Über ein System partieller Differentialgleichungen

ERWIN KREYSZIG

Vorgelegt von S. BERGMAN

1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird eine Klasse von Systemen partieller Differentialgleichungen

$$U_{x_\alpha x_\alpha} + U_{y_\alpha y_\alpha} + \varphi_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)\, U = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \tag{1.1}$$

untersucht. Hierbei sind φ_1 und φ_2 nicht identisch verschwindende analytische Funktionen der jeweiligen (zunächst als reell angenommenen) Variablen. Die genannte, nachstehend definierte Klasse besitzt die folgende bemerkenswerte Eigenschaft: Für jedes System (1.1) aus dieser Klasse existiert eine unendliche Menge unabhängiger Partikulärlösungen, deren jede gewöhnliche lineare Differentialgleichungen (mit algebraischen Koeffizienten) in jeder der vier in (1.1) vorkommenden Variablen befriedigt. Die Ordnung dieser Differentialgleichungen hängt nur von φ_1 bzw. φ_2 ab, ist also für jede der genannten Partikulärlösungen dieselbe. Die Menge dieser Lösungen bildet eine vollständige Approximationsbasis (vgl. Abschnitt 5). Auf diese Weise kann die Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen für die Untersuchung von Lösungen partieller Differentialgleichungen herangezogen werden.

2. Formale Vorbereitungen

Indem wir auch komplexe Werte der vier Variablen zulassen, können wir die Funktionen φ_1 und φ_2 analytisch ins Komplexe fortsetzen. Wir führen nun die Variablen

$$z_\alpha = x_\alpha + i\, y_\alpha, \qquad z_\alpha^* = x_\alpha - i\, y_\alpha, \qquad \alpha = 1, 2,$$

ein, die für komplexe Werte der ursprünglichen Variablen voneinander unabhängig sind. Unter Benutzung von

$$\frac{\partial}{\partial z_\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\,\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial z_\alpha^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\,\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \qquad \alpha = 1, 2,$$

geht (1.1) in

$$u_{z_1 z_1^*} + F_1(z_1, z_1^*)\, u = 0, \qquad u_{z_2 z_2^*} + F_2(z_2, z_2^*)\, u = 0 \tag{2.1}$$

über. Hierbei ist

$$u(z_1, z_1^*, z_2, z_2^*) = U\left(\frac{z_1 + z_1^*}{2}, \frac{z_1 - z_1^*}{2i}, \frac{z_2 + z_2^*}{2}, \frac{z_2 - z_2^*}{2i}\right)$$

und
$$F_\alpha(z_\alpha, z_\alpha^*) = \frac{1}{4}\varphi_\alpha\left(\frac{z_\alpha + z_\alpha^*}{2}, \frac{z_\alpha - z_\alpha^*}{2i}\right), \qquad \alpha = 1, 2.$$

Wir setzen fortan stets voraus, daß die Funktion $F_\alpha(z_\alpha, z_\alpha^*)$ in einem Gebiet $B_{z_\alpha} \times B_{z_\alpha^*}$ regulär ist, das den Nullpunkt $(z_\alpha, z_\alpha^*) = (0, 0)$ enthält.

Es sei angemerkt, daß (2.1) zwei Systemen von je zwei partiellen Differentialgleichungen für den Real- und den Imaginärteil der komplexen Lösung u äquivalent ist. Diese Gleichungen haben genau dann paarweise dieselbe Form, wenn die Funktionen F_α für reelle Argumentwerte reell sind.

Im folgenden können wir die zu betrachtenden Systeme in der Form (2.1) zugrunde legen.

3. Integraldarstellung der Lösungen durch Bergman-Operatoren

Es existieren beliebig viele Operatoren, die analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen in Lösungen partieller Differentialgleichungen von zwei Veränderlichen transformieren. Bergman-Operatoren [*1*]* besitzen die Eigenschaft, daß sich die Zuordnung der genannten Lösungen zu den analytischen Funktionen, die zunächst lokal gegeben ist, ins Große fortsetzen läßt. Außerdem übertragen sich eine Reihe grundlegender Eigenschaften der analytischen Funktionen auf die Lösungen. Deshalb kann man aus bekannten Ergebnissen der Funktionentheorie entsprechende Sätze über partielle Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten gewinnen. Bergman und Schiffer [*2*], [*3*] haben diese Theorie vor kurzem auf Systeme partieller Differentialgleichungen übertragen. Die Verfasser bewiesen, daß sich jede im Nullpunkt reguläre Lösung von (2.1) in der Form

$$(3.1)\quad \begin{aligned} u(z_1, z_1^*, z_2, z_2^*) = P(f_1, f_2) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} & E_1(z_1, z_1^*, t_1)\, E_2(z_2, z_2^*, t_2) \times \\ & \times [f_1\{\tfrac{1}{2}z_1(1-t_1^2), \tfrac{1}{2}z_2(1-t_2^2)\} + \\ & + f_2\{\tfrac{1}{2}z_1(1-t_1^2), \tfrac{1}{2}z_2^*(1-t_2^2)\}]\,(1-t_1^2)^{-\frac{1}{2}}(1-t_2^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt_1\,dt_2 \end{aligned}$$

darstellen läßt. Hierbei sind die *„Zugeordneten" f_1 und f_2 der Lösung u* im Nullpunkt reguläre analytische Funktionen zweier komplexen Veränderlichen. Die *„Erzeugenden" E_1 und E_2 des Operators P* sind unabhängig von der Wahl der Zugeordneten. E_1 hängt nur von F_1 und E_2 nur von F_2 ab, vgl. (2.1). Die Darstellung (3.1) gilt in dem Gebiet $B = B_{z_1} \times B_{z_1^*} \times B_{z_2} \times B_{z_2^*}$, wobei die Faktoren dieses Produktes die im vorigen Abschnitt angegebene Bedeutung haben.

4. Die Klasse $\mathfrak{E}$

Wir untersuchen eine Klasse von Systemen (2.1), die wir als die *„Klasse $\mathfrak{E}$"* bezeichnen und folgendermaßen definieren:

Ein System partieller Differentialgleichungen (2.1) *gehört der Klasse $\mathfrak{E}$ an, wenn man in der Darstellung* (3.1) *der zugehörigen Lösungen „Erzeugende vom Exponentialtyp"*

$$(4.1)\qquad E_\alpha = \exp Q_\alpha, \qquad Q_\alpha(z_\alpha, z_\alpha^*, t_\alpha) = \sum_{\mu=0}^{m_\alpha} q_{\alpha\mu}(z_\alpha, z_\alpha^*)\, t_\alpha^\mu, \qquad \alpha = 1, 2,$$

wählen kann.

---

* Siehe Literaturverzeichnis am Schluß der vorliegenden Arbeit.

Die Systeme dieser Klasse lassen sich relativ einfach überblicken. Es ergeben sich nämlich die folgenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Zugehörigkeit eines Systems (2.1) zur Klasse $\mathfrak{E}$:

Satz 1. *Ein System partieller Differentialgleichungen* (2.1) *gehört genau dann der Klasse $\mathfrak{E}$ an, wenn sich dessen Koeffizienten in der Form*

$$(4.2)\quad \text{(a)}\ F_\alpha(z_\alpha, z_\alpha^*) = -\frac{q_{\alpha 1}}{2z_\alpha}\frac{\partial q_{\alpha 1}}{\partial z_\alpha^*} \quad \textit{oder} \quad \text{(b)}\ F_\alpha(z_\alpha, z_\alpha^*) = -\frac{1}{2z_\alpha}\frac{\partial q_{\alpha 2}}{\partial z_\alpha^*}, \quad \alpha = 1, 2,$$

darstellen lassen; hierbei ist*

$$(4.3)\quad \text{(a)}\ q_{\alpha 1}(z_\alpha, z_\alpha^*) = \sum_{\lambda=0}^{[\frac{1}{2}(m_\alpha - 1)]} a_{\alpha\lambda} z^{\lambda+\frac{1}{2}}, \qquad \text{(b)}\ q_{\alpha 2}(z_\alpha, z_\alpha^*) = \sum_{\lambda=1}^{[\frac{1}{2}m_\alpha]} b_{\alpha\lambda} z_\alpha^\lambda, \qquad \alpha = 1, 2;$$

die beiden Koeffizienten $a_{\alpha 0}$ und $b_{\alpha 1}$ können analytische Funktionen von z_α^* sein, während die übrigen Koeffizienten konstant sind.

Beweis. Wie aus [2, S. 85] hervorgeht, wurde (3.1) durch Verallgemeinerung eines Bergman-Operators gewonnen, mit dessen Hilfe sich die Lösungen einer einzelnen partiellen Differentialgleichung

$$u_{zz^*} + F(z, z^*)\, u = 0$$

in der Form

$$(4.4)\qquad u(z, z^*) = \int_{-1}^{1} E(z, z^*, t)\, f\{\tfrac{1}{2} z(1 - t^2)\}(1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt$$

darstellen lassen, vgl. [1]. Es gilt also für die Lösungen jeder einzelnen der beiden Differentialgleichungen (2.1) eine derartige Darstellung, und man kann die in diesen Darstellungen vorkommenden Erzeugenden E als Erzeugende E_1 und E_2 in (3.1) verwenden, vgl. [2]. Demnach sind E_1 und E_2 so zu bestimmen, daß (4.4) mit E_1 bzw. E_2 als Erzeugender eine Lösung der ersten bzw. der zweiten Gleichung (2.1) darstellt. Nun sollen E_1 und E_2 nach Definition der Klasse $\mathfrak{E}$ die Form (4.1) besitzen. Diese Wahl der Erzeugenden zieht Bedingungen über die Form der Funktionen F_1 und F_2 in (2.1) nach sich, und zugleich ergeben sich Beziehungen zwischen den zunächst noch willkürlichen Koeffizienten $q_{\alpha\mu}(z_\alpha, z_\alpha^*)$ in (4.1) und den Funktionen F_1 und F_2. Durch Einsetzen der Darstellung (4.4) mit $E = E_1$ in die erste und mit $E = E_2$ in die zweite der Differentialgleichungen (2.1) sieht man, daß E_α, $\alpha = 1, 2$, der partiellen Differentialgleichung

$$(4.5)\qquad (1 - t_\alpha^2)\frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial z_\alpha^*\, \partial t_\alpha} - \frac{1}{t_\alpha}\frac{\partial E_\alpha}{\partial z_\alpha^*} + 2z\, t_\alpha\left(\frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial z_\alpha \partial z_\alpha^*} + F_\alpha E_\alpha\right) = 0, \quad \alpha = 1, 2,$$

genügt. Man führt nun den Beweis auf einem kürzlich angegebenen Wege weiter, vgl. KREYSZIG [4]: Jede in (4.5) auftretende Ableitung von E_α läßt sich als Produkt aus E_α und einer Funktion darstellen, die Potenzen von t_α und die Funktionen $q_{\alpha\mu}$ und deren Ableitung enthält, vgl. (4.1). Läßt man den sich so ergebenden gemeinsamen Faktor E_α weg, dann bleibt auf der linken Seite von (4.5) ein Polynom in t_α übrig. Die erhaltene Gleichung gilt identisch in t_α. Durch

* Dies ist so zu verstehen: F_1 kann z.B. die Form (b) und F_2 z.B. die Form (a) [oder auch die Form (b)] haben, so daß es insgesamt 4 Möglichkeiten gibt.

Nullsetzen des Koeffizienten einer jeden vorkommenden Potenz von t_α erhält man ein System von $m_\alpha + 3$ linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung, das man nach der in [*4*, S. 915—919] angegebenen Methode lösen kann. Auf diesem Wege ergibt sich die Aussage des vorliegenden Satzes und zugleich der

Zusatz. *Die übrigen, in Satz 1 noch nicht genannten Koeffizienten* $q_{\alpha\mu}(z_\alpha, z_\alpha^*)$ *der Darstellung* (4.1) *haben die Form*

$$(4.6) \qquad q_0 = c_\alpha - \sum_{\lambda=1}^{[\frac{1}{2}m_\alpha]} \frac{b_{\lambda\alpha}}{\lambda} z_\alpha^\lambda, \qquad c_\alpha = \text{konst.}, \qquad \alpha = 1, 2,$$

$$q_{\alpha,2\mu+1} = (-2)^\mu (3 \cdot 5 \ldots (2\mu+1))^{-1} \sum_{\lambda=\mu}^{[\frac{1}{2}(m_\alpha - 1)]} \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-\mu+1)\, a_{\alpha\lambda} z_\alpha^{\lambda+\frac{1}{2}}$$

(wenn (4.2a) *gilt),*

$$q_{\alpha,2\mu+1} = 0 \quad \textit{(wenn (4.2b) gilt)}, \quad \mu = 1, 2, \ldots, [\tfrac{1}{2}(m_\alpha - 1)], \qquad \alpha = 1, 2,$$

$$q_{\alpha,2\mu} = (-2)^{\mu+1} (2 \cdot 4 \ldots 2\mu)^{-1} \sum_{\lambda=\mu}^{[\frac{1}{2}m_\alpha]} (\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-\mu+1)\, b_{\alpha\lambda} z_\alpha^\lambda,$$

$$\mu = 2, 3, \ldots, [\tfrac{1}{2}m_\alpha], \qquad \alpha = 1, 2.$$

Damit ist die Klasse $\mathfrak{E}$ vollständig charakterisiert, und man kann für jedes System, das dieser Klasse angehört, zugehörige Erzeugende E_1 und E_2 sofort angeben. Das System

$$(4.7) \qquad \tfrac{1}{4}(U_{x_\alpha x_\alpha} + U_{y_\alpha y_\alpha} + U) = u_{z_\alpha z_\alpha^*} + \tfrac{1}{4} u = 0, \qquad \alpha = 1, 2,$$

ist ein Beispiel eines Systems der Klasse $\mathfrak{E}$, und die einfachsten Erzeugenden sind

$$(4.8) \qquad E_\alpha = \exp\left(i \sqrt{z_\alpha z_\alpha^*}\, t_\alpha\right), \qquad \alpha = 1, 2,$$

wie aus Satz 1 folgt.

5. Lösungen von Systemen der Klasse $\mathfrak{E}$, die gewöhnliche Differentialgleichungen befriedigen

Wählen wir in (3.1) die Erzeugenden (4.1) und die Zugeordneten

$$(5.1) \qquad f_1(z_1, z_2) = z_1^\beta z_2^\gamma, \qquad f_2(z_1, z_2^*) = z_1^\sigma z_2^{*\tau}, \qquad \beta, \gamma, \sigma, \tau = 0, 1, \ldots,$$

so erhalten wir eine unendliche Menge M unabhängiger Partikulärlösungen der Systeme (2.1) der Klasse $\mathfrak{E}$. Wir wollen zeigen, daß jede dieser Lösungen außer (2.1) vier gewöhnliche lineare Differentialgleichungen befriedigt.

Zuvor vermerken wir die wichtige Tatsache, daß die Menge M in folgendem Sinne eine *vollständige Approximationsbasis* bildet: Jede Lösung eines der betrachteten Systeme (2.1), die in einem konvexen (reell-vierdimensionalen) Gebiet $B_{z_1 z_2}$, das den Nullpunkt enthält, regulär ist, läßt sich in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $B_{z_1 z_2}$ durch eine endliche Linearkombination von Elementen aus M gleichmäßig approximieren. Dies folgt aus den Untersuchungen von Bergman und Schiffer [*2*] in Verbindung mit dem Approximationssatz von Hammerstein [*5*] für analytische Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen.

Um gewöhnliche Differentialgleichungen zu gewinnen, die durch die Lösungen aus M befriedigt werden, haben wir diese Lösungen in gewissen (reell-zweidimensionalen) Ebenen des (reell-achtdimensionalen) $x_1 y_1 x_2 y_2$-Raumes zu betrachten, vgl. (1.1). Wir wählen die vier Scharen derartiger Ebenen, die sich ergeben, indem man jeweils 3 der 4 genannten komplexen Variablen konstant annimmt. Dann haben wir den Vorteil, daß die Lösungen analytische Funktionen der nicht konstant angenommenen Variablen sind. Es gilt

Satz 2. *Jede Lösung* $U(x_1, y_1, x_2, y_2) = u(x_1 + i y_1, x_1 - i y_1, x_2 + i y_2, x_2 - i y_2)$ *eines Systems* (2.1) *der Klasse* $\mathfrak{E}$ *mit einer Zugeordneten von der Form* (5.1) *genügt vier gewöhnlichen Differentialgleichungen*

$$\sum_{\varkappa=0}^{k_j} g_{j\varkappa}(v_j) \frac{\partial^\varkappa U}{\partial v_j^\varkappa} = 0, \quad g_{j k_j} = 1, \quad j = 1, 2, 3, 4. \tag{5.2}$$

Hierbei ist $v_1 = x_1$, $v_2 = y_1$, $v_3 = x_2$, $v_4 = y_2$, *und die jeweils nicht angegebenen 3 der 4 Variablen sind konstant; die Koeffizienten hängen von der Wahl dieser konstanten Werte ab und sind rationale Funktionen von* $q_{\alpha\mu}$, $\mu = 0, 1, \ldots, m_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, *und den Ableitungen dieser Funktionen, vgl.* (4.1). *Die Ordnungen der Gleichungen sind unabhängig von dem Wert der Exponenten* β, γ, σ *und* τ *in* (5.1); *es gilt*

$$k_j \leq 2(m_1 + 1), \quad j = 1, 2, \quad bzw. \quad k_j \leq 2(m_2 + 1), \quad j = 3, 4. \tag{5.3}$$

Beweis. Infolge der Form der Erzeugenden (4.1) und der Zugeordneten (5.1) hat (3.1) die Gestalt

$$u = u_1 + u_2, \quad u_1 = u_{11} u_{12}, \quad u_2 = u_{21} u_{22}$$

mit

$$u_{\lambda\alpha}(z_\alpha, z_\alpha^*) = \int_{-1}^{1} (\exp Q_\alpha) f_{\lambda\alpha} dt_\alpha, \quad \lambda, \alpha = 1, 2,$$

wobei

$$f_{11}(z_1, t_1) = \left(\frac{z_1}{2}\right)^\beta (1 - t_1^2)^{\beta - \frac{1}{2}}, \quad f_{12}(z_2, t_2) = \left(\frac{z_2}{2}\right)^\gamma (1 - t_2^2)^{\gamma - \frac{1}{2}}$$

$$f_{21}(z_1, t_1) = \left(\frac{z_1}{2}\right)^\sigma (1 - t_1^2)^{\sigma - \frac{1}{2}}, \quad f_{22}(z_2^*, t_2) = \left(\frac{z_2^*}{2}\right)^\tau (1 - t_2^2)^{\tau - \frac{1}{2}}$$

ist. Es genügt, eine der vier Differentialgleichungen (5.2), etwa die dem Wert $j = 1$ entsprechende, zu betrachten; für die anderen verläuft der Beweis analog. Die Funktion $u_{11}(z_1, z_1^*) = u_{11}(x_1 + i y_1, x_1 - i y_1) = U_{11}(x_1, y_1)$ befriedigt eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung

$$L_1(u_{11}) = \tilde{L}_1(U_{11}) = \sum_{\varrho=0}^{r_1} h_\varrho(x_1, y_1^0) \frac{\partial^\varrho U_{11}}{\partial x_1^\varrho} = 0, \quad h_{r_1} = 1, \quad y_1 = y_1^0 = \text{konst.} \tag{5.4}$$

von der Ordnung $r_1 \leq m_1 + 1$; die Koeffizienten dieser Gleichung sind rationale Funktionen von $q_{1\mu}$, $\mu = 0, 1, \ldots, m_1$, und den Ableitungen dieser Funktionen, wie aus [6, S. 808], Satz 2 folgt. Da in (5.2), ($j = 1$), mit x_2 und y_2 auch z_2 und z_2^* konstant sind, so ist auch $u_1 = u_{11} u_{12}$ eine Lösung von (5.4). Entsprechend genügt $u_{21}(z_1, z_1^*) = U_{21}(x_1, y_1)$ einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung

$$L_2(u_{21}) = \tilde{L}_2(U_{21}) = \sum_{\varrho=0}^{r_2} H_\varrho(x_1, y_1^0) \frac{\partial^\varrho U_{21}}{\partial x_1^\varrho} = 0, \quad H_{r_2} = 1, \quad y_1 = y_1^0 = \text{konst.} \tag{5.5}$$

von der Ordnung $r_2 \leq m_1 + 1$, deren Koeffizienten ebenfalls rationale Funktionen von $q_{1\mu}$ und den Ableitungen dieser Funktionen sind. Dasselbe gilt demnach auch für $u_2 = u_{21} u_{22}$. So haben wir insgesamt drei Gleichungen,

$$(5.6) \qquad u = u_1 + u_2, \quad L_1(u_1) = 0, \quad L_2(u_2) = 0,$$

aus denen wir durch Elimination von u_1 und u_2 und den Ableitungen dieser Funktionen eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung für u von der Form (5.2) gewinnen können. Da hierbei jede der Gleichungen (5.4) höchstens $(2m_1 + 2)$mal zu differenzieren ist, so ergibt sich die obengenannte Schranke für k_1, vgl. (5.3). Entsprechend beweist man die Existenz der übrigen Gleichungen (5.2). Man beachte dabei, daß $Q_2(z_2, z_2^*, t_2)$ ein Polynom in t_2 vom Grade m_2 ist; deshalb sind die Schranken für k_3 und k_4 von denen für k_1 und k_2 verschieden.

Zum Beispiel ergeben sich für das System (4.7) bei Wahl der Erzeugenden (4.8) und der Zugeordneten (5.1) die Lösungen $u = u_1 + u_2$ mit

$$u_1 = \pi \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{z_1}{z_1^*}\right)^{\frac{1}{2}\beta} \left(\frac{z_2}{z_2^*}\right)^{\frac{1}{2}\gamma} J_\beta\left(\sqrt{z_1 z_1^*}\right) J_\gamma\left(\sqrt{z_2 z_2^*}\right),$$

$$u_2 = \pi \Gamma\left(\sigma + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\tau + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{z_1}{z_1^*}\right)^{\frac{1}{2}\sigma} \left(\frac{z_2^*}{z_2}\right)^{\frac{1}{2}\tau} J_\sigma\left(\sqrt{z_1 z_1^*}\right) J_\tau\left(\sqrt{z_2 z_2^*}\right).$$

Dies folgt unmittelbar aus der bekannten Darstellung

$$J_n(r) = \frac{r^n}{2^n \sqrt{\pi}\, \Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_0^\pi \exp(i r \cos\varphi)\, (\sin\varphi)^{2n}\, d\varphi, \qquad \Re(n) > \frac{1}{2},$$

der Bessel-Funktionen (vgl. NIELSEN [7, S. 51]), indem man $\cos\varphi = t_1$ bzw. $\cos\varphi = t_2$ setzt. Die Differentialgleichungen (5.4) und (5.5) haben im vorliegenden Fall die Form

$$L_\alpha(u_\alpha) = u_\alpha'' + b_{\alpha 1} u_\alpha' + b_{\alpha 0} u_\alpha = 0, \qquad \alpha = 1, 2$$

mit

$$\left.\begin{aligned} b_{\alpha 1} &= \left(x_1 - \frac{y_1^2}{x_1} + 2 i c_\alpha y_1\right) \Big/ (x_1^2 + y_1^2) \\ b_{\alpha 0} &= \left(x_1^2 - c_\alpha^2 - i c_\alpha \frac{y_1}{x_1}\right) \Big/ (x_1^2 + y_1^2) \end{aligned}\right\} \; c_1 = \beta,\; c_2 = \sigma,\; \alpha = 1, 2,$$

wobei Striche die Ableitungen nach x_1 kennzeichnen. Hieraus gewinnt man für u eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 4. Ordnung in x_1, die sich in der Form

$$\begin{vmatrix} L_1(u) & c & d & 0 & 0 \\ L_1'(u) & c' & c + d' & d & 0 \\ L_1''(u) & c'' & 2c' + d'' & c + 2d' & d \\ 0 & b_{20} & b_{21} & 1 & 0 \\ 0 & b_{20}' & b_{20} + b_{21}' & b_{21} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

darstellen läßt, wobei $c = b_{20} - b_{10}$ und $d = b_{21} - b_{11}$ ist.

6. Folgerungen

Wir schließen mit einigen Bemerkungen über Folgerungen aus den gewonnenen Ergebnissen.

(1.) Außer der bisher betrachteten Menge M von Lösungen der Systeme (2.1) der Klasse $\mathfrak{E}$ existiert eine weitere Menge unabhängiger Lösungen mit ähnlichen Eigenschaften. Diese Lösungen entsprechen den meromorphen Zugeordneten

$$(6.1)\quad f_1(z_1, z_2) = (z_1 - a_\varkappa)^{-\varkappa}(z_2 - b_\lambda)^{-\lambda}, \quad f_2(z_1, z_2^*) = (z_1 - c_\mu)^{-\mu}(z_2^* - d_\nu)^{-\nu}; \quad \varkappa, \lambda, \mu, \nu = 1, 2, \ldots,$$

wobei $a_\varkappa$, b_λ, c_μ und d_ν beliebige, von null verschiedene Konstanten bedeuten. Jede dieser Lösungen befriedigt ebenfalls gewöhnliche Differentialgleichungen von der Form (5.2), deren Koeffizienten rationale Funktionen von $q_{\alpha\mu}$, $\mu = 0, 1, \ldots, m_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, und den Ableitungen dieser Funktionen sind. Die Ordnung der (5.2), $j = 1, 2$ bzw. $j = 3, 4$ entsprechenden Gleichung beträgt höchstens $2(m_1 + 3)$ bzw. $2(m_2 + 3)$. Dies beweist man ähnlich wie den Satz 2 der vorliegenden Arbeit unter Heranziehung des Satzes 1 in [*8*]. Durch Kombination dieses Resultates mit Satz 2 ergibt sich der

Zusatz zu Satz 2. *Lösungen von Systemen* (2.1) *der Klasse* $\mathfrak{E}$, *deren Zugeordnete beliebige im Nullpunkt reguläre rationale Funktionen sind, befriedigen gewöhnliche Differentialgleichungen von der Form* (5.2).

(2.) Die in (6) angegebene Charakterisierung der Singularitäten einer Lösung einer einzelnen partiellen Differentialgleichung mit Hilfe gewöhnlicher Differentialgleichungen läßt sich auch auf den Fall von Systemen (2.1) der Klasse $\mathfrak{E}$ übertragen. Ohne hierauf im Augenblick näher einzugehen, erwähnen wir die folgende bemerkenswerte Tatsache: Die Koeffizienten der gewöhnlichen Differentialgleichungen (5.2) sind im allgemeinen Fall *rationale Funktionen der* $q_{\alpha\mu}$, $\mu = 0, 1, \ldots, m_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, *und ihrer Ableitungen.* Sind nun F_1 und F_2 *rationale* Funktionen, so sind die Koeffizienten von (5.2) sogar *rationale Funktionen der jeweiligen Variablen*; dies beweist man unter Benutzung von Satz 1 und Satz 2. Auf Grund des vorstehenden Zusatzes erhält man demnach den

Satz 3. *Für Systeme* (2.1) *der Klasse* $\mathfrak{E}$ *mit rationalen Koeffizienten* F_1 *und* F_2 *gilt: Die Singularitäten der Lösungen mit rationalen Zugeordneten* f_1 *und* f_2 [*vgl.* (3.1)] *liegen auf (reell-sechsdimensionalen) algebraischen Mannigfaltigkeiten des* $z_1 z_1^* z_2 z_2^*$*-Raumes.*

(3.) Befriedigt eine Lösung einer partiellen Differentialgleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung, so kann man diese Lösung mit Hilfe der letzteren auch außerhalb des Gültigkeitsbereiches ihrer Darstellung durch einen Bergman-Operator untersuchen. Dies hat BERGMAN [*9*] für den Fall einer einzelnen linearen partiellen Differentialgleichung erstmals gezeigt. Es ist zu erwarten, daß sich diese Bergmansche Theorie mit Hilfe der vorstehenden Ergebnisse auf Systeme partieller Differentialgleichungen übertragen läßt.

Literatur

[1] BERGMAN, S.: Linear operators in the theory of partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **53**, 130—155 (1943).
[2] BERGMAN, S., & M. M. SCHIFFER: Properties of solutions of a system of partial differential equations. Studies in Mathematics and Mechanics, presented to Richard von Mises, 1954, 79—87.
[3] BERGMAN, S.: Bounds for solutions of a system of partial differential equations. Journ. rat. Mech. and Analysis **5**, 993—1002 (1956).
[4] KREYSZIG, E.: On a class of partial differential equations. Journ. rat. Mech. and Analysis **4**, 907—923 (1955).
[5] HAMMERSTEIN, A.: Über die Approximation von Funktionen zweier komplexer Veränderlichen durch Polynome. Sitz. Ber. Preuß. Akad. Wiss. **1933**, 259—266.
[6] KREYSZIG, E.: On certain partial differential equations and their singularities. Journ. rat. Mech. and Analysis **5**, 805—820 (1956).
[7] NIELSEN, N.: Handbuch der Zylinderfunktionen. Leipzig 1905.
[8] KREYSZIG, E.: On some relations between partial and ordinary differential equations. Proc. Canad. Math. Soc. (im Druck).
[9] BERGMAN, S.: Zur Theorie der Funktionen, die eine lineare partielle Differentialgleichung befriedigen. Recueil Math., N. S. **2**, 1169—1197 (1937).

Ohio State University, Columbus, Ohio

(Eingegangen am 16. März 1957)