

Die Theorie der Disklinationen

KARL-HEINZ ANTHONY

Vorgelegt von J. MEIXNER

Summary*

A crystal disclination is a lattice defect which extends along a line. It is geometrically characterized by its line direction and by its "rotation failure". The rotation failure is analogous to the Burgers vector of crystal dislocations. From special cases we get the geometrical properties of crystal disclinations. By using these properties we develop a continuum theory for the self-stresses caused by disclinations. For "oriented" bodies we define a generalized disclination. Crystal disclinations as well as disclinations in oriented bodies are physically realized.

§ 1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit knüpft an eine Reihe von Arbeiten [1 – 10] an, in denen die von Versetzungen [11, 12] erzeugten Eigenspannungen eines Kristalls kontinuumstheoretisch untersucht werden. In diesen Arbeiten wird der nichtverschwindende Torsionstensor der Gitterkonnexion¹ als Quellenfunktion der inneren Spannungen betrachtet, während der verschwindende Riemannsche Krümmungstensor der Gitterkonnexion die Eindeutigkeit der Gittervektorfelder im verzerrten Zustand zum Ausdruck bringt.

Nachdem TRÄUBLE & ESSMANN [15] im zweidimensionalen Flußliniengitter von Supraleitern zweiter Art Disklinationen beobachtet haben, besteht die Notwendigkeit, neben den „Torsionsfehlstellen“ (= Versetzungen) auch „Krümmungsfehlstellen“ in die Überlegungen einzubeziehen. Krümmungsfehlstellen sind durch einen nichtverschwindenden Riemannschen Krümmungstensor der Gitterkonnexion charakterisiert. Sie sind das Thema dieser Arbeit.

Über nichtverschwindende Riemannsche Krümmungstensoren haben KONDO [17, 18] und KRÖNER [3] erste Überlegungen angestellt. KONDO befaßt sich vor allem mit der Struktur nichtkrümmungsfreier Räume. Es sei hier nur das einschlägige Stichwort "non-perfect tearing" eines allgemeinen geometrischen Raumes genannt.² – KRÖNER bringt den nichtverschwindenden Riemannschen

* Dissertation Teil II, Universität Stuttgart (TH), 1969.

¹ Im verzerrten Kristallgitter sind zwei Gittervektoren parallelverschoben im Sinne des nichteuklidischen Gitterparallelismus, wenn sie hinsichtlich des Gitters in natürlicher Weise ineinander übergeführt werden können. Der Gitterparallelismus wird durch die Gitterkonnexion beschrieben. Siehe in [13], § 5.

² KONDO *et al.* [19] deuten den nichtverschwindenden Riemannschen Krümmungstensor der Gitterkonnexion mit Hilfe einer Verteilung von Versetzungsdipolen. Dieser Auffassung steht entgegen, daß jede Anordnung von singulären Versetzungen einen absoluten Gitterparallelismus erzeugt (s. Fußnote 18). Die Verschiebung eines Gittervektors ist in der Nähe des Zentrums eines Versetzungsdipols nur scheinbar mehrdeutig: Wenn der Dipol durch Annäherung zweier Versetzungen aufgebaut wird, ist die Verschiebung eines Gittervektors auch im Dipolzentrum eindeutig bestimmt.

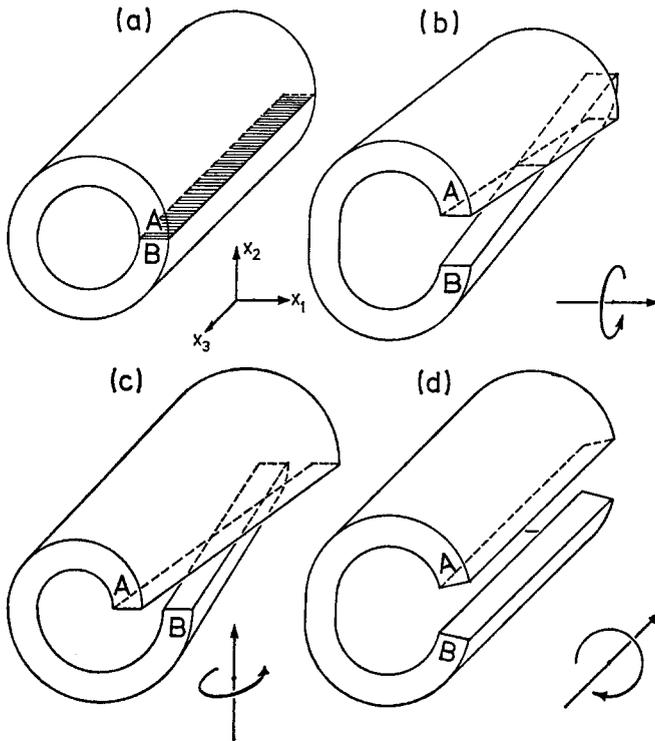


Abb. 1 a—d. Volterrasche Versetzungen³: Der Hohlzylinder wird entlang einer Mantellinie aufgeschnitten (a). Durch eine starre Verdrehung des Schnittufers *B* gegenüber dem Ufer *A* entstehen nach Ausgleich von fehlendem oder überschüssigem Material und nach Wiedervereinigung der Ufer die für Volterrasche Versetzungen vierter (b), fünfter (c) und sechster Art (d) charakteristischen Eigenspannungszustände

Krümmungstensor mit der in einem Kristall eingelagerten „Extramaterie“ in Verbindung. Die zugrundeliegende Zustandskonnexion ist von der Gitterkonnexion verschieden. Sie beschreibt damit keine Krümmungsfehlstelle in dem oben genannten Sinn.

Die Disklination hängt eng mit den Volterraschen Versetzungen vierter, fünfter und sechster Art zusammen. Diese sind in Abb. 1 veranschaulicht: Ein materieller Hohlzylinder wird entlang einer Mantellinie aufgeschnitten und das Schnittufer *B* gegenüber dem Ufer *A* starr verdreht. Nach einem Ausgleich von überschüssigem bzw. fehlendem Material wird wieder verschweißt. Der Zylinder enthält nun Eigenspannungen. In amorphem Material ist die Schnittfläche nicht mehr nachweisbar. Lassen wir den Zylinderhohlraum auf die Zylinderachse zusammenschrumpfen, so kommen wir auf die singuläre Volterrasche Versetzungslinie.

Führt man die Volterraschen Versetzungen in der beschriebenen Weise in einen Kristall ein, so entsteht an der Schnittfläche i. a. eine Korngrenze (Abb. 12).

³ Diese Abbildung wird von NABARRO [12], Fig. 1.14, übernommen.

Der Schnitt kann damit jederzeit wieder aufgefunden werden. Die Volterrasche Versetzungslinie ist Randlinie der Korngrenze. NABARRO⁴ nennt das beschriebene Gebilde eine Disklination. Wir schließen uns dieser Nomenklatur nicht an sondern beschränken die Bezeichnung „Disklination“ im Kristall auf diejenigen Sonderfälle, in denen wie bei amorphem Material die Schnittfläche nicht mehr nachweisbar ist. NABARRO⁵ hat einige Beispiele konstruiert. Sie sind dadurch ausgezeichnet, daß die Verdrehung der Schnittufer einem Symmetriewinkel des Kristallgitters entspricht.

Wir unterscheiden in dieser Arbeit zwei Grundtypen von Kristalldisklinationen: Die *Keildisklinationen* und die *Torsionsdisklinationen*. Zur ersten Sorte gehören die oben erwähnten Disklinationen im Flußliniengitter von Supraleitern. Sie entsprechen den Volterraschen Versetzungen 6. Art. Torsionsdisklinationen entsprechen den Volterraschen Versetzungen 4. und 5. Art. Sie konnten bisher noch nicht beobachtet werden.

Die Kristalldisklination ist ein von der Versetzung geometrisch unabhängiger Gitterfehler. Dagegen kann die Versetzung aus Disklinationen aufgebaut werden. Damit ist die Disklination im Vergleich zur Versetzung der primäre Gitterfehler. Diese Fragen werden in den §§3 und 4 diskutiert.

Um den Zusammenhang der Disklination mit einer Punktsymmetriegruppe deutlich hervortreten zu lassen, wird die Disklination in §2 zunächst für ein verallgemeinertes Cosseratkontinuum definiert. Dieser Paragraph ist für eine Reihe von physikalischen Problemen auch von selbständigem Interesse.

In §3 gehen wir zur Kristalldisklination über. Mit Hilfe von Burgersumläufen werden ihre geometrischen Eigenschaften ermittelt. In den §§4 und 5 wird dann an Hand dieser Eigenschaften die lineare Kontinuumstheorie der Kristalldisklinationen aufgebaut. Dabei gehen wir von der diskreten Disklination zu einer kontinuierlichen Disklinationsdichte über. Da die Disklinationen sehr große Gitterkrümmungen erzeugen, werden außer den Kraftspannungen auch Momentenspannungen in die Überlegungen einbezogen. – In §6 führen wir in linearer Näherung die Spannungsberechnung für die geradlinige singuläre Keildisklination durch. Man findet eine Kraftspannungsverteilung, die sowohl im Disklinationkern als auch im Unendlichen logarithmisch divergiert.⁶ Die Momentenspannungen sind zum Abstand vom Disklinationzentrum umgekehrt proportional.

Die nichtlineare Geometrie der Kristalldisklinationen ist das Thema der §§7 und 8.

§2. Disklinationen im verallgemeinerten Cosseratkontinuum

Wir betrachten ein verallgemeinertes dreidimensionales Cosseratkontinuum im euklidischen Raum. Jeder Punkt des zugrundeliegenden dreidimensionalen gewöhnlichen Punktkontinuums (= *Trägerkontinuum*) trägt einen *Vektor-m-Stern*⁷ derart, daß die Vektoren der Sterne von zwei beliebigen Punkten einander umkehrbar eindeutig zugeordnet sind. Die Vektoren eines Sterns brauchen weder linear unabhängig noch physikalisch gleichwertig zu sein. Sie sind von Punkt zu

⁴ [12], S. 48 ff.

⁵ [12], S. 120 ff.

⁶ Dieses Ergebnis ist für einen gemäß Abb. 1 d verspannten Zylinder bekannt [20].

⁷ Stern, bestehend aus m Vektoren.

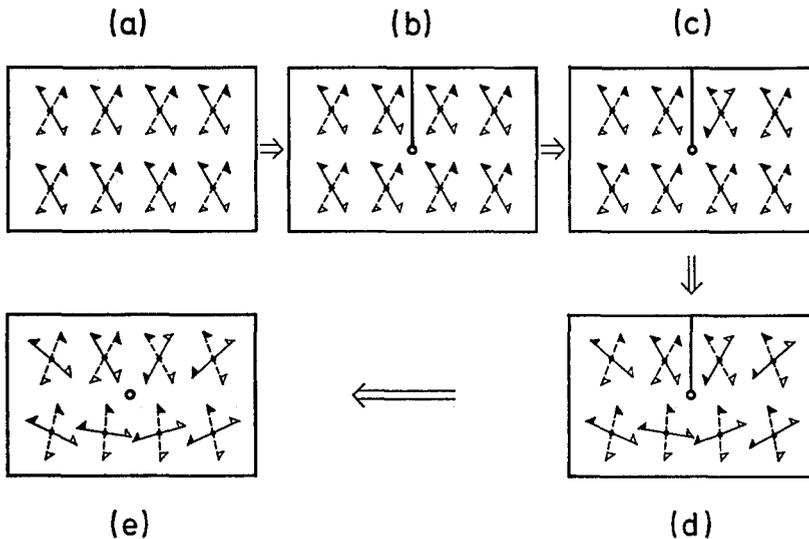


Abb. 2a–e. Erzeugung einer Disklination in einem (3, 4)-Cosseratkontinuum. Alle Vektoren des Vektor-4-Sterns sind physikalisch gleichwertig. Schnittebene und Disklinationslinie stehen senkrecht auf der Zeichenebene. (a) ungestörter Zustand, (e) Zustand mit Disklination. Zur Herstellung der Disklination: (b) Einführung eines Schnitts, (c) die Vektorsterne des rechten Ufers werden einer Deckungsoperation unterworfen, (d) stetige Verteilung der Störung über dem Körper, (e) Vereinigung der Schnitthufer

Punkt frei variierbar. Zugeordnete Vektoren seien jedoch im unverzerrten Zustand des Cosseratkontinuums über dem Trägerkontinuum euklidisch parallelverschoben.

Das beschriebene Kontinuum nennen wir ein $(3, m)$ -Cosseratkontinuum. Gegenüber dem gewöhnlichen dreidimensionalen Punktkontinuum unterscheidet es sich durch eine zusätzliche Struktur in Form von m aufgeprägten Vektorfeldern. Es besitzt $(3 + 3m)$ kinematische Freiheitsgrade. Von diesen entfallen drei auf die Translation des Trägerkontinuums und drei auf jeden Vektor im m -Stern.⁸

Beispiele:

1. Ein magnetisierbares Material kann als $(3, 1)$ -Cosseratkontinuum betrachtet werden. Der Vektorstern besteht nur aus dem Magnetisierungsvektor. Dieser ist speziell für ferromagnetische Materialien ein Vektor konstanter Länge.
2. Ein Molekülkristall ist ein $(3, m)$ -Cosseratkontinuum. Die Moleküle (= Gitterbausteine) bilden das dreidimensionale Trägerkontinuum. Der Vektor- m -Stern beschreibt die Molekülstruktur der Kristallgitterbausteine. Im Stern sind diejenigen Vektoren physikalisch gleichwertig, die durch Molekülsymmetrien einander zugeordnet sind.
3. Sind die Moleküle elektrisch polarisierbar, so kann der Vektorstern des Beispiels 2) um den Vektor des elektrischen Dipolmoments erweitert werden.

Im Feld der Vektor- m -Sterne des $(3, m)$ -Cosseratkontinuums läßt sich der Strukturfehler *Disklination* analog wie die Versetzung des Kristallgitters kon-

⁸ Siehe „oriented bodies“ bei TRUESDELL & TOUPIN [21], S. 309ff.

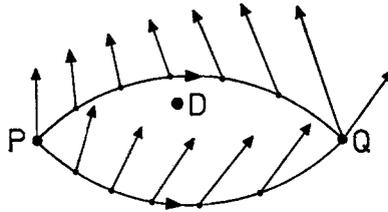


Abb. 3. Disklinationen (D) bewirken eine Mehrdeutigkeit der Vektorfelder des $(3, m)$ -Cosserratkontinuums

struieren (s. Abb. 2). Ausgehend vom unverzerrten Zustand, in dem die Vektorsterne definitionsgemäß euklidisch parallelverschoben sind, zerschneiden wir das Kontinuum entlang einer Halbebene bis zur Randgeraden. Sodann deformieren wir die Vektorsterne eines Ufers nach Maßgabe ein und derselben Deckungsoperation, welche die Vektoren des Sterns in physikalisch gleichwertige Vektoren überführt. Diese *erzeugende Deformation* verursacht in den Vektorfeldern eine Störung, die stetig über dem Kontinuum auslaufen soll. Nach Vereinigung der beiden Schnittufer ist das Feld der Vektorsterne nicht mehr euklidisch parallelverschoben. Abgesehen von der singulären Randlinie ist es wieder überall stetig. Insbesondere wird der stetige Verlauf der Vektor- m -Sterne über die Schnittstelle hinweg durch die erzeugende Deckungsoperation selbst garantiert. Die Vektorfelder sind jedoch i. a. in dem zusammenhängenden Kontinuum nicht eindeutig definiert. Gehen wir auf zwei verschiedenen Wegen vom Punkt P zum Punkt Q , so gelangen wir von demselben Anfangsvektor zu verschiedenen Endvektoren (Abb. 3).

Die erzeugende Deckungsoperation einer Disklination muß mit der geforderten Stetigkeit der Vektorfelder und mit den physikalischen Eigenschaften des Vektorsterns verträglich sein. Ist der Vektorstern z. B. ein starres Gebilde, so kommen als erzeugende Deckungsoperationen nur starre Drehungen in Frage.

In Verallgemeinerung der oben genannten Konstruktion einer Disklination kann die Halbebene durch eine beliebig berandete, krumme Fläche (= *erzeugende Schnittfläche*) ersetzt werden. Insbesondere darf eine ganz im Endlichen gelegene Fläche genommen werden.⁹

Der Disklination ordnen wir die folgenden geometrischen Bestimmungsstücke zu:

1. Als *Disklinationslinie* nehmen wir die orientierte Randlinie der erzeugenden Schnittfläche. Diese ist definitionsgemäß entweder eine geschlossene Linie oder sie beginnt und endet auf der Oberfläche des Kontinuums.

2. Zur Definition der *Disklinationsstärke* führen wir im Trägerkontinuum um die Disklinationslinie im Sinne der Rechtsschraube einen geschlossenen Umlauf aus. Der Vektor- m -Stern besteht in P_0 (Abb. 4) aus den Vektoren α_λ , $\lambda = 1, \dots, m$. Er ändert sich entlang des Weges stetig und endet in P_0 mit den Vektoren α'_κ , $\kappa = 1, \dots, m$. Diese sind laut Definition der Disklination Permutationen der Anfangs-

⁹ Geschlossene Randlinie!

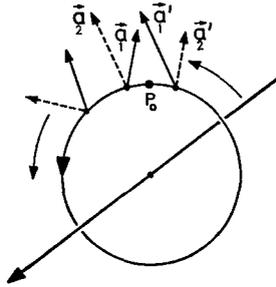


Abb. 4. Zur Definition der Disklinationsstärke

vektoren, so daß mit einer (m, m) -Permutationsmatrix $D = (D_{\kappa}^{\lambda})$ ¹⁰

$$\alpha'_{\kappa} = \sum_{\lambda=1}^m D_{\kappa}^{\lambda} \alpha_{\lambda}, \quad \kappa = 1, \dots, m \quad (1)$$

gilt. Die Matrix D ist ein Element aus der Gruppe der Deckungsoperationen des Vektor- m -Sterns. Sie ist unabhängig von der Wahl des (einmaligen) Umlaufs um die Disklinationslinie.¹¹ Wir nehmen deshalb die Matrix D als Maß für die Disklinationsstärke. Nach Umkehrung des Umlaufsinn erhalten wir als Disklinationsstärke die zu D inverse Matrix.

Die Disklinationslinie und die Disklinationsstärke sind analog zur Versetzungslinie und zum Burgersvektor [1] einer Kristallversetzung. Während jedoch die Struktur einer Versetzung durch die Versetzungslinie und den Burgersvektor festgelegt ist, sind für die Struktur der Disklination neben der Disklinationslinie und der Disklinationsstärke noch weitere Informationen erforderlich:

Wie die Beispiele in Abb. 5 zeigen, hat die Lage der erzeugenden Schnittfläche einen Einfluß auf die Struktur der Disklination. Diese Vieldeutigkeit ist nach Vorgabe des Vektors (allgemein: des Vektor- m -Sterns) in einem beliebigen Punkt außerhalb der Disklinationslinie behoben.

Ferner wird die erzeugende Deformation einer Disklination durch die Disklinationsstärke D nur bis auf beliebige 360°-Drehungen der Vektoren des m -Sterns festgelegt. Dabei handelt es sich i. a. um keine starren Drehungen des gesamten Vektorsterns, sondern jedem Vektor des m -Sterns kommt eine eigene 360°-Drehung zu. In Abb. 6 wird gezeigt, daß sich diese Unbestimmtheit ebenfalls auf die Disklinationsstruktur auswirkt.

Demnach gibt es eine unendliche Vielfalt von Strukturen des $(3, m)$ -Cosseratkontinuums, die mit einer gegebenen Disklinationslinie und einer gegebenen Disklinationsstärke verträglich sind. Welche dieser Strukturen als stabile Eigenverzerrungszustände tatsächlich realisiert sind, ergibt sich aus energetischen Untersuchungen, die im Rahmen einer Elastizitätstheorie des $(3, m)$ -Cosserat-

¹⁰ Jede Zeile und jede Spalte der Matrix erhält genau eine Eins und sonst lauter Nullen.

¹¹ Die Permutationsmatrix D kann sich nur unstetig ändern. Dagegen variieren α' und α in Gl. (1) stetig, wenn der Umlauf stetig verändert wird. Damit muß D konstant sein. * λ

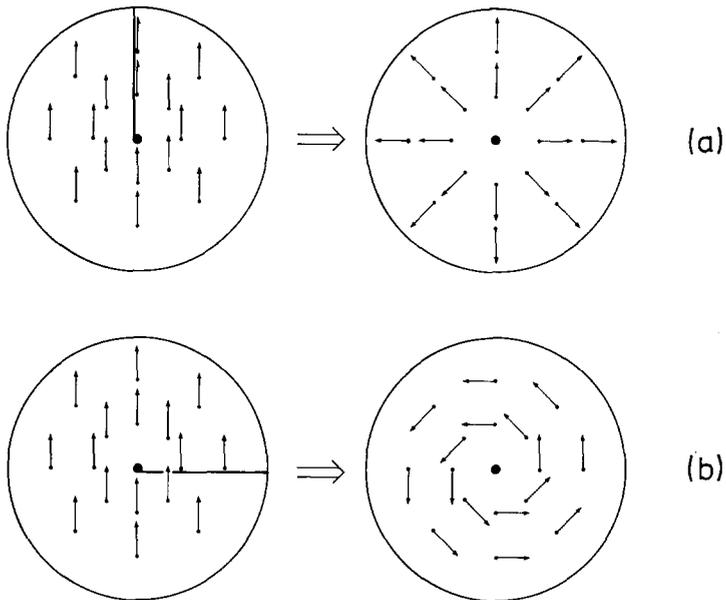


Abb. 5 a u. b. Abhängigkeit der Struktur einer Disklination von der erzeugenden Schnittfläche. Beide Disklinationen des (3, 1)-Cosserratkontinuums besitzen dieselbe Linie (senkrecht zur Zeichenebene) und dieselbe Stärke (360° -Drehung)

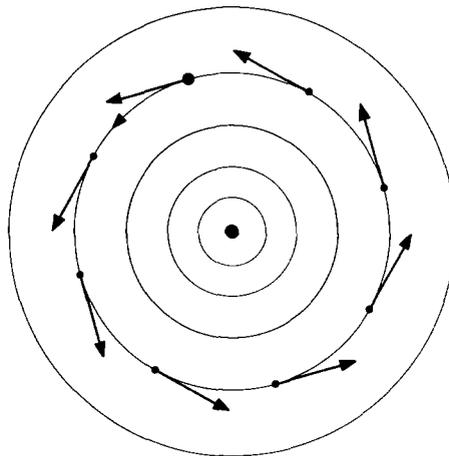


Abb. 6 a

Abb. 6 a u. b. Vieldeutigkeit der Disklinationsstruktur bei gegebener Disklinationsstärke. Beide Disklinationen des (3, 1)-Cosserratkontinuums besitzen dieselbe Stärke $D=1$ aber verschiedene erzeugende Drehungen: (a) 360° -Drehung, (b) 720° -Drehung. Physikalische Realisierung: (a) Magnetfeld um unendlich langen Stromfaden, (b) magnetischer Dipol in der Ebene. Der Vektorstern wird vom veränderlichen magnetischen Feldvektor gebildet, der die Feldlinien tangiert

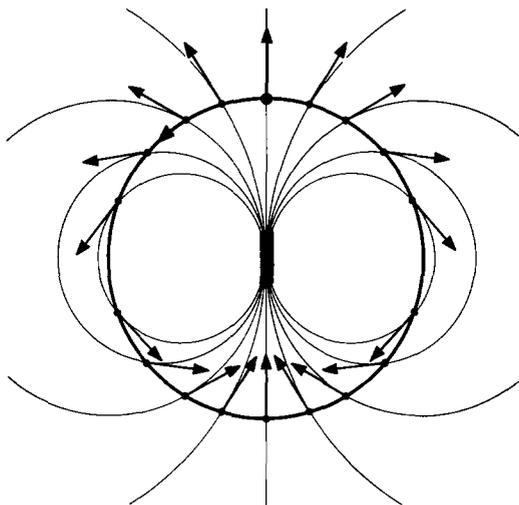


Abb. 6b

kontinuums¹² durchzuführen sind. Dabei ist insbesondere auf die Wechselwirkung zwischen den Vektorsternen und dem Trägerkontinuum zu achten.

§3. Kristalldisklinationen

Ein Kristall kann als Cosseratkontinuum mit eingeschränkten Freiheitsgraden angesehen werden. Ordnen wir das Kristallgitter dem Trägerkontinuum zu und betrachten den von einem Gitterpunkt zu seinen Nachbarn ausstrahlenden Stern von Gittervektoren als den Cosserat-Vektorstern, so sind dessen Freiheitsgrade durch die Translationsfreiheitsgrade des Trägerkontinuums bereits festgelegt. Eine vorgeschriebene Deformation der Vektorsterne ist nur mit einer geeigneten Deformation des Trägerkontinuums möglich.

Die Disklinationsstärke D (s. Gl. (1)) einer Kristalldisklination ist ein Symmetrieelement aus der Drehgruppe¹³ des Kristallgitters. Die Gitterstruktur ist außerhalb der Disklinationslinie fehlerfrei.

Wir unterscheiden zwei Grundtypen von Kristalldisklinationen: *Keildisklinationen* und *Torsionsdisklinationen*. Sie werden in Abb. 7 am Beispiel der 90°-Disklinationen des kubischen Kristalls vorgestellt, wobei die Disklinationslinie jeweils in der x_3 -Achse und die erzeugende Schnittebene in der x_2, x_3 -Koordinatenebene liegen sollen.

Die Disklinationsstärke der Torsionsdisklination entspricht einer Drehung um eine Achse senkrecht zur Disklinationslinie. Um das zu erreichen, muß im Beispiel der Abb. 7a das Schnittufer $x_1 > 0$ als Ganzes eine 90°-Drehung in der x_2, x_3 -

¹² Für den Sonderfall des gewöhnlichen Cosseratkontinuums (Vektorstern = starres Dreibein) liefern die Arbeiten von GÜNTHER [22], KESSEL [23] und SCHAEFER [24] zusammengenommen eine lineare Elastizitätstheorie der Disklination. In der letztgenannten Arbeit wird die Disklination mit Hilfe des Motorkalküls [25] geometrisch erfaßt.

¹³ Spiegelungen sind hier ohne Bedeutung.

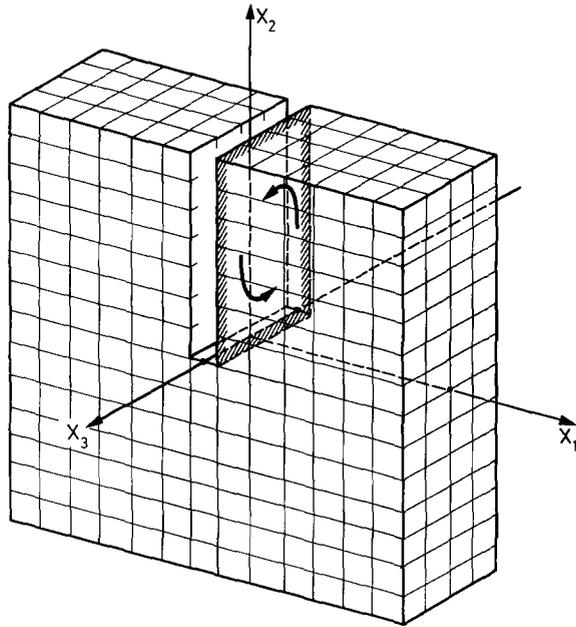


Abb. 7a

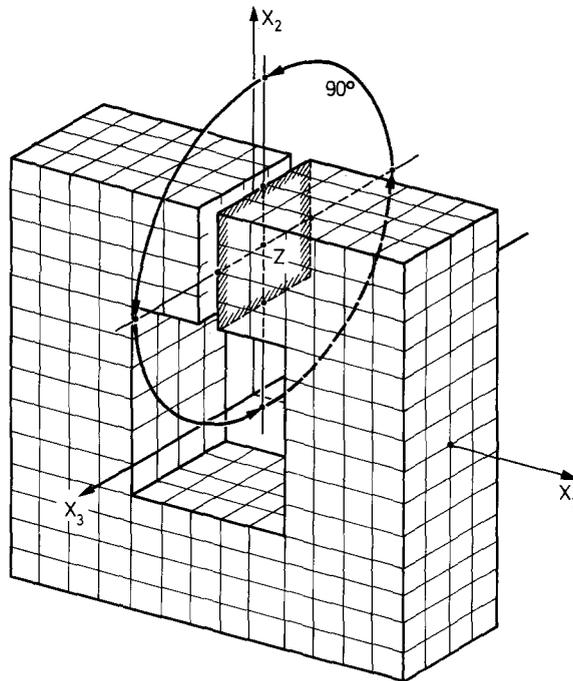


Abb. 7b

Abb. 7a—c. Zur Erzeugung von Kristalldisklinationen im kubischen Kristall. (a) Im einfach zusammenhängenden Kristall kann keine Torsionsdisklination erzeugt werden. (b) Torsionsdisklination im zweifach zusammenhängenden Kristall. (c) Erzeugung einer 90° -Keildisklination

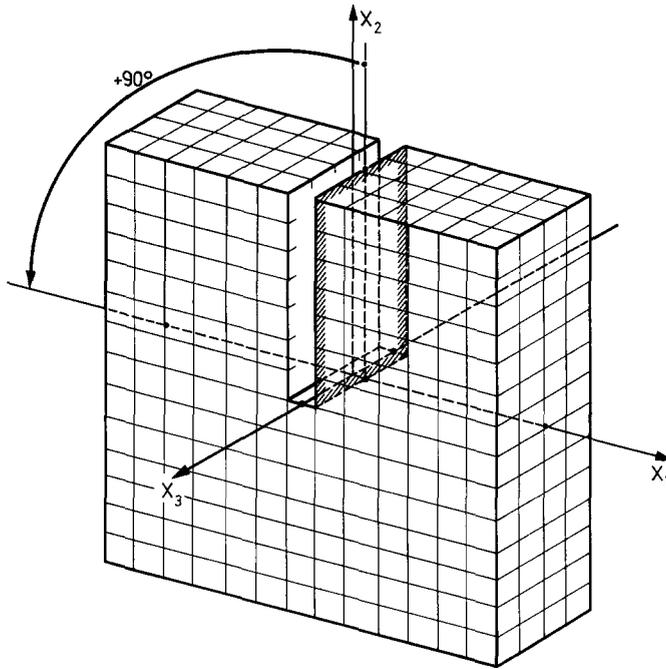


Abb. 7c

Ebene erfahren. Es ist anschaulich klar, daß eine solche Kristalldeformation das Gitter in einer großen Umgebung der Disklinationslinie vollständig zerstört. Eine Torsionsdisklination ist nur in einem Kristall denkbar, der einen torusähnlichen (zweifachen) Zusammenhang besitzt: In Abb. 7b wird das Schnittufer $x_1 > 0$ in der x_2, x_3 -Ebene einer 90° -Drehung (=erzeugende Drehung) um das Zentrum Z unterworfen. Nach Wiedervereinigung der beiden Schnittufer enthält der kubische Kristall die für eine 90° -Torsionsdisklination charakteristischen Eigenverzerrungen. Die Disklinationslinie liegt aber als fiktives Gebilde außerhalb des Kristalls.^{14, 15}

Im Gegensatz dazu sind Keildisklinationen im einfach zusammenhängenden Kristall möglich. Wir stellen eine solche im Beispiel der Abb. 7c mit Hilfe einer 90° -Drehung des Schnittufers $x_1 > 0$ um die Disklinationslinie her. Dabei kommt es zu einer keilförmigen Überlappung, die wir durch Entfernung eines keilförmigen Kristallstücks beseitigen (s. auch Abb. 8). Der Kristall hängt wieder zusammen und enthält eine Keildisklination. *Die Disklinationsstärke einer Keildisklination*

¹⁴ Es ist wohl kaum möglich, die Struktur der fertig ausgebildeten Torsionsdisklination aufzuzeichnen. Wir beschränken uns deshalb in Abb. 7b darauf, die Konstruktionsvorschrift anzudeuten und überlassen den Rest dem Vorstellungsvermögen des Lesers. Die von TOUPIN ([26], S. 136) angegebene Skizze stellt keine Torsionsdisklination dar. Es handelt sich um einen verdrehten und dann zum Ring gebogenen Stab, dessen Verzerrung der Kombination aus einer 90° -Torsionsdisklination und einer 360° -Keildisklination zugeordnet werden muß.

¹⁵ Wie man leicht einsieht, gibt es im kubischen Kristall zwei verschiedene 90° -Torsionsdisklinationen, die sich nur im Windungssinn unterscheiden.

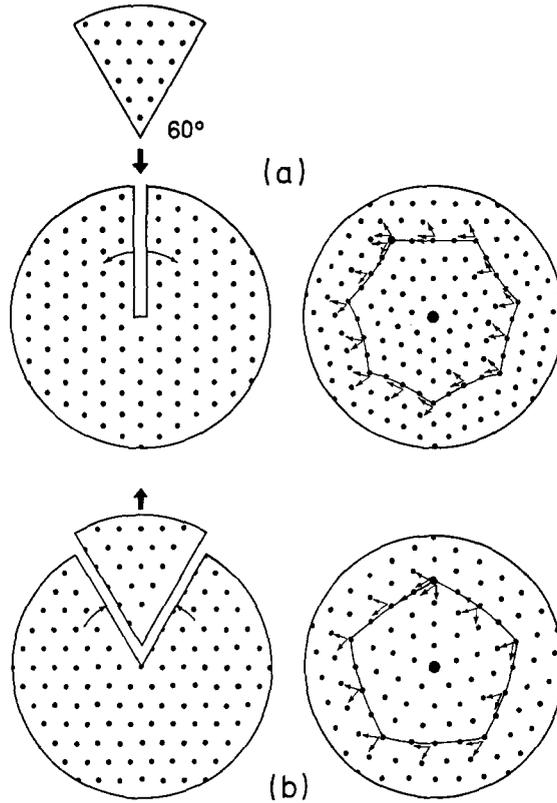


Abb. 8a u. b. 60° -Keildisklinationen im hexagonalen Gitter. (a) Plusdisklination, (b) Minusdisklination

entspricht einer Drehung der Gittervektorsterne um eine Achse parallel zur Disklinationslinie.

Am Beispiel des hexagonalen Dreiecksgitters studieren wir die Struktur von Keildisklinationen. Die Linienrichtung ist parallel zur hexagonalen Achse. In Abb. 8 wird die Herstellung der beiden möglichen 60° -Keildisklinationen hinreichend verdeutlicht.¹⁶ In beiden Fällen ist das Gitter außerhalb der Disklinationslinie fehlerfrei. Die Gittervektoren können jedoch von einem Punkt zum andern nicht eindeutig übertragen werden. Diese Eigenschaft wird in Abb. 8 mit Hilfe der beiden geschlossenen Umläufe verdeutlicht: Ein hinsichtlich der Gitterstruktur in natürlicher Weise umgeführtes Zweibein von Gittervektoren kommt nach dem Umlauf nicht mehr mit sich selbst zur Deckung. Bezogen auf die Richtung der Disklinationslinie, die mit dem Umlaufsinn eine Rechtsschraube bilden soll, erleidet das Zweibein vom Standpunkt des Kristallgitters aus eine Drehung von -60° bzw. $+60^\circ$ im Falle der Plus- bzw. Minusdisklination.¹⁷

¹⁶ Siehe auch NABARRO [12], S. 128 und ANTHONY, ESSMANN, SEEGER, TRÄUBLE [16].

¹⁷ Die Bezeichnung „Plus-(Minus-) Disklination“ bringt zum Ausdruck, daß zur Herstellung dieser Disklination Material eingefügt (weggenommen) werden muß.

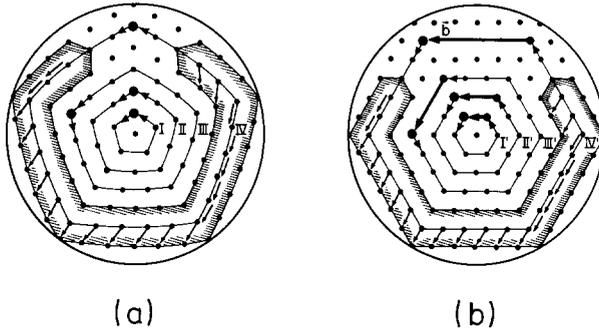


Abb. 9a u. b. Burgersumläufe um die Keildisklination der Abb. 8b. (a) Realkristall, (b) Burgersvektoren \mathbf{b} im Bildkristall. Die schraffierten Bereiche veranschaulichen die simultane Naturalisierung der Gitterkonnexion und der elastischen Metrik

Vom äußeren, euklidischen Standpunkt aus überlagert sich diesem *Drehfehler* noch eine Verzerrung. — Eine Disklination erzeugt demnach einen *nichtabsoluten Gitterparallelismus*. Sie ist damit von der Kristallversetzung, die stets einen absoluten Gitterparallelismus erzeugt, grundsätzlich verschieden.¹⁸

Der von der Wahl des Umlaufs um die Disklinationslinie unabhängige Drehfehler ist das wesentliche geometrische Bestimmungsstück der Keildisklination. Er läßt sich leicht durch die in §2 eingeführte Matrix der Disklinationsstärke ausdrücken. Der Drehfehler ist analog zum Burgersvektor der Versetzung. Beide sind Symmetrieelemente des Kristallgitters.

In Abb. 9a betrachten wir geschlossene *Burgersumläufe* um die Disklinationslinie der Abb. 8b. *Deren Umlaufsinn soll mit der Linienrichtung der Disklination stets eine Rechtsschraube bilden.* Werden die Burgersumläufe auf gewohnte Weise in einen idealen Bildkristall übertragen (Abb. 9b)¹⁹, so ergibt sich ein Burgersvektor, der vom Anfangspunkt des Umlaufs abhängt. Insbesondere wächst sein Betrag proportional zum Abstand des Anfangspunkts von der Disklinationslinie.

Aus den schraffierten Bereichen der Abb. 9 entnehmen wir, daß die unmittelbare Umgebung einer jeden nicht durch das Disklinationszentrum gehenden Kurve stets so in einen euklidischen Bildraum abgebildet werden kann, daß die Bilder von äquivalenten Gittervektoren euklidisch parallelverschoben sind und gleichzeitig die Bilder der Gitterzellen entlang der Bildkurve elastisch unverzerrt vorliegen. — Anschaulich erscheint diese Aussage trivial. Bei der nichtlinearen Formulierung einer Theorie der Kristalldisklinationen kommt ihr jedoch eine durchaus nichttriviale Bedeutung zu.²⁰

Die Kristalldisklinationen weisen auch noch weit entfernt vom Zentrum sehr starke Gitterkrümmungen auf. Dadurch ist dieser Kristallbaufehler wesentlich stärker an das Gesamtgitter angekoppelt als z. B. die Versetzung, welche mehr lokalen Charakter hat. Ein Erzeugungsmechanismus bei plastischer Verformung

¹⁸ Siehe Fußnote 1. Bei einem absoluten Parallelismus ist die Parallelübertragung eines Vektors vom Weg unabhängig. Siehe RASCHESKI [27] und SCHOUTEN [28].

¹⁹ SEEGER [11].

²⁰ Siehe § 7.

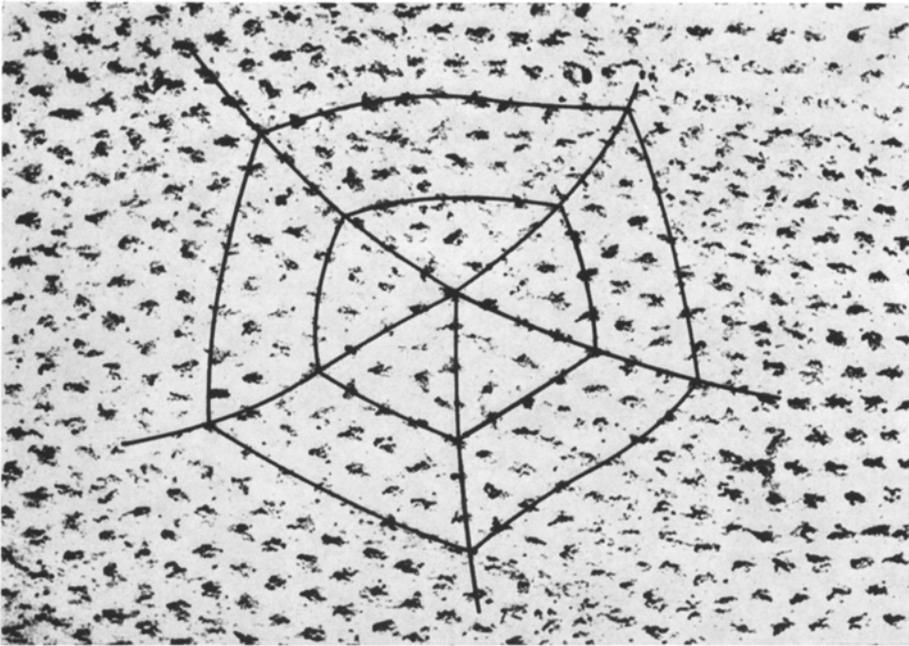


Abb. 10. Minus-Keeldisklination im Flußliniengitter eines Supraleiters 2. Art

scheidet deshalb wohl aus energetischen Gründen aus. Dagegen ist die Bildung z. B. einer Keeldisklination beim Kristallwachstum denkbar. Die Minus-Disklination der Abb. 8b weist in einem vorgegebenen Volumen gegenüber dem regulären Gitter einen Unterschuß an Gitterpunkten auf. Sind demnach während des Gitterwachstums in einem schlauchförmigen Teilvolumen zufällig nicht so viele Gitterbausteine vorhanden wie zur Ausbildung einer regulären Gitterstruktur nötig wären, so ist die Minus-Keeldisklination eine mögliche Gitteranordnung. — Auf diese Weise entsteht die Disklination der Abb. 10 im zweidimensionalen magnetischen Flußliniengitter (Abrikosovgitter) von Supraleitern 2. Art [15, 16]. Das Magnetfeld dringt im Bereich der Schubnikovphase in Form von linienförmigen Flußquanten in den Supraleiter ein. Dieser Vorgang wird von Kristallbaufehlern des Supraleiters behindert, so daß es zu dem erwähnten Mangel von Gitterbausteinen im magnetischen Flußliniengitter kommen kann.

Zur Formulierung einer Kontinuumstheorie der Kristalldisklinationen wird in §4 auch das Verhalten des Burgersvektors einer Torsionsdisklination benötigt. Wir beschränken uns darauf, Anfangs- und Endpunkt des Burgersumlaufs in die erzeugende Schnittebene zu legen (Abb. 11). Aus Abb. 7b ist klar, daß der Bildumlauf im Bildkristall nur dann geschlossen ist, wenn der zugehörige Umlauf um die Torsionsdisklination im Drehzentrum Z der erzeugenden Schnittebene beginnt und endet, d. h. nur für einen solchen Umlauf verschwindet der Burgersvektor. Z heiße deshalb *neutraler Punkt* der Torsionsdisklination. Für beliebige andere Umläufe sind die Burgersvektoren in Abb. 11c dargestellt. Ihr Betrag wächst proportional zum Abstand ZP_0 . Man beachte, daß der Burgersvektor

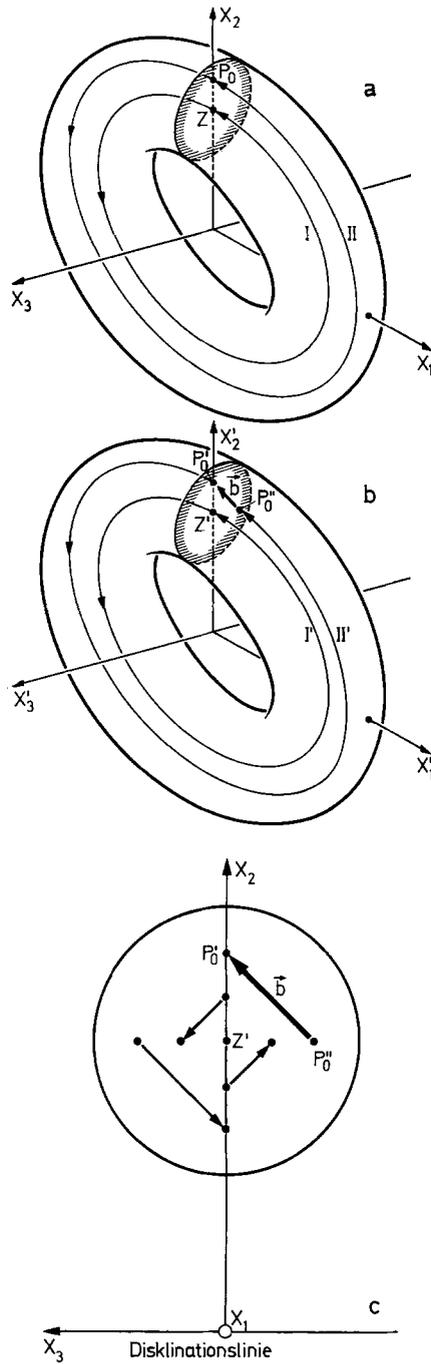


Abb. 11 a — c. Burgersumläufe um die Torsionsdisklination der Abb. 7 b. Die erzeugende Schnittebene ist schraffiert. (a) Realkristall. (b) Bildkristall. b ist der Burgersvektor zum Umlauf II. (c) Burgersvektoren für verschiedene Anfangspunkte P_0 des Umlaufs. Draufsicht auf die Schnittebene

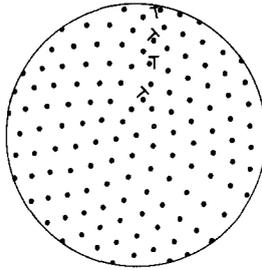


Abb. 12. Flächenhafte Anordnung von Versetzungen. Diese wird analog wie in Abb. 8b konstruiert. Der Keilwinkel beträgt jedoch 30°

hier nicht wie im Falle der Keildisklination bei Annäherung an die Disklinationenlinie gegen Null strebt.

Die Keildisklination ist von einer korngrenzenartigen Versetzungsanordnung nach Art der Abb. 12 streng zu unterscheiden. Diese Gitterstruktur entsteht durch dasselbe Verfahren wie die Disklination der Abb. 8b. Der Keilwinkel des zu entfernenden Materiestücks ist jedoch kein Symmetriewinkel des hexagonalen Gitters. Die Gitterlinien weisen deshalb an der Schnittstelle Unstetigkeiten auf, die eine flächenhafte Anordnung von Stufenversetzungen und eine Unstetigkeit im Feld der Gittervektoren nach sich ziehen. Letztere ist von dem fehlenden absoluten Parallelismus der Gittervektoren im Fall der Disklination grundsätzlich verschieden. Ferner läßt sich in einer Disklination die erzeugende Schnittebene nicht mehr ermitteln. Im Strukturfehler der Abb. 12 ist das z. B. durch Röntgenbeugung stets möglich.

Durch einen Vergleich der zu Versetzungen und Disklinationen gehörigen Gitterparallelismen kann man zeigen²¹, daß die Disklination nicht aus Versetzungen aufgebaut werden kann. Dagegen ist die Versetzung stets als Dipol von zwei entgegengesetzten Disklinationen darstellbar.²² Aufbauend auf einer Arbeit von KRÖNER [29] hat ESHELBY [30] für die Stufenversetzung auf diesen Sachverhalt hingewiesen. Durch Entfernen und nicht vollständiges Wiedereinfügen desselben keilförmigen Kristallstücks entstehen an den Stellen *A* und *B* zwei parallele Keildisklinationen von entgegengesetztem Vorzeichen (Abb. 13a und 8). Kommt auf die Lücke *AB* gerade eine Netzebene, so sind die beiden Keildisklinationen zu einer Stufenversetzung äquivalent.

Wir betrachten sogleich den Fall einer ausgedehnten Lücke *AB*, auf die mehrere Netzebenen entfallen. Dabei ist zu beachten, daß die Schnitrufer auf verschiedene Arten miteinander verbunden werden können. Der in Abb. 13b skizzierte Modus liefert entlang der Strecke *AB* eine Aufstauung von Stufenversetzungen²³, während durch den Modus der Abb. 13c ein ausgedehnter Disklinationdipol mit den Dipolzentren *A* und *B* entsteht. Für $\overline{AB} \rightarrow 0$ werden die beiden

²¹ Siehe § 4.

²² Ein absoluter Parallelismus kann durch Überlagerung von nichtabsoluten Gitterparallelismen hergestellt werden (Fußnote 18).

²³ In der Theorie der plastischen Verformung wird dieses Gebilde als „Superversetzung“ bezeichnet. Der Begriff „Aufstauung“ wird dort in einem anderen Sinn verwendet.

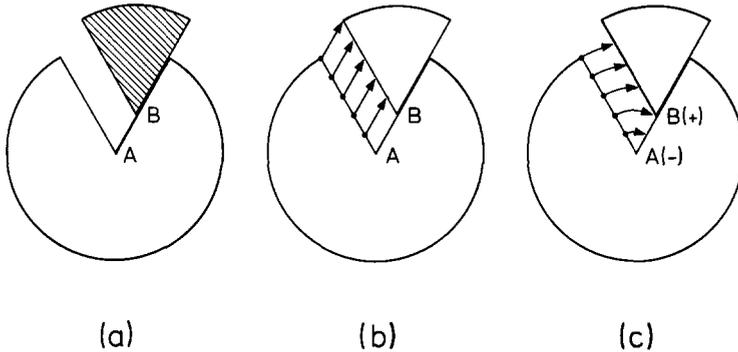


Abb. 13 a—c. (a) Die Stufenversetzung ist äquivalent zu einem Dipol von Keildisklinationen. Die freien Ränder können auf zwei Arten wieder miteinander verbunden werden: (b) Einzelne Stufenversetzung oder Aufstauung von Stufenversetzungen. (c) Dipol von Keildisklinationen

Modi identisch. Damit kann die einzelne *Stufenversetzung* als *lokaler Dipol aus Keildisklinationen* angesehen werden.

Es ist klar, daß für einen kleinen Abstand AB die Lücke der Abb. 13a gemäß Abb. 13b beseitigt werden muß.²⁴ Entlang der Strecke AB sind Netzhalbebenen in dichter Folge aufgereiht. Mit zunehmendem Abstand AB , d. h. mit zunehmender Größe der Versetzungsaufstauung wird schließlich der Modus der Abb. 13c für das Kristallgitter energetisch günstiger und wir erhalten einen ausgedehnten Disklinationsdipol. Das Kristallgitter ist abgesehen von den Dipolzentren überall stetig. An die Stelle der Netzhalbebenen tritt eine weitreichende Gitterkrümmung.

Die Abb. 14 zeigt im hexagonalen Gitter die Strukturen eines Disklinationsdipols und der zugehörigen Versetzungsaufstauung. Mit zunehmendem Abstand AB weicht die Gitterstruktur des Dipols von derjenigen der Versetzungsaufstauung zunächst im Nahbereich und schließlich auch im Fernbereich immer stärker ab. Der ausgedehnte Disklinationsdipol und die entsprechende Versetzungsaufstauung sind also nur hinsichtlich des Fernfeldes der Gitterverzerrungen äquivalent. Diese Eigenschaft ist eine Folge aus der Gleichheit des Gesamtburgersvektors der beiden Spannungsquellen.

Diese Überlegungen zeigen wenigstens im Prinzip eine Möglichkeit auf, wie in einem Kristallgitter auch bei plastischer Verformung Disklinationen erzeugt werden könnten: Wird eine genügend große Anzahl von parallelen Versetzungen in derselben Gleitebene gegen ein Hindernis angedrückt, so wird die entstehende Versetzungsaufstauung nach hinreichender Verdichtung in einen ausgedehnten Disklinationsdipol umschlagen, dessen Dipolzentren am Kopf und am Ende der Aufstauung lokalisiert sind. Abb. 14 gibt davon einen anschaulichen Eindruck. — Die physikalische Realisierbarkeit dieses Vorgangs hängt von vielerlei Faktoren ab: Bildungs- und Bindungsenergien der beteiligten Fehlstellen legen den Umschlagpunkt von der Versetzungsaufstauung zum Disklinationsdipol fest. Da zur Herstellung der Versetzungsaufstauung zweifellos sehr große Spannungen er-

²⁴ Grenzfall „einzelne Versetzung“!

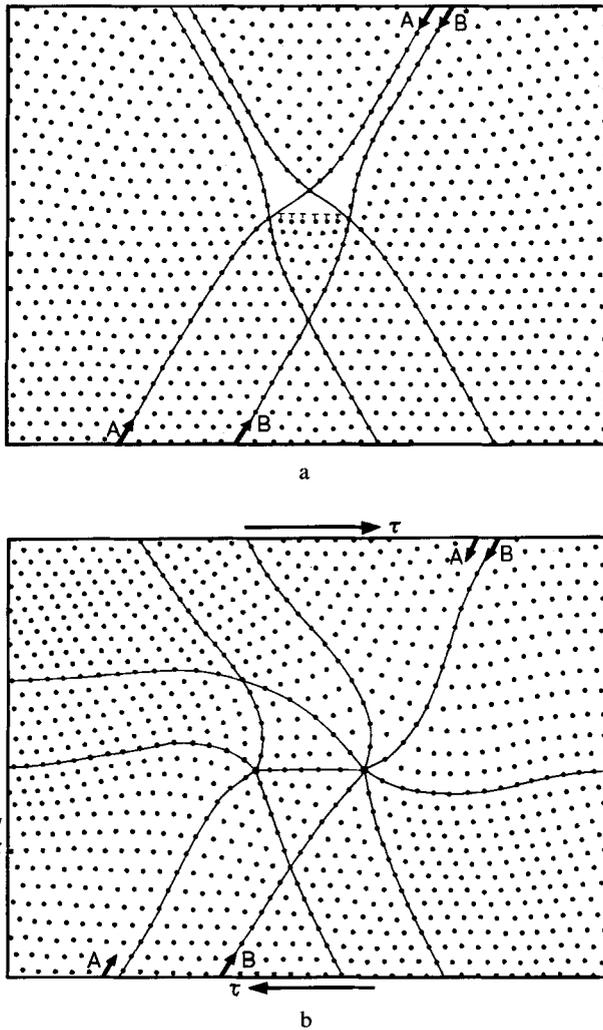
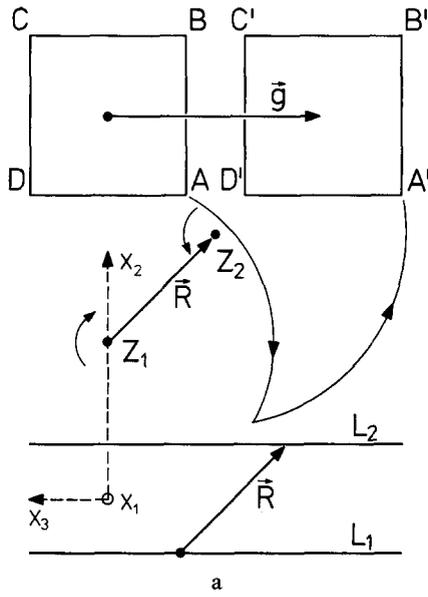


Abb. 14a u. b. Eine größere Versetzungsaufstauung (a) und der zugehörige ausgedehnte Disklinationsdipol (b) im hexagonalen Dreiecksgitter. Bei einer hinreichend großen Schubspannung τ schlägt die Gitterstruktur (a) in die Struktur (b) um

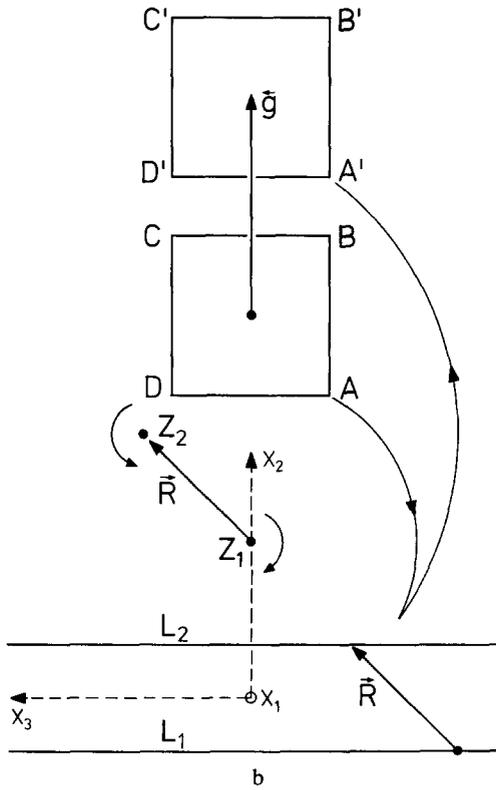
forderlich sind, müssen als wichtigste Störungsquellen die Aktivierung von Nebengleitsystemen [32] und der vorzeitige Bruch betrachtet werden.

Die *Schraubenversetzung* ist zu einem *lokalen Dipol aus Torsionsdisklinationen* äquivalent.

Wir erläutern diese Aussage am Beispiel des kubischen Kristalls: Zu der 90° -Torsionsdisklination der Abb. 7b (Linie L_1 , neutraler Punkt Z_1) fügen wir eine weitere 90° -Torsionsdisklination hinzu, deren Linie L_2 und deren neutraler Punkt Z_2 gegenüber L_1 , Z_1 in der x_2, x_3 -Ebene um den Dipolvektor \mathfrak{R} verschoben sind (Abb. 15). Die erzeugenden Drehungen haben entgegengesetzten Drehsinn.



a



b

Abb. 15a u. b. Dipole aus Torsionsdisklinationen im kubischen Kristall. Zwei entgegengesetzte, gleich große Drehungen (90°) um die neutralen Punkte Z_1 und Z_2 erzeugen eine reine Translation \vec{g} . Je nach der Orientierung des Dipolvektors \vec{g} ist der Disklinationsdipol zur Schraubenversetzung (a) oder zur Stufenversetzung (b) äquivalent

Sie werden beide in der gemeinsamen erzeugenden Schnittebene (x_2, x_3 -Ebene) wirksam. Das Ufer $x_1 > 0$ der erzeugenden Schnittebene (s. Abb. 7b) erleidet demnach nacheinander zwei entgegengesetzte Drehungen um parallele Achsen, zuerst um Z_1 , dann um Z_2 .²⁵ Wir erhalten eine reine Translation \mathfrak{g} des Ufers $x_1 > 0$ gegenüber dem Ufer $x_1 < 0$.

Wird der Dipolvektor \mathfrak{R} wie in Abb. 15a gewählt, so ist der *Gleitvektor* \mathfrak{g} parallel zu den Disklinationslinien L_1 und L_2 . Dieselbe Abgleitung können wir aber auch mit einer Aufstauung von Schraubenversetzungen erzeugen, die sich zwischen den Linien L_1 und L_2 ausbreiten. Insbesondere kann der Vektor \mathfrak{R} so gewählt werden, daß dem Disklinationsdipol der Gleitvektor einer einzelnen Schraubenversetzung zukommt [11, 12].

Je nach Wahl des Vektors \mathfrak{R} erhalten wir einen anderen Gleitvektor \mathfrak{g} . Abb. 15 b zeigt einen Dipol aus Torsionsdisklinationen, der zu einer Aufstauung von Stufenversetzungen äquivalent ist. Der Gleitvektor \mathfrak{g} steht senkrecht auf L_1 und L_2 . — Diese Äquivalenz entspricht der Erzeugung von Stufenversetzungen durch Abgleitung. Der weiter oben besprochene Zusammenhang zwischen Dipolen von Keildisklinationen und Stufenversetzungen entspricht der Erzeugung von Stufenversetzungen durch das Entfernen von Netzhalbebenen.

Im allgemeinen ist der Dipol von Torsionsdisklinationen zu einer Aufstauung von Versetzungen äquivalent, die gemischten Charakter haben.

§ 4. Lineare Kontinuumstheorie der Kristalldisklinationen (Geometrie)

Wir gehen von der singulären Disklination zu einer stetigen Verteilung von Disklinationen über. *In die zugehörige Kontinuumstheorie werden die Eigenschaften der singulären Disklinationen so weit als möglich eingebaut.* Um geeignete Verzerrungsgrößen für die lineare Kontinuumstheorie der Disklinationen zu finden, gehen wir von den geometrischen Grundbegriffen der linearen Kontinuumstheorie des kompatibel verzerrten Körpers aus:

Wir beziehen den Körper auf ein orthonormiertes, kartesisches Koordinatensystem x_1, x_2, x_3 und führen ihn durch eine kompatible Deformation entsprechend dem *Verschiebungsfeld* $u_i(x_1, x_2, x_3)$, $i=1, 2, 3$, vom undeformierten Zustand in den deformierten Zustand über.²⁶ Aus dem Verschiebungsfeld ergeben sich die folgenden differentiellen Deformationsgrößen: Der *Distorsionstensor*

$$\beta_{ij} = \partial_i u_j \quad (2)^{27}$$

zerfällt im Rahmen der linearen Theorie gemäß

$$\beta_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (3)$$

²⁵ Endliche Drehungen sind nicht kommutativ. Der Vektor \mathfrak{R} weist vom ersten zum zweiten Drehzentrum.

²⁶ In der linearen Theorie ist es für die Verzerrungsgrößen ohne Bedeutung, ob die Koordinaten x_i die Lage der Massenpunkte vor oder nach der Deformation angeben. Im Hinblick auf die zu besprechenden Eigenverzerrungszustände ziehen wir jedoch den verzerrten Zustand als Bezugszustand vor, da der unverzerrte Zustand i. a. nicht als kompakter Körper realisierbar ist.

²⁷ $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

in den symmetrischen *Verzerrungstensor*

$$\varepsilon_{ij} = \beta_{(ij)} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (4)$$

und in den antisymmetrischen *Drehungstensor*

$$\omega_{ij} = \beta_{[ij]} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i). \quad (5)$$

Der letztere kann durch den *Drehvektor* ω_i ersetzt werden:

$$\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{imn} \omega_{mn}. \quad (6)^{28, 29}$$

Ist der Körper ein Kristall, so beschreibt ω die Richtung der Gittervektoren im deformierten Zustand. Der zugehörige *Strukturkrümmungstensor* ist

$$\kappa_{ij} = \partial_i \omega_j. \quad (7)$$

Die Kompatibilitätseigenschaften der Deformation beschreiben wir mit dem *Torsionstensor*³⁰

$$\alpha_{ij} = \varepsilon_{imn} \partial_m \beta_{nj} \quad (8)$$

und dem *Krümmungstensor*³⁰⁻³²

$$\vartheta_{ij} = \varepsilon_{imn} \partial_m \kappa_{nj}. \quad (9)$$

Mit (3), (6) und (7) läßt sich α durch den Verzerrungs- und den Strukturkrümmungstensor ausdrücken:

$$\alpha_{ij} = \varepsilon_{imn} \partial_m \varepsilon_{nj} + \delta_{ij} \kappa_{mm} - \kappa_{ji}. \quad (10)$$

Man entnimmt für die Größen α und ϑ aus (9) und (10) die Differentialidentitäten

$$\partial_i \alpha_{ij} + \varepsilon_{jmn} \vartheta_{mn} = 0 \quad (11)$$

und

$$\partial_i \vartheta_{ij} = 0. \quad (12)$$

Der Verzerrungstensor ε und der Strukturkrümmungstensor κ sind die wesentlichen Deformationsgrößen des kompatibel verzerrten Körpers. Wie im folgenden gezeigt wird, sind beide Größen auch noch in einem Kristall global definiert, der auf Grund von Disklinationen inkompatibel verzerrt ist. Dasselbe gilt jedoch nicht mehr für den Drehtensor und den Distorsionstensor.

Um die inkompatiblen Verzerrungen in die durch die Gleichungen (2) bis (12) definierte mathematische Struktur einzugliedern, werden wir nun die Tensoren α und ϑ nicht mehr als abgeleitete Größen betrachten, sondern im Rahmen der einschränkenden Bedingungen (11) und (12) beliebig vorgeben.

²⁸ Über doppelt vorkommende Indizes wird stets summiert.

²⁹ $\varepsilon_{imn} = 1, -1, 0$ je nachdem, ob die Indizes i, m, n eine gerade, ungerade oder sonstige Permutation von 1, 2, 3 sind.

³⁰ Siehe die nichtlineare Theorie in § 7.

³¹ Man beachte den Unterschied zwischen dem Krümmungstensor und dem Strukturkrümmungstensor.

³² Genau genommen sind die Größen $\vec{\omega}, \vec{\kappa}, \alpha, \vartheta$ Tensordichten [23]. Wir können davon absehen, wenn wir uns auf orthonormierte, lineare Koordinatentransformationen beschränken.

Wegen (12) ist der Tensor \mathfrak{g} stets die Rotation eines global definierten Tensorfeldes $\kappa = (\kappa_{ij})$ (Gl. (9)). Der Tensor κ , den wir als Strukturkrümmungstensor deuten, ist nur bis auf ein Gradientenfeld $\partial_i \hat{\omega}_j$ definiert, wobei $\hat{\omega}$ ein beliebiges, global definiertes Drehvektorfeld ist. Wir betrachten verschiedene Fälle:

Fall 1: Es sei überall im Körper

$$\alpha_{ij} = 0 \quad (13)$$

und

$$\mathfrak{g}_{ij} = 0. \quad (14)$$

Dann leitet sich der Strukturkrümmungstensor wegen (9) und (14) aus einem Drehfeld ω ab, das über dem ganzen Körper eindeutig definiert ist. Umgekehrt ergibt sich ω aus κ durch die Gleichung

$$\omega_j(P) = \omega_j(P_0) + \int_{P_0}^P \kappa_{ij} dx_i, \quad (15)$$

wobei das Integral vom Integrationsweg \mathfrak{C} unabhängig ist.

Die Gleichungen (11) und (14) weisen α als Rotation eines global definierten Distorsionstensor β aus (Gl. (8)), den wir nach (3) in den Verzerrungstensor ε und den Drehtensor ω zerlegen. Beide Tensoren sind global definiert. Der aus β gewonnene Drehtensor kann mit demjenigen aus (15) identifiziert werden. Ein eventueller Unterschied ist auf die unbestimmte Vektorfunktion $\hat{\omega}$ im Strukturkrümmungstensor zurückzuführen.

Wegen (13) folgt β gemäß (2) aus einem global definierten, eindeutigen Verschiebungsfeld u . Es gilt umgekehrt

$$u_j(P) = u_j(P_0) + \int_{P_0}^P \beta_{ij} dx_i, \quad (16)$$

wobei das Integral vom Integrationsweg \mathfrak{C} unabhängig ist.

Die Gleichungen (13) und (14) erfassen damit in bekannter Weise die vollständig kompatible Deformation eines Körpers.

Fall 2: Ein allein von Versetzungen verursachter Verzerrungszustand eines Kristalls wird in linearer Näherung durch

$$\alpha_{ij} \neq 0 \quad (17)$$

und

$$\mathfrak{g}_{ij} = 0 \quad (18)$$

charakterisiert [1]. α_{ij} ist der *Tensor der Versetzungsdichte*. Er ist im ersten Index divergenzfrei (Gl. (11)):

$$\partial_i \alpha_{ij} = 0. \quad (19)$$

Abgesehen vom Verschiebungsfeld u gelten genau dieselben Überlegungen wie im Fall 1. Die Größen ε , κ , β und insbesondere die Drehung ω existieren über dem Körper als globale Felder. Dagegen kann wegen (17) das Verschiebungsfeld u nicht mehr global sondern gemäß (16) nur noch entlang jeder glatten³³ Kurve \mathfrak{C}

³³ Die Kurve ist stetig differenzierbar.

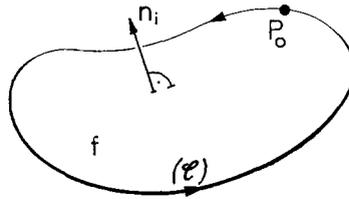


Abb. 16

definiert werden. Für einen geschlossenen Weg (Abb. 16) ergibt sich i. a. ein Schließungsfehler Δu der Verschiebung

$$b_j = \Delta u_j = \oint_{\mathcal{C}} \beta_{ij} dx_i = \int_f \alpha_{ij} n_i df, \quad (20)$$

welcher mit dem *Gesamtburgersvektor* $\mathbf{b} = (b_j)$ der die Fläche f durchstoßenden Versetzungen identifiziert wird.

Im Fall 3 müssen auch Tensoren α betrachtet werden, die nicht divergenzfrei sind. Wir interpretieren den Tensor α jedoch dann und nur dann als Tensor der Versetzungsdichte (= *Tensor der Versetzungstorsion*), wenn er die Bedingung (19) erfüllt. Gl. (19) ist nämlich eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein global definiertes Drehfeld ω existiert. Die Existenz dieses Feldes ist aber das kontinuumstheoretische Analogon zum absoluten Gitterparallelismus einer singulären Versetzung im Kristall.

Fall 3: Wir beschränken uns auf eine reine Anordnung von Kristalldisklinationen. Dementsprechend gelte für den Krümmungstensor ϑ , den wir als *Tensor der Disklinationsdichte* interpretieren,

$$\vartheta_{ij} \neq 0. \quad (21)$$

Der Tensor α kann nun i. a. nicht unabhängig von der Disklinationsdichte gewählt werden. In Gl. (11) ist er mit dem antisymmetrischen Teil der Disklinationsdichte verbunden. Wir ordnen den *nicht divergenzfreien Tensor* α ebenfalls den Kristalldisklinationen zu und nennen ihn den *Tensor der Disklinationstorsion*. Wie im folgenden gezeigt wird, ist es nicht sinnvoll, den nicht divergenzfreien Tensor α als eine nicht quellenfreie Versetzungsdichte zu deuten. Neben der Disklinationsdichte ist die Disklinationstorsion eine weitere Kenngröße der Kristalldisklinationen. Die geometrischen Eigenschaften der Disklinationen können i. a. nur mit beiden Größen zusammen kontinuumstheoretisch erfaßt werden.

Aus dem Strukturkrümmungstensor κ , der wegen (12) nach wie vor global existiert, läßt sich nun kein globales Drehfeld konstruieren. Mit Gl. (15) ergibt sich ω nur entlang jeder glatten Kurve \mathcal{C} . Die Voraussetzung (21) führt insbesondere für einen geschlossenen Weg (Abb. 16) auf die wichtigste Kenngröße der Kristalldisklinationen, den nicht verschwindenden *Schließungsfehler der Drehung* (= Drehfehler)

$$\Delta \omega_j = \oint_{\mathcal{C}} \kappa_{ij} dx_i = \int_f \vartheta_{ij} n_i df. \quad (22)$$

Man ersieht daraus die grundlegende Bedeutung des Tensors \mathfrak{D} für die Kontinuums-
theorie der Kristalldisklinationen.

Aus (22) entnehmen wir eine Deutung des Tensors \mathfrak{D} : Die Komponente \mathfrak{D}_{ij} repräsentiert eine Dichte von Kristalldisklinationen mit Linienrichtung in der x_i -Richtung und mit der erzeugenden Drehung (= Drehfehler $\Delta \omega$) um die x_j -Richtung. Insbesondere müssen die Diagonalelemente in \mathfrak{D} den Keildisklinationen und die Nichtdiagonalelemente den Torsionsdisklinationen zugeordnet werden.

Die Disklinationsdichte beinhaltet wegen (12) die Quellenfreiheit der Disklinationenlinien im Innern eines Kristalls.

Im Falle einer nichtverschwindenden Disklinationsdichte kann außer dem Strukturkrümmungstensor κ auch der Verzerrungstensor ε global definiert werden. Der Tensor

$$\tilde{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} - (\delta_{ij} \kappa_{mm} - \kappa_{ji}) \tag{23}$$

ist wegen (11) im Index i divergenzfrei, so daß er als Rotation eines global definierten Tensors $\tilde{\beta}$ geschrieben werden kann:

$$\tilde{\alpha}_{ij} = \epsilon_{imn} \partial_m \tilde{\beta}_{nj}. \tag{24}$$

Die Zerlegung

$$\tilde{\beta}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \tilde{\omega}_{ij} \tag{25}$$

in den symmetrischen und antisymmetrischen Teil liefert den Verzerrungstensor ε . Die Drehung $\tilde{\omega}$ kann mit der in κ steckenden unbestimmten Drehung $\tilde{\omega}$ identifiziert werden. Gl. (23) geht damit in Gl. (10) über.³⁴

Dem nichtabsoluten Gitterparallelismus der singulären Kristalldisklination wird in der Kontinuums-
theorie offenbar dadurch Rechnung getragen, daß der Strukturkrümmungstensor κ nicht integrabel, d. h. das Drehfeld ω nur auf glatten Kurven definiert ist. Dementsprechend kann auch der Distorsionstensor β nicht global sondern nur auf glatten Kurven definiert werden. Er ergibt sich mit (3) aus dem Verzerrungstensor ε (Gln. (24), (25)) und dem nur auf der Kurve definierten Drehtensor ω (Gl. (15)). Im Fall $\mathfrak{D} \neq 0$ fällt also die Gl. (8) aus. An ihre Stelle tritt Gl. (10), die nur global definierte Größen enthält.

Dem von Disklinationen durchsetzten Kristall läßt sich kein globales Verschiebungsfeld u zuordnen. Gl. (16) liefert jedoch das Feld u entlang eines beliebigen Weges, wenn für β der auf diesem Weg ermittelte Distorsionstensor eingesetzt wird. Insbesondere ergibt sich auf einem geschlossenen Weg i. a. ein Schließungsfehler Δu . Nach partieller Integration von (16) und nach Anwendung des Stokes'schen Satzes kommt man auf den Ausdruck

$$\begin{aligned} b_j(\mathbb{C}) &= \Delta u_j|_{\mathbb{C}} \\ &= \epsilon_{jmn} \Delta \omega_m|_{\mathbb{C}} x_n(P_0) \\ &\quad + \int_{\mathbb{C}} \alpha_{ij} n_i df - \epsilon_{jmn} \int_{\mathbb{C}} \mathfrak{D}_{im} x_n n_i df. \end{aligned} \tag{26}$$

Dabei ist $\Delta \omega|_{\mathbb{C}}$ der zum geschlossenen Weg \mathbb{C} gehörige Schließungsfehler der Drehung (Gl. (22)). Wir identifizieren Δu mit dem vom Weg abhängigen Burgers-

³⁴ Man beachte, daß $\tilde{\omega}$ nicht die zur Disklinationsdichte \mathfrak{D} gehörige inkompatible Drehung ω ist (Gl. (15)).

vektor $\mathbf{b}(\mathbb{C})$ der Disklinationen. Gl. (26) wird in den folgenden Sonderfällen erläutert.

Fall 3a: Wir betrachten den Sonderfall einer reinen Anordnung von Keildisklinationen, deren Linien parallel zur x_3 -Achse liegen. Diese Anordnung wird durch eine Disklinationsdichte von der Form

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (27)$$

beschrieben. Wegen Gl. (11) ist die zugehörige Disklinationstorsion divergenzfrei (Gl. (19)). Unter den Lösungen von Gl. (19) ist jedoch nur der identisch verschwindende Tensor α mit den Eigenschaften der singulären Keildisklination verträglich.

Zur Bestätigung betrachten wir eine singuläre Keildisklination, die in der x_3 -Achse liegt und die den Drehfehler Ω aufweist. Ausgehend von einer geeigneten stetigen Verteilung $f(x_1, x_2)$ (z. B. Gaußsche Verteilung) kommt man durch einen Grenzübergang

$$f(x_1, x_2) \rightarrow \Omega \delta(x_1, x_2) \quad (28)^{35}$$

von (27) zum Tensor \mathfrak{D} der isolierten Keildisklination. Mit diesem Ansatz werden alle in §3 erwähnten Eigenschaften der singulären Keildisklinationen erfaßt. So folgt aus (22) für jeden geschlossenen Umlauf um die x_3 -Achse derselbe Schließungsfehler der Drehung

$$\Delta\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Das in Abb. 9b veranschaulichte Verhalten des Burgersvektors wird im Rahmen der linearen Theorie ($\Delta\omega$ klein) durch das erste Glied in Gl. (26) vollständig wiedergegeben. Da in (26) für den Ansatz (27), (28) das dritte Glied verschwindet³⁶, muß für jeden Umlauf das zweite Glied ebenfalls verschwinden. Das führt bei stetigem α (Lösung von (19)) notwendig auf die Forderung

$$\alpha_{ij} \equiv 0. \quad (30)$$

In der Kontinuumstheorie der Kristalldisklinationen ordnen wir deshalb einer Dichte von Keildisklinationen einen verschwindenden Tensor α der Disklinationstorsion zu.

Fall 3b: Die singuläre Torsionsdisklination der Abb. 7b (Disklinationslinie = x_3 -Achse, erzeugende Drehung um die x_1 -Richtung) wird durch die Dichte

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Omega \delta(x_1, x_2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

³⁵ $\delta(x_1, x_2)$ = zweidimensionale Diracsche Deltafunktion.

³⁶ Faktor x_n im Integranden!

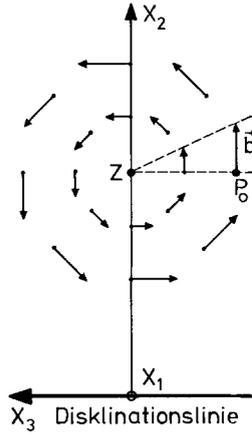


Abb. 17. Burgersvektoren einer Torsionsdisklination in linearer Näherung (s. Abb. 11c)

erfaßt. Man ermittelt daraus mit (22) für jeden Umlauf um die Disklinationslinie den richtigen Drehfehler

$$\Delta\omega = \begin{pmatrix} \Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Im Gegensatz zur Keildisklination muß der singulären Torsionsdisklination ein nicht verschwindender, nicht divergenzfreier Tensor α der Disklinationstorsion zugeordnet werden. Der Ansatz

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0, & -\Omega x_3 \delta(x_1, x_2), & -\Omega x_2(Z) \delta(x_1, x_2) \end{pmatrix} \tag{33}$$

genügt zusammen mit (31) der Gl. (11), wobei $x_2(Z)$ zum Drehzentrum der erzeugenden Schnittebene gehört (Abb. 7b). Zusammen mit (26), (31) und (32) erhalten wir dazu den Burgersvektor der Torsionsdisklination:

$$\mathbf{b}(\mathbb{C}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Omega x_3(P_0) + \int_f \alpha_{32} n_3 df + \int_f \vartheta_{31} x_3 n_3 df \\ \Omega x_2(P_0) + \int_f \alpha_{33} n_3 df + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Omega x_3(P_0) \\ \Omega(x_2(P_0) - x_2(Z)) \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Liegt der Anfangspunkt P_0 des Umlaufs speziell in der erzeugenden Schnittebene (x_2, x_3 -Ebene) und tragen wir in P_0 den Vektor \mathbf{b} an, so liegt dieser ebenfalls in der x_2, x_3 -Ebene und steht senkrecht auf der Strecke $\overline{P_0 Z}$. Sein Betrag ist

$$|\mathbf{b}| = \Omega \cdot \overline{P_0 Z}. \tag{35}$$

Die Abb. 17 zeigt die Vektoren \mathbf{b} für verschiedene Punkte P_0 , d. h. für verschiedene Umläufe. Sie entspricht in linearer Näherung der Abb. 11c.

Die nicht verschwindende Disklinationstorsion trägt also ganz wesentlich zum Burgersvektor der Torsionsdisklination bei wie aus (34) ersichtlich ist. Sie sorgt für die Existenz des neutralen Punktes Z außerhalb der Disklinationslinie (Abb. 7b, 11, 17). α kann jedoch keiner Versetzungsanordnung zugeordnet werden. Die Komponente

$$\alpha_{32} = -\Omega x_3 \delta(x_1, x_2) \quad (36)$$

aus (33) müßte nämlich als eine Stufenversetzung gedeutet werden, die auf ihre volle Länge ausschließlich in der x_3 -Achse liegt und deren Burgersvektor entlang der Versetzungslinie variiert. Der Burgersvektor einer singulären Versetzung ist aber definitionsgemäß konstant.³⁷

Auf Grund des Sonderfalles 3b ordnen wir in der Kontinuumstheorie den nicht divergenzfreen Tensor α den Disklinationen zu. Daß dieser Tensor nicht als Versetzungsdichte gedeutet werden kann, zeigt auch die folgende Überlegung: Wenn eine antisymmetrische Disklinationsdichte \mathfrak{D} gemäß Gl. (11) die Quelledichte einer gewissen Versetzungsanordnung wäre, dann könnten wir im Kristall die Disklinationsanordnung erzeugen, indem wir die zugehörige Versetzungsanordnung schrittweise durch Hinzufügen einer Versetzung nach der anderen aufbauen. Der zur Disklinationsverteilung gehörige nichtabsolute Gitterparallelismus käme also schrittweise durch Überlagerung von absoluten Parallelismen zustande. Das ist jedoch offenbar unmöglich.

Fall 4: Wir betrachten eine gemischte Anordnung von Versetzungen und Disklinationen. Da die geometrischen Grundgleichungen (2) bis (12) linear aufgebaut sind, ist das Problem nach additiver Überlagerung der Fälle 2) und 3) gelöst.

Wir unterscheiden die Tensoren der Versetzungstorsion und der Disklinationstorsion durch Indizes V und D . Der Tensor der Gesamttorsion lautet dann

$$\alpha = \underset{(V)}{\alpha} + \underset{(D)}{\alpha}. \quad (37)$$

Der Krümmungstensor \mathfrak{D} kommt nur zusammen mit Disklinationen ins Spiel. Die Tensoren $\underset{(V)}{\alpha}$ und \mathfrak{D} sind divergenzfrei, während die Quellen von $\underset{(D)}{\alpha}$ und α durch die Disklinationsdichte festgelegt sind.

§5. Die Kristalldisklinationen als Quelle innerer Spannungen. Lineare Elastizitätstheorie

Aus Abb. 8 ist anschaulich klar, daß eine Kristalldisklination sehr große innere Spannungen erzeugt. Wegen den starken Gitterkrümmungen müssen außer den Kraftspannungen auch Momentenspannungen als elastische Reaktionen in Betracht gezogen werden. Dementsprechend sei die elastische Energiedichte W des Kristalls vom Verzerrungstensor ε und vom Strukturkrümmungstensor κ abhängig. Für die lineare Theorie wird W in der Form

$$W = \overset{(1)}{C}_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + \overset{(2)}{C}_{ijkl} \kappa_{ij} \kappa_{kl} + \overset{(3)}{C}_{ijkl} \varepsilon_{ij} \kappa_{kl} \quad (38)$$

angesetzt. $\overset{(1)}{C}$, $\overset{(2)}{C}$ und $\overset{(3)}{C}$ sind die Tensoren der elastischen Konstanten.

³⁷ Siehe bei KRÖNER [1], § 1.

Wir definieren die elastischen Reaktionen auf die übliche Weise. Es ist

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (39)$$

der symmetrische *Tensor der Kraftspannungen* und

$$\mu_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ij}} \quad (40)$$

der *Tensor der Momentenspannungen*. (39) und (40) sind die Materialgleichungen des Körpers.³⁸

Im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie lassen sich die Eigenspannungen in einem von Disklinationen durchsetzten Kristall mit Hilfe der nachfolgend zusammengestellten Gleichungen berechnen:

Gruppe I: 3 Gleichgewichtsbedingungen im Körperinnern [8, 23]:

$$\partial_i (\sigma_{ij} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijm} \partial_n \mu_{nm}) = 0. \quad (41)$$

Von äußeren Volumkräften wird abgesehen. Die Randbedingungen für einen endlichen Körper lassen wir außer Betracht. Sie werden an anderer Stelle ausführlich dargestellt.³⁹

Gruppe II: 9+9 geometrische Grundgleichungen:

$$\stackrel{(1)}{L}_{ij} \equiv \alpha_{ij} - \varepsilon_{imn} \partial_m \varepsilon_{nj} - \delta_{ij} \kappa_{mn} + \kappa_{ji} = 0, \quad (10), (42)$$

$$\stackrel{(2)}{L}_{ij} \equiv \vartheta_{ij} - \varepsilon_{imn} \partial_m \kappa_{nj} = 0. \quad (9), (43)$$

Gruppe III: 6+9 Materialgleichungen:

Gleichungen (39) und (40).

Die Disklinationsdichte ϑ sehen wir als gegeben an. Sie gehorcht der Bedingung

$$\partial_i \vartheta_{ij} = 0. \quad (12), (44)$$

Die zugehörige Disklinationstorsion α muß aus der Differentialgleichung

$$\partial_i \alpha_{ij} + \varepsilon_{jmn} \vartheta_{mn} = 0 \quad (11), (45)$$

unter Berücksichtigung gewisser Nebenbedingungen ermittelt werden (z. B. neutraler Punkt Z, s. §3). Sie ist damit auch eine gegebene Größe.

Den 36 Gleichungen in I bis III stehen 6+6+9+9=30 unbekannte Funktionen ε_{ij} , σ_{ij} , κ_{ij} , μ_{ij} gegenüber. Die linken Seiten der Gleichungsgruppe II

³⁸ Bei der Ausreduktion der Tensoren \mathcal{C} entsprechend den Symmetrieeigenschaften des Kristalls ist zu beachten, daß κ und damit \mathcal{C} und \mathcal{C} Tensordichten sind. Die einschlägigen Überlegungen hierzu findet man bei KESSEL [23]. Auch die Größe μ ist bezüglich allgemeinen Koordinatentransformationen eine Tensordichte. Siehe auch Fußnote 32.

³⁹ GÜNTHER [22] und KESSEL [23] geben die Randbedingungen des Cosseratkontinuums. Diese können auch für einen Kristall in Anspruch genommen werden, wenn die Cosseratdrehungen mit den Gitterdrehungen identifiziert werden.

gehörchen jedoch den Differentialidentitäten

$$\partial_i L_{ij} + \epsilon_{jmn} L_{mn} = 0 \quad (46)$$

und

$$\partial_i L_{ij} = 0, \quad (47)$$

d. h. in (42) und (43) stecken sechs überzählige Gleichungen. Aus (46) entnimmt man, daß die antisymmetrische Linearkombination der Gln. (43) zusammen mit (42) bereits erfüllt ist. Die Gln. (43) können also durch ihre symmetrische Linearkombination ersetzt werden:

$$L_{(ij)} \equiv (\vartheta_{ij} - \epsilon_{imn} \partial_m \kappa_n)_{(ij)} = 0. \quad (48)$$

Eine Elimination der verbleibenden drei überzähligen Gleichungen ist nicht bekannt.⁴⁰

In (48) kann mit (42) der Strukturkrümmungstensor durch den Verzerrungstensor ersetzt werden. Wir erhalten die für unser Problem verallgemeinerten Kompatibilitätsbedingungen von de Saint Venant:

$$(\vartheta_{ij} + \epsilon_{imn} \partial_m \alpha_{jn} - \epsilon_{imn} \epsilon_{jpq} \partial_m \partial_p \varepsilon_{nq})_{(ij)} = 0. \quad (49)^{41}$$

Diese Gleichungen enthalten insbesondere die Äquivalenz von Disklination-dipol und Versetzung. Dazu muß der Tensor α als Gesamtorsion einer gemischten Anordnung von Disklinationen und Versetzungen angesehen werden. Als Beispiel betrachten wir eine Stufenversetzung, die in der x_3 -Achse liegt und deren Burgersvektor parallel zur x_1 -Richtung eines orthonormierten kartesischen Koordinatensystems orientiert ist. Im zugehörigen Tensor α der Versetzungsdichte ist $\alpha_{31} = b\delta(x_1, x_2)$ die einzige nicht verschwindende Komponente. Damit ist das zweite Glied in (49) nur für $i=j=3$ von null verschieden. Es kann mit der Disklinationdichte $\vartheta = (\vartheta_{33} = +b\partial_2 \delta(x_1, x_2), \vartheta_{ij} = 0 \text{ sonst})$ kompensiert werden, d. h. die von der Versetzung verursachten inkompatiblen Verzerrungen werden mit Hilfe eines lokalen Dipols von Keildisklinationen wieder rückgängig gemacht. Die behauptete Äquivalenz ist damit offensichtlich.

Das Spannungsproblem läßt sich mit Hilfe von Spannungsfunktionen lösen. Formen wir die Gleichgewichtsbedingungen (41) mit dem *asymmetrischen Spannungstensor*

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{2} \epsilon_{ijm} \partial_m \mu_{nm} \quad (50)$$

in

$$\partial_i \tau_{ij} = 0 \quad (51)$$

und

$$\partial_i \mu_{ij} + \epsilon_{jmn} \tau_{mn} = 0 \quad (52)$$

um, so ergeben sich zwei Gleichungssysteme, die zu (12) und (11) analog sind. Wir werden dadurch auf die Ansätze

$$\tau_{ij} = \epsilon_{imn} \partial_m F_{nj} \quad (53)$$

und

$$\mu_{ij} = \epsilon_{imn} \partial_m G_{nj} + \delta_{ij} F_{mm} - F_{ji} \quad (54)$$

⁴⁰ TRUESDELL & TOUPIN [21], S. 273, 2. Absatz.

⁴¹ Gl. (49) ist auch eine Verallgemeinerung der Gl. (I.52) bei KRÖNER [1].

für die Tensoren der elastischen Spannungen geführt (s. Gln. (9) und (10)). F und G sind die Tensoren der Spannungsfunktionen [22]. Diese enthalten sechs überzählige funktionale Freiheitsgrade⁴², welche durch Addition von „Nullspannungsfunktionen“

$$\overset{\circ}{F}_{ij} = \partial_i F_j \quad (55)$$

und

$$\overset{\circ}{G}_{ij} = \partial_i G_j - \epsilon_{ijm} F_m \quad (56)$$

zu F und G beseitigt werden können. Über die Vektoren F_j und G_j kann nach Belieben verfügt werden. Sie haben keinen Einfluß auf die Spannungen τ und μ .

§ 6. Berechnung der Eigenspannungen von Keildisklinationen im zweidimensionalen hexagonalen Gitter (lineare Näherung)

Der in § 5 gegebene Formalismus wird auf die 60°-Keildisklination der Abb. 10 angewendet. Die Flußlinien seien entlang der x_3 -Achse orientiert. Die Disklinationlinie liege in der x_3 -Achse. Das Flußliniengitter definiert makroskopisch ein zweidimensionales, deformierbares Kontinuum in der x_1, x_2 -Ebene. Dementsprechend setzen wir im dreidimensionalen Formalismus abgesehen von $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{21}, \epsilon_{22}, \kappa_{13}, \kappa_{23}$ und den daraus abzuleitenden Größen alle übrigen kinematischen Größen und den Operator ∂_3 gleich Null.

Die elastische Energiedichte W aus (38) reduziert sich in diesem Sonderfall auf die flächenhafte Energiedichte

$$W = W(\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{21}, \epsilon_{22}, \kappa_{13}, \kappa_{23}) \quad (57)$$

in der x_1, x_2 -Ebene. Daraus entnimmt man in linearer Näherung das Hookesche Gesetz des zweidimensionalen hexagonalen Kontinuums [23]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{11}} &\equiv \sigma_{11} = E \epsilon_{11} + Q \epsilon_{22} \\ \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{22}} &\equiv \sigma_{22} = E \epsilon_{22} + Q \epsilon_{11} \\ \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{12}} &\equiv \sigma_{12} = (E - Q) \epsilon_{12} \\ \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{21}} &\equiv \sigma_{21} = (E - Q) \epsilon_{21} \\ \frac{\partial W}{\partial \kappa_{13}} &\equiv \mu_{13} = M \kappa_{13} \\ \frac{\partial W}{\partial \kappa_{23}} &\equiv \mu_{23} = M \kappa_{23} . \end{aligned} \quad (58)$$

Darin sind E der Elastizitätsmodul, Q die Querkontraktionszahl, $S = (E - Q)$ der Schermodul und M der Krümmungsmodul.

⁴² In τ und μ stecken wegen (51) und (52) nur zwölf funktionale Freiheitsgrade.

Von den Gleichgewichtsbedingungen (51) und (52) bleiben nur drei Gleichungen für die Spannungskomponenten $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22}, \mu_{13}$ und μ_{23} des ebenen Spannungszustands übrig. Mit den Ansätzen

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ F_{31} & F_{32} & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{33} \end{pmatrix} \quad (59), (60)$$

für die Tensoren der Spannungsfunktionen werden die Gleichgewichtsbedingungen identisch erfüllt (Gln. (53), (54)). In den Tensoren τ und μ stecken drei überzählige funktionale Freiheitsgrade. Dem entsprechen die drei Komponenten von F und G .

Wegen $\partial_3 = 0$ ist der Tensor F_{ij} divergenzfrei:

$$\partial_i F_{ij} = 0. \quad (61)$$

Er läßt sich damit als Rotationsfeld eines weiteren Spannungsfunktionstensors f darstellen:

$$F_{ij} = \epsilon_{imn} \partial_m f_{nj}. \quad (62)$$

Eine additive „Nullfunktion“

$$\overset{\circ}{f}_{ij} = \partial_i f_j \quad (63)$$

in f_{ij} wirkt sich bei einem beliebigen Vektor f_j nicht auf die Spannungsfunktion F aus. Zur Beschreibung der beiden Komponenten F_{31} und F_{32} genügt es, nur die Komponenten $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ von Null verschieden vorauszusetzen. Außerdem ist mit Hilfe von $\overset{\circ}{f}_{ij}$ stets erreichbar, daß f_{ij} die Gestalt

$$f = \begin{pmatrix} f & g & 0 \\ -g & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (64)$$

annimmt. f enthält damit die gleiche Anzahl von funktionalen Freiheitsgraden wie F .

Von den geometrischen Grundgleichungen (42) und (43) verbleiben für unser ebenes Problem nur die drei folgenden Gleichungen:

$$\alpha_{31} - \partial_1 \epsilon_{21} + \partial_2 \epsilon_{11} + \kappa_{13} = 0, \quad (65)$$

$$\alpha_{32} - \partial_1 \epsilon_{22} + \partial_2 \epsilon_{12} + \kappa_{23} = 0, \quad (66)$$

$$\vartheta_{33} - \partial_1 \kappa_{23} + \partial_2 \kappa_{13} = 0. \quad (67)$$

Dabei ist für die isolierte Keildisklination

$$\alpha_{31} = \alpha_{32} = 0 \quad (68)$$

und

$$\vartheta_{33} = \Omega \delta(x_1, x_2) \quad (69)$$

zu setzen (s. Gln. (27), (28), (30)).

Führen wir die Spannungsfunktionen G_{33}, f, g mit Hilfe von (62), (53), (54) und dem Hookeschen Gesetz (58) in die geometrischen Grundgleichungen ein,

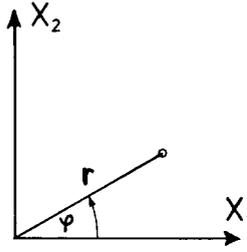


Abb. 18

so ergeben sich folgende Differentialgleichungen:

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2) ; (G_{33} + f) = -M \vartheta_{33}, \tag{70}$$

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2)^2 ; f = -A(\vartheta_{33} + \partial_1 \alpha_{32} - \partial_2 \alpha_{31}), \tag{71}$$

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2) \left[(\partial_1^2 + \partial_2^2) - \frac{2S}{M} \right] ; g = 2S(\partial_1 \alpha_{31} + \partial_2 \alpha_{32}), \tag{72}$$

$$A = \frac{E^2 - Q^2}{E}, \tag{73}$$

$$S = E - Q. \tag{74}$$

Diese Gleichungen sind aus dem zweidimensionalen Laplace-Operator $(\partial_1^2 + \partial_2^2)$ und dem Helmholtz-Operator⁴³ $(\partial_1^2 + \partial_2^2 + k^2)$ aufgebaut. Damit können für beliebige Funktionen ϑ_{33} , α_{31} und α_{32} mit Hilfe von Greenschen Funktionen Lösungen angegeben werden.

Wir suchen eine partikuläre Lösung, welche den Anforderungen der singulären Keildisklination genügt. Die Funktion g ziehen wir in allgemeiner Form durch die Rechnung und verfügen darüber am Schluß in geeigneter Weise.

Die Gleichungen (70) und (71) haben für die Ansätze (68) und (69) die partikulären Lösungen

$$G_{33} + f = a \ln r \tag{75}$$

und

$$f = b r^2 \ln r \tag{76}$$

(s. Abb. 18). a und b sind Konstanten.

Aus den Spannungsfunktionen leitet man für die Komponenten der elastischen Spannungen folgende Ausdrücke ab:

Kraftspannungen (siehe bei VOLTERRA [20]):

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \sigma_{11} = -b(2 \ln r - \cos 2\varphi + 2) - \partial_1 \partial_2 g \\ \tau_{22} &= \sigma_{22} = -b(2 \ln r + \cos 2\varphi + 2) + \partial_1 \partial_2 g \\ \tau_{(12)} &= \sigma_{12} = b \sin 2\varphi + \frac{1}{2}(\partial_1^2 - \partial_2^2) g \\ \tau_{[12]} &= -\frac{1}{2}(\partial_1^2 + \partial_2^2) g. \end{aligned} \tag{77}$$

⁴³ MORSE & FEHSBACH [31], S. 804 und S. 891.

Momentenspannungen:

$$\begin{cases} \mu_{13} = a \frac{\sin \varphi}{r} + \partial_1 g \\ \mu_{23} = a \frac{\cos \varphi}{r} + \partial_2 g. \end{cases} \quad (78)$$

Die Konstante a setzen wir mit Hilfe von (58) und (22/1) zum Drehfehler Ω in Beziehung. Man erhält

$$a = -M \frac{\Omega}{2\pi}. \quad (79)$$

Die unbestimmte Funktion g hat auf den Drehfehler keinen Einfluß. Dagegen muß

$$g \equiv 0 \quad (80)$$

gesetzt werden, damit man aus (77) und (78) mit (58), (15), (3) und (20/1) das richtige Verhalten des Burgersvektors einer Keildisklination erhält. $g=0$ ist eine partikuläre Lösung von Gl. (72).

Zur Bestimmung der Konstanten b gehen wir mit den errechneten Spannungen in die geometrische Grundgleichungen (65), (66) ein. Man erhält

$$b = -\frac{E^2 - Q^2}{4E} \frac{\Omega}{2\pi}. \quad (81)$$

In linearer Näherung beschreiben die umrandeten Teile in (77) und (78) zusammen mit (79) und (81) die Eigenspannungen von Keildisklinationen im zweidimensionalen Flußliniengitter. Die Symmetrie des Kraftspannungstensors τ , d. h., die Divergenzfreiheit der Momentenspannungen μ konnte a priori nicht vorausgesehen werden.

Die Spannungen σ und μ zeigen für $r \rightarrow 0$ und $r \rightarrow \infty$ ein solches Verhalten, daß die elastische Energiedichte

$$W = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \mu_{ij} \kappa_{ij} \quad (82)$$

sowohl in der Disklinationslinie als auch im Unendlichen divergiert. Die erste Singularität könnte man durch Einführung eines „Abschneideradius“ analog wie in der Versetzungstheorie beheben [12]. Dagegen kann die zweite Singularität nicht beseitigt werden. Sie muß physikalisch in dem Sinne gedeutet werden, daß die Keildisklination aus energetischen Gründen im unendlichen Körper für sich alleine überhaupt nicht existieren kann. Tatsächlich findet man in Abb. 10 in der Umgebung des Disklinationszentrums eine auffallende Häufung von Versetzungen, welche das Spannungsfeld der Disklination abschirmen und so für eine endliche elastische Energie sorgen (s. Abb. 19).

Aus (78) entnimmt man leicht, daß das resultierende Drehmoment auf einer ebenen Fläche verschwindet, wenn diese einen Drehzylinder um die Disklinationslinie tangiert. Auf einer durch die Disklinationslinie gehenden Fläche ist dagegen das Drehmoment von Null verschieden und maximal. Ein stabförmiges Kristallstück erfährt demnach im Verzerrungsfeld einer Disklination je nach Orientierung verschiedene elastische Krümmungen. In Abb. 20 sind zwei Fälle skizziert. Sie entsprechen in linearer Näherung den aus Abb. 8 bekannten Gitterkrümmungen.

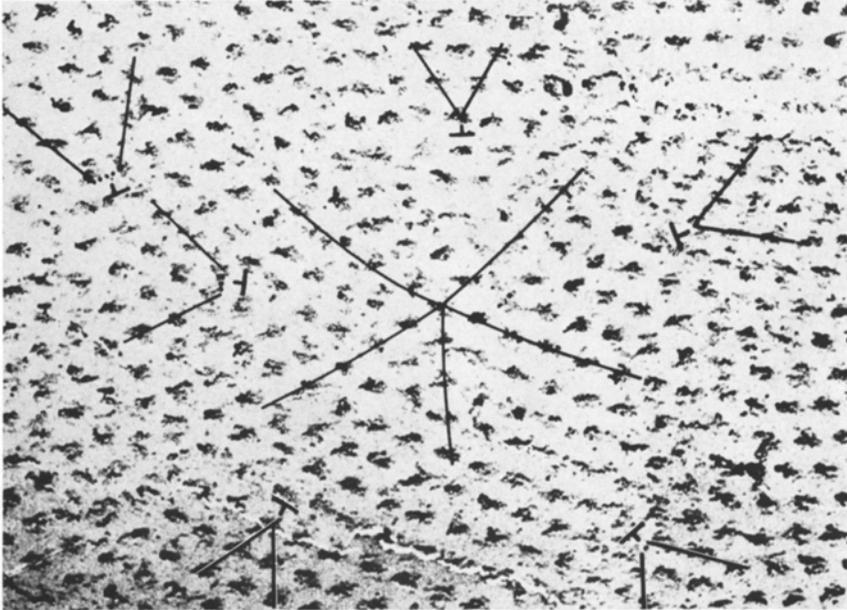


Abb. 19. Keildisklination der Abb. 10. Die Disklination wird durch eine Häufung von Versetzungen abgeschirmt

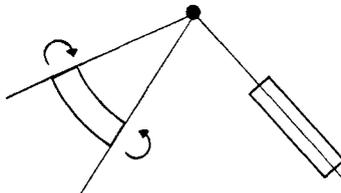


Abb. 20. Elastische Krümmungen auf Grund der Momentenspannungen μ (Gl. (78))

§7. Nichtlineare Geometrie der Kristalldisklinationen

Sämtliche in diesem Paragraphen verwendeten Feldgrößen werden über dem Kristall hinreichend stetig vorausgesetzt. Insbesondere betrachten wir eine stetige Verteilung von Kristalldisklinationen. Da in §4 bereits alles Wesentliche zur Kontinuumstheorie der Kristalldisklinationen gesagt wird, geben wir hier nur die nichtlinearen Verallgemeinerungen von den in der linearen Theorie benützten geometrischen Größen und Gleichungen.

Den von Disklinationen verursachten Eigenspannungszustand eines Kristalls bezeichnen wir als *Endzustand*.⁴⁴ Dieser ist als kompakter Körper im euklidischen Raum realisiert. Wir beschreiben den Endzustand in dem Koordinatensystem x^k ,

⁴⁴ Diese Bezeichnung wird im Hinblick auf den Teil III dieser Arbeit gewählt [14], wo die nichtmetrischen Spannungen in die Theorie der Versetzungen und Disklinationen einbezogen werden.

$k=1, 2, 3$. Die zugehörigen Basisvektoren sind e_k , $k=1, 2, 3$. Der *euklidische Metriktensor* $g=(g_{ij})$ und die *euklidische affine Konnexion* $g=(g_{ij}^k)$ definieren die euklidische Geometrie des Endzustands.

$$g_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} (\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}). \quad (83)^{45, 46}$$

Die Eigenverzerrungen des Kristalls beschreiben wir über dem Endzustand mit Hilfe eines *elastischen Metriktensors* $a=(a_{ij})$ (=Gittermetrik) und einer affinen Gitterkonnexion $\Gamma=(\Gamma_{ij}^k)$.

Der Tensor a gibt über dem Endzustand gemäß

$$d\sigma^2 = a_{ij} dx^i dx^j \quad (84)$$

denjenigen Abstand von zwei benachbarten Massenpunkten, den die beiden Punkte nach Übergang zum *natürlichen Zustand* [1] als euklidischen Abstand aufweisen. Der vollkommen entspannte natürliche Zustand wird durch eine Zerschneidung des Endzustands in hinreichend kleine Volumelemente physikalisch realisiert. – Die Gitterkonnexion Γ beschreibt durch

$$dv^k = -\Gamma_{ij}^k v^j dx^i \quad (85)$$

die Veränderung der Gittervektoren v des Endzustands als nichteuklidischen Gitterparallelismus.^{1, 47}

Die in Abb. 9 veranschaulichte Abbildung (schraffierte Gebiete) führt entlang jeder glatten Kurve des Endzustands, die ganz im guten Kristallgebiet liegt, zu einer simultanen Naturalisierung der Gitterkonnexion und der elastischen Metrik. Diese Eigenschaft der singulären Disklination übernehmen wir in die Kontinuums-theorie indem wir postulieren: Die Gitterkonnexion eines von Disklinationen durchsetzten Kristalls ist entlang jeder glatten Kurve simultan mit der elastischen Metrik naturalisierbar. Äquivalent dazu ist die Aussage: *Die Gitterkonnexion ist metrisch bezüglich der elastischen Metrik*⁴⁷, d.h. es ist

$$\overset{(\Gamma)}{\nabla}_k a_{ij} = 0. \quad (86)^{48}$$

Die Gitterkonnexion und die elastische Metrik definieren über dem verspannten Endzustand eine weitere, nicht euklidische Geometrie, die dem natürlichen Zustand zugeordnet ist [13].⁴⁹ Entsprechend dem in §3 aufgezeigten nichtabsolu-

⁴⁵ Wir verwenden durchweg die Summationskonvention der Tensorrechnung.

⁴⁶ g^{ij} = kontravariante Komponente der euklidischen Metrik:

$$g^{im} g_{mj} = \delta_j^i.$$

⁴⁷ Wegen den in diesem Paragraphen verwendeten Begriffen und Beziehungen wird auch auf Teil I dieser Arbeit verwiesen [13]. Die mathematischen Grundlagen findet man bei RASCHESKI [27] und bei SCHOUTEN [28].

⁴⁸ ∇_k = kovariante Ableitung. Der hochgestellte Index zeigt die Konnexion an, bezüglich der kovariant differenziert wird.

⁴⁹ Wenn nichts Gegenteiliges gesagt wird, heben und senken wir Indizes ausschließlich mit der Gittermetrik a . a^{ij} sind die kontravarianten Komponenten der Gittermetrik: $a_{im} a^{mj} = \delta_j^i$.

ten Gitterparallelismus der Kristalldisklinationen ist diese Geometrie durch einen nichtverschwindenden Riemannschen Krümmungstensor der Gitterkonnexion gekennzeichnet:

$$R_{ijkl} \equiv 2(\partial_i \Gamma_{jkl} - \Gamma_{ilm} \Gamma_{jkn} a^{mn})_{[ij]} = -\vartheta_{ijkl} \neq 0. \quad (87)$$

ϑ ist der *Tensor der Disklinationsdichte*.

Auch der Torsionstensor zur Gitterkonnexion ist i. a. von Null verschieden.

$$S_{ijk} \equiv \Gamma_{[ij]}^p a_{pk} = \alpha_{ijk} \neq 0. \quad (88)$$

Die Größe α bezeichnen wir im Falle einer reinen Anordnung von Kristalldisklinationen als *Tensor der Disklinationstorsion*. Allgemein sprechen wir von der *Gittertorsion*, wenn auch Versetzungen mit ins Spiel kommen.

Die Tensoren R und S erfüllen einige Differentialidentitäten⁵⁰, die sich auf die Disklinationsdichte ϑ und die Gittertorsion α übertragen:

1. Identität:

$$\vartheta_{(ij)kl} = 0. \quad (89)$$

2. Identität:

$$-\vartheta_{[ijk]l} = 2 \overset{(r)}{\nabla}_{[i} \alpha_{jk]l} - 4 \alpha_{[ij|p} \alpha_{k]ql} a^{pq}. \quad (90)$$

3. Identität:

$$\vartheta_{ij(kl)} = 0. \quad (91)$$

Bianchiidentität:

$$\overset{(r)}{\nabla}_{[i} \vartheta_{mn]kl} = 2 \alpha_{[in|p} \vartheta_{m]qkl} a^{pq}. \quad (92)$$

Wegen der ersten und dritten Identität läßt sich der Riemannschen Krümmungstensor und die Disklinationsdichte ohne Informationsverlust durch Tensordichten vom Gewicht (+2) ersetzen:

$$\overset{(+2)}{\vartheta}{}^{ij} = \frac{1}{4} \overset{(+1)}{\epsilon}{}^{imn} \overset{(+1)}{\epsilon}{}^{jkl} \vartheta_{mnkl}, \quad (93)^{29, 51}$$

$$\vartheta_{mnkl} = \overset{(-1)}{\epsilon}{}_{mni} \overset{(-1)}{\epsilon}{}_{klj} \overset{(+2)}{\vartheta}{}^{ij}. \quad (94)$$

⁵⁰ SCHOUTEN [28], S. 144ff.

⁵¹ Das Permutationssymbol ϵ transformiert sich wie eine Tensordichte vom Gewicht (+1) bei kontravarianten Indizes und vom Gewicht (-1) bei kovarianten Indizes. $\overset{(+1)}{\epsilon}{}^{ijk}$ bzw. $\overset{(-1)}{\epsilon}{}_{ijk}$ haben bezüglich jedem Koordinatensystem die Komponenten +1, -1, 0 je nach dem, ob die Indizes i, j, k eine gerade, ungerade oder eine sonstige Permutation von 1, 2, 3 sind. Es gilt im dreidimensionalen Raum:

$$\overset{(-1)}{\epsilon}{}_{ijm} \overset{(+1)}{\epsilon}{}^{pqm} = \delta_i^p \delta_j^q - \delta_i^q \delta_j^p; \quad \overset{(-1)}{\epsilon}{}_{imn} \overset{(+1)}{\epsilon}{}^{pmn} = 2\delta_i^p; \quad \overset{(-1)}{\epsilon}{}_{imn} \overset{(\pm 1)}{\epsilon}{}^{lmn} = 6.$$

Das erwähnte Transformationsverhalten von $\overset{(\pm 1)}{\epsilon}$ ist für den absoluten Differentialkalkül von Bedeutung. Gegen orthonormierte, lineare Koordinatentransformationen verhalten sich $\overset{(+1)}{\epsilon}$ und $\overset{(-1)}{\epsilon}$ wie Tensoren.

Analoge Beziehungen reduzieren R_{ijkl} zu J^{ij} .⁵² Die Tensoren S und α können nach dem Schema

$$\alpha^{(+1)j}_i = - \epsilon^{(+1)jmn} \alpha_{mni}, \quad (95)$$

$$\alpha_{mni} = -\frac{1}{2} \epsilon^{(-1)jmn} \alpha^{(+1)j}_i \quad (96)$$

zu Tensordichten vom Gewicht $(+1)$ reduziert werden.⁵³

Ausgedrückt durch die reduzierten Größen lautet das Gleichungssystem (87)

$$J^{(+2)ij} = - \mathfrak{G}^{(+2)ij} \neq 0. \quad (97)$$

Die zweite Identität und die Bianchiidentität bringen wir in die Form

$$\nabla_i^{(+1)} \alpha^{(+1)j}_j + \epsilon_{lmn}^{(-1)} \alpha^{(+1)l}_j \alpha^{(+1)mn} + \epsilon_{jmn}^{(-1)} \mathfrak{G}^{(+2)mn} = 0 \quad (98)$$

und

$$\nabla_i^{(+1)} \mathfrak{G}^{(+2)ij} + \epsilon_{lmn}^{(-1)} \mathfrak{G}^{(+2)lj} \alpha^{(+1)mn} = 0. \quad (99)^{49}$$

Die Identitäten (98) und (99) sind offenbar die nichtlinearen Verallgemeinerungen der Beziehungen (11) und (12), so daß wir $\mathfrak{G}^{(+2)}$ und $\alpha^{(+1)}$ als die Verallgemeinerungen der in der linearen Theorie verwendeten Disklinationsdichte und Disklinationstorsion ansehen können. Gegenüber der linearen Theorie tritt jedoch eine wesentliche Erschwerung dadurch ein, daß die Disklinationsdichte nun nicht mehr unabhängig von der Disklinationstorsion bestimmt werden kann. $\alpha^{(+1)}$ und $\mathfrak{G}^{(+2)}$ sind wechselseitig aneinander gekoppelt. Ferner sieht man, daß sich eine zusätzlich vorhandene Versetzungstorsion der Disklinationstorsion nicht mehr additiv überlagert.

Im Rahmen der einschränkenden Bedingungen (98) und (99) sind die Disklinationsdichte und die Gittertorsion frei wählbar und können so einer gegebenen Verteilung von Kristalldisklinationen und Versetzungen angepaßt werden.

Der antisymmetrische Teil des Gleichungssystems (97) ist wegen der zweiten Identität trivialerweise erfüllt, so daß wir uns auf den symmetrischen Teil

$$J^{(+2)(ij)} = - \mathfrak{G}^{(+2)(ij)} \quad (100)$$

beschränken können.

Die Unterschiede zwischen den beiden über dem Endzustand definierten Geometrien (g_{ij} , g_{ij}^k bzw. a_{ij} , Γ_{ij}^k) kommen durch den *elastischen Verzerrungstensor* $e=(e_{ij})$ und durch den *Hyperdeformationstensor* $H=(H_{ij}^k)$ zum Ausdruck [9]:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - a_{ij}), \quad (101)$$

$$H_{ij}^k = g_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k. \quad (102)$$

⁵² Die Tensordichte $J^{(+2)}$ unterscheidet sich vom Einsteinschen Krümmungstensor der Gitterkonnexion nur um den Faktor $a = \text{Det}(a_{ij})$.

⁵³ Im folgenden behalten wir für die reduzierten Größen die Benennungen der ursprünglichen Tensoren bei, sind uns jedoch des geänderten Transformationsverhaltens bewußt.

Der Verzerrungstensor ist ein Maß für die lokalen elastischen Verzerrungen des Kristalls, indem er beim Übergang vom natürlichen Zustand zum Endzustand die (euklidischen) Abstandsänderungen infinitesimal benachbarter Punkte angibt:

$$ds^2 - d\sigma^2 = 2e_{ij} dx^i dx^j. \quad (103)$$

ds und $d\sigma$ sind die (euklidischen) Abstände im Endzustand und im natürlichen Zustand.

Der Hyperdeformationstensor vergleicht den Gitterparallelismus des Endzustands mit dem euklidischen Parallelismus: Wird der Gittervektor \mathbf{v} entlang des Weges $d\mathbf{x}$ sowohl im euklidischen Sinne als auch bezüglich Γ parallelverschoben, so liegen am Ort $x + dx$ i. a. zwei verschiedene Vektoren $\mathbf{v}_{(E)}(x + dx)$ und $\mathbf{v}_{(\Gamma)}(x + dx)$ (= Gittervektor) vor, deren Unterschied durch

$$\left(\mathbf{v}_{(E)}^k - \mathbf{v}_{(\Gamma)}^k \right) |_{(x+dx)} = -H_{ij}{}^k v^j(x) dx^i \quad (104)$$

gegeben ist. Der Hyperdeformationstensor enthält damit insbesondere die Strukturkrümmung des Kristallgitters im Endzustand.

Endzustand und natürlicher Zustand sind dann und nur dann identisch, wenn der Verzerrungs- und der Hyperdeformationstensor verschwinden. Der Kristall enthält dann keine Spannungen.

Senken wir den oberen Index im Hyperdeformationstensor mit der elastischen Metrik \mathbf{a} , so erhalten wir durch die Zerlegung

$$H_{ij}{}^m a_{mk} \equiv H_{ijk} = H_{i(jk)} + H_{i[jk]} \quad (105)$$

den natürlichen Hyperverzerrungstensor

$$\lambda_{ijk} = H_{i(jk)} \quad (106)$$

und den natürlichen Strukturkrümmungstensor

$$\kappa_{ijk} = H_{i[jk]}. \quad (107)$$

Ohne Information zu verlieren, kann der letztere durch eine Tensordichte vom Gewicht (+1) ersetzt werden:

$$\kappa_i^{(+1)j} = \frac{1}{2} \epsilon^{(+1)jmn} \kappa_{imn}, \quad (108)$$

$$\kappa_{imn} = \epsilon_{jmn}^{(-1)} \kappa_i^{(+1)j}. \quad (109)$$

Zusammen mit der Zerlegung

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}{}^k &= \frac{1}{2} a^{km} (\partial_i a_{mj} - \partial_m a_{ji} + \partial_j a_{im}) \\ &\quad - a^{km} (S_{imj} - S_{mji} + S_{jim}) \end{aligned} \quad (110)^{49, 54}$$

ergeben sich für den Hyperverzerrungstensor und den Strukturkrümmungstensor die Ausdrücke

$$\lambda_{ijk} = \overset{(g)}{V}_i e_{jk} \quad (111)^{48}$$

⁵⁴ Das ist die allgemeinste metrische Konnexion. Siehe SCHOUTEN [28], S. 131.

und

$$\kappa_{ijk} = 2 \overset{(g)}{V}_{[j} e_{k]i} - (\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kij}) \quad (112)$$

bzw.

$$\overset{(+1)}{\kappa}_j^i = \in \overset{(+1)}{i} \overset{(+1)}{m} \overset{(g)}{V}_m e_{nj} + \left(\frac{1}{2} \delta_j^i \alpha_m^m - \alpha_j^i \right). \quad (113)$$

Die letzte Beziehung führt auf die Gleichungen

$$\overset{(+1)}{\alpha}_j^i = \in \overset{(+1)}{i} \overset{(+1)}{m} \overset{(g)}{V}_m e_{nj} + (\delta_j^i \overset{(+1)}{\kappa}_m^m - \overset{(+1)}{\kappa}_j^i), \quad (114)$$

welche für ein kartesisches Koordinatensystem mit den Gln. (10) aus der linearen Theorie übereinstimmen. Bemerkenswert ist, daß in die Gln. (111) bis (114) nur die euklidische absolute Ableitung $\overset{(g)}{V}$ eingeht, die von den elastischen Verzerrungen des Endzustands nicht abhängt.

Senken wir den oberen Index im Hyperdeformationstensor mit der euklidischen Metrik g , so erhalten wir

$$H_{ij}{}^m g_{mk} \equiv \tilde{H}_{ijk} = \tilde{H}_{i(jk)} + \tilde{H}_{i[jk]}, \quad (115)$$

$$\tilde{H}_{i(jk)} \equiv L_{ijk} = \overset{(r)}{V}_i e_{jk} \quad (116)$$

und

$$\tilde{H}_{i[jk]} \equiv K_{ijk} = 2 \overset{(r)}{V}_{[j} e_{k]i} - (\tilde{\alpha}_{ijk} - \tilde{\alpha}_{jki} + \tilde{\alpha}_{kij}), \quad (117)$$

wobei für $\tilde{\alpha}$ der Ausdruck

$$\tilde{\alpha}_{ijk} = \alpha_{ijm} a^{mn} g_{nk} \quad (118)$$

zu nehmen ist. Wir bezeichnen L und K als *euklidischen Hyperverzerrungstensor* bzw. *euklidischen Strukturkrümmungstensor*.

Zur Deutung der Tensoren L und K betrachten wir im Endzustand entlang einer Kurve ein *Feld äquivalenter Gittervektoren* v . Diese sind bezüglich der Gitterkonnexion Γ parallelverschoben. Vom euklidischen Standpunkt aus erleiden sie auf dem Wegelement dx eine absolute Änderung δv , die sich aus einer euklidischen infinitesimalen Drehung⁵⁵ $\delta \omega_{jk} = K_{ijk} dx^i$ und aus der zugehörigen infinitesimalen Verzerrung $\delta \varepsilon_{jk} = L_{ijk} dx^i$ zusammensetzt.⁵⁶

Analoge Überlegungen gelten für die Tensoren λ und κ . Ein über dem Endzustand *euklidisch parallelverschobener Vektor* w erleidet vom Standpunkt der nichteuklidischen Geometrie des natürlichen Zustands aus eine absolute Änderung

⁵⁵ Drehung bezüglich der euklidischen Metrik g .

⁵⁶ Euklidische absolute Änderung des Gittervektors [28]:

$$\begin{aligned} \overset{(E)}{\delta} v^l &= dv^l + g_{ij}{}^l dx^i v^j = (-\Gamma_{ij}{}^l + g_{ij}{}^l) dx^i v^j = H_{ij}{}^l dx^i v^j \\ &= g^{kl} (L_{ijk} dx^i + K_{ijk} dx^i) v^j = g^{kl} (\delta \varepsilon_{(E)jk} + \delta \omega_{(E)jk}) v^j \\ &= \overset{(E)}{\delta} v_I^l + \overset{(E)}{\delta} v_{II}^l. \end{aligned}$$

Die Komponente $\overset{(E)}{\delta} v_{II}^l = g^{kl} \delta \omega_{(E)jk} v^j$ gehört zu einer infinitesimalen euklidischen Drehung entlang dx : $(\overset{(E)}{\delta} v_{II} \cdot v) = g_{kl} \delta v^k v^l = 0$. ($\overset{(E)}{\delta} \cdot$ = „euklidisches“ Skalarprodukt).

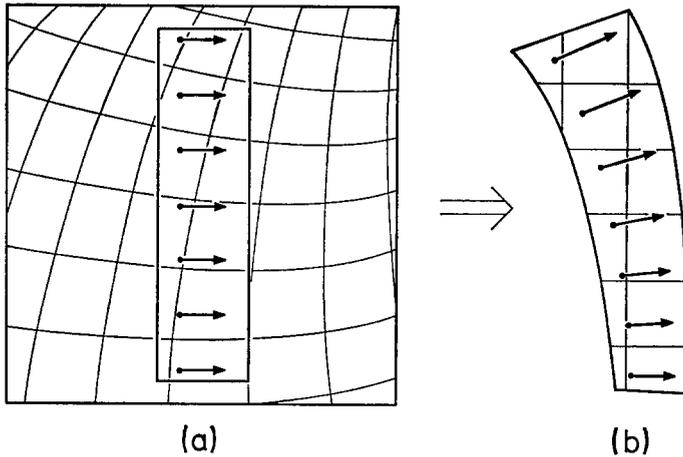


Abb. 21 a u. b. Zur Deutung der „natürlichen Strukturkrümmung“ κ als euklidische Krümmung. (a) Endzustand. (b) Natürlicher Zustand. κ ist die euklidische Krümmung des mitgeführten Vektorfelds

δw , die insbesondere eine infinitesimale Drehung $\delta \omega_{(N)jk} = -\kappa_{ijk} dx^i$ bezüglich der elastischen Metrik a enthält.⁵⁷

Obwohl demnach K und nicht κ die euklidische Gitterkrümmung des Endzustands angibt, betrachten wir doch die natürliche Strukturkrümmung κ als die Verallgemeinerung der in der linearen Theorie eingeführten Strukturkrümmung. Wie man aus (111) und (112) entnimmt, enthält nämlich κ die gesamte Information, die von der Gitterkonnexion Γ im Vergleich zur Gittermetrik a zusätzlich ins Spiel gebracht wird. Diese zusätzliche Information steckt im Torsionstensor S (s. Gl. (110)). Dagegen ist der Hyperverzerrungstensor λ durch die Gittermetrik alleine festgelegt (s. Gln. (101), (111)). Er bringt damit keine zusätzliche Information. – Sind umgekehrt der elastische Verzerrungstensor e und die Strukturkrümmung κ bekannt, so liegen mit den Gln. (101), (114), (96) und (88) die Metrik a und die Torsion S fest. Aus Gl. (110) entnimmt man schließlich die Gitterkonnexion Γ . Die Tensoren e und κ bestimmen demnach die Gitterverzerrungen des Endzustands vollständig und leisten damit genau dasselbe wie in der linearen Theorie die Tensoren ε und κ .

Im Gegensatz dazu kann aus dem Tensorpaar e und K die Gitterstruktur des Endzustands nicht ermittelt werden. Wie man aus (116) und (117) entnimmt, müßte zur Bestimmung von S auch der Anteil $L_{[i]jk}$ von L herangezogen werden.

In linearer Näherung gehen die Beziehungen (112) und (117) in (10) über. Die beiden Strukturkrümmungsmaße κ und K werden identisch.

Die natürliche Strukturkrümmung κ läßt sich auf folgende Weise als euklidische Krümmung realisieren: Wir betrachten im Endzustand ein euklidisch parallelverschobenes, materielles Vektorfeld (s. Abb. 21). Wird ein dünner Mate-

⁵⁷ $\delta w^l = dw^l + \Gamma_{ij}^l dx^i w^j = (-g_{ij}^l + \Gamma_{ij}^l) dx^i w^j$. Rotationsanteil: $\delta w_{(N)\Pi}^l = a^{lk} \delta \omega_{(N)jk} w_j$ mit $\delta \omega_{(N)jk} = -\kappa_{ijk} dx^i$. Es ist $(\delta w_{(N)\Pi}^{(N)} \cdot w) = a_{kl} (\delta w_{(N)\Pi}^k w^l) = 0$.

rialschlauch ausgeschnitten und (durch simultane Naturalisierung [13] der Gitterkonnexion Γ und der Gittermetrik α) in den entspannten, natürlichen Zustand übergeführt, so liegt das Kristallgitter in dem Schlauch vollständig entzerrt und euklidisch parallelverschoben vor. Das aufgeprägte und mitgeführte Vektorfeld weist dagegen Verzerrungen und euklidische Drehungen auf. Letztere werden durch die natürliche Strukturkrümmung κ beschrieben.

Ausgedrückt durch die Tensoren e , κ und H lauten die Gleichungssysteme (97) und (100) explizit

$$J^{ij} \equiv - \epsilon^{(+1)imn} \overset{(g)}{V}_m \overset{(+1)}{K}_n + \frac{1}{2} \epsilon^{(+1)imn} \epsilon^{(+1)j pq} H_{m p r} H_{n q s} a^{r s} = - \mathfrak{G}^{ij} \quad (119)$$

und

$$J^{(ij)} \equiv \left(- \epsilon^{(+1)imn} \epsilon^{(+1)j pq} \overset{(g)}{V}_m \overset{(g)}{V}_p e_{n q} + \epsilon^{(+1)imn} \overset{(g)}{V}_m \overset{(+1)}{\alpha}_{j n} \right)_{(ij)} + \left(\frac{1}{2} \epsilon^{(+1)imn} \epsilon^{(+1)j pq} H_{m p r} H_{n q s} a^{r s} \right)_{(ij)} = - \mathfrak{G}^{(ij)}. \quad (120)$$

Das sind offenbar die nichtlinearen Verallgemeinerungen der Gln. (43) und (49).

Wir suchen nun die Verallgemeinerungen des Verzerrungstensors ε (Gl. (4)) und des Drehfeldes ω (Gl. (15)), letzteres entlang einer beliebigen, glatten³³ Kurve \mathfrak{C} . τ sei der Kurvenparameter und $P_0(\tau=\tau_0)$ der Anfangspunkt auf der Kurve.

Es gibt entlang \mathfrak{C} ein Basissystem

$$c_{\kappa}(\tau) = C_{\kappa}^k(\tau) e_k(\tau), \quad \kappa = 1, 2, 3, \quad (121)$$

in dem die Gitterkonnexion Γ und die elastische Metrik α simultan naturalisieren. Mit Hilfe der naturalisierenden Matrix C lassen sich die Gitterkonnexion Γ und die elastische Metrik α entlang der Kurve in der Form

$$\Gamma_j^k(\tau) \equiv \left(\frac{dx^i}{d\tau} \cdot \Gamma_{ij}^k \right)_{\tau} = C_{\kappa}^k \partial_{\tau} C_j^{\kappa} \quad (122)^{58}$$

und

$$a_{ij}(\tau) = C_i^{\kappa}(\tau) C_j^{\lambda}(\tau) \delta_{\kappa \lambda} \quad (123)$$

darstellen.⁴⁷

Zur Vereinfachung unserer Überlegungen legen wir ein kartesisches Koordinatensystem x^k zugrunde, dessen Basisvektoren e_k im Punkt P_0 mit der naturalisierenden Basis c_{κ} zusammenfallen. Es ist dann

$$C_{\kappa}^k(\tau_0) \stackrel{*}{=} \delta_{\kappa}^k. \quad (124)^{59}$$

⁵⁸ $\frac{dx^i}{d\tau}$ = Kurventangente. C_j^{κ} Kehrmatrix zu C_{κ}^j . $\partial_{\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}$.

⁵⁹ Diese Gleichung ist gegen Koordinatentransformationen nicht forminvariant. Sie gilt nur in dem speziell gewählten Koordinatensystem. Wir setzen deshalb einen Stern über das Gleichheitszeichen.

Das System x^k ist i. a. nicht orthonormiert:

$$g_{ij} \stackrel{*}{=} \text{konst.} \neq \delta_{ij}, \tag{125}$$

$$g_{ij}^k \stackrel{*}{=} 0. \tag{126}$$

Insbesondere ist

$$a_{ij}(P_0) \stackrel{*}{=} \delta_{ij}. \tag{127}$$

Die naturalisierende Matrix C hängt eng mit dem zur Kurve \mathfrak{C} gehörigen *Distorsionstensor* B zusammen. Es existiert nämlich entlang \mathfrak{C} ein nichtsinguläres Tensorfeld $B(\tau) = (B_i^j(\tau))$, das im Punkt τ diejenigen Vektoren $\underset{(E)}{v}(\tau)$ und $\underset{(F)}{v}(\tau)$ einander zuordnet, die durch Parallelverschiebung im euklidischen Sinne bzw. im Sinne von Γ aus einem beliebigen, im Punkt P_0 angetragenen Vektor $\underset{(0)}{v} = (\underset{(0)}{v}^k)$ hervorgehen:

$$\underset{(F)}{v}^j(\tau) = B_i^j(\tau) \underset{(E)}{v}^i(\tau), \tag{128}$$

$$B_i^j(\tau_0) = \delta_i^j, \tag{129}$$

$$\underset{(E)}{v}^i(\tau) \stackrel{*}{=} \underset{(0)}{v}^i. \tag{130}$$

Wegen der besonderen Wahl des Koordinatensystems können in (128) die Vektorpaare $(\underset{x}{c}, \underset{k}{e}, \kappa = k)$ für das Vektorpaar $(\underset{(F)}{v}, \underset{(E)}{v})$ genommen werden.⁶⁰ Durch Vergleich mit (121) ergibt sich daraus die Zuordnung

$$C_\kappa^k(\tau) \stackrel{*}{=} \delta_\kappa^i B_i^k(\tau). \tag{131}$$

Der Tensor B beschreibt offenbar entlang der Kurve die im Endzustand beobachtete Deformation eines Gittervektors gegenüber dem äquivalenten Gittervektor im Bezugspunkt P_0 . Wegen dem nichtabsoluten Gitterparallelismus der Disklinationen kann B i. a. nur auf Kurven definiert werden.

Aus (123) und (131) erhält man auf der Kurve \mathfrak{C} für die elastische Metrik den Ausdruck

$$a_{ij}(\tau) = B_i^m(\tau) B_j^n(\tau) \underset{(E)}{a}_{mn}(\tau). \tag{132}$$

Dabei ist $\underset{(E)}{a}$ ein im euklidischen Sinne parallelverschobenes Tensorfeld, das im Punkt P_0 mit der elastischen Metrik übereinstimmt:

$$\underset{(E)}{a}_{ij}(P_0) = a_{ij}(P_0). \tag{133}$$

Der positiv definite, symmetrische Tensor $\underset{(E)}{a}$ ist über dem ganzen Endzustand definiert. Bei unserer speziellen Wahl des Koordinatensystems gilt

$$\underset{(E)}{a}_{ij}(x) \stackrel{*}{=} \delta_{ij}. \tag{134}^{61}$$

⁶⁰ Die naturalisierende Basis c der Konnexion Γ ist bezüglich Γ parallelverschoben [13].

⁶¹ Im kartesischen Koordinatensystem x^k gilt: $a_{ij}(\tau) = C_i^k(\tau) C_j^\lambda(\tau) \delta_{k\lambda} = B_i^m(\tau) B_j^n(\tau) \delta_{mn}$. Das Tensorfeld $\delta_{mn} = \underset{(E)}{a}_{mn}(x)$ ist im euklidischen Sinne parallel verschoben. Zusammen mit (127) sind damit die Gln. (132) und (133) für ein kartesisches Koordinatensystem offensichtlich. Da es sich um Tensorgleichungen handelt, gelten sie in jedem Koordinatensystem.

Gl. (132) ist analog zu Gl. (128): Die elastische Metrik $a_{ij}(\tau)$ ist nämlich wegen (86) bezüglich Γ parallel verschoben, und beide Felder $a_{ij}(\tau)$ bzw. $\underset{(E)}{a}_{mn}(\tau)$ gehen durch Parallelverschiebung im Sinne von Γ bzw. im euklidischen Sinne aus demselben Tensor $a_{ij}(P_0)$ des Bezugspunkts P_0 hervor. Mit Hilfe von Gl. (132) beschreibt der Tensor $B(\tau)$ also auch die entlang \mathfrak{C} beobachtete Abweichung der lokalen elastischen Verzerrung von der entsprechenden Verzerrung im Bezugspunkt P_0 .

Eine weitere vereinfachende Annahme ist für die folgenden Überlegungen nützlich: Der euklidische Metriktenor $g(x)$ und der oben erwähnte Tensor $\underset{(E)}{a}(x)$ sollen identisch sein:

$$\underset{(E)}{a}_{ij}(x) = g_{ij}(x) \stackrel{*}{=} \delta_{ij}. \quad (135)$$

Diese Identifizierung ist immer möglich. Physikalisch bedeutet sie eine solche homogene Verzerrung des Gesamtkörpers, daß das Gitter im Punkt P_0 lokal unverzerrt ist.⁶²

Wir senken nun den oberen Index im Distorsionstensor B mit der *euklidischen Metrik* g und zerlegen den rein kovarianten Tensor bezüglich g in den nicht-singulären, symmetrischen (*rechten*) Streckungstensor U und in den Drehtensor D :

$$B_i^m(\tau) g_{mj}(\tau) = B_{ij}(\tau) = D_{im}(\tau) g^{mn}(\tau) U_{nj}(\tau), \quad (136)^{46, 63}$$

$$D_{mi}(\tau) D_{nj}(\tau) g^{mn}(\tau) = D_{im}(\tau) D_{jn}(\tau) g^{mn}(\tau) = g_{ij}(\tau). \quad (137)$$

Setzen wir (136) und (135) in (132) ein, so ergibt sich auf \mathfrak{C} für die elastische Metrik der Ausdruck

$$a_{ij}(\tau) = \overset{-1}{U}_{im}(\tau) \overset{-1}{U}_{jn}(\tau) g^{mn}(\tau). \quad (138)^{64}$$

Die positiv definite Metrik a ist andererseits bezüglich der Metrik g *überall* eindeutig zerlegbar:

$$a_{ij}(x) = W_{im}(x) W_{jn}(x) g^{mn}(x). \quad (139)^{65}$$

Dabei ist der symmetrische Tensor W über dem Körper global definiert. Ein Vergleich von (138) und (139) liefert die Identität der Felder W und U entlang einer beliebigen Kurve. Wir ziehen daraus folgenden Schluß:

Der (rechte) Streckungstensor U ist global und nicht nur entlang der Kurve definiert. Er hängt vom Bezugspunkt P_0 ab (Metrikfestsetzung (135)).

Daß der Distorsionstensor B nur auf der Kurve definiert ist, hängt also alleine am Drehfeld D . Für einen geschlossenen Umlauf hat das zur Folge, daß sich der Schließungsfehler des Gitterparallelismus alleine aus dem Schließungsfehler des Drehfelds D ableitet. Es ist damit auch im Rahmen der nichtlinearen Theorie der Anschluß an den in Abb. 8 dargestellten Drehfehler gewonnen.

⁶² Die elastische Metrik a ist in P_0 identisch zur euklidischen Metrik (s. (133) (135)). Das heißt, der elastische Verzerrungstensor e verschwindet in P_0 .

⁶³ Diese Zerlegung ist für eine nichtsinguläre Matrix B bezüglich einer beliebigen, positiv definiten Metrik g stets eindeutig möglich. D ist dabei eine Drehung hinsichtlich der Metrik g . Siehe bei MURNAGHAN [33], S. 25 und ERICKSEN in TRUESDELL, TOUPIN [21], S. 840.

⁶⁴ $\overset{-1}{U}_{im} g^{mn} \overset{-1}{U}_{nj} = g_{ij}$.

⁶⁵ Diese Formel erhält man durch eine Verallgemeinerung der von MURNAGHAN [33], S. 23, 24 skizzierten Überlegungen.

Der global definierte Streckungstensor $U(x)$ und der nur auf der Kurve definierte Drehtensor $D(\tau)$ sind offenbar die nichtlinearen Verallgemeinerungen des Verzerrungstensors $\varepsilon(x)$ und des Drehungstensors $\omega(\tau)$ aus der linearen Theorie⁶⁶. Damit ist $B(\tau)$ die Verallgemeinerung von $\beta(\tau)$. Da der Streckungstensor U und der Verzerrungstensor ε mit (138) und (101) ineinander umgerechnet werden können, kann auch ε als Verallgemeinerung von ε angesehen werden.

Der Übergang zur linearen Theorie wird durch die Ansätze

$$U_{ij}(x) \underset{(\text{lin.})}{=} g_{ij}(x) + \varepsilon_{ij}(x), \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (140)$$

und

$$D_{ij}(\tau) \underset{(\text{lin.})}{=} g_{ij}(\tau) + \omega_{ij}(\tau), \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad (141)$$

mit Größen ε und ω erreicht, die von erster Ordnung klein sind. ε ist überall auf dem Körper definiert, während ω nur auf der betrachteten Kurve angegeben werden kann. Die lineare Näherung lautet damit für den Distorsionstensor B

$$B_{ij}(\tau) \underset{(\text{lin.})}{=} g_{ij}(\tau) + \beta_{ij}(\tau) \quad (142)$$

mit

$$\beta_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (143)$$

und für die elastische Metrik

$$a_{ij}(x) \underset{(\text{lin.})}{=} g_{ij} - 2\varepsilon_{ij}. \quad (144)$$

Mit Gl. (101) ergibt sich daraus der Verzerrungstensor in linearer Näherung zu

$$e_{ij} \underset{(\text{lin.})}{=} \varepsilon_{ij}. \quad (145)$$

Der Distorsionstensor B vergleicht entlang einer Kurve den euklidischen Parallelismus mit dem Gitterparallelismus. Er leistet also im Großen dasselbe, wie der Hyperdeformationstensor H im infinitesimalen Bereich. H ist damit auf der Kurve durch B vollständig festgelegt. Man erhält mit Hilfe von (102), (122), (126) und (131)

$$\left(\frac{dx^k}{d\tau} H_{ki}{}^j \right) \underset{*}{=} -B_m{}^j(\tau) \partial_\tau B_i{}^m(\tau). \quad (146)$$

Daraus folgt für den Strukturkrümmungstensor entlang der Kurve der Ausdruck

$$\left(\frac{dx^k}{d\tau} \kappa_{kij} \right)_\tau \underset{*}{=} -(g^{mn} U_{jm} \partial_\tau U_{ni} + g^{mn} g^{pq} g^{rs} U_{jm} U_{ir} D_{pn} \partial_\tau D_{qs})_{[ij],\tau}. \quad (147)$$

Dessen lineare Näherung lautet

$$\left(\frac{dx^k}{d\tau} \kappa_{kij} \right)_\tau \underset{(\text{lin.})}{=} \partial_\tau \omega_{ij}(\tau). \quad (148)$$

⁶⁶ In ε muß natürlich auch die homogene Verzerrung entsprechend der Festsetzung (135) berücksichtigt werden.

Mit

$$\omega^{(+1)}_i = \frac{1}{2} \epsilon^{(+1)}_{imn} \omega_{mn} \quad (149)$$

erhalten wir

$$\left(\frac{dx^i}{d\tau} \kappa^i_j \right)_{\tau \text{ (lin.)}} = \partial_{\tau} \omega^{(+1)j}(\tau), \quad (150)$$

womit der Anschluß an Gl. (15) aus der linearen Theorie gewonnen ist.

In der nichtlinearen Theorie gestaltet sich die Berechnung des Drehfehlers und des Burgersvektors für eine geschlossene Kurve nicht so einfach wie in der linearen Theorie. Die entsprechenden Linienintegrale können angeschrieben werden. Die Integranden sind jedoch als Folge des nichtabsoluten Gitterparallelismus nur auf der Kurve definiert. Sie können i. a. nicht auf einer von der Kurve berandeten Fläche hinreichend stetig fortgesetzt werden. Damit ist der Stokessche Integralsatz nicht anwendbar. Die Umformung der Linienintegrale in Flächenintegrale bleibt der linearen Theorie vorbehalten. Wir erhalten die Gleichungen (22) und (26).

Zum Gültigkeitsbereich der entwickelten Theorie ist folgendes zu bemerken: Streng genommen steht eine Kontinuumstheorie der stetigen Disklinationsverteilungen zur diskreten Punktsymmetriegruppe des Kristallgitters im Widerspruch. Betrachten wir nämlich eine stetige Disklinationsdichte und den Drehfehler für einen geschlossenen Umlauf, so können wir durch eine stetige Variation des Umlaufs den Drehfehler in stetiger Weise beliebig abändern. Laut Definition der Kristalldisklination muß aber der Drehfehler ein Symmetrieelement aus der diskreten Punktgruppe des Kristalls sein. Der Drehfehler ist also nur einer unstetigen Änderung fähig.⁶⁷

Die Kontinuumstheorie der stetigen Disklinationsverteilungen kann demnach auch in ihrer nichtlinearen Form nur eine grobe Näherung sein. Diese ist um so besser, je weniger die Kristallsymmetrie von der Isotropie abweicht. Eine verbesserte Theorie muß von einer beliebigen Verteilung von diskreten Disklinationen ausgehen. Bei der Entwicklung einer solchen „Distributionentheorie“ ist die Theorie der stetigen Disklinationsverteilungen ein wertvoller Leitfaden.

Die Theorie der stetigen Disklinationsverteilungen kann jedoch auch zu einer exakten Theorie gemacht werden, wenn die „nichtmetrischen“ Eigenspannungen mit Hilfe des Begriffs „Quasidisklinationsdichte“ in die Überlegungen einbezogen werden.⁶⁸

§8. Die singuläre Kristalldisklination in der nichtlinearen Theorie

Für eine in der x_3 -Achse liegende Keildisklination setzen wir den Tensor der Disklinationsdichte genau wie in der linearen Theorie in der Form

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P \delta(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (151)$$

⁶⁷ In der Kontinuumstheorie der Versetzungen treten diese Schwierigkeiten nicht auf, da die Translationsgruppe des Kristalls vom makroskopischen Standpunkt aus praktisch kontinuierlich ist.

⁶⁸ Siehe den Teil III dieser Arbeit [14].

an (vgl. (27), (28)). Dieser Ansatz garantiert für jeden Umlauf um die Disklinationlinie denselben nichtverschwindenden Drehfehler bezüglich des Γ -Parallelismus. Ein analytischer Zusammenhang zwischen der „Polstärke“ P und dem geforderten Drehfehler ist nicht bekannt. Die Polstärke kann jedoch an den Drehfehler angepaßt werden, indem P als freier Parameter durch die Eigenspannungsberechnung durchgezogen wird. Beim Übergang zur linearen Näherung strebt P gegen den linearisierten Drehfehler Ω (Gl. (28)).

Herrn Professor Dr. A. SEEGER danke ich für die Anregung und Förderung dieser Arbeit.

Literatur

1. KRÖNER, E., *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. (Ergebnisse der angewandten Mathematik, Bd. 5.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958.
2. KRÖNER, E., & A. SEEGER, *Nichtlineare Elastizitätstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. Arch. Rational Mech. Anal. **3**, 97–119 (1959).
3. KRÖNER, E., *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*. Arch. Rational Mech. Anal. **4**, 273–334 (1960).
4. BILBY, B. A., R. BULLOUGH, & E. SMITH, Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry. Proc. Roy. Soc., London, Ser. A, **231**, 263–273 (1955).
5. BILBY, B. A., & E. SMITH, Continuous distributions of dislocations. Proc. Roy. Soc., London, Ser. A, **236**, 481–505 (1956).
6. BILBY, B. A., Continuous distributions of dislocations. Progress in Solid Mechanics, **1**, Chap. VII. Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1960.
7. STOJANOVITCH, R., On the reference state problem in the nonlinear elasticity theory of continua with dislocations. Phys. stat. sol. **2**, 566–575 (1962).
8. TEODOSIU, C., Contribution to the continuum theory of dislocations and initial stresses I. Rev. roum. sci. techn., sér. méc. appl. **12**, 961–977 (1967).
9. TEODOSIU, C., Contribution to the continuum theory of dislocations and initial stresses II. Rev. roum. sci. techn., sér. méc. appl. **12**, 1061–1077 (1967).
10. TEODOSIU, C., Contribution to the continuum theory of dislocations and initial stresses III. Rev. roum. sci. techn., sér. méc. appl. **12**, 1291–1308 (1967).
11. SEEGER, A., *Theorie der Gitterfehlstellen*. Handbuch der Physik (Flügge), Bd. VII.1. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.
12. NABARRO, F. R. N., *Theory of Crystal Dislocations*. Oxford: At the Clarendon Press 1967.
13. ANTHONY, K. H., Die Reduktion von nichteuklidischen geometrischen Objekten in eine euklidische Form und Deutung der Reduktion durch Eigenspannungszustände in Kristallen. Arch. Rational Mech. Anal. **37**, 161–180 (1970).
14. ANTHONY, K. H., *Theorie der nichtmetrischen Spannungen in Kristallen*. Wird demnächst in Arch. Rational Mech. Anal. veröffentlicht.
15. TRÄUBLE, H., & U. ESSMANN, Fehler im Flußliniengitter von Supraleitern zweiter Art. Phys. stat. sol. **25**, 373–393 (1968).
16. ANTHONY, K. H., U. ESSMANN, A. SEEGER, & H. TRÄUBLE, Disclinations and the Cosserat-Continuum with Incompatible Rotations. Mechanics of Generalized Continua, IUTAM-Symposium, Freudenstadt/Stuttgart 1967 (E. Kröner), 355–358. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.
17. KONDO, K., The non-holonomic structures of plastic manifolds and metallurgical distant parallelisms by perfect tearing and refurbishment thereof. RAAG Memoirs, Vol. 3, D-X, 173–197 (1962).
18. KONDO, K., Plasticity Theory, Micromechanics of Imperfect Continua. In Vorbereitung.
19. KONDO, K., Y. HIRANO, & S. MINIGAWA, The compensation of the Riemann-Christoffel curvature tensor by dislocation pairs. RAAG Memoirs, Vol. 3, D-XI, 198–214 (1962).
20. VOLTERRA, V., Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes. Ann. Ecole Normale Sup., Ser. 3, **24**, 401–517 (1907).

21. TRUESDELL, C., & R. A. TOUPIN, The Classical Field Theories, Handbuch der Physik (Flügge), Bd. III/1. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
22. GÜNTHER, W., Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. Abhandlungen d. Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, Bd. X, 195—213 (1958).
23. KESSEL, S., Lineare Elastizitätstheorie des anisotropen Cosserat-Kontinuums. Abh. d. Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, Bd. XVI, 1—22 (1964).
24. SCHAEFER, H., The Basic Affine Connection in a Cosserat Continuum. Mechanics of Generalized Continua, IUTAM-Symposium, Freudenstadt-Stuttgart 1967 (E. Kröner), 57—62. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.
25. SCHAEFER, H., Analysis der Motorfelder im Cosserat-Kontinuum. ZAMM 47, 319—328 (1967).
26. TOUPIN, R. A., Dislocated and Oriented Media. Mechanics of Generalized Continua, IUTAM-Symposium, Freudenstadt/Stuttgart (1967) (E. Kröner), 126—140. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.
27. RASCHEWSKI, P. K., Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis. (Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 42.) Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1959.
28. SCHOUTEN, J. A., Ricci-Calculus. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1954.
29. KRÖNER, E., Dislocations and the Biot Savart law. Proc. Phys. Soc., London, Ser. A, 68, 53—55 (1955).
30. ESHELBY, J. D., The Continuum Theory of Lattice Defects. Solid State Physics, Vol. 3, (F. Seitz & D. Turnbull). New York: Academic Press Inc., Publishers 1956.
31. MORSE, P. M., & H. FESHBACH, Methods of Theoretical Physics I. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1953.
32. SEEGER, A., Kristallplastizität. Handbuch der Physik VII/2, (Flügge). Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958.
33. MURNAGHAN, F. D., Finite Deformations of an Elastic Solid. New York: John Wiley & Sons, Inc.; London: Capman & Hall, Limited 1951.

Institut für theoretische und angewandte Physik
Universität Stuttgart

und

Institut für Physik
Max-Planck-Institut für Metallforschung
Stuttgart

(Eingegangen am 15. Mai 1970)