# *Lineare Spline-Funktionen und die Methoden von Ritz für elliptische Randwertprobleme*

J. Nitsche

*Vorgelegt von* L. Collatz

## Einleitung

Im folgenden untersuchen wir das Konvergenzverhalten der Ritzschen Näherung für selbstadjungierte elliptische Randwertprobleme in der Ebene bei Verwendung linearer Spline-Funktionen. Darunter sind solche Funktionen zu verstehen, die in den Dreiecken einer geeigneten Triangulierung stückweise linear sind.

Der erste Hinweis auf eine solche Vorgehensweise findet sich bei Courant [9], sie wurde später von Demjanovic [10], [11], Friedrichs und Keller [13], Oganesjan [26] sowie Zlamal [30] weiter verfolgt. Eng verwandt ist auch die Methode von Kellogg [17], [18] zur Aufstellung von Differenzenformeln.

Für den Fehler $e$ zwischen exakter und angenäherter Lösung ergibt sich primär aus der Minimaleigenschaft des Ritz-Verfahrens, vgl. insbesondere Demjanovic [11] und Oganesjan [26], die Beziehung

$$\|e\|_1 \leqq c\,h\,\|u\|_2, \tag{1}$$

wobei ein angehängter Index $k$ die Norm in $W_2^k$ angibt. $h^2 M_3(u)$ erkennen Kellogg [18] und Zlamal [30] als Schranke für $\|e\|_0$ bzw. $\|e\|_1$. In der vorliegenden Arbeit leiten wir die weiteren Fehlerabschätzungen

$$\|e\|_0 \leqq c\,h^2\,\|u\|_2, \qquad \operatorname{Max}|e| \leqq c\,h\,\|u\|_2 \tag{2}$$

bei konvexen Gebieten her. Diese Konvergenzordnungen konnten bislang nur für die Poisson-Gleichung in einem Quadrat nachgewiesen werden (vgl. [23]), insbesondere war der Exponent 2/5 von $h$ in $(2_2)$ aus [25] in den letzten 10 Jahren nicht verbessert worden. Nach neueren Untersuchungen von Helfrich [14] ist bekannt, daß die Exponenten in (2) nicht verbessert werden können, was in [23] nur bedingt gezeigt wurde. Aus diesem Grunde sind die Abschätzungen abschließend.

Der Übergang von (1) zu $(2_1)$ gelingt mit Hilfe eines allgemeinen Satzes aus [24] beim Ritz-Verfahren. Sind danach die 3 Hilberträume $H_0$, $H_1$, $H_2$ über einen positiven, symmetrischen und vollstetigen Operator $G$ vermöge $H_0 = G(H_1)$ und $H_1 = G(H_2)$ verbunden, so ist beim Ritz-Verfahren zur Lösung der Gleichung $Au = f$ mit $A = G^{-2}$ die Abschätzung $(2_1)$ eine Folge von (1). Die Voraussetzung der Konvexität des Gebietes sichert gerade dessen Anwendbarkeit. Die Herleitung von $(2_2)$ mit Hilfe des Sobolevschen Lemmas in der Form $\operatorname{Max}|e| \leqq c\{\|e\|_0\,\|e\|_2\}^{1/2}$ ist hier nicht wie in [23] möglich, da die linearen Spline-Funktionen nicht im

Raum $W_2^2$ liegen. Sie gelingt jedoch mit Methoden der konstruktiven Funktionentheorie (vgl. etwa LORENTZ [20]) unter Heranziehung einer Umkehrbeziehung der Gestalt $\operatorname{Max}|U| \leqq c h^{-1} \|U\|_0$ für Spline-Funktionen, die in gewisser Weise der Bernsteinschen Ungleichung für die Ableitung eines trigonometrischen Polynoms entspricht.

Das Ritz-Verfahren bei Verwenden linearer Spline-Funktionen führt auf ein System von Differenzengleichungen. Wiewohl (2) alle bekannten Abschätzungen bei der Voraussetzung $u \in W_2^2$ verbessert, sei der Vollständigkeit halber auf weitere Untersuchungen von BRAMBLE, CÉA, HUBBARD, KATSANIS, KELLOGG, LAASONEN, MIHLIN, PAYNE, THOMÉE und VEIDINGER verwiesen, vgl. die Nummern 3–8, 15, 16, 19, 21, 28, 29 des Literaturverzeichnisses. Besonders hervorzuheben sind noch die Beiträge [2], [12] von BIRKHOFF, SCHULTZ und VARGA und von FIX, wo für Rechtecksbereiche das Ritz-Verfahren bei bilinearen (bzw. bikubischen usw.) Spline-Funktionen diskutiert wird. Allerdings wird dort nur die Beziehung (1) abgeleitet.

## 1. A priori Abschätzungen und Vergleichssätze

Im folgenden übernehmen wir die bei partiellen Differentialgleichungen übliche Bezeichnungsweise, vgl. z.B. AGMON [1]. $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}(r_1, r_2)$ $(0 < r_1 < r_2 < \infty)$ sei die Klasse der konvexen Gebiete $\Omega \subset \mathfrak{R}_2$ mit stückweise glattem Rand derart, daß mit 2 festen Kreisen $K_i$ vom Radius $r_i$ gilt

$$K_1 \subseteq \Omega \subseteq K_2 \qquad \text{für } \Omega \in \mathfrak{W}.$$

Mit $c_1, c_2, \ldots$ werden Konstanten bezeichnet, die nur von $r_1, r_2$ abhängen.

Da der Rand $\partial\Omega$ bei $\Omega \in \mathfrak{W}$ eine gleichmäßige Lipschitz- oder Kegelbedingung erfüllt, läßt sich ohne Schwierigkeit die Richtigkeit der nachfolgenden Lemmata 1 bis 3 erkennen, wobei es lediglich auf die Abhängigkeit der Konstanten von den angegebenen Parametern ankommt, vgl. dazu AGMON [1] oder NECAS [22].

**Lemma 1.** *Bei $\Omega \in \mathfrak{W}$ gilt*

$$\|u\|_{0 \cdot \Omega} \leqq c_1 |u|_{1 \cdot \Omega} \qquad \textit{für } u \in \mathring{W}_2^1(\Omega), \tag{3}$$

$$\|u\|_{0 \cdot \partial\Omega} \leqq c_2 \|u\|_{1 \cdot \Omega} \qquad \textit{für } u \in W_2^1(\Omega), \tag{4}$$

$$\omega(u, \delta) \leqq c_3 \sqrt{\delta}\, \|u\|_{2 \cdot \Omega} \quad \textit{für } u \in W_2^2(\Omega). \tag{5}$$

$\omega$ bedeutet den 1. Stetigkeitsmodul von $u$ in $\Omega$. Es sei bemerkt, daß in (5) auch $\delta \sqrt{|\ln \delta|}$ richtig ist, was wir jedoch nicht benötigen.

**Lemma 2.** *Es sei $\Omega' \subseteq \Omega$, $\Omega', \Omega \in \mathfrak{W}$ sowie* $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega') \leqq \delta$. *Dann gilt für $u \in H_2(\Omega) = \mathring{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$*

$$\operatorname*{Max}_{x \in \partial\Omega'} |u(x)| \leqq c_4 \sqrt{\delta}\, \|u\|_{2 \cdot \Omega}, \tag{6}$$

$$\|u\|_{0 \cdot \partial\Omega'} \leqq c_5\, \delta\, \|u\|_{2 \cdot \Omega}, \tag{7}$$

$$\|u\|_{k \cdot \Omega - \Omega'} \leqq c_6 \sqrt{\delta}^{\,2-k} \|u\|_{2 \cdot \Omega} \qquad (k = 0, 1). \tag{8}$$

Wir nehmen nun an, die Funktionen $a^{ik}$, $c$ erfüllen im Kreis $K_2$ die Voraussetzungen:

V1: $a^{ik}$, $\partial_j a^{ik}$, $c$ beschränkt und meßbar, $Q$ sei eine obere Schranke der Beträge.

V2: Es existiert eine Konstante $q>0$ mit

$$q^{-1}|\xi|^2 \leqq a^{ik}\xi_i\xi_k \leqq q|\xi|^2$$

für alle $\xi\in\mathfrak{R}_2$.

V3: Es gilt $c\geqq 0$.

Dann ist der Differentialoperator

$$Au=-(a^{ik}u_{,i})_{,k}+cu \tag{9}$$

in jedem $\Omega\in\mathfrak{W}$ gleichmäßig elliptisch, und es gilt

**Lemma 3.** *$A$ läßt sich als selbstadjungierter Operator mit $D(A)=H_2(\Omega)$ und $R(A)=L_2(\Omega)$ auffassen, und die Normen*

$$\|u\|_k^A=(u, A^k u)_{0\cdot\Omega}^{1/2} \tag{10}$$

*sind für $k=1, 2$ den Normen $\|u\|_{k\cdot\Omega}$ äquivalent:*

$$c_7^{-1}(q,Q)\|u\|_{k\cdot\Omega}\leqq\|u\|_k^A\leqq c_7(q,Q)\|u\|_{k\cdot\Omega}. \tag{11}$$

Hierbei ist die Konvexität von $\Omega$ wesentlich, ein elementarer Beweis läßt sich analog dem in [25] für den Fall eines Quadrates gegebenen führen.

Wir betrachten nun für zwei Gebiete $\Omega'$, $\Omega$ gemäß Lemma 2 die Dirichlet-Probleme

$$Au=f \quad \text{in } \Omega, \qquad u=0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \tag{12}$$

$$Au'=f \quad \text{in } \Omega', \qquad u'=0 \quad \text{auf } \partial\Omega' \tag{13}$$

bei $f\in L_2(\Omega)$. Hinsichtlich der Abweichung beweisen wir

**Lemma 4.** *Sind $\Omega$, $\Omega'$ gemäß Lemma 2 gewählt und $u$, $u'$ Lösungen von* (12) *und* (13), *so gilt*

$$\operatorname*{Max}_{x\in\Omega'}|u(x)-u'(x)|\leqq c_8(q,Q)\sqrt{\delta}\,\|f\|_{0\cdot\Omega}, \tag{14}$$

$$\|u-u'\|_{k\cdot\Omega'}\leqq c_9(q,Q)\sqrt{\delta}^{\,2-k}\|f\|_{0\cdot\Omega} \qquad (k=0,1). \tag{15}$$

Wegen Lemma 2 kann links auch $\Omega$ statt $\Omega'$ benützt werden, wenn $u'$ in $\Omega-\Omega'$ durch $u'=0$ fortgesetzt wird. Zum Beweis beachten wir, daß die Differenz $w=u-u'$ Lösung des Randwertproblems

$$Aw=0 \quad \text{in } \Omega', \qquad w=u \quad \text{auf } \partial\Omega'$$

ist. Daher folgt (14) unmittelbar aus (6) wegen des Maximumprinzips. Weiter ist

$$q^{-1}|w|_{1\cdot\Omega'}^2\leqq\iint_{\Omega'}(a^{ik}w_{,i}w_{,k}+cw^2)\,dx=\oint_{\partial\Omega'}u\,a^{ik}w_{,i}n_k\,ds.$$

Die Ungleichungen (4) und (7) führen daher auf

$$|w|_{1\cdot\Omega'}^2 \leqq q^2 \|u\|_{0\cdot\partial\Omega'} |w|_{1\cdot\partial\Omega'} \leqq q^2 c_2 c_5 \delta \|u\|_{2\cdot\Omega} \|w\|_{2\cdot\Omega'}.$$

Schließlich gilt

$$\|w\|_{2\cdot\Omega'} \leqq \|u\|_{2\cdot\Omega} + \|u'\|_{2\cdot\Omega'} \leqq 2c_7 \|f\|_{0\cdot\Omega},$$

so daß wir

$$(16) \qquad |u-u'|_{1\cdot\Omega'} \leqq c_{10}(q, Q)\sqrt{\delta}\,\|f\|_{0\cdot\Omega}$$

gewonnen haben. Nunmehr sei $z$ die Lösung von

$$Az = w \quad \text{in } \Omega', \qquad z=0 \quad \text{auf } \partial\Omega'.$$

Die Greensche Formel liefert uns dann

$$\|w\|_{0\cdot\Omega'}^2 = \iint_{\Omega'} (wAz - zAw)\,dx = \oint_{\partial\Omega'} u\, a^{ik} z_{,i} n_k\, ds.$$

Unter Heranziehung der obigen Abschätzungen erhalten wir daraus

$$\|w\|_{0\cdot\Omega'}^2 \leqq q\,\|u\|_{0\cdot\partial\Omega'} |z|_{1\cdot\partial\Omega'} \leqq q\, c_2 c_5 \delta \|u\|_{2\cdot\Omega} \|z\|_{2\cdot\Omega'}$$
$$\leqq q\, c_2 c_5 c_7^2 \delta \|f\|_{0\cdot\Omega} \|w\|_{0\cdot\Omega'}.$$

Diese letzte Beziehung zusammen mit (16) führt auf (15).

## 2. Lineare Spline-Funktionen

Im folgenden bezeichne $\Gamma = \Gamma(T)$ eine Triangulierung eines Polygons $T$ und $|\Gamma|$ das Maximum der Dreiecksseiten. $\Gamma$ heiße $\alpha-\kappa$-regulär, wenn die zwei Bedingungen erfüllt sind:

*i*) In jedem der Teildreicke $\Delta$ von $\Gamma$ ist keiner der Winkel kleiner als $\alpha$.

*ii*) Das Verhältnis irgend zweier Dreiecksseiten in $\Gamma$ ist durch $\kappa$ beschränkt.

Eine in $T$ stetige und in jedem $\Delta \in \Gamma$ lineare Funktion heiße lineare Spline-Funktion, wobei wir den Zusatz linear unterdrücken werden. Die Gesamtheit dieser Funktionen sei $\mathfrak{S}(\Gamma)$. Ein $s \in \mathfrak{S}(\Gamma)$ ist durch Vorgabe der Werte in den Eckpunkten der $\Delta \in \Gamma$ eindeutig festgelegt. Stimmt $s$ dort mit $u$ überein, so werde $s = J_\Gamma u$ die Spline-Interpolation zu $u$ genannt. Es gilt der

**Satz 1.** *Es sei $u \in W_2^2(T)$ und $\Gamma$ eine $\alpha-\kappa$-reguläre Triangulierung von $T$. Dann ist*

$$(17) \qquad \|u - J_\Gamma u\|_{k\cdot T} \leqq c_{11}(\alpha, \kappa)\, |\Gamma|^{2-k} |u|_{2\cdot T} \qquad (k=0,1)$$

$$(18) \qquad \operatorname*{Max}_{x\in T} |u(x) - (J_\Gamma u)(x)| \leqq c_{12}(\alpha, \kappa)\, |\Gamma|\, |u|_{2\cdot T}.$$

Es sei bemerkt, daß sich (17) für $k=1$ bereits bei Oganesjan [26] findet, wenn auch rechts mit der 2-Norm von $u$.

Zunächst betrachten wir das gleichseitige Dreieck $\Delta_0$ mit Seitenlänge 1. In $W_2^2(\Delta_0)$ ist $|u|_{2\cdot\Delta_0}$ eine Pseudo-Norm, der zugehörige Nullraum $\mathfrak{N}$ wird von den in $\Delta_0$ linearen Funktionen aufgespannt. Die 3 Funktionale ($P_i$: Eckpunkte von $\Delta_0$)

$$L_i(u) = u(P_i)$$

sind in $W_2^2(\Delta_0)$ stetig, und

$$p(u) = \{L_1^2(u) + L_2^2(u) + L_3^2(u)\}^{1/2}$$

ist in $\mathfrak{N}$ eine Norm. Daher gilt (vgl. SOBOLEV [27], S. 60ff.)

$$\|u\|_{2 \cdot \Delta_0}^2 \leqq c_{12}^2 \left\{ \sum_1^3 L_i^2(u) + |u|_{2 \cdot \Delta_0}^2 \right\}. \tag{19}$$

Da nun mit der Spline-Interpolation

$$L_i(u - J_{\Delta_0} u) = 0$$

gilt, führt (19) insbesondere auf

$$\|u - J_{\Delta_0} u\|_{0 \cdot \Delta_0}, \quad \|u - J_{\Delta_0} u\|_{1 \cdot \Delta_0} \leqq c_{12} |u|_{2 \cdot \Delta_0}.$$

Das Auftreten der zweiten Ableitungen allein rechts impliziert zunächst für $\alpha - \kappa$-reguläre Dreiecke und dann nach Summation auch für derartige Triangulierungen die Beziehungen (17).

Die noch ausstehende Beziehung (18) folgt aus einem allgemeinen Umkehrsatz, den wir unten noch benötigen werden.

**Satz 2.** *Es sei $u \in L_2(T)$. Existiert zu jeder $\alpha - \kappa$-regulären Triangulierung $\Gamma$ von $T$ ein $U \in \mathfrak{S}(\Gamma)$ gemäß*

$$\|u - U\|_{0 \cdot T} \leqq c_{13}(\alpha, \kappa, u) |\Gamma|^2, \tag{20}$$

*so ist u stetig und es gilt auch*

$$\operatorname*{Max}_{x \in T} |u(x) - U(x)| \leqq c_{14}(\alpha, \kappa) c_{13}(\alpha, \kappa, u) |\Gamma|. \tag{21}$$

Offensichtlich ist daher (18) eine Folge von (17), so daß mit Satz 2 auch Satz 1 bewiesen ist. Die Beweisidee entnehmen wir der konstruktiven Funktionentheorie, wobei wir eine der Bernsteinschen Ungleichung analoge benützen. Es gilt nämlich, wie sich durch eine elementare Rechnung zeigen läßt, das

**Lemma 5.** *Es sei $\Delta$ ein beliebiges Dreieck der Fläche F. Für jede in $\Delta$ lineare Funktion U gilt*

$$\operatorname*{Max}_{x \in \Delta} |U(x)| \leqq 3 F^{-1/2} \|U\|_{\Delta}. \tag{22}$$

Ist $\Delta \in \Gamma$ und handelt es sich um eine $\alpha - \kappa$-reguläre Triangulierung, so kann

$$F(\Delta) \geqq \tfrac{1}{4} \kappa^{-2} \sin \alpha |\Gamma|^2$$

in (22) benützt werden. Neben einer Ausgangstriangulierung $\Gamma_0 = \Gamma$ betrachten wir nun die Folge $\{\Gamma_\nu\}$, wobei jedes $\Gamma_\nu$ aus dem vorangehenden durch Aufteilung jeden Dreiecks in vier kongruente Teildreiecke entsteht. Dann sind alle $\Gamma_\nu$ ebenfalls $\alpha - \kappa$-regulär. $U_\nu$ seien Approximationen aus $\mathfrak{S}(\Gamma_\nu)$ gemäß Satz 2. Wegen

$U_\nu - U_{\nu-1} \in \mathfrak{S}(\Gamma_\nu)$ ist nach Lemma 5

$$\max_{x\in T} |U_\nu(x) - U_{\nu-1}(x)| \leqq \max_{\Delta\in\Gamma_\nu} \frac{6\kappa}{\sqrt{\sin\alpha}} |\Delta_\nu^{-1}| \, \|U_\nu - U_{\nu-1}\|_{0\cdot\Delta}$$

$$\leqq c_{15}(\alpha,\kappa) |\Gamma_\nu|^{-1} \|U_\nu - U_{\nu-1}\|_{0\cdot T} \leqq 2 c_{15} c_{13} |\Gamma| \cdot 2^{1-\nu}.$$

Daher ist $\{U_\nu\}$ in der Maximum-Norm eine Cauchy-Folge, d.h. $u$ ist jedenfalls stetig. Außerdem ist wegen

$$|u(x) - U_0(x)| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} |U_\nu(x) - U_{\nu-1}(x)|$$

mit der letzten Abschätzung auch (21) mit $c_{14} = 4c_{15}$ gezeigt.

### 3. Fehlerabschätzung für die Ritz-Approximation

Wir betrachten jetzt das Randwertproblem (12), und zwar zunächst für ein Polygon $\Omega = T \in \mathfrak{W}$. Zu einer $\alpha-\kappa$-regulären Triangulierung $\Gamma$ von $T$ bestimmen wir die Näherung $U = R_\Gamma u \in \mathring{\mathfrak{S}}(\Gamma) = \mathfrak{S}(\Gamma) \cap \mathring{W}_2^1(T)$ als Ritz-Näherung zu (12), d.h. diejenige Spline-Funktion mit verschwindenden Randwerten, die in $\mathring{\mathfrak{S}}(\Gamma)$ das Funktional

$$F(V) = (V, AV)_{0\cdot T} - 2(V, f)_{0\cdot T}$$

minimiert.

Zur Anwendung des Ergebnisses aus [24] ist die Größe

$$c(\Gamma) = \sup_{\|u\|_2^A = 1} \inf_{U\in\mathring{\mathfrak{S}}(\Gamma)} \|u - U\|_1^A. \tag{23}$$

abzuschätzen. Mit (11) haben wir zunächst

$$c(\Gamma) \leqq c_7^2 \sup_{\|u\|_2 = 1} \inf_{U\in\mathring{\mathfrak{S}}(\Gamma)} \|u - U\|_1.$$

Nach Satz 1 gilt daher

$$c(\Gamma) \leqq c_{16} |\Gamma|$$

mit $c_{16} = c_{16}(q, Q, \alpha, \kappa)$. Damit ist, wie schon von DEMJANOVIC und OGANESJAN gefunden, die Abschätzung

$$\|u - R_\Gamma u\|_{1\cdot T} \leqq c_{16} |\Gamma| \, \|f\|_{0\cdot T} \tag{24}$$

gesichert. Aus [24] entnehmen wir weiter

$$\|u - R_\Gamma u\|_{0\cdot T} \leqq c^2(\Gamma) \|u\|_2^A,$$

was uns

$$\|u - R_\Gamma u\|_{0\cdot T} \leqq c_{17} |\Gamma|^2 \|f\|_{0\cdot T} \tag{25}$$

liefert ($c_{17} = c_{16}^2$). Schließlich führt uns Satz 2 zu

$$\max_{x\in T} |u(x) - (R_\Gamma u)(x)| \leqq c_{18} |\Gamma| \, \|f\|_{0\cdot T}. \tag{26}$$

**Satz 3.** *Es sei $\Gamma$ eine $\alpha-\kappa$-reguläre Triangulierung des konvexen Polygons $T\in\mathfrak{W}$ und $R_\Gamma u$ die Ritz-Approximation im Raum $\mathring{\mathfrak{S}}(\Gamma)$ an die Lösung des Dirichlet-Problems für $T$. Dann läßt sich der Fehler in der $L_2$- bzw. $W_2^1$-Norm durch $|\Gamma|^2$ bzw. $|\Gamma|$ abschätzen, und die Ordnung $|\Gamma|$ ist auch richtig für den Fehler in der Maximum-Norm. Neben den Voraussetzungen* V1 − V3 *an die Koeffizienten des Differential-Operators $A$ genügt $f\in L_2(T)$ für die rechte Seite der Differentialgleichung.*

Nun betrachten wir das Dirichlet-Problem (12) für ein beliebiges $\Omega\in\mathfrak{W}$. Durch geringfügige Modifikationen der Überlegungen bei OGANESJAN [26] läßt sich erkennen:

**Lemma 6.** *$\Omega\in\mathfrak{W}$ besitze eine zweimal stetig differenzierbare Randkurve $\partial\Omega$. Für $h\leqq h_0$ mit geeignetem positiven $h_0$ existieren bei $\alpha<\pi/8$, $\kappa=2$ stets solche $\alpha-\kappa$-regulären Triangulierungen $\Gamma$ eines $\partial\Omega$ einbeschriebenen Polygons $T$ mit Seitenlänge $\leqq h$, daß auch $|\Gamma|\leqq h$ gilt.*

Als Approximation der Lösung $u$ von (12) verwenden wir in $T$ die Ritz-Approximation $U_\Gamma=R_\Gamma u'$ zum Dirichlet-Problem für das Gebiet $T$, in $\Omega-T$ setzen wir $U_\Gamma=0$. Da die Länge der Seiten von $\partial T$ durch $h$ beschränkt sind und $\partial\Omega$ zweimal stetig differenzierbar ist, gilt

$$\operatorname{dist}(\partial T, \partial\Omega)\leqq c_{19}(\partial\Omega)\,h^2 .$$

Der vorangehende Satz 3 zusammen mit Lemma 4 ergibt endgültig den

**Satz 4.** *Bei der beschriebenen Wahl der Näherung $U_\Gamma$ für die Lösung des Dirichlet-Problems* (12) *gelten die Fehlerabschätzungen*

$$\|u-U_\Gamma\|_{k\cdot\Omega}\leqq c_{20}\,h^{2-k}\,\|f\|_{0\cdot\Omega} \qquad (k=0,1)$$

$$\operatorname*{Max}_{x\in\Omega}|u(x)-U_\Gamma(x)|\leqq c_{21}\,h\,\|f\|_{0\cdot\Omega}.$$

*$c_{20}$, $c_{21}$ hängen dabei nur von den Daten des Problems, d.h. von $\Omega$ und $q$, $Q$, sowie von $\alpha$ und $\kappa$ ab.*

## Literatur

1. AGMON, S., Lectures on Elliptic Boundary Value Problems. Princeton: Van Nostrand, 1965.
2. BIRKHOFF, G., M.H. SCHULTZ, & R.S. VARGA, Piecewise hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations. Numer. Math. **11**, 232–256 (1968).
3. BRAMBLE, J.H., & B.E. HUBBARD, A priori bounds on the discretization error in the numerical solution of the Dirichlet problem. Contributions to Differential Equations **2**, 229–252 (1963).
4. BRAMBLE, J.H., & B.E. HUBBARD, A theorem on error estimation for finite difference analogues of the Dirichlet problem for elliptic equations. Contributions to Differential Equations **2**, 319–340 (1963).
5. BRAMBLE, J. H., & B. E. HUBBARD, Approximation of solutions of mixed boundary value problems for Poisson's equation by finite differences. J. Association for Computing Machinery **12**, 114–123 (1965).
6. BRAMBLE, J. H., & L. E. PAYNE, Bounds for solutions of second-order elliptic partial differential equations. Contributions to Differential Equations **1**, 95–127 (1963).

7. Bramble, J. H., R. B. Kellogg, & V. Thomée, On the rate of convergence of some difference schemes for second order elliptic equations. Technical Note BN-534, Inst. for Fluid Dynamics and Appl. Math., University of Maryland, 1968.
8. Céa, J., Approximation variationnelle des problèmes aux limites. Ann. Inst. Fourier, **14**, 345—444 (1964).
9. Courant, R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. Bull. Amer. Math. Soc. **49**, 1—23 (1943).
10. Demjanovic, Ju. K., The net method for some problems in mathematical physics. Dokl. Akad. Nauk SSSR **159** (1964); Soviet Math. **5**, 1452—1456 (1964).
11. Demjanovic, Ju. K., Approximation and convergence of the net method in elliptic problems. Dokl. Akad. Nauk SSSR **170** (1966); Soviet Math. **7**, 1129—1133 (1966).
12. Fix, G., Higher-order Rayleigh-Ritz approximations. J. Math. Mech. **18**, 645—657 (1969).
13. Friedrichs, K. O., & H. B. Keller, A Finite Difference Scheme for Generalized Neumann Problems. In: Numerical Solution of Partial Differential Equations. New York: Academic Press 1966, S. 1—19.
14. Helfrich, H. P., Optimale lineare Approximation beschränkter Mengen in normierten Räumen. Erscheint demnächst.
15. Hubbard, B. E., Remarks on the Order of Convergence in the Discrete Dirichlet Problem. In: Numerical Solution of Partial Differential Equations. New York: Academic Press 1966, S. 21—34.
16. Katsanis, Th., A numerical method for the solution of certain Neumann problems. SIAM J. Appl. Math. **16**, 723—731 (1968).
17. Kellogg, R. B., Difference equations on a mesh arising from a general triangulation. Math. Comp. **18**, 203—210 (1964).
18. Kellogg, R. B., An error estimate for elliptic difference equations on a convex polygon. SIAM J. Numer. Anal. **3**, 79—90 (1966).
19. Laasonen, P., On the solution of Poisson's difference equation. J. the Association for Computing Machinery **5**, 370—382 (1958).
20. Lorentz, G. G., Approximation of Functions. New York: Holt, Rinehart and Winston 1966.
21. Mihlin, C. G., Some properties of polynomial approximations according to Ritz. Dokl. Akad. Nauk SSSR **180**, 276—278 (1968); Soviet Math. **9**, 614—616 (1968).
22. Necas, J., Les méthodes discrètes en théorie des équations élliptiques. Paris: Masson & Cie. Academia Prague 1967.
23. Nitsche, J., Zur Frage optimaler Fehlerschränken bei Differenzenverfahren. Rend. Circ. Mat. Palermo **16**, 69—80 und 233—238 (1967).
24. Nitsche, J., Ein Kriterium für die Quasi-Optimalität des Ritzschen Verfahrens. Numer. Math. **11**, 346—348 (1968).
25. Nitsche, J. A., & J. C. C. Nitsche, Error estimates for the numerical solution of elliptic differential equations. Arch. Rational Mech. Anal. **5**, 293—306 (1960).
26. Oganesjan, L. A., Convergence of difference schemes in case of improved approximation of the boundary. Z. Vycisl. Mat. i Mat. Fiz. **6**, 1029—1042 (1966).
27. Sobolev, S. L., Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics. Am. Math. Soc., Providence, 1963.
28. Thomée, V., On the convergence of difference quotients in elliptic problems. Technical Note BN-537, Chalmers Institute of Technology, Göteborg, Apıil 1968.
29. Veidinger, L., Über die Abschätzung des Fehlers bei finiten Differenzen. Stud. Sci. Mat. Hungarica **2**, 185—191 (1967).
30. Zlamal, M., On the finite element method. Numer. Math. **12**, 394—409 (1968).

Institut für Angewandte Mathematik der
Universität Freiburg i. Brsg.

*(Eingegangen am 20. September 1969)*