Variationsprinzipien bei nichtlinearen Eigenwertaufgaben

K. P. HADELER

Vorgelegt von L. COLLATZ

Zur Bestimmung der Eigenwerte eines vollstetigen symmetrischen Operators auf einem Hilbertraum gibt es drei wichtige Variationsprinzipien: das Rayleighsche Maximum-Prinzip (mit Orthogonalisierung zu den bereits bestimmten Eigenvektoren), das Fischer-Courant-Weylsche Minimum-Maximum-Prinzip (Maximum mit Nebenbedingungen, in die die Eigenvektoren nicht eingehen) und das Poincaré-Ritzsche Maximum-Minimum-Prinzip (Minimum auf endlichdimensionalem Teilraum). Das zum Extremum gemachte Funktional ist dabei jedes Mal der Rayleigh-Quotient. Zum Existenzbeweis für die Eigenwerte benutzt man zumeist das Rayleighsche Prinzip.

Unter einer „nichtlinearen Eigenwertaufgabe" verstehen wir eine Abbildung T der reellen Achse in den Raum der symmetrischen Operatoren auf einem Hilbertraum. Ein Wert α heißt Eigenwert von T, wenn ein $x \neq 0$ mit $T(\alpha)x=0$ existiert. Das einfachste Beispiel einer solchen Funktion ist $T(\alpha)=\alpha E-A$, wobei A ein symmetrischer Operator ist (lineare Eigenwertaufgabe).

Die Frage nach der Gesamtheit der Eigenwerte erscheint bei beliebigen, insbesondere bei nicht analytischen Funktionen nicht sehr sinnvoll. Wir schränken das Problem in folgender Weise ein: Ein Rayleigh-Funktional ist ein homogenes Funktional p, das für $x \neq 0$ der Gleichung $\big(T(p(x))\,x, x\big)=0$ genügt. Dies ist gerade die charakteristische Eigenschaft des Rayleigh-Quotienten im linearen Fall. Wir geben ein Paar T, p vor und fragen nach der Gesamtheit der Eigenwerte von T, die im Wertebereich von p liegen.

Im Falle eines endlichdimensionalen Raumes wurden solche Aufgaben von ROGERS [3] untersucht. Er bewies die Existenz von Eigenwerten über ein Minimum-Maximum-Prinzip. In [1] wurde diesem Prinzip ein Rayleighsches Prinzip an die Seite gestellt. Hier betrachten wir den Fall eines beliebigen Hilbertraumes. Mit Hilfe eines Rayleighschen Prinzips führen wir einen Existenzbeweis für die Eigenwerte. Dabei sind die zugelassenen Vektoren zu den schon bestimmten Eigenvektoren orthogonal im Sinne eines verallgemeinerten, i.a. nicht bilinearen Skalarproduktes. Aus diesem Beweis ergeben sich auch die anderen eingangs genannten Charakterisierungen, so daß formal die gleichen Variationsprinzipien wie bei der gewöhnlichen Eigenwertaufgabe gelten.

Beim Beweis verwenden wir einige Gedanken aus einer Arbeit von TURNER [4] über ein spezielles quadratisches Büschel.

Von den zahlreichen Arbeiten über quadratische Büschel führen wir nur die von LANGER [2] als eine der neuesten an. Die bei diesem Spezialfall mögliche Linearisierung (nach WIELANDT, vgl. [1]) sowie die von KREIN und LANGER benutzte Theorie der Pontrjaginschen Räume (mit indefinitem, aber bilinearem

Skalarprodukt) lassen sich wohl nicht auf den hier betrachteten allgemeinen Fall übertragen.
Wir erläutern zwar die Voraussetzungen an Beispielen, bringen aber keine numerischen Ergebnisse. Einige Beispiele für die praktische Anwendung werden an anderer Stelle erscheinen [5].

1. Voraussetzungen

$\mathscr{H}$ sei komplexer Hilbertraum (u. U. endlichdimensional), $\mathfrak{H}$ sei der reelle lineare Raum der beschränkten symmetrischen Operatoren auf $\mathscr{H}$. Das innere Produkt wird mit $(\,,\,)$, die Normen auf $\mathscr{H}$ und $\mathfrak{H}$ werden mit $\|\ \|$ bezeichnet. Elemente von $\mathscr{H}$ heißen $x, y, \ldots$, komplexe (bzw. reelle) Zahlen $\alpha, \beta, \ldots$. Sei $(c, d) \subset R^1$ ein (eventuell unendliches) Intervall. Sei T eine (bezüglich der Operatornorm) einmal stetig differenzierbare Funktion

$$T\colon\ (c,d) \to \mathfrak{H}. \tag{1}$$

Die Ableitung von T heiße T'.

Sei $[a, b] \subset (c, d)$ ein endliches Teilintervall, sei

$$p\colon\ \mathscr{H} - \{0\} \to [a,b] \tag{2}$$

ein reelles, stetiges Funktional mit

$$p(\alpha x) = p(x), \qquad \alpha \neq 0, \qquad x \neq 0. \tag{3}$$

p heiße verallgemeinerter Rayleigh-Quotient oder Rayleigh-Funktional. Der Wertebereich von p heiße W, sein topologischer Abschluß $\overline{W}$. W ist zusammenhängend.

p und T seien durch die folgende Bedingung verknüpft,

$$(T(p(x))\,x, x) = 0 \qquad \forall x \neq 0. \tag{4}$$

Es gelte die Implikation

$$\alpha \in \overline{W}, \quad x \neq 0, \quad (T(\alpha)\,x, x) = 0 \;\Rightarrow\; (T'(\alpha)\,x, x) > 0. \tag{5}$$

Hieraus folgt mit (4) insbesondere

$$(T'(p(x))\,x, x) > 0 \qquad \forall x \neq 0. \tag{6}$$

Sei

$$M = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(p(x))\,x\| \cdot \|x\|}{(T'(p(x))\,x, x)} < \infty. \tag{7}$$

Seien

$$r\colon\ [a,b] \to R^1 \quad \text{und} \quad V\colon\ [a,b] \to \mathfrak{H}$$

stetige Abbildungen, sei $V(\alpha)$ vollstetig $\forall \alpha \in [a, b]$ und

$$T(\alpha) = r(\alpha)\,E - V(\alpha) \qquad \forall \alpha \in [a,b]. \tag{8}$$

Sei

$$m = \sup_{x \neq 0} p(x) \tag{9}$$

und

$$r(m) > 0. \tag{10}$$

Bemerkungen. Der Beweis von Lemma 1 zeigt unter den Voraussetzungen (1) bis (4) und (6) für $\alpha \in W$ und $x \neq 0$ die Äquivalenz $(T(\alpha)\,x, x)=0 \Leftrightarrow p(x)=\alpha$. Die Bedingung (5) ist also schon erfüllt, wenn man (6) fordert und (5) nur für solche Randpunkte von W, die nicht zu W gehören. Ist $\dim \mathscr{H} < \infty$, so ist $W=\overline{W}$ und daher (5) mit (6) äquivalent. Für $\dim \mathscr{H} < \infty$ folgt (7) schon aus (6) und der Stetigkeit von p, und (8), (9), (10) können mit $r(\alpha) \equiv 1$ erfüllt werden. Voraussetzung (7) sichert die gleichmäßige Stetigkeit von p auf der Einheitskugel. Die Forderung der gleichmäßigen Stetigkeit würde für den Beweis von Satz 4 genügen, ist aber für die Anwendung unhandlicher als (7).

Im allgemeinen werden die Voraussetzungen in folgender Weise realisiert sein: T ist gegeben, $[a, b]$ ist ein geeignetes Intervall. Für $x \neq 0$ besitzt die Gleichung $(T(\alpha)\,x, x)=0$ in $[a, b]$ genau eine Lösung $\alpha=\alpha(x)$. Mit $p(x)=\alpha(x)$ sind dann schon (2), (3), (4) erfüllt.

Für $A \in \mathfrak{H}$ sei $\sigma(A)$ das Spektrum im üblichen Sinne. Als Spektrum der Funktion T (bezüglich p) definieren wir

$$\sigma(T)=\{\alpha \in \overline{W}\colon\ 0 \in \sigma(T(\alpha))\}. \tag{11}$$

Ein Wert $\alpha \in \sigma(T)$ heiße Eigenwert von T, falls 0 Eigenwert von $T(\alpha)$ ist, d.h. falls es $x \neq 0$ mit $T(\alpha)\,x=0$ gibt. Der Vektor x heißt dann Eigenvektor zum Eigenwert α.

Lemma 1 zeigt, daß das Rayleigh-Funktional p durch die Vorgabe von T und W eindeutig bestimmt ist. Schreibt man W nicht vor, so gibt es im allgemeinen mehrere Funktionale. Aus dem „Gesamtspektrum" $\{\alpha \in (c, d)\colon 0 \in \sigma(T(\alpha))\}$ wird durch p ein gewisser Teil ausgesondert. Entsprechendes gilt für eine analytische Abbildung der komplexen Ebene in die Algebra aller Operatoren auf $\mathscr{H}$.

Beispiel 1. Sei $(c, d)=(-\infty, +\infty)$, $A \in \mathfrak{H}$, $T(\alpha)=\alpha E - A$, $[a, b]=[-\|A\|, \|A\|]$, $p(x)=(Ax, x)/(x, x)$. Es ist $T'(\alpha)=E$,

$$M^2=\sup_{x \neq 0} \frac{(Ax, Ax)(x, x)-(Ax, x)^2}{(x, x)^2} \leqq \|A\|^2.$$

In diesem Falle beweist man unmittelbar

$$|p(x)-p(y)| \leqq |(A(x+y), x-y)| \leqq 2\,\|A\| \cdot \|x-y\| \qquad \forall x, y \quad \text{mit} \quad \|x\|=\|y\|=1.$$

Wenn A vollstetig ist und einen positiven Eigenwert besitzt, sind alle Voraussetzungen erfüllt. Es ist $\sigma(T)=\sigma(A)$.

Beispiel 2. Sei $(c, d)=(-\infty, +\infty)$, seien $A, B \in \mathfrak{H}$, sei B positiv definit, $T(\alpha)=\alpha^2 E - \alpha A - B$, $[a, b]=[0, 1+\|A\|+\|B\|]$,

$$p(x)=\frac{1}{2(x, x)}\left[\{(Ax, x)^2+4(Bx, x)(x, x)\}^{\frac{1}{2}}+(Ax, x)\right].$$

Dann ist $\sigma(T)$ das nichtnegative Spektrum des quadratischen Büschels T bzw. des Operators

$$\begin{bmatrix} 0 & E \\ B & A \end{bmatrix}$$

auf $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$. Es gilt

$$M \leqq 2(\|A\|+\|B\|^{\frac{1}{2}}). \tag{12}$$

Sind A, B vollstetig, so sind alle Voraussetzungen erfüllt. Statt (10) gilt sogar $r(\alpha)>0 \quad \forall\, \alpha\in W$.

Beweis von (12). Sei $\|x\|=1$, $\alpha=p(x)$. Dann ist $\delta=(T'(\alpha)\,x,x)=\{(Ax,x)^2+4(Bx,x)\}^{\frac{1}{2}}$ und $\alpha/\delta\leqq 1$. Mit $u=\|A\|$, $v^2=\|B\|$ und $\alpha\leqq\frac{1}{2}\,[\{u^2+4\,v^2\}^{\frac{1}{2}}+u]\leqq u+v$ folgt

$$\begin{aligned}(T(\alpha)\,x,\,T(\alpha)\,x)/\delta^2 &\leqq \alpha^2+2\alpha\,|(Ax,x)|+2(Bx,x)+(A^2x,x)\\ &\quad+2\,|(Ax,Bx)|/\delta+(B^2x,x)/\delta^2\\ &\leqq (u+v)^2+2(u+v)\,u+2v^2+u^2+uv+v^2/4\leqq 4(u+v)^2.\end{aligned}$$

Analoge Betrachtungen kann man z.B. für $T(\alpha)=\alpha^s E-\alpha A-B$, $s\geqq 1$ und allgemeinere Aufgaben vom Typ

$$T(\alpha)=\sum_{k=1}^{n} q_k(\alpha)\,A_k$$

anstellen (vgl. [1], Nr. 9).

2. Hilfssätze

Die Lemmata 1, 2 stammen im wesentlichen (d.h. für $\alpha\in W$) von E.H. ROGERS [3]. Für sie benötigen wir nur die Voraussetzungen (1) bis (6).

Lemma 1. *Sei* $\alpha\in\overline{W}$ *und* $x\neq 0$. *Dann gilt*

$$p(x)<\alpha\Leftrightarrow(T(\alpha)\,x,x)>0, \tag{13}$$

$$p(x)=\alpha\Leftrightarrow(T(\alpha)\,x,x)=0, \tag{14}$$

$$p(x)>\alpha\Leftrightarrow(T(\alpha)\,x,x)<0. \tag{15}$$

Beweis. 1) Sei $\alpha\in W$. Wir zeigen „$\Rightarrow$" in Formel (15). Es gibt $y\neq 0$ mit $p(y)=\alpha$, $(T(\alpha)\,y,y)=0$. Angenommen, es gibt $z\neq 0$, $p(z)>\alpha$, $(T(\alpha)\,z,z)\geqq 0$. Wir können $(T(\alpha)\,y,z)\geqq 0$ annehmen. Wegen (3) und $p(z)>p(y)$ ist $x_\lambda=(1-\lambda)\,y+\lambda z\neq 0$, $0\leqq\lambda\leqq 1$. Es ist

$$(T(\alpha)\,x_\lambda,x_\lambda)=2\lambda(1-\lambda)(T(\alpha)\,y,z)+\lambda^2(T(\alpha)\,z,z)\geqq 0,$$

$$(T(p(x_\lambda))\,x_\lambda,x_\lambda)=0,\qquad (T'(p(x_\lambda))\,x_\lambda,x_\lambda)>0.$$

Da $p(y)=\alpha$, $p(z)>\alpha$ und $p(x_\lambda)$ stetig in λ ist, gibt es $\lambda_0\in[0,1]$ mit $p(x_{\lambda_0})=\alpha$, $p(x_\lambda)>\alpha\ \forall\,\lambda\in(\lambda_0,1]$.

Sei $\lambda\in(\lambda_0,1]$ fest gewählt und $g(\beta)=(T(\beta)\,x_\lambda,x_\lambda)$, also $g(p(x_\lambda))=0$, $g'(p(x_\lambda))>0$, $g(\alpha)\geqq 0$. Es gibt eine Zwischenstelle β_λ mit $\alpha\leqq\beta_\lambda\leqq p(x_\lambda)$ und $g'(\beta_\lambda)=0$, d.h. $(T'(\beta_\lambda)\,x_\lambda,x_\lambda)=0$. Mit $\lambda\to\lambda_0+$ folgt $p(x_\lambda)\to p(x_{\lambda_0})=\alpha$, und daher $(T'(p(x_{\lambda_0}))\,x_{\lambda_0},x_{\lambda_0})=0$ im Widerspruch zu (6). Analog beweist man „$\Rightarrow$" in Formel (13). Die restlichen Behauptungen folgen dann mit (4).

2) Sei α Randpunkt von W. Wir führen die Betrachtung nur für den rechten Randpunkt ($\alpha=m$) durch. Sei $(T(\alpha)\,x,x)=0$ und $p(x)<\alpha$. Die Funktion $g(\beta)=(T(\beta)\,x,x)$ hat die Eigenschaften $g(p(x))=0$, $g'(p(x))>0$, $g(\alpha)=0$. Zwischen $p(x)$ und α liegt nach (14) keine Nullstelle, folglich $g'(\alpha)\leqq 0$ im Widerspruch zu (5). Also ist $p(x)=\alpha$. Hieraus und aus (4) folgt (14). Sei $p(x)<\alpha$. Dann gilt für jedes β

mit $p(x)<\beta<\alpha$ wegen $\beta\in W$ nach (13) $(T(\beta)\,x, x)>0$, also $(T(\alpha)\,x, x)\geqq 0$. Mit (14) folgt $(T(\alpha)\,x, x)>0$.

Lemma 2. *$x_1, \ldots, x_j$ seien Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_j$. Dann sind sie linear unabhängig und es gilt*

$$\alpha_1>p(x_1+\cdots+x_j)>\alpha_j. \tag{16}$$

Beweis. Nach (14) ist $p(x_k)=\alpha_k$, $k=1, \ldots, j$.

1) Ist $x\neq 0$ und $p(x)\neq\alpha_1$, so sind x und x_1 nach (3) linear unabhängig. Also sind x_1 und x_2 unabhängig. Für $y=x_1+x_2$ ist $(T(\alpha_2)\,y, y)=(T(\alpha_2)\,x_1, x_1)<0$, also $\alpha_2<p(y)$. Analog folgt $p(y)<\alpha_1$.

2) Sei schon für ein $k<j$ gezeigt, daß $y=x_1+\cdots+x_k\neq 0$ und $\alpha_1>p(y)>\alpha_k$ ist. Aus $\alpha_k>\alpha_{k+1}$ folgt $p(y)>\alpha_{k+1}$. Wie unter 1) folgt $(T(\alpha_{k+1})(y+x_{k+1}), y+x_{k+1})=(T(\alpha_{k+1})\,y, y)<0$, also $p(y+x_{k+1})>\alpha_{k+1}$. Analog zeigt man die andere Ungleichung.

Lemma 3. *Sei neben* (1) *bis* (6) *auch* (7) *erfüllt. Dann gilt*

$$|p(x)-p(y)|\leqq 2\sqrt{2}\,M\,\|x-y\| \qquad \forall\, x, y \quad \textit{mit} \quad \|x\|=\|y\|=1. \tag{17}$$

Beweis. Es gibt μ mit $|\mu|=1$, $\tilde{y}=\mu y$, so daß $(x, \tilde{y})\geqq 0$ und damit

$$\|x-\tilde{y}\|^2=2-2(x, \tilde{y})\leqq 2-2\,\mathrm{Re}(x, y)=\|x-y\|^2.$$

Wegen $p(\tilde{y})=p(y)$ genügt es also, (17) für linear unabhängige x, y mit $(x, y)\geqq 0$ zu zeigen. Der von x, y erzeugte *reelle* Raum F ist mit $(\,,\,)$ ein reeller euklidischer Raum. Für $0\leqq\lambda\leqq 1$ sei $z_\lambda=\lambda x+(1-\lambda)\,y$. Dann ist

$$\|z_\lambda\|^2\geqq\lambda^2+(1-\lambda)^2\geqq 1/2. \tag{18}$$

Sei $\hat{p}$ die Restriktion von p auf F. Aus (4), (6) folgt, daß $\operatorname{grad}\hat{p}|_z$ für $z\neq 0$ existiert und durch

$$\big(T'(\hat{p}(z))\,z, z\big)\operatorname{grad}\hat{p}|_z+2\,T(\hat{p}(z))\,z=0 \tag{19}$$

gegeben wird. Sei $q(\lambda)=p(z_\lambda)$, $0\leqq\lambda\leqq 1$. Es gilt

$$\hat{p}(x)-\hat{p}(y)=q(1)-q(0)=\frac{dq}{d\lambda}\bigg|_{\tilde{\lambda}}=\big([\operatorname{grad}\hat{p}|_{z_{\tilde{\lambda}}}], x-y\big), \qquad 0\leqq\tilde{\lambda}\leqq 1.$$

Daraus folgt mit der Schwarzschen Ungleichung und (19)

$$|p(x)-p(y)|\leqq 2\,\frac{\|T(p(z_{\tilde{\lambda}}))\|}{\big(T'(p(z_{\tilde{\lambda}}))\,z_{\tilde{\lambda}}, z_{\tilde{\lambda}}\big)}\,\|x-y\|$$

und dann mit (18) die Behauptung.

Aus (17) folgt die gleichmäßige Stetigkeit von p in jedem Bereich $\{x\colon \|x\|\geqq s\}$ mit $s>0$.

3. Verallgemeinerte Orthogonalität

Der Funktion T bzw. der Eigenwertaufgabe $T(\alpha)\,x=0$ läßt sich ein verallgemeinertes inneres Produkt $[\,,\,]$ zuordnen, das im Falle $T(\alpha)=\alpha E-A$ gerade das gewöhnliche Skalarprodukt $(\,,\,)$ ist.

Für $\alpha, \beta \in [a, b]$ sei

$$\Delta(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-\beta}[T(\alpha)-T(\beta)], & \alpha \neq \beta \\ T'(\alpha) & , \alpha = \beta \end{cases}. \tag{20}$$

Für $x, y \in \mathscr{H}$ sei

$$[x, y] = \begin{cases} (\Delta(p(x), p(y))x, y), & x, y \neq 0 \\ 0, & x \text{ oder } y = 0 \end{cases}. \tag{21}$$

Das verallgemeinerte Skalarprodukt ist (anti-)symmetrisch, definit und homogen, aber i.a. nicht bilinear.

Seien x, y Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\alpha, \beta \in \overline{W}$. Dann ist $T(\alpha)x = 0$, $T(\beta)y = 0$, $(T(\alpha)x, x) = (T(\beta)y, y) = 0$, nach (14) ist $p(x) = \alpha$, $p(y) = \beta$, folglich $[x, y] = 0$. Sind andererseits $x_1, \ldots, x_j$ linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert α, so ist $[\,,\,] = (T'(\alpha)\,,\,)$ in dem von ihnen erzeugten linearen Raum ein gewöhnliches inneres Produkt, man kann also eine bezüglich $[\,,\,]$ orthonormale Basis finden.

4. Das Rayleigh-Prinzip

Wie bei der linearen Funktion $T(\alpha) = \alpha E - A$ mit symmetrischem und vollstetigem A können wir auch im allgemeinen Fall die Eigenwerte durch ein Rayleighsches Maximumprinzip charakterisieren und zugleich ihre Existenz beweisen.

Satz 4. *Die Voraussetzungen* (1) *bis* (10) *seien erfüllt. Dann gibt es eine Folge von endlich vielen oder abzählbar unendlich vielen Eigenwerten*

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots$$

aus $\sigma(T)$ mit zugehörigen Eigenvektoren $x_1, x_2, \ldots$ Diese Eigenvektoren kann man so wählen, daß sie durch

$$[x_j, x_k] = \delta_{jk}, \qquad j, k = 1, 2, \ldots \tag{22}$$

orthonormiert sind. Sind die Eigenvektoren so festgelegt, so können die Eigenwerte rekursiv durch

$$\alpha_{j+1} = \max_{\substack{[x_k, x] = 0 \\ k = 1, \ldots, j \\ x \neq 0}} p(x), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{23}$$

bestimmt werden. (Für $j = 0$ fällt die Orthogonalitätsbedingung fort.)

Im Falle $\dim \mathscr{H} = q < \infty$ *ergibt sich die Existenz von genau q Eigenwerten (Vielfachheiten entsprechend gezählt).*

Wir führen den Beweis durch Induktion.

1) Induktionsanfang. Nach (9) existiert das Supremum m von p. Nach (13), (14) ist $(T(m)x, x) \geqq 0$, $\forall x \in \mathscr{H}$. Ist $\alpha \in W$, so gibt es $x \neq 0$ mit $(T(\alpha)x, x) = 0$. Also wird $T(m)$ durch nicht definite Operatoren $T(\alpha)$ approximiert. Daher ist

$$0 \in \sigma(T(m)), \qquad r(m) \in \sigma(V(m)).$$

Da $V(m)$ vollstetig ist und $r(m) > 0$, ist $r(m)$ Eigenwert von $V(m)$. Es gibt $y \neq 0$ mit $0 = r(m)y - V(m)y = T(m)y$. Nach (14) ist $p(y) = m$. Wir setzen $\alpha_1 = m$ und $x_1 = y/[y, y]^{\frac{1}{2}}$.

2) Induktionsannahme. Seien schon Eigenwerte

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_j \tag{24}$$

mit Eigenvektoren x_k, $[x_k, x_l] = \delta_{kl}$, $k, l = 1, \ldots, j$, gefunden, die

$$\alpha_k = \max_{\substack{[x_l, x]=0 \\ l=1,\ldots,k-1}} p(x), \qquad k=1,\ldots,j \tag{25}$$

erfüllen. Sei $j < \dim \mathscr{H}$. Für $\alpha \in [a, b]$ definieren wir mit (20) lineare Funktionale $\varphi_{\alpha,k}$,

$$\varphi_{\alpha,k}(x) = (\Delta(\alpha, \alpha_k)\, x_k, x), \qquad k=1,\ldots,j. \tag{26}$$

Die Abbildung $\alpha \to \varphi_{\alpha,k}$ von $[a, b]$ in $\mathscr{H}$ ist stetig bezüglich der Normtopologie. Sei $A(\alpha)$ die Matrix

$$A(\alpha) = (a_{kl}(\alpha)), \qquad a_{kl}(\alpha) = \varphi_{\alpha,k}(x_l), \qquad k, l = 1, \ldots, j. \tag{27}$$

Behauptung. $\alpha \in W$, $\alpha \leqq \alpha_j \Rightarrow \det(A(\alpha)) \neq 0$.

Beweis. Für $\alpha < \alpha_j$ ist

$$A(\alpha) = ((\alpha - \alpha_k)^{-1}\, \delta_{ki})((T(\alpha)\, x_i, x_l)).$$

Die Diagonalmatrix ist nichtsingulär. Aus Lemma 2 folgt

$$x = \sum_{k=1}^{j} c_k x_k \neq 0 \Rightarrow p(x) \geqq p(x_j) = \alpha_j > \alpha$$

$$\Rightarrow 0 > (T(\alpha)\, x, x) = \sum_{i,l=1}^{j} (T(\alpha)\, x_i, x_l)\, c_i \bar{c}_l,$$

daher ist $((T(\alpha)\, x_i, x_l))$ negativ definit.

Für $\alpha = \alpha_j = \cdots = \alpha_{h+1} < \alpha_h \leqq \cdots \leqq \alpha_1$ ist

$$A(\alpha) = \left[\begin{array}{c:c} (\alpha - \alpha_k)^{-1}\, \delta_{ki} & 0 \\ \hdashline 0 & \delta_{ki} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} (T(\alpha)\, x_i, x_l) & 0 \\ \hdashline (T'(\alpha)\, x_i, x_l) & \delta_{il} \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, h \\ \}\, j-h \end{array},$$

also ist $A(\alpha_j)$ ebenfalls nichtsingulär.

Die $\varphi_{\alpha,k}$ besitzen also für $\alpha \in W$, $\alpha \leqq \alpha_j$, einen gemeinsamen Nullraum

$$\mathscr{H}_\alpha = \{x \colon \varphi_{\alpha,k}(x) = 0,\ k = 1, \ldots, j\} \tag{28}$$

mit $\operatorname{codim} \mathscr{H}_\alpha = j$. Sei P_α die orthogonale Projektion $P_\alpha \colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}_\alpha$. Die Abbildung $\alpha \to P_\alpha$ ist (Norm-)stetig für $\alpha \in W$, $\alpha \leqq \alpha_j$.

Es sei bereits für $k = 1, \ldots, j$ die Gleichheit

$$\alpha_k = \sup_{\substack{\varphi_{\alpha_k, l}(x) = 0 \\ l=1,\ldots,k-1}} p(x) \tag{29}$$

gezeigt. (29) ist ein „benachbartes" Extremalproblem mit linearen Nebenbedingungen.

Für den Fall $k=1$, also im Induktionsanfang, stimmt (29) mit (25) überein.

3) Induktionsschluß. Sei

$$\bar{m} = \sup_{\substack{[x_k, x]=0 \\ k=1,\ldots,j}} p(x). \tag{30}$$

Für $\alpha \in [\bar{m}, \alpha_j]$ definieren wir

$$f(\alpha) = \sup_{\substack{\varphi_{\alpha,k}(x)=0 \\ k=1,\dots,j}} p(x). \tag{31}$$

Wir betrachten den Fall $\alpha = \bar{m}$. Sei $\{y_n\}$ eine Maximalfolge für (30),

$$\|y_n\| = 1, \quad [x_k, y_n] = 0, \quad k = 1, \dots, j, \quad p(y_n) \to \bar{m}. \tag{32}$$

Die Folge $\{\tilde{y}_n\}$,

$$\tilde{y}_n = y_n + \sum_{l=1}^{j} c_{nl} x_l, \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{33}$$

ist durch die Forderungen

$$0 = \varphi_{\bar{m},k}(\tilde{y}_n) = \varphi_{\bar{m},k}(y_n) + \sum_{l=1}^{j} c_{nl} \varphi_{\bar{m},k}(x_l), \qquad k = 1, \dots, j, \tag{34}$$

eindeutig bestimmt, da ja die Matrix $A(\bar{m})$ nichtsingulär ist. Wegen $p(y_n) \to \bar{m}$ gilt $|\varphi_{\bar{m},k}(y_n)| = |[x_k, y_n] - \varphi_{\bar{m},k}(y_n)| \to 0$ für $n \to \infty$. Da $A(\bar{m})$ nicht von n abhängt, folgt

$$\|y_n - \tilde{y}_n\| \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty. \tag{35}$$

Mit (17) folgt $|p(y_n) - p(\tilde{y}_n)| \to 0$, $p(\tilde{y}_n) \to \bar{m}$. Daher ist

$$f(\bar{m}) \geqq \bar{m}. \tag{36}$$

Andererseits ist nach (31) und (29)

$$f(\alpha_j) = \sup_{\substack{\varphi_{\alpha_j,l}(x)=0 \\ l=1,\dots,j-1 \\ (T'(\alpha_j)x_j, x)=0}} p(x) \leqq \sup_{\substack{\varphi_{\alpha_j,l}(x)=0 \\ l=1,\dots,j-1}} p(x) = \alpha_j. \tag{37}$$

Die Funktion $f = f(\alpha)$ ist in $[\bar{m}, \alpha_j]$ wohldefiniert und stetig, da P_α stetig von α abhängt. Wegen (36), (37) gibt es ein $\gamma \in [\bar{m}, \alpha_j]$ mit

$$\gamma = f(\gamma) = \sup_{\substack{\varphi_{\gamma,k}(x)=0 \\ k=1,\dots,j}} p(x) = \sup_{x \in \mathscr{H}_\gamma} p(x). \tag{38}$$

Seien $\tilde{p}$, $\tilde{V}(\alpha)$, $\tilde{T}(\alpha)$ die Restriktionen von p, $P_\gamma V(\alpha) P_\gamma$, $P_\gamma T(\alpha) P_\gamma$ auf $\mathscr{H}_\gamma$. Das Paar $\tilde{p}$, $\tilde{T}$ erfüllt trivialerweise die Voraussetzungen (1) bis (8). Die Definition (9) ist durch (38) zu ersetzen. Eine (10) entsprechende Aussage über $r(\gamma)$ ist nicht gegeben. Wie beim Induktionsanfang schließen wir

$$(\tilde{T}(\gamma) x, x) \geqq 0 \qquad \forall x \in \mathscr{H}_\gamma. \tag{39}$$

Falls nicht der triviale Fall $\tilde{p} = \text{const.}$ vorliegt, wird $\tilde{T}(\gamma)$ durch nicht definite Operatoren $\tilde{T}(\alpha)$, $\alpha \to \gamma$, approximiert, also ist $0 \in \sigma(\tilde{T}(\gamma))$, $r(\gamma) \in \sigma(\tilde{V}(\gamma))$.

Fall 1. $r(\gamma) > 0$. (Im Falle $\dim \mathscr{H} < \infty$ können wir stets $r \equiv 1$ annehmen.) Dann gibt es $z \in \mathscr{H}_\gamma$, $z \neq 0$,

$$\tilde{V}(\gamma) z = r(\gamma) z, \quad \text{d.h.} \quad P_\gamma [V(\gamma) z - r(\gamma) z] = 0 \tag{40}$$

oder

$$(T(\gamma) z, x) = 0 \qquad \forall x \in \mathscr{H}_\gamma. \tag{41}$$

Nun ist codim $\mathscr{H}_\gamma = j$, die Vektoren $x_1, \ldots, x_j$ sind linear unabhängig und liegen alle nicht in $\mathscr{H}_\gamma$. Also spannen $x_1, \ldots, x_j$ und $\mathscr{H}_\gamma$ zusammen ganz $\mathscr{H}$ auf. Aus (20), (26) folgt

$$\big(T(\gamma)\, z, x_k\big) = (\gamma - \alpha_k)\, \overline{\varphi_{\gamma,k}(z)} = 0, \qquad k = 1, \ldots, j, \tag{42}$$

aus (41), (52) ergibt sich $T(\gamma)\, z = 0$.

Nach (36) ist $\gamma \geqq \bar{m}$, nach (38) ist

$$[x_k, z] = \varphi_{\gamma,k}(z) = 0, \qquad k = 1, \ldots, j, \tag{43}$$

also $\gamma \leqq \bar{m}$ nach (30). Damit ist $\gamma = \bar{m}$. Wir können $\alpha_{j+1} = \bar{m}$ und $x_{j+1} = z/[z, z]^{\frac{1}{2}}$ wählen. Mit (31) folgt (29) für $j+1$.

Fall 2. $r(\gamma) = 0$. Im Falle $\dim \mathscr{H} = \infty$ bricht die Folge der Eigenwerte ab. Hieraus folgt natürlich nicht, daß es keine weiteren Eigenwerte gibt. Besitzt in Beispiel 1 der Operator A nur endlich viele positive und sonst negative Eigenwerte, so liegt ein solcher Fall vor.

Fall 3. $r(\gamma) < 0$. Im Falle $\dim \mathscr{H} = \infty$ wäre $\tilde{T}(\gamma) = r(\gamma) E - \tilde{V}(\gamma)$ nicht positiv semidefinit im Widerspruch zu (39).

Im Falle $\dim \mathscr{H} = \infty$ läßt sich von vornherein keine Aussage über die Anzahl der durch Satz 4 gelieferten Eigenwerte machen. Die Bedingung

$$r(\alpha) > 0 \qquad \forall\, \alpha \in W$$

ist hinreichend dafür, daß das Verfahren von Satz 4 unendlich viele Eigenwerte ergibt (Beispiel 1, A definit).

Seien $x_1, \ldots, x_j$ mit $[x_k, x_l] = \delta_{kl}$ Eigenvektoren von T und x ein weiterer Vektor. Diese $j+1$ Vektoren seien linear unabhängig. In [1], Nr. 12, wurde gezeigt, wie man nach einem verallgemeinerten Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren in dem von $x_1, \ldots, x_j$, x eine bezüglich $[\,,\,]$ orthonormierte Basis $x_1, \ldots, x_j$, y findet. Also wird x zu $x_1, \ldots, x_j$ „orthogonalisiert“. Damit wird (23) praktisch anwendbar.

5. Minimum-Maximum-Prinzipien

Die Extremalprinzipien von Fischer-Courant-Weyl und Poincaré-Ritz lassen sich ähnlich wie im linearen Fall beweisen. Lineare Teilräume von $\mathscr{H}$ bezeichnen wir mit $M, N \ldots$, das orthogonale Komplement von N sei $N^\perp = \mathscr{H} \ominus N$. Die durch das Rayleighsche Prinzip (Satz 4) gelieferten endlich vielen oder abzählbar unendlich vielen Eigenwerte seien

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_j \geqq \cdots.$$

Für die in (9) erklärte Funktion r gelte

$$r(\alpha) > 0 \qquad \forall\, \alpha \in [\alpha_j, \alpha_1]. \tag{44}$$

Satz 5. *Der j-te Eigenwert von T wird durch*

$$\alpha_j = \min_{\substack{N \subset \mathscr{H} \\ \dim N = j-1}} \ \max_{\substack{x \in N^\perp \\ x \neq 0}} p(x) \tag{45}$$

gegeben.

Beweis. Für $j=1$ folgt die Behauptung aus (23). Sei $j>1$. Sei $x_1, \ldots, x_j$, $[x_k, x_l]=\delta_{kl}$, ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren zu $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$. Sei $N \subset \mathscr{H}$, $\dim N=j-1$. Es gibt

$$x=\sum_{k=1}^{j} c_k x_k \neq 0, \qquad x \in N^{\perp}.$$

Nach Lemma 2 ist $p(x) \geqq \alpha_j$, also

$$\sup_{x \in N^{\perp}} p(x) \geqq \alpha_j. \tag{46}$$

Sei P die orthogonale Projektion auf $N^{\perp}$. Seien $\tilde{p}$ und $\tilde{T}(\alpha)$ die Restriktionen von p bzw. $PT(\alpha)P$ auf $N^{\perp}$. Das Paar $\tilde{p}$, $\tilde{T}$ erfüllt die Voraussetzungen der Nr. 1 ((10) folgt nun aus (44)). Satz 4, angewandt auf $\tilde{T}$, zeigt, daß das Supremum in (46) angenommen wird (und gleich dem größten Eigenwert von $\tilde{T}$ ist).

Sei andererseits N das Erzeugnis der Vektoren

$$\Delta(\alpha_j, \alpha_k)\, x_k, \qquad k=1, \ldots, j-1. \tag{47}$$

Wegen $\det\{(\varphi_{\alpha_j, k}(x_l))\} \neq 0$ hat N die Dimension $j-1$. Für dieses N tritt in (46) Gleichheit ein.

Satz 6. *Für den j-ten Eigenwert von T gilt auch*

$$\alpha_j = \max_{\substack{M \subset \mathscr{H} \\ \dim M=j}} \ \min_{\substack{x \in M \\ x \neq 0}} p(x). \tag{48}$$

Beweis. Sei M, $\dim M=j$, fest gewählt, sei P die orthogonale Projektion auf M. Seien $\tilde{p}$, $\tilde{T}(\alpha)$ die Restriktionen von p, $PT(\alpha)P$ auf M. Die Eigenwerte von $\tilde{T}$ seien

$$\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \cdots \geqq \beta_j.$$

Sei r, $1 \leqq r \leqq j$, fest gewählt. Nach Satz 5 gibt es $N \subset \mathscr{H}$, $\dim N=r-1$, mit

$$\max_{x \in N^{\perp}} p(x)=\alpha_r. \tag{49}$$

Wenden wir Satz 5 auf das Paar $\tilde{p}$, $\tilde{T}$ und den Index r an, so folgt

$$\begin{aligned}\beta_r &= \min_{\substack{L \subset M \\ \dim L=r-1}} \ \max_{x \in M \ominus L} \tilde{p}(x) = \min_{\substack{L \subset \mathscr{H} \\ \dim L=r-1}} \ \max_{\substack{x \in M \\ x \in L^{\perp}}} \tilde{p}(x) \\ &\leqq \max_{\substack{x \in M \\ x \in N^{\perp}}} \tilde{p}(x) \leqq \max_{x \in N^{\perp}} p(x)=\alpha_r.\end{aligned} \tag{50}$$

Ist M der von $x_1, \ldots, x_j$ aufgespannte Teilraum von $\mathscr{H}$, so wird das Maximum in (48) angenommen.

Mit (50) haben wir etwas mehr als Satz 5 gezeigt. Wir haben bewiesen, daß beim Ritzschen Verfahren (d.h. bei Projektion auf einen endlichdimensionalen Teilraum) der r-te Näherungseigenwert eine untere Schranke für den r-ten Eigenwert ist.

Literatur

1. Hadeler, K.P., Mehrparametrige und nichtlineare Eigenwertaufgaben. Arch. Rational Mech. Anal. **27**, 306—328 (1967).
2. Langer, H., Über stark gedämpfte Scharen im Hilbertraum. J. Math. Mech. **17**, 685—705 (1968).
3. Rogers, E.H., A minimax theory for overdamped systems. Arch. Rational Mech. Anal. **16**, 89—96 (1964).
4. Turner, R.E.L., Some variational principles for a nonlinear eigenvalue problem. J. Math. Anal. Appl. **17**, 151—160 (1967).
5. Hadeler, K.P., Ritzsches Verfahren bei nichtlinearen Eigenwertaufgaben. ZAMM 48 (1968), Tagungsheft.

Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Hamburg

(Eingegangen am 22. April, 1968)