est schématisé sous forme de fluide parfait chargé et conducteur, les équations d'EINSTEIN sont*

(3.1) $$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &\equiv R_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}, \\ T_{\alpha\beta} &= (\varrho + p) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha) + \tau_{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon\mu) \tau_{\alpha\varrho} u^\varrho u_\beta, \\ \tau_{\alpha\beta} &= \tfrac{1}{4} g_{\alpha\beta} (G_{\varrho\sigma} H^{\varrho\sigma}) - G_{\varrho\alpha} H^\varrho{}_\beta, \end{aligned}$$

(3.2) $$q_\alpha = -\varkappa \partial_\varrho \vartheta (g^\varrho_\alpha - u^\varrho u_\alpha)$$

* *Cf.* Etude électromagnétique et thermodynamique d'un fluide relativiste chargé [Jour. of Rational Mechanics and Analysis 5, No. 3, 473—583 (1956)].

où $p$ est la pression et $\vartheta$ la température en chaque point du fluide. Les équations de MAXWELL sont

$$(3.3) \qquad \mathscr{E}^{\delta} \equiv \tfrac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla_{\alpha} H_{\beta\gamma} = 0,$$

$$(3.4) \qquad \mathscr{D}_{\beta} \equiv g^{\alpha\varrho}\nabla_{\alpha} G_{\varrho\beta} = \delta u_{\beta} + \sigma u^{\alpha} H_{\alpha\beta}.$$

A ces équations s'ajoutent les équations de conservation

$$(3.5) \qquad \nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0,$$

$$(3.6) \qquad \nabla_{\alpha} q^{\alpha} = c\varrho u^{\alpha}\partial_{\alpha}\vartheta - \frac{l}{\varrho} u^{\alpha}\partial_{\alpha}\varrho,$$

$$(3.7) \qquad \nabla_{\alpha}(\delta u^{\alpha} + \sigma u_{\varrho} H^{\varrho\alpha}) = 0.$$

*Les scalaires $\varkappa, c, l, \varepsilon, \mu, \sigma$ sont supposés donnés*; ils caractérisent le fluide envisagé qui admet de plus l'équation d'état

$$(3.8) \qquad \varrho = \varphi(p, \vartheta).$$

Les *variables de champ* sont constituées par l'ensemble

$$\mathfrak{H}(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, \vartheta, u^{\alpha}, p, \delta)$$

où le vecteur $u^{\alpha}$ est normé

$$(3.9) \qquad g_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = +1.$$

Le problème qui se pose est celui de l'intégration des équations du champ. On peut l'étudier au moyen d'une analyse du problème de Cauchy. Pour cela, on se donne sur une hypersurface $\mathfrak{S}$ orientée dans l'espace, représentée localement par

$$x^0 = 0,$$

les valeurs des quantités

$$\mathscr{C}(g_{\alpha\beta}, \partial_0 g_{\alpha\beta}; H_{\alpha\beta}; \vartheta, \partial_0\vartheta)$$

et on se propose de déterminer les divers champs $\mathscr{H}(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, \vartheta, u^{\alpha}, p, \delta)$ en dehors de $\mathfrak{S}$ dans son domaine d'existence. Il suffit d'étudier la possibilité de calculer sur $\mathfrak{S}$ les valeurs des différentes quantités introduites et de leurs dérivées successives.

L'espace-temps $\mathfrak{V}_4$ étant une variété différentiable de classe ($C^2, C^4$ par morceaux), on supposera donc $g_{\alpha\beta}$ de classe ($C^1, C^3$ par morceaux), $H_{\alpha\beta}$ de classe ($C^0, C^2$ par morceaux) et $\vartheta$ de classe ($C^2, C^4$ par morceaux).

Pour $g^{00} \neq 0$, les équations d'EINSTEIN sont équivalentes à l'ensemble des deux systèmes

$$(3.10) \qquad R_{ij} \equiv -\tfrac{1}{2} g^{00}\partial_{00} g_{ij} + F_{ij} = \chi(T_{ij} - \tfrac{1}{2} T g_{ij})$$

$$(3.11) \qquad S^0_{\alpha} = \chi[(\varrho + p) u^0 u_{\alpha} - p g^0_{\alpha} - (u^0 q_{\alpha} + u_{\alpha} q^0) + \tau^0{}_{\alpha} - (1 - \varepsilon\mu)\tau^0{}_{\varrho} u^{\varrho} u_{\alpha}]$$

où les $F_{ij}$ et $S^0_{\alpha}$ ont des valeurs connues sur $\mathfrak{S}$. Les équations (3.11) jointes au caractère unitaire de $u^{\alpha}$ et à l'équation d'état fournissent les quantités $p, u^{\alpha}$. (3.10) déterminent alors $\partial_{00} g_{ij}$ si $g^{00} \neq 0$.

Les équations de MAXWELL sont équivalentes à l'ensemble du système

$$(3.12)\quad \mathcal{D}_i \equiv \frac{1}{\mu}\left(g^{00} - (1-\varepsilon\mu)(u^0)^2\right)\partial_0 H_{0i} + \frac{1}{\mu}\left(g^{0j} - (1-\varepsilon\mu)\, u^0 u^j\right)\partial_0 H_{ji} + \Phi_i$$
$$= \delta u_i + \sigma u^\varrho H_{\varrho i},$$

$$(3.13)\quad \mathcal{E}^i \equiv \tfrac{1}{2}\eta^{0jki}\partial_0 H_{jk} + \psi^i = 0$$

et des deux identités

$$(3.14)\quad \mathcal{D}^0 = \delta u^0 + \sigma u_\alpha H^{\alpha 0},$$

$$(3.15)\quad \mathcal{E}^0 \equiv \tfrac{1}{2}\eta^{ijk0}\partial_i H_{jk} = 0$$

où les $\Phi_i$ et $\Psi^i$ ne dépendent pas des $\partial_0 H_{\alpha\beta}$ mais dépendent des $\partial_0 u^\alpha$ tandis que la quantité $\mathcal{D}^0$ ne dépend pas de $\partial_0 H_{\alpha\beta}$ ni de $\partial_0 u^\alpha$. (3.15) exprime qu'il existe un potentiel vecteur local pour $H_{ij}$ sur $\mathfrak{S}$. L'équation (3.14) détermine $\delta$ si $u^0 \neq 0$. Pour avoir $\partial_0 H_{\alpha\beta}$, il faut chercher à déterminer d'abord les dérivées de $u^\alpha$: soit $\partial_0 u^\alpha$. Cette détermination se fait simultanément avec celle de $\partial_0 p$, $\partial_{00}\vartheta$ au moyen des équations de conservation relatives aux équations d'EINSTEIN (3.5) auxquelles on adjoint le caractère unitaire de $u^\alpha$, l'équation de conduction thermique (3.6) et l'équation d'état. Puis la derivée $\partial_0\delta$ se calcule par l'équation de conservation du courant électrique qui peut s'écrire

$$u^0\,\partial_0\delta = \Omega$$

où $\Omega$ dépend de $\partial_0 u^\alpha$ mais ne dépend pas de $\partial_0 H_{\alpha\beta}$.

Les $\partial_0 u^\alpha$ étant calculées, on les porte dans (3.12) et (3.13) qui fournissent enfin les $\partial_0 H_{\alpha\beta}$ si

$$g^{00} - (1-\varepsilon\mu)(u_0)^2 \neq 0.$$

Si l'hypersurface $\mathfrak{S}$ portant les données de Cauchy $\mathscr{C}$ n'est pas exceptionnelle, il résulte des équations (3.10), (3.12), (3.13), (3.5), (3.6), (3.7) que les quantités $\partial_{00} g_{ij}$, $\partial_0 H_{\alpha\beta}$, $\partial_{00}\vartheta$, $\partial_0 u^\alpha$, $\partial_0 p$, $\partial_0\delta$ sont bien déterminées et nécessairement continues à la traversée de l'hypersurface $\mathfrak{S}$. Les mêmes conclusions s'étendent aux dérivées d'ordre supérieur de ces quantités si on suppose les données dérivables à un ordre plus élevé que celui de l'hypothèse.

La détermination des quantités précédentes ne fait pas intervenir les équations (3.11), (3.14), (3.15). Or celles-ci ne contiennent aucune dérivée oblique des données de Cauchy; celles-ci sont donc astreintes à vérifier sur la variété $\mathfrak{S}$ les trois équations (3.11), (3.14), (3.15) ou leurs équivalentes

$$(\mathrm{I})\quad \begin{aligned} Q^0_\alpha &\equiv S^0_\alpha - \chi T^0_\alpha = 0 \\ P^0 &\equiv \mathcal{D}^0 - (\delta u^0 + \sigma u_\alpha H^{\alpha 0}) = 0 \\ \mathcal{E}^0 &= 0 \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$Q_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \chi T_{\alpha\beta}, \qquad P_\alpha = \mathcal{D}_\alpha - (\delta u_\alpha + \sigma u^\varrho H_{\varrho\alpha}).$$

Considérons maintenant un ensemble $\mathscr{H}(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, \vartheta, u^\alpha, p, \delta)$, solution des équations (3.10), (3.12), (3.13), (3.5), (3.6), (3.7), correspondant à des données de Cauchy $\mathscr{C}$ satisfaisant sur $\mathfrak{S}$ aux équations (I). En vertu du caractère conservatif des premiers membres des équations de MAXWELL-EINSTEIN et des équations de conservation (3.5), (3.7), on a

$$\nabla_\alpha Q^\alpha_\beta = 0, \quad \nabla_\alpha P^\alpha = 0, \quad \nabla_\alpha \mathscr{E}^\alpha = 0.$$

Ces identités se réduisent en vertu de (3.11), (3.12), (3.13) aux équations

$$\begin{aligned} g^{00}\partial_0 Q^0_\alpha &= A^{i\beta}_\alpha \partial_i Q^0_\beta + B^\beta_\alpha Q^0_\beta \\ \partial_0 P^0 &= -C^i\partial_i P^0 - (\partial_i C^i + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} C^\beta) P^0 \\ \partial_0 \mathscr{E}^0 &= -\Gamma^\alpha_{\alpha 0}\mathscr{E}^0 \end{aligned}$$

où les $A^{i\beta}_\alpha$, $B^\beta_\alpha$, $C^\alpha$ sont des fonctions continues. Ces équations sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues $Q^0_\alpha$, $P^0$, $\mathscr{E}^0$. Comme $Q^0_\alpha = P^0 = \mathscr{E}^0 = 0$ sur $\mathfrak{S}$, elles n'admettent pas d'autre solution que la solution identiquement nulle. Il en résulte que si les équations (I) sont vérifiées sur $\mathfrak{S}$ par les données de Cauchy, elles sont également vérifiées dans tout le domaine d'espace-temps considéré par la solution $\mathscr{H}(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, \vartheta, u^\alpha, p, \delta)$ des équations du champ.

Le problème de l'intégration des équations du champ consiste finalement dans le choix des données de Cauchy rendant compatibles les équations (3.11), (3.14), (3.15) qui permettent de calculer $u^\alpha$, $p$, $\delta$, puis dans l'intégration du système des équations (3.10), (3.12), (3.13), (3.5), (3.6), (3.7) qui permettent d'étudier l'évolution des champs $\mathscr{H}(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, \vartheta, u^\alpha, p, \delta)$. Si les données du problème étaient analytiques réelles, on pourrait établir à l'aide du théorème d'existence de CAUCHY-KOWALEWSKI pour les équations aux dérivées partielles, qu'à un changement de coordonnées près conservant point par point l'hypersurface $\mathfrak{S}$ et les données de Cauchy sur $\mathfrak{S}$, le problème admet une solution analytique réelle et une seule, solution dont nous connaissons le développement suivant les puissances de $x^0$. Sous des hypothèses de simple différentiabilité, la méthode de Mme FOURES permet d'établir l'existence et l'unicité de la solution.

## 4. Les variétés caractéristiques $\mathfrak{V}_3^M$

Sur les équations (3.12), on voit que si l'hypersurface $\mathfrak{S}$ portant les données de Cauchy est telle que sur $\mathfrak{S}$

$$g^{00} - (1 - \varepsilon\mu)(u^0)^2 = 0,$$

les dérivées $\partial_0 H_{0i}$ du champ électromagnétique peuvent être discontinues à la traversée de $\mathfrak{S}$. Il peut exister une infinité de solutions distinctes des équations de MAXWELL correspondant aux mêmes données de Cauchy. La variété $\mathfrak{S}$ est une variété caractéristique pour les équations de MAXWELL. Une telle variété sera désignée par $\mathfrak{V}_3^M$.

Dans un système de coordonnées locales arbitraire quelconque, les variétés caractéristiques $\mathfrak{V}_3^M$ définies par $f(x^\alpha) = 0$ sont les variétés satisfaisant à l'équation

$$(g^{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon\mu) u^\alpha u^\beta)\partial_\alpha f \partial_\beta f = 0. \tag{4.1}$$

Ces variétés à la traversée desquelles peuvent se produire des discontinuités du champ électromagnétique, constituent l'extension relativiste des fronts d'ondes électromagnétiques classiques. Nous supposerons que ces fronts d'ondes sont orientés dans le temps, ou à la rigueur tangents au cône élémentaire $ds^2 = 0$

de $\mathfrak{V}_4$; nous verrons que cette hypothèse est bien en accord avec les exigences physiques relativistes. S'il en est ainsi,

$$\Delta_1 f \equiv g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f = (1 - \varepsilon\mu)(u^\alpha \partial_\alpha f)^2 \leq 0.$$

On en déduit

$$\varepsilon\mu \geq 1. \tag{4.2}$$

Ceci posé, la généralisation de l'hypothèse d'HUGONIOT permet d'évaluer ce qui constitue ici la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques considérées. Pour cela considérons deux surfaces d'ondes voisines $(\mathfrak{V}_3^M)_0$ et $(\mathfrak{V}_3^M)_\vartheta$ définies par les équations

$$f(x^\alpha) = 0, \quad f(x^\alpha) = \vartheta$$

et prenons $\vartheta$ pour infiniment petit principal.

La ligne de courant issue du point $x$ de $(\mathfrak{V}_3^M)_0$ coupe $(\mathfrak{V}_3^M)_\vartheta$ en un point défini aux infiniment petits d'ordre supérieur près par $x + \eta\vec{u}$, $\eta$ étant donné par la relation

$$\eta u^\alpha \partial_\alpha f = \vartheta. \tag{4.3}$$

Soit $\vec{n}$ le vecteur normé ($\vec{n}^2 = -1$) normal en $x$ à la surface d'onde $(\mathfrak{V}_3^M)_0$. Il a pour composantes covariantes en $x$

$$n_\lambda = \frac{\partial_\lambda f}{\sqrt{-g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f}}. \tag{4.4}$$

La trajectoire orthogonale des $\mathfrak{V}_3^M$ issue de $x$ coupe $(\mathfrak{V}_3^M)_\vartheta$ en un point qui, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, s'écrit $x + \eta_1\vec{n}$, $\eta_1$ étant déterminé par la relation

$$\eta_1 n^\lambda \partial_\lambda f = \vartheta.$$

On en déduit

$$\eta_1 = \frac{\vartheta}{n^\lambda \partial_\lambda f} = \frac{\vartheta\sqrt{-g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f}}{g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f} = \frac{-\vartheta}{\sqrt{-g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \partial_\beta f}} \tag{4.5}$$

Introduisons le vecteur $\vec{t} = \eta\vec{u} - \eta_1\vec{n}$. En vertu de (4.3) et (4.4), on a

$$\eta(\vec{u}\cdot\vec{n}) = -\eta_1$$

et

$$\vec{t}\cdot\vec{n} = (\eta\vec{u} - \eta_1\vec{n})\cdot\vec{n} = \eta(\vec{u}\cdot\vec{n}) + \eta_1 = 0.$$

Le vecteur $\vec{t}$ est donc tangent à la surface d'onde. Il est orienté dans le temps, car son carré

$$\eta_0^2 = (\vec{t})^2 = \eta^2 - \eta_1^2 - 2\eta\eta_1(\vec{u}\cdot\vec{n}) = \eta^2 + \eta_1^2$$

est positif.

Le vecteur $\eta\vec{u}$ apparaît ainsi comme la somme de deux vecteurs, l'un orthogonal à la surface d'onde et orientée dans l'espace, l'autre tangent à cette surface et orienté dans le temps. La vitesse de propagation $V$ de l'onde se trouve définie comme la limite du rapport des modules de ces deux vecteurs, soit

$$V = \lim_{\vartheta\to 0} \left|\frac{\eta_1}{\eta_0}\right|.$$

On a ainsi

$$V^2 = \lim_{\vartheta \to 0} \frac{\eta_1^2}{\eta_0^2},$$

soit, en remplacant $\eta_1$ et $\eta_0$ par leurs valeurs

$$V^2 = \frac{1}{\varepsilon \mu}.$$

La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques est donc $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Cette valeur appelle deux remarques: d'abord elle généralise la valeur obtenue en électromagnétisme classique. De plus, dans nos hypothèses ($\varepsilon\mu \geq 1$), la vitesse de propagation $V$ est inférieure à une vitesse limite $c = 1$; cette valeur limite coïncide avec la valeur de la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ($\varepsilon\mu = 1$).

## II. Étude des caractéristiques

### 5. Définition d'une métrique associée

L'intégration des équations de Maxwell fait intervenir le champ de tenseur contravariant symétrique

$$\bar{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - (1 - \varepsilon\mu)\, u^\alpha u^\beta \tag{5.1}$$

dont la forme quadratique associée représente la forme caractéristique des équations de Maxwell. L'étude des variétés caractéristiques $\mathfrak{V}_3^M$ de celles-ci devient plus suggestive si l'on introduit la métrique riemannienne

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta \tag{5.2}$$

dont la matrice des coefficients $(\bar{g}_{\alpha\beta})$ est la matrice inverse de la matrice $(\bar{g}^{\alpha\beta})$. On obtient facilement

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) u_\alpha u_\beta \tag{5.3}$$

en effectuant les calculs en repère propre. Et, si $g$ et $\bar{g}$ représentent respectivement le déterminant de la matrice $(g_{\alpha\beta})$ et celui de la matrice $(\bar{g}_{\alpha\beta})$, on a la relation

$$g = \varepsilon\mu\, \bar{g}. \tag{5.4}$$

La métrique $d\bar{s}^2$ sera dite *métrique associée.* Elle joue un rôle fondamental dans l'étude des variétés caractéristiques des équations de Maxwell. La métrique d'univers $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ est du type hyperbolique normal. Rapportée à un repère propre, elle prend la forme canonique

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2$$

où les $(\omega^\alpha)$ sont un système de formes de Pfaff locales linéairement indépendantes. La métrique associée prend elle-même la forme

$$d\bar{s}^2 = \left(\delta_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) u_\alpha u_\beta\right) \omega^\alpha \omega^\beta$$

où $\delta_{\alpha\beta}=0$ si $\alpha\neq\beta$, $\delta_{00}=+1$ et $\delta_{ii}=-1$ et $u_0=1$, $u_i=0$ dans le repère propre. On en déduit

$$d\bar{s}^2=\left(\frac{\omega^0}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)^2-(\omega^1)^2-(\omega^2)^2-(\omega^3)^2,$$

ce qui montre que la métrique associée est également de type hyperbolique normal.

Nous désignerons dans la suite par $\overline{\mathfrak{V}}_4$ la variété riemannienne définie par la variété différentiable portant $\mathfrak{V}_4$ et munie de la métrique associée $d\bar{s}^2$. Et nous distinguerons par une barre supérieure les quantités définies relativement à $\overline{\mathfrak{V}}_4$. Nous appellerons cône élémentaire associé $\overline{\mathfrak{C}}_x$ en un point $x$, le cône réel de directions tangentes à $\overline{\mathfrak{V}}_4$ défini par l'équation $d\bar{s}^2=0$.

## 6. Étude des bicaractéristiques

Dans l'espace riemannien $\overline{\mathfrak{V}}_4$, les variétés caractéristiques des équations de MAXWELL, définies localement par $f(x^\alpha)=0$, sont solutions de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\overline{\Delta}_1 f\equiv\bar{g}^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha f\,\partial_\beta f=0. \tag{6.1}$$

Elles ont tangentes en chaque point au cône élémentaire associé $\overline{\mathfrak{C}}_x$. Les cônes élémentaires $\overline{\mathfrak{C}}_x$ de $\overline{\mathfrak{V}}_4$ sont donc cônes caractéristiques pour les équations de MAXWELL et celles-ci admettent pour variétés caractéristiques les variétés tangentes à ces cônes. Mais dans l'espace-temps $\mathfrak{V}_4$ les cônes caractéristiques des équations de MAXWELL sont en général différents des cônes élémentaires $\mathfrak{C}_x$ ($ds^2=0$). Ils ne coïncident avec ces derniers que dans les régions vides de matière.

Une variété caractéristique $\mathfrak{V}_3^M$, c'est-à-dire une solution de (6.1), peut être engendrée au moyen des bandes caractéristiques de (6.1). Une telle solution peut être engendrée au moyen des bandes de $\overline{\mathfrak{V}}_4$ constituées chacune par l'ensemble d'une courbe $\mathfrak{L}_0$ et d'une famille à un paramètre de 3-plans élémentaires tangents à ces courbes. Les courbes $\mathfrak{L}_0$ sont appelées les bicaractéristiques des équations de MAXWELL.

Pour les déterminer, posons

$$2H(x^\lambda,y_\mu)=\bar{g}^{\alpha\beta}\,y_\alpha\,y_\beta$$

et considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\overline{\Delta}_1 f\equiv 2H(x^\lambda,\partial_\mu f)=C \tag{6.2}$$

où $C$ est une constante arbitraire. Relativement aux variables $x^\alpha, f, y_\beta$, les bandes caractéristiques des équations de MAXWELL (3.1) et (3.2) sont données par les solutions du système différentiel

$$\frac{dx^0}{\frac{\partial H}{\partial y_0}}=\cdots=\frac{dx^3}{\frac{\partial H}{\partial y_3}}=\frac{df}{2H}=-\frac{dy_0}{\frac{\partial H}{\partial x^0}}=\cdots=-\frac{dy_3}{\frac{\partial H}{\partial x^3}}=du$$

qui satisfont à l'intégrale première

$$2H(x^\lambda,y_\mu)=C$$

pour la valeur $C$ de la constante. Si l'on introduit la variable auxiliaire $u$, les fonctions $x^\alpha(u)$, $y_\beta(u)$ sont données par le système canonique

$$\frac{dx^\alpha}{du} = \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}, \qquad \frac{dy_\alpha}{du} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} \tag{6.3}$$

relatif à la fonction hamiltonienne $H(x^\lambda, y_\mu)$. Le premier groupe des équations (6.3) s'écrit explicitement

$$\dot{x}^\alpha = \bar{g}^{\alpha\beta} y_\beta \qquad \left(\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du}\right). \tag{6.4}$$

Inversement

$$y_\beta = \bar{g}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha. \tag{6.5}$$

Cela posé, les solutions $x^\alpha(u)$ de (6.3) sont extrêmales de la fonction lagrangienne $L$ définie par

$$2L = \bar{g}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta$$

puisque, par passage des variables $(x^\alpha, \dot{x}^\alpha)$ aux variables canoniques $(x^\beta, y_\beta)$ qui leur sont liées par (6.4) et (6.5), on a entre $H$ et $L$ la relation classique

$$H = \dot{x}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - L = L.$$

Ces solutions sont les extrêmales satisfaisant à l'intégrale première

$$2L = C \tag{6.6}$$

pour la valeur $C$ de la constante. Or, d'après l'existence de cette intégrale première, les extrêmales ainsi définies sont aussi les extrêmales de

$$\sqrt{2L} = \sqrt{\bar{g}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}$$

satisfaisant à (6.6). Il en résulte que les $x^\alpha(u)$ définissent des géodésiques de $\bar{\mathfrak{V}}_4$. Si $C=0$, le système différentiel aux caractéristiques de (6.1) admet l'intégrale première $f=$const. et les variétés $\mathfrak{V}_3^M$ peuvent être engendrées par les bandes de $\bar{\mathfrak{V}}_4$ définies par les géodésiques de longueur nulle $\bar{\mathfrak{L}}_0$, le 3-plan associé étant le plan tangent au cône élémentaire $\bar{\mathfrak{C}}_x$ le long de la tangente à $\bar{\mathfrak{L}}_0$.

Nous avons démontré le théorème:

**Théorème.** *Les bicaractéristiques des équations de* MAXWELL *sont les géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\bar{\mathfrak{V}}_4$ munie de la métrique associée*

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta.$$

Dans le langage de la théorie de la propagation par ondes, les variétés caractéristiques $\mathfrak{V}_3^M$ jouent le rôle de surfaces d'ondes électromagnétiques. Les bicaractéristiques $\bar{\mathfrak{L}}_0$ sont les rayons électromagnétiques associés. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

**Théorème.** *Dans un milieu isotrope de constantes diélectrique et magnétique $\varepsilon$, $\mu$ variables, les rayons électromagnétiques peuvent être considérés comme géodésiques de longueur nulle de l'espace riemannien $\bar{\mathfrak{V}}_4$ muni de la métrique*

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \equiv \left(g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right) u_\alpha u_\beta\right) dx^\alpha\, dx^\beta$$

*où $g_{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique fondamental et $u_\alpha$ le vecteur vitesse unitaire d'univers définis en chaque point du milieu.*

### 7. Les équations de l'électromagnétisme dans la métrique associée

Définissons sur $\mathfrak{V}_4$ le champ de tenseur antisymétrique $\overline{H}_{\alpha\beta}$ tel qu'en chaque point $(x^\alpha)$

$$\overline{H}_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}.$$

En élevant les indices de $\overline{H}_{\alpha\beta}$ à l'aide du tenseur métrique de $\overline{\mathfrak{V}}_4$, nous avons

$$\overline{H}^{\alpha\beta} = \overline{g}^{\varrho\alpha}\,\overline{g}^{\sigma\beta}\,\overline{H}_{\varrho\sigma} = \left(g^{\varrho\alpha} - (1-\varepsilon\mu)\,u^\varrho u^\alpha\right)\left(g^{\sigma\beta} - (1-\varepsilon\mu)\,u^\sigma u^\beta\right) H_{\varrho\sigma}$$

d'où

$$\overline{H}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\varrho}\,g^{\sigma\beta}\,H_{\varrho\sigma} + (1-\varepsilon\mu)\,(g^{\varrho\alpha}\,H_{\sigma\varrho}\,u^\sigma u^\beta - g^{\sigma\beta}\,H_{\varrho\sigma}\,u^\varrho u^\alpha).$$

En comparant cette égalité avec la relation (2.3) donnant l'expression de $G^{\alpha\beta}$ en fonction de $H_{\alpha\beta}$, nous voyons qu'en chaque point $(x^\alpha)$

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu}\,\overline{H}^{\alpha\beta}.$$

L'étude du problème de Cauchy relatif aux équations de MAXWELL dans $\mathfrak{V}_4$ nous suggère d'écrire les équations suivantes dans $\overline{\mathfrak{V}}_4$:

$$\overline{V}_\alpha \overset{*}{\overline{H}}{}^{\alpha\beta} = 0, \tag{7.1}$$

$$\overline{V}_\alpha \overline{G}^{\alpha\beta} = \overline{J}^\beta \tag{7.2}$$

où $\overline{G}_{\alpha\beta}$ est un tenseur proportionnel à $\overline{H}_{\alpha\beta}$. Le premier groupe (7.1) s'écrit encore

$$\overline{V}_\alpha \overset{*}{\overline{H}}{}^{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{|\overline{g}|}}{2}\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\partial_\alpha \overline{H}_{\gamma\delta} = 0.$$

Il exprime qu'il existe localement un champ de vecteur $\overline{\varphi}_\alpha$ dont $\overline{H}_{\alpha\beta}$ est le rotationnel. Comme $g = \varepsilon\mu\overline{g} \neq 0$ et que $\overline{H}_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}$ au point considéré, on voit que les équations (7.1) sont équivalentes aux équations de MAXWELL du premier groupe (16) dans $\mathfrak{V}_4$. Et nous pouvons identifier les deux potentiels vecteurs $\overline{\varphi}_\alpha$ et $\varphi_\alpha$.

Quant aux équations (7.2), on peut les écrire

$$\overline{V}_\alpha \overline{G}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{\overline{g}}}\,\partial_\alpha\left(\sqrt{|\overline{g}|}\,\overline{G}^{\alpha\beta}\right) = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{\sqrt{\overline{g}|}}\,\partial_\alpha\left(\sqrt{|g|}\,\frac{\overline{G}^{\alpha\beta}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) = \overline{J}^\beta$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_\alpha\left(\sqrt{|g|}\,\frac{\overline{G}^{\alpha\beta}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) = \frac{\overline{J}^\beta}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

En comparant cette équation avec les équations de MAXWELL du second groupe (1.7) dans $\mathfrak{V}_4$ écrites sous la forme

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_\alpha\left(\sqrt{|g|}\,G^{\alpha\beta}\right) = J^\beta,$$

on voit que les équations (7.2) sont équivalentes aux équations (1.7) si l'on prend

$$\overline{G}^{\alpha\beta} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,G^{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \overline{J}^\beta = \sqrt{\varepsilon\mu}\,J^\beta.$$

On est conduit à poser

$$\overline{G}_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\overline{H}_{\alpha\beta}. \tag{7.3}$$

En particulier, si l'on fait l'hypothèse

$$J^\beta = \delta u^\beta + \sigma u_\alpha H^{\alpha\beta},$$

on vérifie que

$$\bar{J}^\beta = \delta \bar{u}^\beta + \sigma \bar{u}_\alpha \bar{H}^{\alpha\beta}$$

où $\bar{u}^\alpha = d x^\alpha / d \bar{s}$. On observera que les scalaires $\varepsilon, \mu, \sigma, \delta$ sont les mêmes dans $\mathfrak{V}_4$ et $\bar{\mathfrak{V}}_4$.

L'étude précédente montre que les équations de MAXWELL peuvent s'exprimer directement dans la métrique associée comme

$$\bar{V}_\alpha \overset{*}{\bar{H}}{}^{\alpha\beta} = 0,$$
$$\bar{V}_\alpha \bar{G}^{\alpha\beta} = \bar{J}^\beta$$

où $\bar{G}_{\alpha\beta}$ est lié à $\bar{H}_{\alpha\beta}$ par la relation simple

$$\bar{G}_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \bar{H}_{\alpha\beta}$$

et où le vecteur $\bar{J}^\beta$ satisfait à l'hypothèse

$$\bar{J}^\beta = \delta \bar{u}^\beta + \sigma \bar{u}_\alpha \bar{H}^{\alpha\beta}.$$

On retrouve facilement à partir de ces équations, les résultats établis aux paragraphes précédents.

Ainsi, la formulation de la théorie électromagnétique de MAXWELL se fait de façon équivalente dans $\mathfrak{V}_4$ et dans $\bar{\mathfrak{V}}_4$. Il convient d'observer que les équations de MAXWELL conduisent en Physique classique à l'étude de l'opérateur linéaire hyperbolique du second ordre

$$\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Cet opérateur reste invariant par le groupe de LORENTZ, c'est-à-dire le groupe de transformations qui laisse invariante la forme quadratique de différentielles

$$V^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

et celle-ci n'est que la traduction en repère propre de la forme métrique associée qui s'écrit ici

$$d\bar{s}^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

On voit que

$$V = \sqrt{\frac{c}{\varepsilon\mu}}.$$

La quantité $\sqrt{\varepsilon\mu}$ qui se présente dans notre étude peut être interprétée comme l'indice de réfringence du milieu considéré. Nous poserons

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$$

$n$ est un nombre positif $\geq 1$ sans dimensions.

# III. Mouvement permanent d'un fluide partfait chargé

## 8. Espace-temps stationnaire dans un domaine

Considérons un domaine déterminé $\mathfrak{D}_4$ à quatre dimensions de $\mathfrak{V}_4$ et supposons que la variété riemannienne définie par $\mathfrak{D}_4$ munie de la métrique d'univers

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

admette un groupe connexe d'isométries globales à un paramètre, ne laissant invariant aucun point de $\mathfrak{D}_4$ et dont les trajectoires $z$ soient orientées dans le temps. Nous supposons de plus que:

a) les $z$ sont homéomorphes à la droite réelle $\mathfrak{R}$;

b) l'on peut trouver une variété différentiable à trois dimensions $\mathfrak{D}_3$, satisfaisant aux mêmes hypothèses de différentiabilité que $\mathfrak{V}_4$, telle qu'il existe un homéomorphisme différentiable de même classe de $\mathfrak{D}_4$ sur le produit topologique $\mathfrak{D}_3 \times \mathfrak{R}$ dans lequel les $z$ s'appliquent sur les lignes facteurs.

Dans ces conditions, nous dirons que l'espace-temps riemannien $\mathfrak{V}_4$ est *stationnaire* dans $\mathfrak{D}_4$. Les trajectoires $z$ sont appelées *lignes de temps*. La variété $\mathfrak{D}_3$ quotient de $\mathfrak{D}_4$ par la relation d'équivalence définie par le groupe est appelée *espace*.

Soit $\vec{\xi}$ le générateur infinitésimal du groupe d'isométries. Aucun point de $\mathfrak{D}_4$ n'étant invariant, $\vec{\xi}$ est $\neq 0$ en tout point de $\mathfrak{D}_4$. On sait que ce vecteur satisfait aux équations de KILLING

$$X g_{\alpha\beta} \equiv \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0 \tag{8.1}$$

où $X$ désigne l'opérateur de dérivation de Lie relatif au vecteur $\vec{\xi}$.

On peut définir dans $\mathfrak{D}_4$ des systèmes de coordonnées locales $(x^\alpha)$, dits adaptés au caractère stationnaire, de la manière suivante: les $(x^i)$ sont un système de coordonnées locales arbitraire de $\mathfrak{D}_3$. La donnée des $(x^i)$ détermine une ligne de temps. Pour déterminer un point sur cette ligne, on se donne la variété $x^0 = \text{const.}$ à laquelle il appartient, ces variétés étant les variétés homéomorphes à $\mathfrak{D}_3$ définies par l'homéomorphisme b) et telles que les composantes de $\vec{\xi}$ soient

$$\xi^0 = 1\,, \quad \xi^i = 0\,.$$

Dans ces systèmes de coordonnées adaptés, on a

$$\xi_\alpha = g_{\alpha 0}$$

et les équations de KILLING se traduisent comme

$$X g_{\alpha\beta} = \partial_0 g_{\alpha\beta} = 0\,.$$

Ainsi, les $g_{\alpha\beta}$ sont indépendants de la variable $x^0$.

Dans la suite, nous n'introduirons que des systèmes de coordonnées locales adaptés. En effectuant la décomposition en carrés de la forme quadratique fondamentale

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

à partir de la variable directrice $dx^0$, nous obtenons

$$ds^2 = \frac{1}{g_{00}} (g_{0\alpha} dx^\alpha)^2 + d\hat{s}^2 \tag{8.2}$$

où

$$d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij} dx^i dx^j \equiv \left(g_{ij} - \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}}\right) dx^i dx^j \tag{8.3}$$

est indépendante de $x^0$ et définit sur $\mathfrak{D}_3$ une métrique riemannienne définie négative.

### 9. Mouvement permanent d'un fluide parfait chargé

Considérons un fluide parfait chargé et conducteur en mouvement dans un domaine $\mathfrak{D}_4$. Le mouvement de ce fluide est dit *permanent* si l'espace-temps riemannien associé $\mathfrak{V}_4$ est stationnaire dans le domaine $\mathfrak{D}_4$ et si le groupe d'isométries laisse invariants le vecteur vitesse unitaire $u^\alpha$, la pression $p$, la température $\vartheta$, la densité de charge électrique $\delta$, le vecteur courant de chaleur $q_\alpha$ et le champ électromagnétique induit $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$.

$$X g_{\alpha\beta} = X H_{\alpha\beta} = X G_{\alpha\beta} = X u^\alpha = X\vartheta = X q_\alpha = X p = X\delta = 0.$$

Les quantités $g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta}, u^\alpha, \vartheta, q^\alpha, p, \delta$ restent donc constantes le long des trajectoires d'isométries ou lignes de temps. Dans un système de coordonnées adapté, les égalités précédentes deviennent

$$\partial_0 g_{\alpha\beta} = \partial_0 H_{\alpha\beta} = \partial_0 G_{\alpha\beta} = \partial_0 u^\alpha = \partial_0 \vartheta = \partial_0 q_\alpha = \partial_0 p = \partial_0 \delta = 0;$$

les $g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, G_{\alpha\beta}, u^\alpha, \vartheta, q_\alpha, p, \delta$ ne dépendent pas de la variable $x^0$

Considérons un mouvement du fluide envisagé tel que

a) l'espace-temps riemannien associé $\mathfrak{V}_4$ soit stationnaire dans $\mathfrak{D}_4$,

b) le groupe d'isométries laisse invariants $H_{\alpha\beta}, \vartheta, c, l, \varkappa, \varepsilon, \mu, \sigma$.

Nous allons montrer que s'il en est ainsi, le mouvement du fluide est permanent. Or les hypothèses $a$ et $b$ se traduisent en coordonnées adaptées par les conditions*

$$\partial_0 g_{\alpha\beta} = \partial_0 H_{\alpha\beta} = \partial_0 \vartheta = \partial_0 \varkappa = \partial_0 c = \partial_0 l = \partial_0 \varepsilon = \partial_0 \mu = \partial_0 \sigma = 0.$$

Il nous suffit de montrer que $\partial_0 G_{\alpha\beta} = \partial_0 u^\alpha = \partial_0 q_\alpha = \partial_0 p = \partial_0 \delta = 0$.

Soit $x$ un point arbitraire de $\mathfrak{D}_4$. Choisissons un système de coordonnées adapté $(x^0, x^i)$ tel que le point $x$ appartienne à la variété $\mathfrak{S}$ d'équation $x^0 = 0$. Supposons que la variété $\mathfrak{S}$ soit orientée dans l'espace et qu'elle ne soit pas une variété exceptionnelle du problème de Cauchy relatif aux équations du champ correspondant au fluide considéré. Nous savons alors (*cf.* § 3) que pour un

* Dans un mémoire antérieur «Sur une théorie relativiste des fluides thermodynamiques» [Ann. di Math. pura ed applicata, ser. IV **38** (1955)], nous avons étudié les mouvements permanents d'un fluide thermodynamique pur en supposant en plus des conditions $\partial_0 g_{\alpha\beta} = \partial_0 \vartheta = 0$ l'hypothèse

$$\partial_0 q^0 = c\varrho u^0 \partial_0 \vartheta - \frac{l}{\varrho} u^0 \partial_0 \varrho.$$

En fait, cette dernière hypothèse est une conséquence de $\partial_0 \vartheta = 0$. Les conditions $X g_{\alpha\beta} = X\vartheta = 0$ suffisent pour assurer que le mouvement du fluide thermodynamique est permanent.

système de données de Cauchy $\mathscr{C}(g_{\alpha\beta}, \partial_0 g_{\alpha\beta}; H_{\alpha\beta}; \vartheta, \partial_0 \vartheta)$ portées par $\mathfrak{S}$ et satisfaisant à

$$\text{(I)} \qquad Q^0{}_\alpha = 0, \quad P^0 = 0, \quad \mathscr{E}^0 = 0$$

le système des équations du champ admet une solution $\mathscr{H}(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, \vartheta, u^\alpha, p, \delta)$ bien déterminée. De plus les équations (I) qui sont vérifiées sur $S$ sont également vérifiées dans tout le domaine d'espace-temps $\mathfrak{D}_4$ considéré.

Considérons maintenant la variété $\mathfrak{S}'$ d'équation

$$x^0 = h$$

qui correspond point par point à la variété $\mathfrak{S}$ dans l'homéomorphisme qui applique $\mathfrak{D}_4$ sur le produit topologique $\mathfrak{D}_3 \times \mathfrak{R}$ dans lequel les lignes de temps $z$ s'appliquent sur les lignes facteurs. En vertu de l'hypothèse a) et b), la solution $\mathscr{H}(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, \vartheta, u^\alpha, p, \delta)$ est telle qu'aux points $z$ de mêmes coordonnées locales $(x^i)$ de $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, les quantités $\mathscr{C}(g_{\alpha\beta}, \partial_0 g_{\alpha\beta}; H_{\alpha\beta}; \vartheta, \partial_0 \vartheta)$ ont des valeurs égales. Pour la solution $\mathscr{H}$, ces quantités vérifient des équations (I') identiques à (I). Si donc on se pose le problème de Cauchy avec les données $\mathscr{C}$ précédentes portées par $\mathfrak{S}'$, on doit calculer d'abord les quantités $u^\alpha, p, \delta$, à partir des équations (I'), puis intégrer les équations du champ. Comme toutes les équations sont identiques et que les données sont identiques, on obtient une solution $\mathscr{H}'$ identique à la solution $\mathscr{H}$. Autrement dit, aux points de mêmes coordonnées locales $x^i$ les quantités $(g_{\alpha\beta}, H_{\alpha\beta}, \vartheta, u^\alpha, p, \delta)$ ont mêmes valeurs ainsi que leurs dérivées: elles sont donc invariantes le long des lignes de temps.

Il en résulte que les hypothèses a) et b) entraînent

$$\partial_0 u^\alpha = \partial_0 p = \partial_0 \delta = 0$$

et en vertu des équations de définition de $G_{\alpha\beta}$ et $q_\alpha$

$$\partial_0 G_{\alpha\beta} = \partial_0 q_\alpha = 0.$$

Par conséquent

$$X g_{\alpha\beta} = X H_{\alpha\beta} = X G_{\alpha\beta} = X u_\alpha = X\vartheta = X q_\alpha = X p = X\delta = 0.$$

Le mouvement considéré du fluide est donc permanent. On peut énoncer le théorème:

**Théorème.** *Etant donné dans un domaine $\mathfrak{D}_4$ un fluide parfait chargé et conducteur, pour que le mouvement de ce fluide soit permanent, il faut et il suffit que*

a) *l'espace-temps riemannien associé $\mathfrak{V}_4$ soit stationnaire dans $\mathfrak{D}_4$,*

b) *le groupe d'isométries laisse invariants les champs $\vartheta$ et $H_{\alpha\beta}$ et les coefficients $c, l, \varkappa, \varepsilon, \mu, \sigma$.*

Remarque. — S'il existe pour le champ électromagnétique un potentiel vecteur global c'est-à-dire un champ de vecteur $\varphi_\alpha$ tel que

$$H_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha$$

ce qui est en particulier le cas si le domaine $\mathfrak{D}_4$ est simplement connexe, on remplacera l'hypothèse concernant le champ $H_{\alpha\beta}$ par l'hypothèse équivalente concernant le potentiel vecteur: on supposera $\varphi_\alpha$ invariant par le groupe d'isométries.

## 10. Isométrie induite dans $\overline{\mathfrak{V}}_4$

Nous considérerons dans la suite un domaine simplement connexe $\mathfrak{D}_4$ occupé par un milieu chargé et conducteur. Nous supposerons plus généralement que le mouvement de ce milieu soit tel que l'espace-temps riemannien associé $\mathfrak{V}_4$ est stationnaire dans $\mathfrak{D}_4$ et que le groupe d'isométries laisse invariants le vecteur vitesse unitaire $\vec{u}$ et l'indice $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ du milieu

$$X g_{\alpha\beta} = X u_\alpha = X n = 0. \tag{10.1}$$

Il en est ainsi en particulier si le milieu considéré est un fluide parfait chargé en mouvement permanent.

D'après (10.1), les quantités

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_\alpha u_\beta$$

sont invariantes par le groupe d'isométries de $\mathfrak{V}_4$. Il en résulte que le champ de vecteur contravariant $\vec{\xi}$ générateur du groupe d'isométries de $\mathfrak{V}_4$ détermine dans la variété riemannienne $\overline{\mathfrak{V}}_4$ définie par la variété différentiable portant $\mathfrak{D}_4$ et munie de la métrique associée

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

un groupe connexe d'isométries globales ne laissant invariant aucun point du domaine $\overline{\mathfrak{D}}_4$ correspondant, et pour lequel le système de coordonnées $(x^0, x^i)$ est un système de coordonnées locales adapté. On peut prendre pour générateur infinitésimal de ce groupe le vecteur $\vec{\zeta}$ qui a pour composantes contravariantes

$$\zeta^0 = \xi^0 = 1, \quad \zeta^i = \xi^i = 0.$$

Il est manifeste que le carré de ce vecteur a pour valeur

$$(\vec{\zeta})^2 = \bar{g}_{00} = g_{00} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)(u_0)^2. \tag{10.2}$$

Introduisons maintenant la grandeur d'espace du vecteur $\vec{u}$ relativement à la direction de temps $\vec{\xi}$. Soit

$$-w^2 = \hat{g}_{ij} u^i u^j.$$

En vertu du caractère unitaire de $\vec{u}$, on a

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \equiv \frac{1}{g_{00}} (g_{0\alpha} u^\alpha)^2 + \hat{g}_{ij} u^i u^j = 1.$$

On en déduit

$$(u_0)^2 = g_{00}(1 + w^2).$$

En portant cette valeur dans (10.2) et en y remplaçant $\frac{1}{n^2}$ par $V^2$, il vient

$$(\vec{\zeta})^2 = \bar{g}_{00} = g_{00}(V^2 w^2 + V^2 - w^2).$$

On voit que le signe de $(\vec{\zeta})^2$ peut changer. Dans $\overline{\mathfrak{V}}_4$, le vecteur $\vec{\zeta}$ peut être orienté dans le temps, dans l'espace ou être isotrope. Il en est de même des trajectoires d'isométries de $\overline{\mathfrak{V}}_4$.

# IV. Étude géométrique des rayons électromagnétiques dans l'espace

## 11. Un problème du calcul des variations

Nous nous proposons d'interpréter géométriquement les rayons électromagnétiques dans l'espace à trois dimensions. A cet effet, nous commençons par rappeler brièvement un problème du calcul des variations.

Etant donnée une variété différentiable $\mathfrak{V}_{n+1}$, soit $\mathfrak{W}_{2(n+1)}$ l'espace fibré des vecteurs tangents aux différents points de $\mathfrak{V}_{n+1}$. Si l'on adopte sur $\mathfrak{V}_{n+1}$ des coordonnées locales $(x^\alpha)$, chaque élément de $\mathfrak{W}_{2(n+1)}$ sera constitué par la réunion des coordonnées $(x^\alpha)$ du point $x$ correspondant de $\mathfrak{V}_{n+1}$ et des $n+1$ composantes $(\dot{x}^\beta)$ du vecteur $\dot{x}$ dans le repère naturel en $x$ associé aux $(x^\alpha)$. Une structure de variété finslérienne sur $\mathfrak{V}_{n+1}$ est définie par la donnée d'une fonction $\mathscr{L}(x, \dot{x})$ à valeurs scalaires dans $\mathfrak{W}_{2(n+1)}$ telle que pour $x$ fixe, $\mathscr{L}(x, \lambda\dot{x}) = \lambda\mathscr{L}(x, \dot{x})$. En coordonnées locales, une telle fonction est représentée par $\mathscr{L}(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$ et est homogène et du premier degré par rapport aux $\dot{x}^\beta$.

Considérons une variété différentiable $\mathfrak{V}_{n+1}$ munie d'une structure de variété finslérienne et supposons qu'elle admette un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales, de générateur infinitésimal $\vec{\xi}$, ne laissant invariant aucun point de $\mathfrak{V}_{n+1}$ $(\vec{\xi} \neq 0)$. Supposons de plus que les trajectoires $z$ du groupe sont homéomorphes à la droite réelle $\mathfrak{R}$, et soit $\mathfrak{V}_n$ la variété de $\mathfrak{V}_{n+1}$ par la relation d'équivalence définie par le groupe. On sait qu'il existe des systèmes de coordonnées locales $(x^0, x^i)$ adaptés au groupe d'isométries, tels que dans le repère naturel associé, $\vec{\xi}$ ait pour composantes contravariantes

$$\xi^0 = 1, \quad \xi^i = 0$$

et que les $(x^i)$ soient un système de coordonnées locales arbitraire de $\mathfrak{V}_n$. La donnée des $(x^i)$ détermine une trajectoire $z$. Pour déterminer un point sur cette trajectoire, on se donne la variété $x^0 = \text{const}$ à laquelle il appartient.

Dans un système de coordonnées adapté $(x^0, x^i)$, l'hypothèse d'isométrie se traduit par le fait que la fonction $\mathscr{L}$ est localement indépendante de la variable $x^0$:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(x^i, \dot{x}^j, \dot{x}^0).$$

Nous allons montrer qu'il est possible de douer la variété quotient $\mathfrak{V}_n$ de structure de variété finslérienne au moyen de fonctions $L(z, \dot{z})$ de façon qu'aux géodésiques de $\mathfrak{V}_{n+1}$ extrêmales de l'intégrale

$$\text{(11.1)} \qquad \int_{x_0}^{x_1} \mathscr{L}(x, \dot{x})\, du, \qquad \dot{x} = \frac{dx}{du}$$

correspondent par projection sur $\mathfrak{V}_n$ des extrêmales de

$$\text{(11.2)} \qquad \int_{z_0}^{z_1} L(z, \dot{z})\, du, \qquad \dot{z} = \frac{dz}{du}.$$

Dans la suite, tout indice grec $= 0, 1, 2, \ldots, n$; tout indice latin $= 1, 2, \ldots, n$ et nous supposons

$$\partial_{\dot{0}\dot{0}}\mathscr{L} \neq 0, \qquad \partial_{\dot{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha}.$$

Donnons nous une extrêmale de (11.1) par une représentation paramétrique $x^\alpha(u)$, $u$ désignant un paramètre arbitraire. Le système différentiel aux extrêmales de (11.1)

$$\frac{dx^\alpha}{du} = \dot{x}^\alpha \tag{11.3}$$

où $\dot{x}^\alpha$ satisfait à

$$\frac{d}{du}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{11.4}$$

est caractérisé par le fait d'admettre l'invariant intégral relatif

$$\omega = \sum_\alpha \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} d x^\alpha = \partial_{\dot{k}} \mathscr{L} \, d x^k + \partial_{\dot{0}} \mathscr{L} \, d x^0. \tag{11.5}$$

En vertu de l'hypothèse $\partial_0 \mathscr{L} = 0$, on a l'intégrale première

$$\partial_{\dot{0}} \mathscr{L} = h. \tag{11.6}$$

Comme $\partial_{\dot{0}\dot{0}} \mathscr{L} \neq 0$, on peut résoudre (11.6) par rapport à $\dot{x}^0$; on a l'équation équivalente

$$\dot{x}^0 = \varphi(x^k, \dot{x}^l, h) \tag{11.7}$$

où $\varphi$ est une fonction homogène et de degré 1 par rapport aux $\dot{x}^l$ et $\varphi$ dépend effectivement de $h$.

Considérons la famille des extrêmales $(\mathfrak{E}_h)$ correspondant à une valeur déterminée de la constante $h$. Pour cette famille, le dernier terme de $\omega$ a la valeur $h\,dx^0$ et définit un invariant intégral relatif. Il en résulte que cette famille d'extrêmales admet l'invariant intégral relatif

$$\partial_{\dot{k}} \mathscr{L} \, d x^k. \tag{11.8}$$

Or, d'après l'homogénéité de $\mathscr{L}$, on a

$$\dot{x}^k \partial_{\dot{k}} \mathscr{L} + \dot{x}^0 \partial_{\dot{0}} \mathscr{L} = \mathscr{L}.$$

Par suite, pour toute solution (11.6) ou (11.7), la quantité $\dot{x}^k \partial_{\dot{k}} \mathscr{L}$ peut s'exprimer par une fonction $L$ des variables $x^k$, $\dot{x}^l$, $h$

$$L(x^k, \dot{x}^l, h) = \mathscr{L}[x^k, \dot{x}^l, \varphi(x^k, \dot{x}^l, h)] - h\,\varphi(x^k, \dot{x}^l, h) \tag{11.9}$$

et l'on a

$$\partial_{\dot{k}} L = \partial_{\dot{k}} \mathscr{L} + \partial_{\dot{0}} \mathscr{L} \, \partial_{\dot{k}} \varphi - h \, \partial_{\dot{k}} \varphi = \partial_{\dot{k}} \mathscr{L}.$$

Ainsi, d'après (11.8), les projections des $(\mathfrak{E}_h)$ sur $\mathfrak{V}_n$ sont définies par un système différéntiel qui admet l'invariant intégral relatif

$$\pi = \partial_{\dot{k}} L \, d x^k.$$

Autrement dit, elles sont extrêmales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} L(x^k, \dot{x}^l, h) \, du \tag{11.10}$$

où $h$ a la valeur choisie.

On appelle descente la correspondance qui à la fonction $\mathscr{L}(x^k, \dot{x}^l, \dot{x}^0)$ fait correspondre la fonction $L(x^k, \dot{x}^l, h)$. Le problème inverse est possible*.

* Voir Lichnerowicz, A.: Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Livre II, chap. I.

## 12. Projection des géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\overline{\mathfrak{V}}_4$

Nous supposons que la variété riemannienne $\overline{\mathfrak{V}}_4$ satisfasse aux hypothèses du paragraphe 10. La fonction $\mathscr{L}$ est définie par la relation

$$\mathscr{L}^2 = \bar{g}_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta \tag{12.1}$$

où le second membre est une forme quadratique non dégénérée puisque $\bar{g} = \det(\bar{g}_{\alpha\beta}) \neq 0$. Etudions d'abord les extrêmales correspondant aux valeurs de $\dot{x}^\alpha$ pour lesquelles le second membre est positif. On sait d'ailleurs qu'il suffit qu'une géodésique le rende positif en un point pour qu'il en soit de même tout le long de la géodésique.

**Premier cas:** $\bar{g}_{00}$ *ne s'annule pas dans le domaine étudié.* — Le procédé de descente nous conduit à former l'équation

$$\tfrac{1}{2}\partial_{\dot{0}}\mathscr{L}^2 = \bar{g}_{00}\dot{x}^0 + \bar{g}_{0i}\dot{x}^i = h\mathscr{L} \tag{12.2}$$

et à éliminer $\dot{x}^0$ entre cette équation et

$$L = \mathscr{L} - h\dot{x}^0. \tag{12.3}$$

En décomposant $\mathscr{L}^2$ en carrés à partir de la variable directrice $\dot{x}^0$, il vient

$$\mathscr{L}^2 = \frac{1}{\bar{g}_{00}}\left(\frac{1}{2}\partial_{\dot{0}}\mathscr{L}^2\right)^2 + \hat{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$$

où l'on pose

$$\hat{\bar{g}}_{ij} = \bar{g}_{ij} - \frac{\bar{g}_{0i}\bar{g}_{0j}}{\bar{g}_{00}}$$

et l'on voit que $\hat{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$ est négative si $\bar{g}_{00} > 0$ et positive si $\bar{g}_{00} < 0$. Dans le premier cas on prendra $h > \max \bar{g}_{00}$. Comme $\frac{1}{2}\partial_{\dot{0}}\mathscr{L}^2 = h\mathscr{L}$, on tire l'équation

$$\mathscr{L} = \sqrt{\frac{\hat{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{1 - \dfrac{h^2}{\bar{g}_{00}}}} \tag{12.4}$$

qui fournit $\mathscr{L}$ en fonction des variables $x^k, \dot{x}^l, h$. De (12.2) on tire ensuite

$$\dot{x}^0 = \frac{h}{\bar{g}_{00}}\mathscr{L} - \frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{\bar{g}_{00}}. \tag{12.5}$$

On en déduit d'après (12.3) et en vertu de (12.4)

$$L = \varepsilon\sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right)\hat{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} + h\frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \tag{12.6}$$

où $\varepsilon$ est le signe de $\bar{g}_{00}$.

$L$ est bien une fonction de $x^k$, $\dot{x}^l$, $h$ homogène et du premier degré par rapport aux $\dot{x}^l$. Elle définit sur la variété quotient $\overline{\mathfrak{V}}_3$ une structure de variété finslérienne. Inversement, étant donnée localement dans $\overline{\mathfrak{V}}_3$ la fonction $L(x^k, \dot{x}^l, h)$ précédente, on démontre facilement qu'il existe une fonction $\mathscr{L}(x^k, \dot{x}^l, \dot{x}^0)$ homogène et de degré 1 par rapport aux $\dot{x}^\alpha$, qui par descente reconduit à $L$ et que cette fonction est

$$\mathscr{L} = \sqrt{\bar{g}_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta}.$$

Les courbes extrêmales correspondantes sont donc des géodésiques de $\overline{\mathfrak{V}}_4$.

Ainsi, les géodésiques de la variété riemannienne $\overline{\mathfrak{V}}_4$ qui correspondent à l'intégrale première

$$\partial_{\dot{0}} \mathscr{L} = h$$

se projettent sur la variété quotient $\overline{\mathfrak{V}}_3$ selon les extrêmales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \left[ -\varepsilon \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right) \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} + h \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right] du \tag{12.7}$$

où $h$ a la même valeur. Ces extrêmales coïncident avec celles de

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{\varepsilon}{h} \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right) \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}}\, du. \tag{12.8}$$

Le long de ces extrêmales, on a d'après l'expression de $\dot{x}^0$:

$$d \dot{x}^0 = \frac{h}{\bar{g}_{00}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}} \hat{\bar{g}}_{ij}\, d x^i\, d x^j} - \frac{\bar{g}_{0i}\, d x^i}{\bar{g}_{00}}. \tag{12.9}$$

Ceci étant, on peut définir les géodésiques de longueur nulle de $\overline{\mathfrak{V}}_4$ comme les courbes limites vers lesquelles tendent les géodésiques orientées dans le temps lorsque $\mathscr{L} \to 0$. De la relation

$$h \mathscr{L} = \bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$$

il résulte que $h \to \infty$ lorsque $\mathscr{L} \to 0$ et $h$ a le signe de $g_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$. Or

$$\mathscr{L}^2 \equiv \frac{1}{\bar{g}_{00}} (\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha)^2 + \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 0.$$

On en déduit que $\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$ a une valeur non nulle et garde un signe constant.

D'après (12.8), les projections des géodésiques de longueur nulle de $\overline{\mathfrak{V}}_4$ sur $\overline{\mathfrak{V}}_3$ sont les extrêmales de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} \left[ \lim_{h \to \infty} \left( \frac{\varepsilon}{h} \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{\bar{g}_{00}}\right) \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) \right] du.$$

En passant à la limite, on en déduit le résultat suivant:

**Lemme 1.** *Les géodésiques de longueur nulle de $\overline{\mathfrak{V}}_4$ se projettent sur $\overline{\mathfrak{V}}_3$ selon les extrêmales de l'intégrale*

$$\int_{z_0}^{z_1} \left( \varepsilon \varepsilon' \sqrt{- \frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i} \dot{x}^i}{\bar{g}_{00}} \right) du \tag{12.10}$$

*où $\varepsilon$ est le signe de $\bar{g}_{00}$ et $\varepsilon'$ le signe de $\bar{g}_{0\alpha} \dot{x}^\alpha$.*

D'après (12.9), *le long de ces extrêmales on a*

$$d x^0 = \varepsilon \varepsilon' \sqrt{- \frac{1}{\bar{g}_{00}} \hat{\bar{g}}_{ij}\, d \dot{x}^i\, d x^j} - \frac{\bar{g}_{0i}\, d x^i}{\bar{g}_{00}}. \tag{12.11}$$

On remarquera que $d x^0 = L\, du$.

**Second cas:** $\bar{g}_{00}=0$. — On a alors

$$\mathscr{L}^2 = 2\bar{g}_{0i}\dot{x}^0\dot{x}^i + \bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j. \tag{12.12}$$

Nous supposerons $\bar{g}_{0i}\dot{x}^i$ fini $\neq 0$. Le procédé de descente nous conduit à éliminer $\mathscr{L}$ et $\dot{x}^0$ entre (12.12) et

$$\bar{g}_{0i}\dot{x}^i = h\mathscr{L}, \tag{12.13}$$

$$L = \mathscr{L} - h\dot{x}^0. \tag{12.14}$$

De (12.13) on tire

$$\mathscr{L} = \frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{h}.$$

En reportant dans (12.12), il vient

$$\frac{(\bar{g}_{0i}\dot{x}^i)^2}{h^2} = 2\bar{g}_{0i}\dot{x}^0\dot{x}^i + \bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j.$$

On en déduit

$$\dot{x}^0 = \frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{2h} - \frac{\bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}.$$

L'équation (12.14) détermine alors $L$

$$L = \frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{2h} + h\frac{\bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}. \tag{12.15}$$

Inversement, à toute fonction $L$ de la forme précédente correspond par montée la fonction $\mathscr{L}$ définie par (12.12). On note que $L$ se présente par rapport aux variables $\dot{x}^i$ comme le quotient d'une forme quadratique par une forme linéaire.

Ainsi, dans le cas $\bar{g}_{00}=0$, les projections des géodésiques de $\mathfrak{V}_4$ sur $\mathfrak{V}_3$ sont les courbes extrêmales de

$$\int_{z_0}^{z_1}\left(\frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{2h} + h\frac{\bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}\right)du$$

pour la valeur correspondante de la constante $h$. Ces extrêmales coïncident avec celles de

$$\int_{z_0}^{z_1}\left(-\frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{2h^2} - \frac{\bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}\right)du.$$

Comme précédemment, les projections des géodésiques de longueur nulle sont définies par

$$\int_{z_0}^{z_1}\lim_{h\to\infty}\left(-\frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{2h^2} - \frac{\bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}\right)du.$$

On en déduit en passant à la limite, le lemme

**Lemme 2.** *Dans tout domaine de $\mathfrak{V}_4$ où $\bar{g}_{00}=0$, les géodésiques de longueur nulle de $\mathfrak{V}_4$ se projettent sur $\mathfrak{V}_3$ selon les extrémales de l'intégrale*

$$\int_{z_0}^{z_1} -\frac{\bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}\,du. \tag{12.16}$$

*Le long de ces extrémales on a*

$$dx^0 = -\frac{\bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}\,du.$$

## 13. Le principe de FERMAT

Nous avons établi que les rayons électromagnétiques sont géodésiques de longueur nulle de la variété riemannienne $\mathfrak{V}_4$. Nous pouvons les interpréter géométriquement dans l'espace si le milieu considéré est en mouvement permanent. En effet les lemmes 1 et 2 fournissent une démonstration immédiate du théorème suivant:

**Théorème.** *Si le mouvement du milieu considéré est permanent et tel que*

$$\bar{g}_{00} = g_{00}(V^2w^2 + V^2 - w^2) \neq 0,$$

*les rayons électromagnétiques dans l'espace sont des lignes réalisant l'extrêmum de l'intégrale*

$$\int_{z_0}^{z_1}\left(\varepsilon\varepsilon'\sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}}\,\bar{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{\bar{g}_{00}}\right)du \tag{13.1}$$

*pour des variations à extrémités fixes, où $\varepsilon$ est le signe de $\bar{g}_{00}$ et $\varepsilon'$ le signe de $\bar{g}_{0\alpha}\dot{x}^\alpha$. Le temps mis par un rayon pour aller du point $z_0$ au point $z_1$ est donné par*

$$\int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int_{z_0}^{z_1}\left(\varepsilon\varepsilon'\sqrt{-\frac{1}{\bar{g}_{00}}\,\bar{\bar{g}}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} - \frac{\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}{\bar{g}_{00}}\right)du. \tag{13.2}$$

*Ce temps est extrêmum.*

Dans le cas où $\bar{g}_{00}=0$, on obtient un énoncé analogue en remplaçant (13.1) et (13.2) respectivement par

$$\int_{z_0}^{z_1} -\frac{\bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}\,du \tag{13.3}$$

et

$$\int_{z_0}^{z_1} dx^0 = \int -\frac{\bar{g}_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\bar{g}_{0i}\dot{x}^i}\,du. \tag{13.4}$$

Par le théorème précédent se trouve démontrée l'équivalence du principe géodésique et du principe du moindre temps.

En particulier, si l'univers est *statique* au sens de LEVI-CIVITA, c'est-à-dire si les lignes de courant coïncident avec les lignes de temps, l'espace-temps $\mathfrak{V}_4$ est orthogonal. Soit

$$ds^2 = U(dx^0)^2 + g_{ij}\,dx^i\,dx^j$$

la métrique d'univers de $\mathfrak{V}_4$. Les $u^i$ étant nuls, on en déduit la métrique associée

$$d\bar{s}^2 = \frac{U}{n^2}(d x^0)^2 + g_{ij}\, d x^i d x^j.$$

On peut mettre (13.2) sous la forme

$$\int_{z_0}^{z_1} d x^0 = \int_{z_0}^{z_1} \frac{n}{\sqrt{U}}\, d\sigma \tag{13.5}$$

où l'on a posé

$$d\sigma^2 = -\, g_{ij}\, d x^i d x^j.$$

Cette intégrale rappelle une intégrale qui se présente dans l'étude des fluides holonomes. Or $U$ est le potentiel principal de gravitation. Le champ gravitationnel agirait si l'on ose dire, comme une espèce de pression sur les rayons électromagnétiques.

Si $U = 1$, on démontre que l'espace-temps $\mathfrak{V}_4$ est euclidien. L'énoncé du théorème devient

$$\delta \int_{z_0}^{1} d x^0 = \delta \int n\, d\sigma = 0.$$

Nous retrouvons l'énoncé exact du principe de FERMAT en optique. Le théorème que nous avons établi, en constitue donc l'énoncé généralisé en Relativité générale.

## 14. Interprétation du signe de $\bar{g}_{0\alpha}\, \dot{x}^\alpha$

Nous avons interprété $\dot{x}^0$ comme la variable temps. L'interprétation du signe $\varepsilon'$ de $\bar{g}_{0\alpha}\dot{x}^\alpha$ est simple. En effet, l'équation

$$\mathscr{L}^2 d u^2 = \frac{1}{\bar{g}_{00}}(\bar{g}_{0\alpha}\, d x^\alpha)^2 + \hat{\bar{g}}_{ij}\, d x^i d x^j = 0 \tag{$\bar{C}_x$}$$

représente le cône caractéristique $\bar{\mathfrak{C}}_x$ au point $x$ des équations de MAXWELL. Les deux nappes de ce cône sont symétriques par rapport à l'hyperplan élémentaire

$$\bar{g}_{0\alpha}\, d x^\alpha = 0. \tag{$\pi_x$}$$

Désignons par $M(x^\alpha)$ le sommet de ce cône $\bar{\mathfrak{C}}_x$. Prenons un couple de points voisins de $M$, ayant pour coordonnées spatiales $(x^i + d x^i)$ et appartenant respectivement aux deux nappes du cône et symétriques par rapport à $\pi_x$. Soient

$$M_1(x^i + d x^i,\ x^0 + d x^0), \qquad M_1'(x^i + d x^i,\ x^0 - d' x^0).$$

On peut dire que $M M_1$ représente aux infiniment petits d'ordre supérieur près, le déplacement infinitésimal associé à un rayon électromagnétique allant du point d'espace $A(x^i)$ au point d'espace $A'(x^i + d x^i)$ dans le temps $d x^0$. De même, $M M_1'$ peut être considéré comme représentant le déplacement infinitésimal associé à un rayon électromagnétique allant du point $A'(x^i + d x^i)$ au point $A(x^i)$ dans le temps $d' x^0$.

Les deux points $M_1$ et $M_1'$ sont symétriques par rapport à l'hyperplan élémentaire $\pi_x$, on doit avoir

$$\bar{g}_{0\alpha}\, d x^\alpha = -\, \bar{g}_{0\alpha}\, d' x^\alpha.$$

On en déduit

$$d'x^0 = dx^0 + 2\frac{\bar{g}_{0i}\,dx^i}{\bar{g}_{00}}.$$

Cette relation montre que, sauf dans le cas statique, le temps mis par un rayon pour aller du point d'espace $A\,(x^i)$ au point d'espace $A'(x^i+dx^i)$ n'est pas le même que le temps mis par un autre rayon pour aller de $A'(x^i+dx^i)$ à $A\,(x^i)$.

## 15. Espace-temps de Minkowski et loi relativiste de la composition des vitesses

Plaçons-nous dans le cas d'un espace-temps sans gravitation de Minkowski, rapporté à un système de coordonnées galiléennes réduites. Nous avons la métrique d'univers

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \tag{15.1}$$

$\vec{u}$ représente dans le cas actuel le vecteur vitesse unitaire d'univers dont les composantes sont déterminées classiquement à partir de la vitesse d'espace $\vec{\beta}$ si la vitesse limite $c$ est prise comme unité.

Un calcul facile donne la métrique associée

$$d\bar{s}^2 = \frac{V^2-\beta^2}{1-\beta^2}(dx^0)^2 + 2\frac{1-V^2}{1-\beta^2}\beta_i\,dx^0\,dx^i - \sum_i (dx^i)^2 - \frac{1-V^2}{1-\beta^2}(\beta_i\,dx^i)^2. \tag{15.2}$$

Cette métrique est du type hyperbolique normal comme la métrique d'univers (15.1). Il est cependant intéressant de noter un changement de l'ordre dans la signature de cette métrique au passage de $V^2=\beta^2$. On le met facilement en évidence en choisissant l'axe des $x^1$ parallèle à la vitesse $\vec{\beta}$ du milieu. On a ainsi la métrique

$$d\bar{s}^2 = \frac{V^2-\beta^2}{1-\beta^2}(dx^0)^2 + 2\frac{(1-V^2)\beta}{1-\beta^2}dx^0\,dx^1 - \frac{1-V^2\beta^2}{1-\beta^2}(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{15.3}$$

que l'on peut mettre sous la forme canonique par une décomposition en carrés. Si $V^2 \neq \beta^2$ on obtient

$$d\bar{s}^2 = \frac{1-\beta^2}{V^2-\beta^2}\left[\frac{V^2-\beta^2}{1-\beta^2}dx^0 + \frac{(1-V^2)\beta}{1-\beta^2}dx^1\right]^2 - \frac{(1-\beta^2)V^2}{V^2-\beta^2}(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

et l'on voit que pour $V^2 > \beta^2$ cette métrique a pour signature « $+---$ » et pour $V^2 < \beta^2$ elle a pour signature « $-+--$ ». Pour $V^2=\beta^2$, on obtient

$$d\bar{s}^2 = 2V\,dx^0\,dx^1 - (1+V^2)(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

On vérifie également que cette métrique a pour signature « $+---$ » en la mettant sous la forme

$$d\bar{s}^2 = \frac{V^2}{(1+V^2)}(dx^0)^2 - \frac{1}{1+V^2}[(1+V^2)\,dx^1 + V\,dx^0]^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

A partir de la métrique associée (15.2), cherchons à exprimer le théorème de Fermat en prenant l'arc $\sigma$ du rayon électromagnétique comme paramètre. Nous avons à remplacer dans (13.2) $\dot{x}^\alpha$ par

$$\lambda^i = \frac{dx^i}{d\sigma}$$

où $d\sigma^2 = -\sum (d x^i)^2$. Il vient

(15.4) $$\int_{z_0}^{z_1} d x^0 = \int_{z_0}^{z_1} \left\{ \varepsilon \varepsilon' \sqrt{\frac{(1-\beta^2)}{(V^2-\beta^2)} \left[V^2 - \beta^2 + (1 - V^2)(\beta_i \lambda^i)^2\right]} - \frac{(1-V^2)(\beta_i \lambda^i)}{V^2-\beta^2} \right\} d\sigma$$

et l'on peut en déduire

$$\frac{d x^0}{d\sigma} = \frac{1}{W} = \varepsilon \varepsilon' \sqrt{\frac{(1-\beta^2)}{(V^2-\beta^2)} \left[V^2 - \beta^2 + (1 - V^2)(\beta_i \lambda^i)^2\right]} - \frac{(1-V^2)(\beta_i \lambda^i)}{V^2-\beta^2}.$$

Si $V^2 - \beta^2 \neq 0$, cette relation donne

(15.5) $$1 - \beta^2 - (1-\beta^2) W^2 - (1 - V^2)(1 - W \beta_i \lambda^i)^2 = 0.$$

Si on interprète $\vec{V}$ comme vitesse absolue et $\vec{W}$ comme vitesse relative de propagation de l'onde électromagnétique considérée, on a manifestement

(15.6) $$\vec{V}^2 = \frac{1}{(1+\vec{W}\cdot\vec{\beta})^2} \left[\vec{W}^2 + \vec{\beta}^2 + 2\vec{W}\cdot\vec{\beta} + (\vec{W}\cdot\vec{\beta})^2 - \vec{W}^2\vec{\beta}^2\right].$$

On vérifie par un calcul direct à partir de (13.4) que cette relation reste valable dans le cas où $V^2 = \beta^2$. C'est la formule relativiste de la composition des vitesses. Il est aisé de vérifier qu'on peut la mettre sous la forme*

$$\vec{V} = \frac{1}{1+\vec{W}\cdot\vec{\beta}} \left[\left(1 + \frac{\vec{W}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}\right)\vec{\beta} + \sqrt{1-\beta^2}\left(\vec{W} - \frac{\vec{W}\cdot\vec{\beta}}{\beta^2}\vec{\beta}\right)\right].$$

Nous obtenons ainsi à partir du principe de FERMAT une démonstration de la loi relativiste de la composition des vitesses.

## Bibliographie


[1] BALAZS, NANDOR L.: The propagation of light rays in moving media. Jour. Optical Soc. Amer. **45**, No. 1 (1955).

[2] DARMOIS, G.: Les équations de la gravitation einsteinienne. Mémorial des Sc. Math. fasc. XXV (1927).

[3] Mme FOURES: Résolution du problème de Cauchy pour des équations hyperboliques du second ordre non linéaires. Bull. Soc. Math. France **81**, fasc. IV (1953).

[4] GORDON, W.: Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie. Ann. Physik **72**, 421–456 (1923).

[5] LICHNEROWICZ, A.: Sur les équations relativistes de l'Electromagnétisme. Ann. Ec. Norm. Sup. **60**, fasc. IV (1943).

[6] LICHNEROWICZ, A.: Eléments de calcul tensoriel. Armand Colin 1951.

[7] LICHNEROWICZ, A.: Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme. Masson 1955.

[8] PHAM MAU QUAN: Etude électromagnétique et thermodynamique d'un fluide relativiste chargé. Jour. Rational Mechanics and Analysis **5**, No. 3, 473–538 (1956).

[9] PHAM MAU QUAN: C. R. Ac. Sciences **242**, 465–467, 875–878 (1956).


5 rue Monticelli, Paris 14

*(Manuscrit reçu le 17 avril 1957)*

* Voir LICHNEROWICZ, A.: Eléments de calcul tensoriel, chap. VII, pp. 173–175.