

Stabilitätsverhalten und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen

W. VELTE

Vorgelegt von H. GÖRTLER

Übersicht

	Seite
I. Mathematische Hilfsmittel	100
1. Der topologische Abbildungsgrad in Banach-Räumen	100
2. Hilfsmittel aus der Theorie elliptischer Differentialgleichungen	103
II. Problemstellung. Lineare Theorie	105
3. Problemstellung	105
4. Linearisierung. Das Eigenwertproblem	107
III. Nichtlineare Theorie	111
5. Ein Eindeutigkeitssatz	111
6. Wahl des Banach-Raumes	112
7. Berechnung des Abbildungsgrades	115
IV. Numerischer Teil	119
8. Orthogonalität der Eigenfunktionen	119
9. Iterationsverfahren. Methode der Schwarzschen Quotienten	120
10. Numerische Ergebnisse	122
Zusammenfassung	124
Literatur	124

Die vorliegende Untersuchung ist ein Beitrag zur hydrodynamischen Stabilitätstheorie zäher, inkompressibler Flüssigkeiten, der die nichtlinearen Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen zugrunde liegen. Wir interessieren uns im folgenden speziell für die Frage, wie sich eine gegebene stationäre Strömung, die als Grundströmung bezeichnet wird, unter dem Einfluß von Störungen verhält.

Experimentell und theoretisch gut untersuchte Strömungsbeispiele sind die Strömung in einem geraden Kreisrohr mit der bekannten Poiseuilleschen Strömung als Grundströmung oder die Grenzschicht an einer längs angeströmten Platte mit der Blasius'schen Grenzschicht als Grundströmung. In beiden Fällen ist die Grundströmung instabil, wenn die sog. Reynolds-Zahl, die mit charakteristischen Größen des jeweiligen Problems gebildet ist, einen bestimmten, „kritischen“ Wert überschreitet. Dabei ist der Mechanismus noch keineswegs völlig aufgeklärt, der etwa im Falle der Rohrströmung von kleinen Störungen, die einer linearisierten Theorie genügen, über endliche Störungen schließlich zur ausgebildeten Turbulenz führt.

Es gibt nun eine Anzahl von Strömungen, die durch ein Instabilitätsverhalten auffallen, das man vielleicht allgemein als „zellular“ bezeichnen könnte. Beispiele hierfür sind die Taylorsche Strömung zwischen rotierenden, koaxialen Zylindern sowie eine anfangs ruhende, horizontale Flüssigkeitsschicht, die von unten erwärmt wird. Bei der Taylorschen Versuchsanordnung mit festem äußerem Zylinder und rotierendem inneren Zylinder wird die Grundströmung beim Überschreiten eines kritischen Parameterwertes, der von der Drehzahl abhängt, instabil. Es stellt sich nach einiger Zeit ein neuer, *stationärer* Endzustand ein in Form von torusförmigen Wirbeln. Im Falle der erwärmten Flüssigkeitsschicht setzt nach Überschreiten des kritischen Parameterwertes, der die Temperaturdifferenz zwischen Boden und Oberfläche enthält, eine thermische Konvektionsströmung ein mit einem *stationären* Endzustand in Form der bekannten Benard-Zellen [12], [15].

Um in einem konkreten Problem den kritischen Parameterwert zu berechnen, der die Stabilitätsgrenze angibt, bedient man sich in der Praxis der linearen Theorie kleiner Störungen. Dabei ist die Annahme zugrunde gelegt, daß das Verhalten kleiner Störungen jedenfalls in einem genügend kleinen Zeitintervall qualitativ richtig beschrieben wird durch das Verhalten der Lösungen der in den Störungen linearisierten Bewegungsgleichungen. Der kritische Parameterwert ergibt sich aus einem Eigenwertproblem.

Was die lineare Theorie natürlich nicht beschreiben kann, das ist das Verhalten von Störungen endlicher Größe. Insbesondere kann sie keine Auskunft darüber geben, wann die gestörte, instabile Grundströmung gegen einen neuen, stationären Endzustand geht. An diesem Punkt setzt unsere Untersuchung ein. An einem Beispiel mit „zellularer“ Instabilität wird gezeigt, daß für den kritischen Parameterwert der *linearen* Theorie eine Verzweigung *stationärer* Lösungen der *nichtlinearen* Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen vorliegt, wobei sich die Anzahl stationärer Lösungen vergrößert und die Grundströmung gleichzeitig instabil wird.

Bei dem gewählten Beispiel handelt es sich um die Strömung in einem horizontalen, geraden Rohr mit kreisförmigem oder rechteckigem Querschnitt, wobei die Wand des Rohres von unten erwärmt ist. Die stationäre Grundströmung ist im Falle eines geraden Kreisrohres die schon erwähnte Poiseuillesche Rohrströmung, und als Parameter tritt die sog. Rayleigh-Zahl auf. Es werden Lösungen der Bewegungsgleichungen betrachtet, bei denen die Geschwindigkeitskomponenten von den Koordinaten in Richtung der Rohrachse unabhängig sind. Zunächst liefert die lineare Theorie kleiner Störungen eine kritische Rayleigh-Zahl als Stabilitätsgrenze. Darüber hinaus wird gezeigt, daß nach Überschreiten der Stabilitätsgrenze eine neue, stationäre Strömungsform existiert, die durch thermische Auftriebskräfte verursacht wird.

Zur Herleitung der Ergebnisse über die Verzweigung stationärer Lösungen wird ein Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis herangezogen, nämlich die Theorie des topologischen Abbildungsgrades von LERAY und SCHAUDER [10]. Zunächst wird ein Funktionenraum (Banach-Raum) gewählt, in dem physikalisch sinnvolle Lösungen sicher enthalten sind. Der Parameter des Problems, der in dem behandelten Beispiel die Rayleigh-Zahl ist, wird mit λ bezeichnet, während der

kleinste Eigenwert der linearen Theorie mit λ_1 bezeichnet wird. Man erhält dann folgende Aussagen:

(a) Für $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ existiert in dem zugrunde gelegten Funktionenraum (Banach-Raum) genau eine stationäre Lösung der nichtlinearen Bewegungsgleichungen. Die Lösung ist stabil gegenüber kleinen Störungen für $0 \leq \lambda < \lambda_1$.

(b) Bei λ_1 verzweigt sich diese Lösung, d.h. für alle Werte von λ aus einem kleinen Intervall $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1 + \delta$ ($\delta > 0$) existiert neben der ursprünglichen Lösung (Grundströmung) eine weitere stationäre Lösung (thermische Konvektionsströmung) der nichtlinearen Bewegungsgleichungen, und zwar unterscheiden sich die zwei Lösungen in der Norm des benutzten Banach-Raumes beliebig wenig, sofern nur $|\lambda - \lambda_1|$ genügend klein ist. Für $\lambda = \lambda_1$ fallen die beiden Zweige der Lösung zusammen. Die Grundströmung ist instabil gegenüber kleinen Störungen für $\lambda > \lambda_1$.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Anwendbarkeit der Methode des Abbildungsgrades keineswegs auf diesen Einzelfall beschränkt ist, sondern daß Probleme wie das der Taylor-Zylinder oder der Benard-Zellen mathematisch eine große Ähnlichkeit aufweisen mit dem behandelten Problem und prinzipiell in ganz analoger Weise untersucht werden können. Es ist jedoch so, daß in jedem Falle die numerische Berechnung des kleinsten Eigenwertes und vor allem seiner Vielfachheit erforderlich ist, so daß man jedes physikalische Beispiel einzeln diskutieren muß.

Zur benutzten Methode des Abbildungsgrades sei noch folgendes vorausgeschickt: An sich kann man die Differentialgleichungen des Stabilitätsproblems auch als System von Integrodifferentialgleichungen schreiben. Es liegt dann der Gedanke nahe, die von EHRHARDT SCHMIDT [17] bzw. von L. LICHTENSTEIN [11] entwickelte Methode zur Diskussion verzweigter Lösungen bei nichtlinearen Integralgleichungen bzw. Integrodifferentialgleichungen heranzuziehen. Diese Methode setzt aber voraus, daß man alle Eigenfunktionen zum kleinsten Eigenwert λ_1 des linearisierten Problems explizit kennt und desgleichen die Eigenfunktionen des adjungierten Eigenwertproblems. Ferner muß man in der Lage sein, die sog. Pseudoresolvente (s. [11]) wirklich auszurechnen, um dann schließlich die sog. Verzweigungsgleichung in Form einer Potenzreihenentwicklung explizit hinzuschreiben. Über den Charakter der Verzweigung und insbesondere darüber, ob überhaupt eine Verzweigung reeller Lösungen vorliegt, entscheidet die Diskussion der Potenzreihenentwicklung. Es kommt unter anderem darauf an, welche der ersten Koeffizienten exakt null sind und welche nicht. Nun sind aber die Bewegungsgleichungen auch bei besonders einfach gewählten physikalischen Beispielen bereits so kompliziert, daß man nicht in der Lage ist, die Eigenfunktionen oder gar die Resolvente exakt anzugeben. Man wäre in jedem Fall auf ein numerisches Näherungsverfahren angewiesen. Ganz abgesehen von dem numerischen Aufwand hat dies zur Folge, daß man auch die Koeffizienten der Verzweigungsgleichung nur mit Fehlern behaftet angeben könnte. Zuverlässige Aussagen wären dann nur in Verbindung mit Fehlerabschätzungen zu erhalten.

Wesentlich günstiger liegen die Dinge, wenn man mit dem topologischen Abbildungsgrad arbeitet. Dann braucht man weder die Eigenfunktionen noch die Resolvente zu kennen. Stattdessen hat man für die nichtlinearen Gleichungen,

die als Funktionalgleichungen in einem geeigneten Banach-Raum aufzufassen sind, gewisse allgemeine Eigenschaften nachzuweisen wie Vollstetigkeit des Funktionals, Existenz des Frechetschen Differentials und stetige Abhängigkeit des Funktionals von dem Parameter in einem noch zu präzisierenden Sinn. Der ganze numerische Teil des Problems reduziert sich dann darauf, die Vielfachheit des kleinsten Eigenwertes zu bestimmen. Wenn sich herausstellt, daß die Vielfachheit ungerade ist, dann liefert die Theorie des Abbildungsgrades sofort, daß eine Verzweigung stationärer Lösungen vorliegt.

Die Theorie des Abbildungsgrades hat in neuerer Zeit vor allem auf nicht-lineare Probleme der Punktmechanik Anwendung gefunden (s. etwa die Arbeiten von CRONIN [4]), sowie auch in der russischen Literatur auf Probleme der Mechanik elastischer Körper (s. z. B. den zusammenfassenden Artikel von KRASNOSEL'SKIJ [9]). Dagegen scheint die Methode bisher nicht nutzbar gemacht worden zu sein für das Studium des Stabilitätsverhaltens von Strömungen in der Hydrodynamik.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. H. GÖRTLER meinen Dank aussprechen für die Möglichkeit, in seinem Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik zu arbeiten. Insbesondere bin ich Herrn Prof. GÖRTLER zu Dank verpflichtet für das große Interesse, das er auch der vorliegenden Untersuchung während ihrer Entstehung entgegengebracht hat.

Die numerischen Rechnungen wurden auf der Siemens 2002 des Rechenzentrums der Universität Freiburg ausgeführt. Das Programmieren wurde freundlicherweise von Herrn Dipl.-Math. A. LEHMANN übernommen.

I. Mathematische Hilfsmittel

1. Der topologische Abbildungsgrad in Banach-Räumen

In diesem Abschnitt sind die benötigten Begriffe und Sätze aus der Theorie des Abbildungsgrades in Banach-Räumen im Anschluß an die Arbeit von LERAY und SCHAUDER [10] zusammengestellt. Es handelt sich dabei um eine Übertragung des zunächst in Euklidischen Räumen von BROUWER eingeführten Abbildungsgrades (s. etwa [8]). Es sei erwähnt, daß der Abbildungsgrad nach LERAY und SCHAUDER äquivalent ist mit der „Rotation eines Vektorfeldes mit vollstetiger Verschiebung“ nach E. ROTHE [16], so daß man sich im Prinzip auch auf die Arbeiten von ROTHE über Vektorfelder in Banach-Räumen stützen könnte¹.

Es sei zunächst angedeutet, worin diese Theorie besteht, soweit sie hier benutzt wird: In einem Funktionenraum, der ein Banach-Raum sein muß, wird eine nichtlineare Funktionalgleichung betrachtet, die einen reellen Parameter enthält. Daneben wird eine zweite Funktionalgleichung betrachtet, die durch einen Prozeß der Linearisierung entsteht und ein Eigenwertproblem darstellt. Die Theorie erlaubt dann, gewisse Fragen der Existenz, Eindeutigkeit bzw. Verzweigung von Lösungen der nichtlinearen Funktionalgleichung zurückzuführen auf das Studium des linearen Eigenwertproblems.

Es wird ein reeller Banach-Raum B betrachtet mit den Elementen u, v, \dots oder auch a, b, \dots und dem Nullelement 0 . Die Norm von u ist mit $\|u\|$ bezeichnet. Wir erinnern an einige Definitionen: Eine Abbildung $v = T(u)$ von B in sich

¹ Für die Äquivalenz s. etwa [9].

heißt *vollstetig*, wenn sie stetig ist und außerdem beschränkte Mengen in kompakte Mengen abbildet (Existenz einer konvergenten, unendlichen Folge in der Bildmenge). Der Operator $T(u)$ heißt an der Stelle a differenzierbar, wenn zu gegebenem, festem a ein in u linearer und homogener Operator $A(a, u)$ und ein „Restgliedoperator“ $R(a, u)$ existiert mit

$$T(a + u) - T(a) = A(a, u) + R(a, u),$$

wobei $R(a, u)$ der Norm nach stärker als linear gegen null geht, wenn u gegen null geht:

$$\frac{\|R(a, u)\|}{\|u\|} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \|u\| \rightarrow 0.$$

$A(a, u)$ ist das *Frechetsche Differential* des Operators T an der Stelle a . Wenn T ein vollstetiger Operator ist, dann ist auch das Frechetsche Differential ein vollstetiger Operator (s. etwa [9], S. 360).

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet (offene Menge) im Banach-Raum B , dessen Rand mit Ω' bezeichnet wird. Ferner sei $v = \Phi(u)$ eine Abbildung von B in sich, die von der speziellen Gestalt

$$(1.1) \quad \Phi(u) \equiv u - T(u)$$

ist mit vollstetigem $T(u)$. (Bei E. ROTHE heißt ein solches $\Phi(u)$ „Vektorfeld mit vollstetiger Verschiebung $T(u)$ “.)

LERAY und SCHAUDER [10] haben gezeigt, daß für eine solche Abbildung $v = \Phi(u)$ im Bezug auf ein festes Gebiet Ω und einen beliebigen, festen Punkt b ein „Abbildungsgrad“ d definiert werden kann, wenn b nicht auf dem Bild des Randes Ω' liegt. d ist eine ganze Zahl. Wenn b außerhalb der Bildmenge von $\Omega + \Omega'$ liegt, dann ist nach Definition $d = 0$. Der Abbildungsgrad besitzt folgende Eigenschaften:

I. d ist additiv, d.h. wenn $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ (Ω_1 und Ω_2 punktfremd), und wenn b nicht auf der Bildmenge von $\Omega'_1 + \Omega'_2$ liegt, dann ist

$$d[\Phi, \Omega_1, b] + d[\Phi, \Omega_2, b] = d[\Phi, \Omega_1 + \Omega_2, b].$$

II. Wenn $d[\Phi, \Omega, b]$ definiert und von null verschieden ist, dann besitzt die Gleichung $\Phi(u) = b$ mindestens eine Lösung in Ω .

III. $d[\Phi, \Omega, b]$ bleibt konstant bei stetiger Änderung von b oder stetiger Änderung von Φ (s. unten), solange b nicht zusammenfällt mit einem Punkt der Bildmenge von Ω' .

Die zugelassenen stetigen Änderungen von Φ sind dabei wie folgt definiert: Die Abbildung $v = \Phi(u)$ sei enthalten in einer Schar von Abbildungen $v = \Phi(u, \lambda)$ mit reellem Parameter λ aus einem Intervall $\lambda' \leq \lambda \leq \lambda''$. $\Phi(u, \lambda)$ sei von der speziellen Gestalt $\Phi(u, \lambda) \equiv u - T(u, \lambda)$, wobei der Operator T in λ gleichmäßig stetig ist in folgendem Sinn: Zu gegebenem positivem ε kann man ein η so finden, daß für beliebige $u \in \Omega + \Omega'$ und für beliebige Werte λ_1 und λ_2 aus dem betrachteten Intervall aus $|\lambda_1 - \lambda_2| < \eta$ stets auch $\|T(u, \lambda_1) - T(u, \lambda_2)\| < \varepsilon$ folgt. (Der Abbildungsgrad bleibt auch konstant bei gewissen stetigen Änderungen des Gebietes, wovon aber hier kein Gebrauch gemacht wird.)

Eigenschaft II ist offensichtlich ein Existenzsatz, wobei sich freilich das Problem stellt, den Abbildungsgrad in konkreten Fällen auszurechnen. Im folgenden sind einige Hilfssätze aus [10] angegeben, die es in gewissen Fällen gestatten, die Rechnung explizit auszuführen.

Es sei zunächst u_0 eine Lösung der Funktionalgleichung $\Phi(u) = b$ mit gegebener rechter Seite $b \in B$, und zwar sei u_0 eine isolierte Lösung, d.h. es gebe eine ε -Umgebung von u_0

$$\Omega_\varepsilon(u_0): \quad \|u - u_0\| < \varepsilon$$

derart, daß in der abgeschlossenen Menge $\|u - u_0\| \leq \varepsilon$ keine weitere Lösung der Funktionalgleichung liegt. Dann ist $d[\Phi, \Omega_\varepsilon(u_0), b]$ definiert und wird auch „Index“ $i[\Phi, u_0]$ der isolierten Lösung u_0 genannt. Für das Rechnen mit dem Index gelten folgende Sätze:

1. Wenn die Gleichung $\Phi(u) = b$ in Ω nur endlich viele Lösungen u_k besitzt, und wenn auf dem Rand Ω' keine Lösung der Gleichung liegt, dann ist

$$d[\Phi, \Omega, b] = \sum i[\Phi, u_k] \\ (\text{Summation über alle Lösungen } u_k \in \Omega).$$

2. Die identische Abbildung $v = u$ (d.h. $T(u) \equiv 0$) hat den Index $i = +1$ für alle $u \in B$.

3. Der vollstetige Operator T besitze an der Stelle a das Frechetsche Differential $A(a, u)$. Wenn die lineare Abbildung $w = u - A(a, u)$ umkehrbar eindeutig ist, dann ist a eine isolierte Lösung der Gleichung $\Phi(u) = b$ mit $b \equiv \Phi(a)$. Außerdem existiert der Index der linearen Abbildung im Punkt $u = 0$ und ist gleich $i[\Phi, a]$.

4. Es sei A ein vollstetiger, linearer Operator. Die Abbildung $w = u - \mu_0 A(u)$ mit reellem μ_0 sei umkehrbar eindeutig, d.h. μ_0 sei kein Eigenwert der homogenen Gleichung $u - \mu A(u) = 0$. Dann ist der Index der linearen Abbildung gleich $+1$ oder -1 . Wenn das ganze Intervall $0 \leq \mu \leq \mu_0$ frei von Eigenwerten ist, dann ist der Index gleich $+1$.

5. Es sei μ_0 ein Eigenwert von $u - \mu A(u) = 0$, wobei A die unter 4. genannten Eigenschaften besitzt. Dann erzeugt die Gesamtheit aller Lösungen von

$$L(u) = 0, L^2(u) = 0, \dots, L^k(u) = 0, \dots$$

mit $L(u) \equiv u - \mu_0 A(u)$ einen linearen Raum von *endlicher* Dimension m . Die Zahl m heißt *Vielfachheit* von μ_0 .

6. Wenn sich der reelle Parameter μ stetig ändert, dann bleibt der Index der linearen Abbildung $w = u - \mu A(u)$ konstant in jedem eigenwertfreien Intervall $\mu' < \mu < \mu''$. Beim Überschreiten eines Eigenwertes μ_k der Vielfachheit m_k multipliziert sich der Index mit dem Faktor $(-1)^{m_k}$.

Es wird sich herausstellen, daß die Eigenwertgleichung $u - \mu A(u) = 0$ in Verbindung gebracht werden kann mit dem linearen Eigenwertproblem der Theorie kleiner Störungen, so daß allein aus der Vielfachheit des kleinsten Eigenwertes, der dort als kritischer Parameterwert für das Stabilitätsverhalten interpretiert wird, Schlüsse auf die Existenz von Lösungen der nichtlinearen Bewegungsgleichungen gezogen werden können.

2. Hilfsmittel aus der Theorie elliptischer Differentialgleichungen

Eine wesentliche Voraussetzung der Theorie von LERAY und SCHAUDER ist, daß die betrachtete Funktionenmenge einen Banach-Raum bildet. Bei der Wahl eines geeigneten Banach-Raumes hat man in den Anwendungen auf elliptische Differentialgleichungen gewisse Freiheiten. LERAY und SCHAUDER selbst gaben Anwendungsbeispiele an im Raum der beschränkten, meßbaren Funktionen mit Maximumnorm oder auch im Raum der k -mal Hölder-stetig differenzierbaren Funktionen. Im folgenden werden Funktionenräume zugrunde gelegt, die in den zitierten Arbeiten von BROWDER, FRIEDRICHS, NIRENBERG [1], [7], [14] benutzt werden. Wir schließen uns dabei vor allem an [1] an.

In einem n -dimensionalen Euklidischen Raum mit den Punkten $x = (x_1, \dots, x_n)$ werden beschränkte Gebiete G (offene Mengen) betrachtet bzw. die abgeschlossenen Punktmenge \bar{G} (Gebiet plus Rand). Es wird dann mit $C^k(G)$ die Klasse der Funktionen bezeichnet, die samt ihren partiellen Ableitungen bis zur k -ten Ordnung in G stetig sind, und mit $C^k(\bar{G})$ die Klasse der Funktionen, die in geeigneten Gebieten G_1 mit $\bar{G} \subset G_1$ zur Klasse $C^k(G_1)$ gehören. Wie üblich bezeichnet $L_2(G)$ den Banach-Raum der über G quadratintegrierbaren Funktionen mit der Norm

$$\|u\|_0 = \left(\int_G u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

(Integration im Lebesgueschen Sinn).

Durch Abschließung der Funktionenklasse $C^k(\bar{G})$ bezüglich der Norm

$$(2.1) \quad \|u\|_k = \|u\|_0 + \sum \|D^1 u\|_0 + \dots + \sum \|D^k u\|_0$$

(Summation über alle ersten partiellen Ableitungen $D^1 u$, alle zweiten Ableitungen $D^2 u$ usw.) wird der Banach-Raum $H_k(G)$ erhalten (s. [1]). Spezielle Elemente aus $H_k(G)$ sind die „Testfunktionen“ φ . Das sind die Funktionen, die in G unendlich oft stetig differenzierbar sind und außerhalb einer abgeschlossenen Punktmenge \bar{G}_1 mit $\bar{G}_1 \subset G$ identisch null sind. Die Funktionen φ bilden einen linearen Raum $\dot{H}(G)$. Durch Abschließung bezüglich der Norm (2.1) entsteht aus $\dot{H}(G)$ der Banach-Raum $\dot{H}_k(G)$, der ein Teilraum von $H_k(G)$ ist.

Es sei L ein selbstadjungierter, elliptischer Differentialoperator der geraden Ordnung $2m$. Wir betrachten für das Gebiet G die Differentialgleichung $Lu = v$ mit Dirichletschen Nullrandwerten $u = D^1 u = \dots = D^{m-1} u = 0$. Wir geben kurz einige Ergebnisse aus der Theorie solcher Randwertprobleme wieder, in der zunächst sog. schwache Lösungen betrachtet werden.

Verallgemeinertes Dirichletsches Randwertproblem. Es sei $v \in L_2(G)$. Gesucht ist im Raum $\dot{H}_m(G)$ eine Funktion u mit

$$\int_G u L \varphi dx = \int_G v \varphi dx$$

für alle Testfunktionen $\varphi \in \dot{H}(G)$. Falls eine solche Funktion u existiert, heißt sie schwache Lösung der Randwertaufgabe $Lu = v$ mit Dirichletschen Nullrandwerten.

Wir interessieren uns speziell für den Fall $\Delta u = v$ bzw. $\Delta \Delta u = v$ mit dem Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$. Die Frage nach der Existenz schwacher Lösungen wird beantwortet durch folgenden Satz, der beispielsweise in [14] als Spezialfall enthalten ist:

Lemma 1. *Es sei $v \in L_2(G)$. Dann besitzt die Gleichung $\Delta u = v$ bzw. $\Delta \Delta u = v$ genau eine schwache Lösung in $\mathring{H}_1(G)$ bzw. in $\mathring{H}_2(G)$. Außerdem gibt es eine nur von dem Gebiet G und dem Operator (Δ bzw. $\Delta \Delta$) abhängige Konstante c mit²*

$$\|u\|_0 \leq c \|v\|_0.$$

Es stellt sich nun die Frage, wann eine schwache Lösung sogar eine Lösung im klassischen Sinne ist, und insbesondere, wann die Randwerte $u = D^1 u = \dots = D^{m-1} u = 0$ stetig angenommen werden.

Wir geben im folgenden einige allgemeine Sätze an, die allerdings nur unter vereinfachenden, für unsere Zwecke völlig ausreichenden Voraussetzungen formuliert werden, nämlich: Die Koeffizienten des elliptischen Operators L sind in \bar{G} unendlich oft differenzierbar. Das Gebiet G ist von der Klasse \mathcal{C}_∞^3 . (Beispielsweise sind Kreis und Rechteck Gebiete dieser Klasse.)

Lemma 2. a) *Es sei $v \in L_2(G)$. Wenn u eine schwache Lösung von $Lu = v$ ist, dann liegt u sogar in $H_{2m}(G)$, und es gibt eine nur vom Gebiet G und dem Operator L abhängige positive Konstante c mit*

$$(2.2) \quad \|u\|_{2m} \leq c (\|v\|_0 + \|u\|_0).$$

b) *Wenn $v \in H_s(G)$ ist mit $s \geq 1$, dann liegt u sogar in $H_{2m+s}(G)$.*

Im Falle der Randwertaufgaben $\Delta u = v$ bzw. $\Delta \Delta u = v$ mit Nullrandwerten folgt aus (2.2) die Ungleichung

$$(2.2)' \quad \|u\|_{2m} \leq c \|v\|_0,$$

da man $\|u\|_0$ nach Lemma 1 abschätzen kann.

Auf die Stetigkeit der Ableitungen kann man schließen mit Hilfe eines Satzes von SOBOLEV (s. etwa [7] oder [14]), der im Falle ebener Gebiete ($n=2$) folgendermaßen lautet:

Lemma 3. *Es sei $u \in H_2(G)$. Dann ist u sogar stetig auf \bar{G} , und es gibt eine nur vom Gebiet abhängige positive Konstante c mit*

$$(2.3) \quad \max_{\bar{G}} |u| \leq c \|u\|_2.$$

² Wir bezeichnen im folgenden mit c eine nicht näher bestimmte positive Konstante, wobei die c , die an verschiedenen Stellen auftreten, im allgemeinen für Konstanten mit verschiedenen Zahlenwerten stehen.

³ Ein Gebiet G mit dem Rand R heißt von der Klasse \mathcal{C}_k , wenn eine Überdeckung durch endlich viele Teilgebiete $G_i \subset G$ und eine abgeschlossene Menge $\bar{G}_0 \subset G$ existiert mit folgender Eigenschaft: Für jedes G_i gibt es eine umkehrbar eindeutige, in beiden Richtungen k -mal stetig differenzierbare Abbildung, bei der $R \cap \bar{G}_i$ in ein Stück einer $(n-1)$ -dimensionalen Hyperebene übergeführt wird.

Bezüglich der stetigen Annahme der Randwerte hat man

Lemma 4. *Es sei $u \in \overset{\circ}{H}_m(G)$, $m \geq 1$. Wenn u samt den partiellen Ableitungen bis zur Ordnung $m-1$ auf \bar{G} stetig ist, dann ist auf dem Rande des Gebietes $u = D^1 u = \dots = D^{m-1} u = 0$.*

Schließlich werden wir Gebrauch machen von dem Rellichschen Auswahlssatz (s. etwa [5], Bd. II)⁴.

Lemma 5. *Es sei u_1, u_2, \dots eine unendliche Folge gleichmäßig beschränkter Elemente aus $H_1(G)$:*

$$\|u_k\|_1 \leq M \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Dann kann man eine unendliche Teilfolge u'_1, u'_2, \dots auswählen mit

$$\|u'_i - u'_k\|_0 \rightarrow 0 \quad \text{für } i, k \rightarrow \infty.$$

II. Problemstellung. Lineare Theorie

3. Problemstellung

Wir betrachten im Raum der kartesischen Koordinaten x, y, z die Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen, in denen zusätzlich die durch Temperatur- bzw. Dichteunterschiede verursachten Auftriebskräfte berücksichtigt sind, und zwar in der üblichen, für kleine Temperaturdifferenzen gültigen ersten Näherung, bei der die Temperaturabhängigkeit der Dichte im Auftriebsterm erscheint, während sonst in den Gleichungen für Dichte ρ und Zähigkeit ν mittlere, konstante Werte eingesetzt werden.

Es bezeichne u, v, w die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors in x, y, z -Richtung, p den Druck, T die absolute Temperatur, T_0 eine mittlere Bezugstemperatur, Pr die Prandtl-Zahl, t die Zeitvariable, g die Erdbeschleunigung und α den Ausdehnungskoeffizienten der Flüssigkeit. Die Auftriebskraft wirke in y -Richtung. Dann lauten die Gleichungen mit $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$u_t + u u_x + v u_y + w u_z = -\frac{1}{\rho} p_x + \nu \Delta u$$

$$v_t + u v_x + v v_y + w v_z = -\frac{1}{\rho} p_y + \nu \Delta v + g \alpha (T - T_0)$$

$$w_t + u w_x + v w_y + w w_z = -\frac{1}{\rho} p_z + \nu \Delta w$$

$$T_t + u T_x + v T_y + w T_z = \frac{\nu}{Pr} \Delta T$$

$$u_x + v_y + w_z = 0.$$

Ein solches Problem mit thermischen Auftriebskräften liegt z.B. vor, wenn man ein horizontales Rohr betrachtet, dessen Wand ungleichmäßig erwärmt ist. Fällt die Rohrachse mit der z -Achse zusammen, und interessiert man sich speziell für Lösungen der Gleichungen, die von der z -Koordinaten unabhängig sind, dann

⁴ In [5] findet man den Satz für Folgen aus der Funktionenklasse \mathcal{D} (Funktionen u , die in G stetig sind, stückweise stetige erste Ableitungen besitzen sowie endliche Norm $\|u\|_h$). Er überträgt sich aber sofort auf den Raum $H_1(G)$.

vereinfachen sich die Gleichungen wie folgt:

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & u_t + u u_x + v u_y = -\frac{1}{\rho} p_x + \nu \Delta u \\
 & v_t + u v_x + v v_y = -\frac{1}{\rho} p_y + \nu \Delta v + g \alpha (T - T_0) \\
 & w_t + u w_x + v w_y = -\frac{1}{\rho} p_z + \nu \Delta w \\
 & T_t + u T_x + v T_y = \frac{\nu}{Pr} \Delta T \\
 & u_x + v_y = 0,
 \end{aligned}$$

wobei $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ist. Mit G bezeichnen wir den Rohrquerschnitt in der x, y -Ebene. Der Querschnitt habe in y -Richtung die Breite h . Das Koordinatensystem sei so gelegt, daß G im Streifen $0 < y < h$ enthalten ist. Die lineare Funktion

$$T^*(y) \equiv T_1 - (T_1 - T_0) \frac{y}{h} \quad (T_1 > T_0)$$

wird außerhalb von G interpretiert als gegebene Temperaturverteilung mit $T^* = T_1$ bzw. $T^* = T_0$ für $y = 0$ bzw. $y = h$. Wir betrachten dann das Problem (3.1) für gegebene Anfangswerte $u_0(x, y)$, $v_0(x, y)$, $w_0(x, y)$, $T_0(x, y)$ im Gebiet G zur Zeit $t = t_0$ sowie mit den Randbedingungen

$$(3.1)' \quad u = v = w = 0, \quad T = T^* \quad (t \geq t_0)$$

auf dem Rand R des Gebietes G .

Führt man die dimensionslose Temperatur $\Theta = (T - T_0)/(T_1 - T_0)$ ein, ferner die dimensionslose Grashof-Zahl $Gr = g \alpha h^3 (T_1 - T_0) \nu^{-2}$, und macht man auch alle übrigen Größen in (3.1) dimensionslos mittels Division durch geeignete Bezugsgrößen (Länge h , Geschwindigkeit ν/h , Druck $\rho \nu^2/h^2$, Zeit h^2/ν), dann gehen die Gleichungen (3.1) unter Benutzung der Stromfunktion $F = F(x, y)$ mit $u = F_y$, $v = -F_x$ über in die dimensionslos geschriebenen Gleichungen

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad & \Delta \Delta F = \frac{\partial(\Delta F, F)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial \Delta F}{\partial t} + Gr \frac{\partial \Theta}{\partial x} \\
 & \frac{1}{Pr} \Delta \Theta = \frac{\partial(\Theta, F)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial \Theta}{\partial t} \\
 & \Delta w = \frac{\partial(w, F)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z}.
 \end{aligned}$$

Die Außentemperatur ergibt sich zu $\Theta^* = 1 - y$. Die Randbedingungen lauten, wenn $\partial F/\partial n$ die Ableitung auf dem Rand R in Normalenrichtung bezeichnet,

$$(3.2)' \quad F = \partial F/\partial n = w = 0, \quad \Theta = \Theta^* \quad (t \geq t_0).$$

Eine stationäre Lösung von (3.2), (3.2)' läßt sich sofort angeben, nämlich $F_0 \equiv 0$, $\Theta_0 \equiv 1 - y$, während sich w_0 aus der dritten Gleichung in (3.2) errechnet und im Falle eines Rohres mit kreisförmigem Querschnitt und $\partial p/\partial z = \text{const}$ die Poiseuillesche Rohrströmung liefert.

Es stellt sich dann das Problem zu entscheiden, ob die Strömung F_0, Θ_0, w_0 (Grundströmung) stabil ist, oder ob bei genügend großem Temperaturgradienten, d.h. für genügend große Werte der Grashof-Zahl Gr , eine andere Strömungsform auftritt. Da das System (3.2) zerfällt, kann man sich zunächst auf die Diskussion der beiden ersten Gleichungen für F und Θ beschränken. w ergibt sich anschließend aus der dritten Gleichung.

Es ist zweckmäßig, die allgemeine Lösung anzusetzen in der Form

$$F(x, y, t) = F_0 + \bar{f}(x, y, t), \quad \Theta(x, y, t) = \Theta_0 + Pr \bar{\vartheta}(x, y, t).$$

Aus (3.2) folgen dann für die „Störungen“ $\bar{f}, \bar{\vartheta}$ die Gleichungen

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \Delta \Delta \bar{f} &= \frac{\partial(\Delta \bar{f}, \bar{f})}{\partial(x, y)} + Pr Gr \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \bar{f}}{\partial t} \\ \Delta \bar{\vartheta} &= Pr \frac{\partial(\bar{\vartheta}, \bar{f})}{\partial(x, y)} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + Pr \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial t} \end{aligned}$$

mit vorgebbaren Anfangswerten von $\bar{f}, \bar{\vartheta}$ in G zur Zeit $t=t_0$ und mit den Randwerten auf R

$$(3.3)' \quad \bar{f} = \partial \bar{f} / \partial n = \bar{\vartheta} = 0 \quad (t \geq t_0).$$

4. Linearisierung. Das Eigenwertproblem

Wir verfahren zunächst so, wie es in der hydrodynamischen Stabilitätstheorie kleiner Störungen üblich ist, d.h. wir ersetzen die nichtlinearen Störungsdifferentialgleichungen (3.3) durch die linearisierten Gleichungen

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \Delta \Delta \bar{f} &= Pr Gr \bar{\vartheta}_x + \Delta \bar{f}_t \\ \Delta \bar{\vartheta} &= \bar{f}_x + Pr \bar{\vartheta}_t. \end{aligned}$$

Spezielle Lösungen von (4.1) werden erhalten durch den Separationsansatz

$$f(x, y) \exp(\gamma t), \quad \vartheta(x, y) \exp(\gamma t) \quad (\gamma \text{ reell}),$$

wobei f, ϑ den Gleichungen

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \Delta \Delta f &= Pr Gr \vartheta_x + \gamma \Delta f \\ \Delta \vartheta &= f_x + Pr \gamma \vartheta \end{aligned}$$

genügen müssen. Besitzen diese Gleichungen Lösungen mit $\gamma > 0$, dann gibt es kleine Störungen, die mit der Zeit anwachsen, d.h. die Grundströmung ist instabil. Ist dagegen $\gamma < 0$ für alle Lösungen von (4.2), dann ist die Grundströmung stabil. Man interessiert sich vor allem für den Fall neutraler Störungen ($\gamma = 0$), d.h. für Lösungen des Eigenwertproblems

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \Delta \Delta f &= \lambda \vartheta_x \quad (\lambda \equiv Pr Gr) \\ \Delta \vartheta &= f_x \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$(4.3)' \quad f = \partial f / \partial n = \vartheta = 0$$

und mit dem Eigenwertparameter λ (Rayleigh-Zahl). Der kleinste positive Eigenwert ist, falls er existiert, die kritische Rayleigh-Zahl, bei deren Überschreiten die Grundströmung instabil wird.

Wir interessieren uns für Lösungen f, ϑ des Eigenwertproblems mit folgenden Differenzierbarkeitseigenschaften:

(a) f und ϑ sind im Gebiet G (offene Punktmenge) viermal bzw. zweimal stetig differenzierbar.

(b) f samt seinen ersten partiellen Ableitungen sowie ϑ sind auf $G + R$ stetig und nehmen die Randwerte $f = \vartheta / \partial n = \vartheta = 0$ an.

Es ist zweckmäßig, noch etwas mehr zu verlangen, nämlich:

(c) f und ϑ sind sogar samt ihren dritten bzw. ersten partiellen Ableitungen auf $G + R$ stetig.

Wenn (c) erfüllt ist, dann können im folgenden gewisse Integralumformungen durch partielle Integration ohne Komplikation ausgeführt werden. Weiter unten wird sich ergeben, daß sogar schwache Lösungen die Eigenschaften (a)–(c) von selbst besitzen, da der Rand des Gebietes genügend glatt vorausgesetzt ist.

Hilfssatz 1. *Das Eigenwertproblem (4.3), (4.3)' besitzt Lösungen mit den Eigenschaften (a)–(c). Alle Eigenwerte sind positiv.*

Beweis. Falls eine Lösung f, ϑ zum Eigenwert λ existiert, folgt aus (4.3) nach Multiplikation mit f bzw. ϑ und Integration über G

$$\int_G f \Delta \Delta f \, dx \, dy = \lambda \int_G f \vartheta_x \, dx \, dy, \quad \int_G \vartheta \Delta \Delta \vartheta \, dx \, dy = \int_G \vartheta f_x \, dx \, dy.$$

Partielle Integration unter Beachtung von (4.3)' liefert mit der Abkürzung $|\text{grad } f|^2 = f_x^2 + f_y^2$

$$\begin{aligned} \int_G f \Delta \Delta f \, dx \, dy &= \int_G (|\text{grad } f_x|^2 + |\text{grad } f_y|^2) \, dx \, dy \\ - \int_G \vartheta \Delta \Delta \vartheta \, dx \, dy &= \int_G |\text{grad } \vartheta|^2 \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lambda = \frac{\int_G (|\text{grad } f_x|^2 + |\text{grad } f_y|^2) \, dx \, dy}{\int_G |\text{grad } \vartheta|^2 \, dx \, dy} > 0.$$

Eventuell vorhandene Eigenwerte sind also positiv. Man kann auch leicht eine positive untere Schranke angeben. Hierzu gehen wir aus von einer beliebigen Funktion f mit den unter (a)–(c) genannten Eigenschaften und definieren ϑ als die (eindeutig bestimmte) Lösung der Randwertaufgabe $\Delta \vartheta = f_x$, Randwerte $\vartheta = 0$. ϑ besitzt dann ebenfalls die unter (a)–(c) genannten Eigenschaften. Es wird das Funktional $J[f]$ eingeführt:

$$(4.4) \quad J[f] = \frac{\int_G (|\text{grad } f_x|^2 + |\text{grad } f_y|^2) \, dx \, dy}{\int_G |\text{grad } \vartheta|^2 \, dx \, dy}, \quad \Delta \vartheta = f_x.$$

Dann ist

$$J[f] \geq \frac{\int_G (|\text{grad } f_x|^2 + |\text{grad } f_y|^2) \, dx \, dy}{\int_G |\text{grad } f|^2 \, dx \, dy} \cdot \frac{\int_G f_x^2 \, dx \, dy}{\int_G |\text{grad } \vartheta|^2 \, dx \, dy}.$$

Nun gilt aber für Funktionen w , die auf $G + R$ stetig sind und stetige erste Ableitungen besitzen sowie die Randwerte $w=0$ annehmen, die Ungleichung

$$(4.5) \quad c \int_G w^2 dx dy \leq \int_G |\text{grad } w|^2 dx dy$$

mit einer nur vom Gebiet G abhängigen positiven Konstanten c (s. [5] oder [6]). Anwendung auf $w=f_x$ bzw. $w=f_y$ ergibt

$$c \int_G |\text{grad } f|^2 dx dy \leq \int_G (|\text{grad } f_x|^2 + |\text{grad } f_y|^2) dx dy.$$

Andererseits erhält man unter Anwendung der Schwarzschen Ungleichung bzw. von (4.5) mit $w=\vartheta$

$$\left(\int_G |\text{grad } \vartheta|^2 dx dy \right)^2 = \left| \int_G \vartheta f_x dx dy \right|^2 \leq \frac{1}{c} \int_G |\text{grad } \vartheta|^2 dx dy \cdot \int_G f_x^2 dx dy,$$

d. h. insgesamt $J[f] \geq c^2 > 0$.

Man kann nun nach Funktionen f fragen, die das Funktional $J[f]$ zum Minimum machen. In [16] wurde gezeigt: Wenn es eine Funktion f_1 mit den Eigenschaften (a)–(c) gibt, die $J[f]$ zum Minimum macht, dann genügen f_1 und das zugehörige ϑ_1 den Gleichungen (4.3) mit dem Eigenwert $\lambda_1 = \text{Min } J[f_1]$. Die Gleichungen (4.3) können also aufgefaßt werden als die Eulerschen Differentialgleichungen eines Variationsproblems. In [16] wurde gezeigt, daß eine Lösung des Variationsproblems mit Hilfe der direkten Methode von COURANT und HILBERT [5], Bd. II gewonnen werden kann. Der Beweis verläuft fast wörtlich wie in [5]. Geht man aus von einem $f \in \overset{\circ}{H}_2(G)$, dann besitzt die Gleichung $\Delta \vartheta = f_x$ nach Lemma 1 genau eine schwache Lösung in $\overset{\circ}{H}_1(G)$, d. h. das Funktional (4.4) hat auch für $f \in \overset{\circ}{H}_2(G)$ einen Sinn. Es gilt dann folgendes

Variationsprinzip. In $\overset{\circ}{H}_2(G)$ nimmt $J[f]$ sein Minimum an. Die Minimalfunktion $f_1 \in \overset{\circ}{H}_2(G)$ und das zugehörige $\vartheta_1 \in \overset{\circ}{H}_1(G)$ genügen den Gleichungen (4.3) im Sinne schwacher Lösungen. Der Eigenwert ist $\lambda_1 = J[f_1]$.

Daß die gefundene schwache Lösung von (4.3) sogar eine Lösung mit den Differenzierbarkeitseigenschaften (a)–(c) ist, folgt sehr einfach unter mehrmaliger Anwendung von Lemma 2: Ist in (4.3) auf der rechten Seite $f_x \in H_1(G)$, so folgt $\vartheta \in H_2(G)$. Aus $\vartheta_x \in H_1(G)$ folgt $f \in H_3(G)$ usw. Lemma 3 und Lemma 4 liefern dann sofort stetige Differenzierbarkeit beliebig hoher Ordnung sowie stetige Annahme der Nullrandwerte.

Hilfssatz 2. Es sei λ_1 der kleinste Eigenwert von (4.3), (4.3)'. Ferner sei f, ϑ eine Lösung der Gleichungen (4.2), (4.2)'. Wenn in (4.2) $\text{Pr } Gr < \lambda_1$ ist, dann ist notwendig $\gamma < 0$, d. h. die Grundströmung ist stabil.

Beweis. Wir betrachten zunächst das Funktional

$$J_1[u] = \int_G (|\text{grad } u|^2 + 2uv) dx dy$$

mit gegebener Funktion v , die auf $G + R$ samt den ersten partiellen Ableitungen stetig sei. Das klassische Variationsproblem $J_1[u] = \text{Min}$ (Randwerte $u=0$ auf R) wird bekanntlich gelöst durch die eindeutig existierende Lösung der Eulerschen

Gleichung $\Delta u = v$. Es sei nun f, ϑ eine Lösung von (4.3), (4.3)' mit den Eigenschaften (a)–(c). Setzt man $v \equiv f_x$, und bezeichnet man mit $\bar{\vartheta}$ die Extremalfunktion von $J_1[u]$, die also der Gleichung $\Delta \bar{\vartheta} = f_x$ genügt, dann erhält man

$$J_1[\vartheta] \geq J_1[\bar{\vartheta}]$$

bzw. wegen

$$\int_G \bar{\vartheta} f_x dx dy = \int_G \bar{\vartheta} \Delta \bar{\vartheta} dx dy = - \int_G |\text{grad } \bar{\vartheta}|^2 dx dy$$

insgesamt

$$\int_G (|\text{grad } \vartheta|^2 + 2\vartheta f_x) dx dy \geq - \int_G |\text{grad } \bar{\vartheta}|^2 dx dy.$$

Multipliziert man die Gleichungen (4.2) mit f bzw. mit ϑ und integriert über G , dann erhält man nach partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_G (|\text{grad } f_x|^2 + |\text{grad } f_y|^2) dx dy + Pr Gr \int_G \vartheta f_x dx dy &= - \gamma \int_G |\text{grad } f|^2 dx dy \\ \int_G |\text{grad } \vartheta|^2 dx dy + \int_G \vartheta f_x dx dy &= - \gamma \int_G \vartheta^2 dx dy \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} (4.5) \quad & - \gamma \int_G (|\text{grad } f|^2 + Pr Gr \vartheta^2) dx dy \\ & \geq \int_G (|\text{grad } f_x|^2 + |\text{grad } f_y|^2 - Pr Gr |\text{grad } \vartheta|^2) dx dy \\ & \geq (\lambda_1 - Pr Gr) \int_G |\text{grad } \vartheta|^2 dx dy. \end{aligned}$$

Solange also $Pr Gr < \lambda_1$ ist, hat man notwendig $\gamma < 0$, womit Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Hilfssatz 3. *Beim Überschreiten von λ_1 wird die Grundströmung instabil, d. h. in jedem Intervall $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1 + \delta$ ($\delta > 0$) gibt es Lösungen von (4.2), (4.2)' mit $\gamma > 0$.*

Beweis. Wir schreiben (4.2) in der Form

$$\begin{aligned} \Delta \Delta f - \gamma \Delta f &= \lambda \vartheta_x \quad (\lambda \equiv Pr Gr) \\ \Delta \vartheta - \gamma Pr \vartheta &= f_x \end{aligned}$$

mit beliebigem, aber fest vorgegebenem, positivem γ . Diese Gleichungen stellen ein Eigenwertproblem dar mit dem Eigenwertparameter λ und können aufgefaßt werden als die Eulerschen Gleichungen des Variationsproblems

$$J_\gamma[f] = \frac{\int_G (|\text{grad } f_x|^2 + |\text{grad } f_y|^2 + \gamma |\text{grad } f|^2) dx dy}{\int_G (|\text{grad } \vartheta|^2 + \gamma Pr \vartheta^2) dx dy} = \text{Min}$$

mit $\Delta \vartheta - \gamma Pr \vartheta = f_x$ in G und $f = \vartheta f / \partial n = \vartheta = 0$ auf R ⁵. Wegen $\gamma > 0$ sind die Integrale im Zähler und Nenner positiv definit, und es folgt ganz genau wie bei dem Variationsproblem $J[f] = \text{Min}$ ($\gamma = 0$), daß eine Minimalfunktion f existiert, wobei f und das zugehörige ϑ die Eigenschaften (a)–(c) besitzen und Lösungen der Gleichungen (4.2), (4.2)' sind zum Eigenwert $\lambda_\gamma = J_\gamma[f]$.

⁵ Die Prandtl-Zahl Pr ist gemäß ihrer physikalischen Bedeutung positiv. Unter der Voraussetzung $\gamma > 0$ ist auch γPr positiv, und daher ist $-\gamma Pr$ kein Eigenwert der homogenen Gleichung $\Delta \vartheta + \lambda \vartheta = 0$. Daher ist die inhomogene Gleichung $\Delta \vartheta - \gamma Pr \vartheta = f_x$ eindeutig lösbar.

Zunächst ist klar, daß für $\gamma > 0$ stets $\lambda_\gamma > \lambda_1$ ist, denn für $PrGr \equiv \lambda_\gamma \leq \lambda_1$ folgt $\gamma \leq 0$ aus (4.5). Weiter ist klar, daß man für λ_γ eine obere Schranke erhält, wenn man in $J_\gamma[f]$ nicht die Minimalfunktion einsetzt sondern die Eigenfunktion f_1 zum kleinsten Eigenwert λ_1 von (4.3), (4.3)'. Es ist also

$$\lambda_1 < \lambda_\gamma \leq J_\gamma[f_1].$$

Wegen $J_\gamma[f_1] \rightarrow J[f_1]$ für $\gamma \rightarrow 0$ ergibt sich weiter, daß der Eigenwert λ_γ sicher im Intervall $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1 + \delta$ liegt, wenn nur $\gamma > 0$ genügend klein gewählt wird.

III. Nichtlineare Theorie

5. Ein Eindeutigkeitsatz

In diesem Kapitel werden nur *stationäre* Lösungen der Gleichungen (3.3) betrachtet, d.h. Lösungen $f=f(x, y)$, $\vartheta=\vartheta(x, y)$ der Randwertaufgabe

$$(5.1) \quad \Delta \Delta f = \frac{\partial(\Delta f, f)}{\partial(x, y)} + PrGr \vartheta_x$$

$$\Delta \vartheta = Pr \frac{\partial(\vartheta, f)}{\partial(x, y)} + f_x,$$

$$(5.1)' \quad f = \vartheta f / \partial n = \vartheta = 0 \quad \text{auf } R.$$

Wenn f, ϑ eine Lösung der Randwertaufgabe ist bei konstanten Werten von Prandtl-Zahl Pr und Grashof-Zahl Gr , dann hat man folgende Abschätzung für ϑ :

Hilfssatz 4. *Es ist $|Pr \vartheta(x, y)| \leq 1$ in ganz $G + R$.*

Beweis. Sind f, ϑ Lösungen von (5.1), dann ergibt sich für die Funktion $\Theta \equiv 1 - y + Pr \vartheta(x, y)$ die lineare elliptische Differentialgleichung

$$\frac{1}{Pr} \Delta \Theta - \Theta_x f_y + \Theta_y f_x = 0,$$

in der f_x und f_y als gegebene Koeffizienten betrachtet werden. Für die Lösungen einer solchen Gleichung gilt aber das Maximumprinzip, wonach Maximum und Minimum auf dem Rande angenommen werden (s. etwa MIRANDA [13], S. 4). Da auf R nach Voraussetzung $\vartheta=0$ ist, und da das Gebiet G im Streifen $0 < y < 1$ liegt, folgt sofort $0 \leq \Theta \leq 1$ bzw. $-1 \leq Pr \vartheta \leq 1$.

Theorem 1. *Es sei λ_1 der kleinste Eigenwert des Eigenwertproblems (4.3), (4.3)' der linearen Theorie. Wenn $PrGr \leq \lambda_1$ ist, dann besitzen die nichtlinearen Gleichungen (5.1), (5.1)' genau eine Lösung mit den Eigenschaften (a)–(c), nämlich die triviale Lösung $f=0, \vartheta=0$. Das heißt für $PrGr \leq \lambda_1$ besitzen die Bewegungsgleichungen (3.2) außer der Grundströmung $F_0 \equiv 0, \Theta_0 = 1 - y$ keine weitere stationäre Lösung.*

Beweis. Angenommen, f, ϑ sei eine nichttriviale Lösung von (5.1), (5.1)' mit den Eigenschaften (a)–(c). Multipliziert man die Gleichungen (5.1) mit f bzw. ϑ und integriert über G , dann erhält man nach partieller Integration wegen

$$\int_G f \frac{\partial(\Delta f, f)}{\partial(x, y)} dx dy = 0, \quad \int_G \vartheta \frac{\partial(\vartheta, f)}{\partial(x, y)} dx dy = 0$$

die Beziehungen

$$(5.2) \quad \int_G (|\text{grad } f_x|^2 + |\text{grad } f_y|^2) dx dy + PrGr \int_G \vartheta f_x dx dy = 0$$

$$\int_G |\text{grad } \vartheta|^2 dx dy + \int_G \vartheta f_x dx dy = 0.$$

Betrachtet man wie im Beweis von Hilfssatz 2 neben den Funktionen f, ϑ noch die Funktion $\bar{\vartheta}$, die als Lösung von $\Delta \bar{\vartheta} = f_x$ (Randwerte $\bar{\vartheta} = 0$) definiert ist bzw. als Minimale des Funktionals $J_1[u] = \int_G (|\text{grad } u|^2 + 2uf_x) dx dy$, dann folgt

$$J_1[\vartheta] \geq J_1[\bar{\vartheta}]$$

bzw.

$$(5.3) \quad \int_G (|\text{grad } \vartheta|^2 + 2\vartheta f_x) dx dy \geq - \int_G |\text{grad } \bar{\vartheta}|^2 dx dy.$$

Aus (5.2) und (5.3) folgt unter Benutzung von $\lambda_1 = \text{Min } J[f]$:

$$(5.4) \quad 0 = \int_G (|\text{grad } f_x|^2 + |\text{grad } f_y|^2) dx dy + PrGr \int_G (|\text{grad } \vartheta|^2 + 2\vartheta f_x) dx dy$$

$$\geq \int_G (|\text{grad } f_x|^2 + |\text{grad } f_y|^2) dx dy - PrGr \int_G |\text{grad } \bar{\vartheta}|^2 dx dy$$

$$\geq (\lambda_1 - PrGr) \int_G |\text{grad } \bar{\vartheta}|^2 dx dy.$$

Sind also f, ϑ nicht identisch null, dann ist sicher $PrGr \geq \lambda_1$. Wir wollen noch zeigen, daß sogar $PrGr > \lambda_1$ sein muß. Gäbe es nämlich eine Lösung f, ϑ von (5.1), (5.1)' mit $PrGr = \lambda_1$, dann müßte in (5.4) überall das Gleichheitszeichen stehen, und daher auch in (5.3). Es wäre also $\vartheta \equiv \bar{\vartheta}$ und außerdem $J[f] = \lambda_1$. Das bedeutet aber, daß f, ϑ zugleich Eigenfunktionen der linearen Gleichungen (4.3), (4.3)' sind zum Eigenwert $PrGr = \lambda_1$. Das ist nur möglich, wenn in den nichtlinearen Gleichungen (5.1)

$$\frac{\partial(\Delta f, f)}{\partial(x, y)} \equiv 0, \quad \frac{\partial(\vartheta, f)}{\partial(x, y)} \equiv 0$$

ist. Dann wäre aber auch $cf, c\vartheta$ eine Lösung der nichtlinearen Gleichungen (5.1) mit beliebiger Konstanten c im Widerspruch zu Hilfssatz 3, wonach die Abschätzung $|Pr c\vartheta(x, y)| \leq 1$ besteht.

6. Wahl des Banach-Raumes

Im vorangehenden Abschnitt wurden zunächst nur Lösungen des Randwertproblems (5.1), (5.1)' betrachtet, die alle Differenzierbarkeitseigenschaften (a) bis (c) besitzen. Um die Theorie des Abbildungsgrades anwenden zu können, muß aber das Randwertproblem in einer Funktionenklasse betrachtet werden, die ein linearer, normierter und vollständiger Raum (Banach-Raum) ist.

Es seien zunächst f, ϑ beliebige, feste Elemente mit $f \in H_3(G), \vartheta \in H_1(G)$. Wir betrachten dann folgende Randwertaufgaben mit gegebenen rechten Seiten: Gesucht sind schwache Lösungen $f' \in \overset{\circ}{H}_2(G)$ bzw. $\vartheta' \in \overset{\circ}{H}_1(G)$ der Gleichungen

$$(6.1) \quad \Delta \Delta f' = \frac{\partial(\Delta f, f)}{\partial(x, y)} + PrGr \vartheta_x,$$

$$(6.2) \quad \Delta \vartheta' = Pr \frac{\partial(\vartheta, f)}{\partial(x, y)} + f_x.$$

Nach Lemma 1 sind diese Randwertaufgaben eindeutig lösbar, und es ist sogar $f' \in H_3(G)$ nach Lemma 2. Wir führen daher folgenden Banach-Raum ein:

Definition. Die Elemente u des Banach-Raumes B sind erklärt durch $u = (f, \vartheta)$ mit $f \in H_3(G)$ und $\vartheta \in H_1(G)$. Die Norm $\|u\|_B$ ist im Anschluß an (2.1) erklärt durch

$$(6.3) \quad \|u\|_B = \|f\|_3 + \|\vartheta\|_1.$$

Eine unmittelbare Folgerung ist

Hilfssatz 5. Die Gleichungen (6.1) und (6.2) definieren eine eindeutige Abbildung $T: (f, \vartheta) \rightarrow (f', \vartheta')$ von B in sich.

Wir interessieren uns speziell für Fixpunkte $(f, \vartheta) = (f', \vartheta')$ dieser Abbildung, die offensichtlich schwache Lösungen der Gleichungen (5.1) sind. Es gilt dann folgender

Hilfssatz 6. Jeder Fixpunkt (f, ϑ) der Abbildung T ist sogar eine Lösung der Randwertaufgabe (5.1), (5.1)' im klassischen Sinn mit den Eigenschaften (a)–(c). Umgekehrt ist jede solche Lösung ein Fixpunkt der Abbildung T .

Beweis. Es sei $(f, \vartheta) \in B$. Dann sind die rechten Seiten von (6.1) und (6.2) Elemente aus $L_2(G)$, und Lemma 2 ergibt $f' \in H_4(G)$, $\vartheta' \in H_2(G)$. Wenn nun ein Fixpunkt $(f, \vartheta) = (f', \vartheta')$ vorliegt, dann ist die rechte Seite der Gleichungen sogar in $H_1(G)$, also $f' \in H_5(G)$, $\vartheta' \in H_3(G)$ usw. Wiederholung dieser Schlußweise ergibt zusammen mit Lemma 3 und 4 alle Eigenschaften (a)–(c). Die Umkehrung ist evident.

Hilfssatz 6 in Verbindung mit Theorem 1 ergibt sofort die Aussage:

Hilfssatz 7. Es sei λ_1 der kleinste Eigenwert des Eigenwertproblems

$$\Delta \Delta f = \lambda \vartheta_x, \quad \Delta \vartheta = f_x \quad (f = \partial f / \partial n = \vartheta = 0 \text{ auf } R).$$

Dann besitzt die Abbildung T nur den trivialen Fixpunkt $(f, \vartheta) = (0, 0)$, solange $PrGr \leq \lambda_1$ ist.

Um nun weiter mit Hilfe der Theorie des Abbildungsgrades zu zeigen, daß für $PrGr = \lambda_1$ eine Verzweigung stationärer Lösungen vorliegt, müssen zuvor einige Eigenschaften der Abbildung T verifiziert werden. Wir werden der Reihe nach zeigen: T ist *vollstetig* (Hilfssatz 8), T besitzt ein *Frechetsches Differential* an der Stelle $a = 0$ (Hilfssatz 9 und 10), T ist bezüglich des Parameters $\lambda = PrGr$ *gleichmäßig stetig* im Sinne der Definition in Abschnitt 1 (Hilfssatz 11).

Hilfssatz 8. Bei festen Werten von Pr und Gr ist $T: (f, \vartheta) \rightarrow (f', \vartheta')$ eine *vollstetige Abbildung* von B in sich.

Beweis. Schreibt man abkürzend für die rechten Seiten in (6.1), (6.2)

$$g(f, \vartheta) \equiv \frac{\partial(\Delta f, f)}{\partial(x, y)} + PrGr \vartheta_x, \quad h(f, \vartheta) \equiv Pr \frac{\partial(\vartheta, f)}{\partial(x, y)} + f_x,$$

dann ergibt sich aus (6.3), (2.1) und (2.2)' für Elemente $u = (f, \vartheta)$ bzw. $u_k = (f_k, \vartheta_k)$ in B

$$\begin{aligned} \|T(u_k) - T(u)\|_B &= \|f'_k - f'\|_3 + \|\vartheta'_k - \vartheta'\|_1 \\ &\leq c\{\|g(f_k, \vartheta_k) - g(f, \vartheta)\|_0 + \|h(f_k, \vartheta_k) - h(f, \vartheta)\|_0\}. \end{aligned}$$

Wenn nun $\|u_k - u\|_B \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, dann geht auch die rechte Seite der Ungleichung gegen null und es folgt $\|T(u_k) - T(u)\|_B \rightarrow 0$, d.h. T ist stetig. Um die Vollstetigkeit zu zeigen, wird der Rellichsche Auswahlssatz herangezogen (Lemma 5). Ist u_1, u_2, \dots eine unendliche Folge von Elementen aus B , die gleichmäßig beschränkt sind:

$$\|u_k\|_B \leq M_1 \quad (k=1, 2, \dots),$$

dann sind bei festem Wert von Pr und Gr auch die rechten Seiten von (6.1), (6.2) gleichmäßig beschränkt:

$$\|g(f_k, \vartheta_k)\|_0 \leq M_2, \quad \|h(f_k, \vartheta_k)\|_0 \leq M_2 \quad (k=1, 2, \dots).$$

Daraus folgt zusammen mit (2.2)'

$$\begin{aligned} \|f'_k\|_4 &\leq c \|g(f_k, \vartheta_k)\|_0 \leq c M_2 \\ \|\vartheta'_k\|_2 &\leq c \|h(f_k, \vartheta_k)\|_0 \leq c M_2. \end{aligned}$$

Anwendung von Lemma 5 ergibt dann weiter, daß für eine geeignete Teilfolge der Elemente (f_k, ϑ_k) sogar folgendes gilt:

$$\|f'_i - f'_k\|_3 \rightarrow 0, \quad \|\vartheta'_i - \vartheta'_k\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{für } i, k \rightarrow \infty,$$

d.h. die Teilfolge bildet eine Cauchy-Folge. Da B ein vollständiger Raum ist, existiert ein Grenzelement. Es werden also beschränkte Mengen in kompakte Mengen abgebildet, d.h. T ist vollstetig.

Wir hatten dem Randwertproblem (5.1), (5.1)' die Randwertprobleme (6.1), (6.2) gegenübergestellt und mit ihrer Hilfe die nichtlineare Abbildung T definiert. Analog stellen wir dem linearen Problem (4.3), (4.3)' die Randwertaufgaben

$$(6.4) \quad \Delta \Delta f'' = Pr Gr \vartheta_x,$$

$$(6.5) \quad \Delta \vartheta'' = f_x$$

gegenüber mit gegebenen $f \in H_3(G)$, $\vartheta \in H_1(G)$ und gesuchten $f'' \in \overset{\circ}{H}_2(G)$ und $\vartheta'' \in \overset{\circ}{H}_1(G)$. Analog zu Hilfssatz 5 ergibt sich sofort

Hilfssatz 9. Die Gleichungen (6.4), (6.5) definieren eine eindeutige, lineare Abbildung $A: (f, \vartheta) \rightarrow (f'', \vartheta'')$ von B in sich.

Hilfssatz 10. Der Operator A ist das Frechetsche Differential von T an der Stelle $a=0$. Das heißt es ist $T(u) - T(0) = A(u) + R(u)$ mit

$$\|R(u)\|_B \|u\|_B^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{für } \|u\|_B \rightarrow 0^{\circ}.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit (f^*, ϑ^*) die in $\overset{\circ}{H}_2(G)$ bzw. $\overset{\circ}{H}_1(G)$ eindeutig existierende Lösung von

$$\Delta \Delta f^* = \frac{\partial(\Delta f, f)}{\partial(x, y)}, \quad \Delta \vartheta^* = Pr \frac{\partial(\vartheta, f)}{\partial(x, y)}$$

mit gegebenen rechten Seiten ($f \in H_3(G)$, $\vartheta \in H_1(G)$). Vergleich mit (6.1), (6.2) bzw. (6.4), (6.5) ergibt $f^* = f' - f''$, $\vartheta^* = \vartheta' - \vartheta''$ und weiter wegen $T(0) = 0$

$$(f^*, \vartheta^*) = T(f, \vartheta) - A(f, \vartheta) = R(f, \vartheta).$$

^o Es wird kurz $A(u)$, $R(u)$ statt $A(0, u)$, $R(0, u)$ geschrieben.

Daher ist unter Benutzung von (2.2)'

$$\begin{aligned} \|R(f, \vartheta)\|_B &= \|f^*\|_3 + \|\vartheta^*\|_1 \\ &\leq c_1 \left(\left\| \frac{\partial(\Delta f, f)}{\partial(x, y)} \right\|_0 + Pr \left\| \frac{\partial(\vartheta, f)}{\partial(x, y)} \right\|_0 \right). \end{aligned}$$

Die Ungleichung (2.3) liefert

$$\|D^3 f D^1 f\|_0 \leq \|D^3 f\|_0 \max |D^1 f| \leq c_2 \|D^3 f\|_0 \|D^1 f\|_2 \leq c_2 \|f\|_3^2$$

und analog

$$\|D^1 \vartheta D^1 f\|_0 \leq c_3 \|\vartheta\|_1 \|f\|_3.$$

Insgesamt hat man also

$$\|R(f, \vartheta)\|_B \leq c_4 \|(f, \vartheta)\|_B^2,$$

woraus die Behauptung folgt.

Hilfssatz 11. *Bei konstantem Wert von Pr ist der Operator T in dem Parameter $\lambda = PrGr$ gleichmäßig stetig in folgendem Sinn: Es sei Ω eine beschränkte Menge in B . Dann kann man zu gegebenem $\varepsilon > 0$ immer ein $\eta = \eta(\Omega, \varepsilon)$ so finden, daß für beliebige Werte von λ und λ_0 sowie für beliebiges $u \in \Omega$ aus der Ungleichung $|\lambda - \lambda_0| < \eta$ auch immer*

$$\|T(u, \lambda) - T(u, \lambda_0)\|_B < \varepsilon$$

folgt.

Beweis. Es sei $\|u\|_B \leq M$ für alle u der beschränkten Menge Ω . Wir bezeichnen mit (f', ϑ') bzw. (f'_0, ϑ'_0) die Lösung von (6.1), (6.2) zum Parameterwert λ bzw. λ_0 . Da λ in (6.2) nicht auftritt, ist $\vartheta' = \vartheta'_0$, während $f' - f'_0$ der Gleichung $\Delta \Delta (f' - f'_0) = (\lambda - \lambda_0) \vartheta'_x$ genügt. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \|T(u, \lambda) - T(u, \lambda_0)\|_B &= \|f' - f'_0\|_3 \leq c |\lambda - \lambda_0| \|\vartheta\|_1 \\ &\leq c |\lambda - \lambda_0| M < \varepsilon \end{aligned}$$

falls $|\lambda - \lambda_0| < \eta$ mit $\eta = \varepsilon (cM)^{-1}$.

7. Berechnung des Abbildungsgrades

Wie in Abschnitt 1 wird der Operator Φ betrachtet mit $\Phi(u, \lambda) \equiv u - T(u, \lambda)$. Es wird nach Fixpunkten von T gefragt, d.h. nach Lösungen von

$$(7.1) \quad \Phi(u, \lambda) = 0$$

im Banach-Raum B . Das Nullelement $u=0$ (d.h. $f \equiv \vartheta \equiv 0$) ist bei beliebigem λ immer eine Lösung.

Hilfssatz 12. *Es sei Ω ein beliebiges, beschränktes Gebiet in B , in dem das Nullelement als innerer Punkt enthalten ist. Mit λ_1 sei der kleinste Eigenwert von (4.3), (4.3)' bezeichnet. Dann ist*

$$d[\Phi(u, \lambda), \Omega, 0] = +1 \quad \text{falls} \quad -\infty < \lambda < \lambda_1.$$

Beweis. Da für alle λ aus $-\infty < \lambda < \lambda_1$ nach Hilfssatz 7 nur die Lösung $u=0$ in B existiert, liegt insbesondere keine Lösung auf dem Rande von Ω . Der Abbildungsgrad $d[\Phi, \Omega, 0]$ ist also definiert und bleibt konstant für alle Werte $\lambda < \lambda_1$ (Eigenschaft III des Abbildungsgrades). Es genügt daher, $d[\Phi, \Omega, 0]$ für den speziellen Wert $\lambda_0=0$ auszurechnen. Hierzu werden die Sätze 1.—3.

aus Abschnitt 1 herangezogen: Der Abbildungsgrad ist gleich dem Index der einzigen in Ω vorhandenen Lösung von $\Phi(u, \lambda_0) = 0$. Um den Index zu berechnen, hat man die lineare Abbildung $w = u - A(u, \lambda_0)$ zu betrachten, wobei A das Frechetsche Differential von T an der Stelle $a = 0$ ist. Wenn man zeigen kann, daß im Intervall $0 < \mu \leq 1$ kein Eigenwert von $u - \mu A(u, \lambda_0) = 0$ liegt, dann ist der Index gleich $+1$. Man kann sogar zeigen, daß überhaupt kein Eigenwert μ existiert. Gäbe es einen solchen, dann wäre das zugehörige $u = (f, \vartheta)$ eine Lösung von $\Delta \Delta f = 0$, $\Delta \vartheta = f_x$ (wegen $\lambda_0 = 0$). Diese Gleichungen besitzen aber nur die triviale Lösung $f \equiv 0$, $\vartheta \equiv 0$ in $\mathring{H}_2(G)$ bzw. $\mathring{H}_1(G)$.

Entscheidend für das Weitere ist nun die Bestimmung der Vielfachheit des kleinsten Eigenwertes λ_1 im Sinne der Definition in (5), Abschnitt 1, wo eine unendliche Folge von Gleichungen

$$L(u) = 0, L^2(u) = 0, \dots, L^k(u) = 0, \dots$$

betrachtet wurde. Im vorliegenden Fall stellt sich heraus, daß jede Lösung einer der Gleichungen $L^k(u) = 0$ ($k > 1$) bereits Lösung der Gleichung $L(u) = 0$ ist, so daß man die Vielfachheit m_1 bestimmen kann, indem man die Anzahl linear unabhängiger Lösungen von $L(u) = 0$ ermittelt.

Hilfssatz 13. Die Anzahl linear unabhängiger Lösungen von (4.3), (4.3)' zum kleinsten Eigenwert λ_1 ist gleich der Vielfachheit m_1 im Sinne der Definition in (5), Abschnitt 1.

Beweis. Wir setzen $L(u) \equiv u - A(u, \lambda_1)$. Man hat zu zeigen, daß jede Lösung von $L^k(u) = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) auch Lösung von $L(u) = 0$ ist. Für $k = 1$ ist das trivialerweise der Fall. Wir zeigen, daß die Behauptung für $k + 1$ richtig ist, falls sie für k richtig ist. Angenommen, es sei u^* eine nichttriviale Lösung der Gleichung $L^{k+1}(u) = L^k(L(u)) = 0$. Dann genügt das Element $v \equiv L(u^*)$ der Gleichung $L^k(v) = 0$ und nach Induktionsvoraussetzung auch der Gleichung $L(v) = 0$. Daher ist v entweder das Nullelement oder aber eine Eigenfunktion von (4.3), (4.3)' zum Eigenwert λ_1 . Im ersten Falle ist $L(u^*) = 0$, womit alles bewiesen ist. Es genügt also zu zeigen, daß v keine Eigenfunktion sein kann.

Angenommen, es sei $v = (f_1, \vartheta_1)$ eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ_1 , d. h. es sei

$$\Delta \Delta f_1 = \lambda_1 (\vartheta_1)_x, \quad \Delta \vartheta_1 = (f_1)_x,$$

wobei nach früherem f_1, ϑ_1 von selbst die Eigenschaften (a)–(c) aus Abschnitt 4 besitzen. Führt man die Bezeichnung $u^* = (f, \vartheta)$ ein, so folgt aus $L(u^*) = v$ bzw. der äquivalenten Gleichung $u^* = A(u^* + v, \lambda_1)$ das Bestehen der Gleichungen

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \Delta \Delta f &= \lambda_1 (\vartheta + \vartheta_1)_x \\ \Delta \vartheta &= (f + f_1)_x. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (7.2) bleiben richtig, wenn man zu (f, ϑ) ein beliebiges Vielfaches von (f_1, ϑ_1) addiert:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta (f + c f_1) &= \lambda_1 \bar{\vartheta}_x + 2 \lambda_1 (\vartheta_1)_x \\ \Delta \bar{\vartheta} &= (f + c f_1)_x \end{aligned}$$

mit $\bar{\vartheta} \equiv \vartheta + (c - 1) \vartheta_1$. Aus diesen Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \int_G (|\text{grad}(f + c f_1)_x|^2 + |\text{grad}(f + c f_1)_y|^2 - \lambda_1 |\text{grad} \bar{\vartheta}|^2) dx dy \\ = 2 \int_G (f + c f_1) \Delta \Delta f_1 dx dy, \end{aligned}$$

wobei die linke Seite wegen der Minimaleigenschaft von λ_1 nichtnegativ ist. Daraus folgt die Ungleichung

$$c \int (\Delta f_1)^2 dx dy \geq - \int f \Delta \Delta f_1 dx dy,$$

die aber für beliebiges c nur dann richtig ist, wenn f_1 identisch null ist. Also ist notwendig $v = 0$.

Es bleibt nun noch die grundlegende Frage zu beantworten, wieviele linear unabhängige Lösungen zum Eigenwert λ_1 existieren. Für einige spezielle Gebiete wie Kreis, Quadrat und Rechtecke mit bestimmten Seitenverhältnissen wurde λ_1 numerisch berechnet und gefunden, daß λ_1 ein einfacher Eigenwert ist. Es gilt dann folgender Satz:

Theorem 2. Für alle Gebiete G , für die der kleinste Eigenwert λ_1 von ungerader Vielfachheit ist, was z. B. für Kreis und Quadrat der Fall ist, verzweigt sich die Grundströmung beim Überschreiten der kritischen Rayleigh-Zahl $PrGr = \lambda_1$. Das heißt es existiert für alle Werte von λ aus einem kleinen Intervall $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1 + \delta$ ($\delta > 0$) eine von der Grundströmung F_0, Θ_0 verschiedene stationäre Lösung (thermische Konvektionsströmung) der nichtlinearen Bewegungsgleichungen. Die verschiedenen Zweige der Lösung unterscheiden sich beliebig wenig in der Norm des benutzten Banach-Raumes B , sofern nur $|\lambda - \lambda_1|$ genügend klein ist. Für $\lambda = \lambda_1$ fallen die Zweige der Lösung zusammen.

Zusatz. Schreibt man die Stromfunktion der Konvektionsströmung in der Form $F(\lambda, x, y) = F_0 + f(\lambda, x, y)$, so daß die zusätzlichen, durch den thermischen Auftrieb verursachten Geschwindigkeitskomponenten durch f_y bzw. $-f_x$ gegeben sind, dann folgt

$$\max_G |f_y(\lambda, x, y)| \rightarrow 0, \quad \max_G |f_x(\lambda, x, y)| \rightarrow 0 \quad \text{für } \lambda \rightarrow \lambda_1.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 7 besitzt die Gleichung $u - T(u, \lambda) = 0$ für $\lambda \leq \lambda_1$ in B nur die triviale Lösung $u = 0$. Es sei M eine beliebig vorgegebene, positive Konstante. Dann wird das Gebiet Ω bzw. sein Rand Ω' definiert durch $\|u\|_B < M$ bzw. $\|u\|_B = M$. Insbesondere ist $u = 0$ ein innerer Punkt von Ω . Wir zeigen zunächst, daß man ein positives δ so angeben kann, daß für alle Werte von λ aus $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_1 + \delta$ keine Lösung der Gleichung $u - T(u, \lambda) = 0$ auf dem Rande Ω' liegt. Gäbe es ein solches δ nicht, dann könnte man eine Folge von λ -Werten $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \rightarrow \lambda_1$ derart finden, daß zu jedem $\lambda^{(k)}$ mindestens eine Lösung u_k auf Ω' existiert:

$$u_k - T(u_k, \lambda^{(k)}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Wir wollen zeigen, daß eine geeignete Teilfolge der u_k gegen eine Lösung v von $u - T(u, \lambda_1) = 0$ mit $\|v\|_B = M$ konvergieren würde im Widerspruch zu Hilfssatz 7, wonach für $\lambda = \lambda_1$ nur die triviale Lösung mit $\|u\|_B = 0$ existiert.

Wir nehmen an, die gleichmäßig beschränkten u_1, u_2, \dots seien bereits die Elemente der geeignet ausgewählten Teilfolge, für die die Folge der Bildelemente $v_k = T(u_k, \lambda_1)$ gegen ein Grenzelement in B konvergiert: $\|v - v_k\|_B \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ (Hilfssatz 8, Vollstetigkeit von $T(u, \lambda_1)$). Außerdem gilt (s. Hilfssatz 11, gleichmäßige Stetigkeit in λ)

$$\|T(u, \lambda_1) - T(u, \lambda^{(k)})\|_B < \varepsilon$$

für beliebiges $u \in \Omega + \Omega'$ von einem gewissen Index $k^* = k^*(\varepsilon, \Omega)$ an. Insbesondere gilt die Ungleichung für die speziellen Elemente u_k . Daraus folgt für genügend große k

$$\begin{aligned} \|v - u_k\|_B &\leq \|v - v_k\|_B + \|v_k - u_k\|_B \\ &= \|v - v_k\|_B + \|T(u_k, \lambda_1) - T(u_k, \lambda^{(k)})\|_B < 2\varepsilon \end{aligned}$$

bzw. $\|v - u_k\|_B \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Daher gilt in der Norm des Raumes B für $k \rightarrow \infty$: $v = \lim v_k = \lim T(u_k, \lambda_1) = T(v, \lambda_1)$. Das heißt v wäre eine Lösung von

$$u - T(u, \lambda_1) = 0 \quad \text{mit} \quad \|v\|_B = \|u_k\|_B = M,$$

was nicht möglich ist.

Es gibt also ein positives δ , so daß für $\lambda \leq \lambda_1 + \delta$ auf dem Rande Ω' keine Lösung von $\Phi(u, \lambda) = 0$ liegt. Nach Abschnitt 1 (Eigenschaft III des Abbildungsgrades) ist $d[\Phi(u, \lambda), \Omega, 0]$ konstant für alle $\lambda \leq \lambda_1 + \delta$, und zwar ist $d = +1$ nach Hilfssatz 12. Andererseits multipliziert sich der Index der Lösung $u = 0$ beim Überschreiten des kleinsten Eigenwertes λ_1 der ungeraden Vielfachheit m_1 mit dem Faktor -1 . Wählt man δ so klein, daß in $\lambda_1 < \lambda < \lambda_1 + \delta$ kein Eigenwert von (4.3), (4.3)' liegt, dann ist in diesem λ -Intervall $u = 0$ eine isolierte Lösung von $\Phi(u, \lambda) = 0$. Für keinen λ -Wert aus dem betrachteten Intervall kann $u = 0$ die einzige Lösung sein, weil dann der Abbildungsgrad gleich dem Index dieser Lösung wäre, d. h. $d = -1$ im Widerspruch zu $d = +1$ für alle $\lambda \leq \lambda_1 + \delta$.

Wir wollen noch zeigen, daß $\|u\|_B \rightarrow 0$ mit $\lambda \rightarrow \lambda_1$ für alle Lösungen $u \in \Omega + \Omega'$. Wäre dies nicht richtig, dann könnte man eine Folge von λ -Werten und zugehörige Lösungen u_k angeben mit

$$u_k - T(u_k, \lambda^{(k)}) = 0, \quad \lambda^{(k)} \rightarrow \lambda_1,$$

wobei $0 < \varepsilon \leq \|u_k\|_B \leq M$ ist. Ganz analog wie oben würde dann aus der Vollstetigkeit bzw. der gleichmäßigen Stetigkeit von $T(u, \lambda)$ folgen, daß ein Element v existiert mit $v - T(v, \lambda_1) = 0$, $0 < \varepsilon \leq \|v\|_B \leq M$ im Widerspruch zu Hilfssatz 7, wonach für $\lambda = \lambda_1$ nur die Lösung $u = 0$ mit $\|u\|_B = 0$ existiert.

Beweis des Zusatzes. Für Elemente $u = (f, \vartheta) \in B$ ist $f \in H_3(G)$ bzw. $f_x, f_y \in H_2(G)$. Nach Lemma 3 (SOBOLEV) gilt dann mit einer nur vom Gebiet abhängigen positiven Konstanten c

$$\max_G |f_x| \leq c \|f_x\|_2 \leq c \|u\|_B, \quad \max_G |f_y| \leq c \|f_y\|_2 \leq c \|u\|_B.$$

Für $\|u\|_B \rightarrow 0$ folgt die Behauptung des Zusatzes.

IV. Numerischer Teil

8. Orthogonalität der Eigenfunktionen

Die verschiedenen, linear unabhängigen Lösungen (f_i, ϑ_i) von (4.3), (4.3)' zu den Eigenwerten λ_i seien so durchnummeriert, daß $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ ist, wobei im Falle mehrfacher Eigenwerte entsprechend oft das Gleichheitszeichen steht. Für Lösungen zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_i \neq \lambda_k$ erhält man die Relationen:

$$(8.1) \quad \int_G \Delta f_i \Delta f_k dx dy = 0, \quad \int_G \text{grad } \vartheta_i \text{grad } \vartheta_k dx dy = 0 \quad (i \neq k).$$

Um (8.1) herzuleiten, multipliziert man $\Delta \Delta f_i = \lambda_i (\vartheta_i)_x$, $\Delta \vartheta_k = (f_k)_x$ mit f_k bzw. ϑ_i und integriert über G . Nach partieller Integration erhält man

$$\int_G \Delta f_i \Delta f_k dx dy = -\lambda_i \int_G \vartheta_i \Delta \vartheta_k dx dy = \lambda_i \int_G \text{grad } \vartheta_i \text{grad } \vartheta_k dx dy.$$

Eine analoge Gleichung gilt nach Vertauschen von i und k , d.h. es ist

$$(\lambda_i - \lambda_k) \int_G \text{grad } \vartheta_i \text{grad } \vartheta_k dx dy = 0.$$

Wegen $\lambda_i \neq \lambda_k$ folgt daraus (8.1).

Sind die Eigenwerte λ_i und λ_k gleich, dann braucht (8.1) nicht zu gelten. Man kann aber nach dem bekannten Orthogonalisierungsverfahren immer Linearkombinationen der Lösungen angeben, die ihrerseits linear unabhängig sind und außerdem den Relationen (8.1) genügen. Ist z. B. $\lambda_1 = \lambda_2$, dann setze man

$$(f_1^*, \vartheta_1^*) = (f_1, \vartheta_1), \quad (f_2^*, \vartheta_2^*) = c(f_1, \vartheta_1) + (f_2, \vartheta_2),$$

wobei die Konstante c sich aus

$$\int_G \text{grad } \vartheta_1^* \text{grad } \vartheta_2^* dx dy = c \int_G |\text{grad } \vartheta_1|^2 dx dy + \int_G \text{grad } \vartheta_1 \text{grad } \vartheta_2 dx dy = 0$$

errechnet. Wir nehmen an, Eigenfunktionen zum gleichen Eigenwert seien bereits orthogonalisiert, so daß (8.1) in jedem Falle gilt.

Nach dem Variationsprinzip in Abschnitt 4 kann λ_1 charakterisiert werden als das Minimum des Funktionals $J[f]$. Ganz analog kann λ_n charakterisiert werden als das Minimum von $J[f]$ unter den $n-1$ linearen Nebenbedingungen

$$\int_G \text{grad } \vartheta_i \text{grad } \vartheta dx dy = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Wir geben den Beweis nicht wieder, da er fast wörtlich aus COURANT und HILBERT [5] auf das vorliegende Problem übertragen werden kann. Ebenfalls nach dem Vorbild von [5], Bd. II, S. 494/95, ergibt sich die Vollständigkeit des Systems von Eigenfunktionen (f_k, ϑ_k) in folgendem Sinn: Für jede Funktion $f \in \mathring{H}_2(G)$ bzw. das zugehörige $\vartheta \in \mathring{H}_1(G)$ mit $\Delta \vartheta = f_x$ (im Sinne schwacher Lösungen) bestehen mit den „Fourier-Koeffizienten“

$$c_k = \int_G \text{grad } \vartheta \text{grad } \vartheta_k dx dy \quad (\text{Normierung: } \int_G |\text{grad } \vartheta_k|^2 dx dy = 1)$$

die Vollständigkeitsrelationen

$$\int_G (|\text{grad } f_x|^2 + |\text{grad } f_y|^2) dx dy = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2,$$

$$\int_G |\text{grad } \vartheta|^2 dx dy = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

bzw. die Gleichung

$$(8.2) \quad J[f] = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2}.$$

9. Iterationsverfahren. Methode der Schwarzschen Quotienten

Beginnend mit einer Funktion $f^{(0)}$, die etwa aus $C^3(G)$ gewählt sei, wird eine Iterationsfolge $(f^{(k)}, \vartheta^{(k)})$ definiert durch die Lösungen der Folge von Randwertproblemen

$$(9.1) \quad \Delta \Delta f^{(k+1)} = \vartheta_x^{(k)}, \quad \Delta \vartheta^{(k)} = f_x^{(k)} \quad (k=0, 1, \dots)$$

mit den Randwerten $f^{(k)} = \vartheta f^{(k)} / \partial n = \vartheta^{(k)} = 0$ auf R .

Es werden dann die Schwarzschen Konstanten

$$a_k = \int_G \text{grad } \vartheta^{(k-i)} \text{grad } \vartheta^{(i)} dx dy \quad (i=0, 1, \dots, k)$$

betrachtet, die vom Index i unabhängig sind. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \int_G \text{grad } \vartheta^{(k)} \text{grad } \vartheta^{(0)} dx dy &= - \int_G \Delta \vartheta^{(k)} \vartheta^{(0)} dx dy = \int_G f^{(k)} \Delta \Delta f^{(1)} dx dy \\ &= \int_G \vartheta_x^{(k-1)} f^{(1)} dx dy = - \int_G \vartheta^{(k-1)} f_x^{(1)} dx dy \\ &= \int_G \text{grad } \vartheta^{(k-1)} \text{grad } \vartheta^{(1)} dx dy. \end{aligned}$$

Wiederholung dieser Schlußweise ergibt, daß die a_k tatsächlich von i unabhängig sind. Aus den a_k werden nun die Schwarzschen Quotienten

$$q_k = \frac{a_{k-1}}{a_k}$$

gebildet. Für geraden Index $2k$ ergibt sich nach einer leichten Umformung mittels (9.1)

$$q_{2k} = J[f^{(k)}] \geq \lambda_1 > 0.$$

Man sieht sofort, daß alle a_k positiv sind, sofern die Funktionen $f^{(k)}, \vartheta^{(k)}$ nicht identisch null sind. Für geraden Index hat man

$$a_{2k} = \int_G |\text{grad } \vartheta^{(k)}|^2 dx dy > 0,$$

und für ungeraden Index erhält man $a_{2k-1} = a_{2k} q_{2k} = a_{2k} J[f^{(k)}] > 0$. Daher sind auch die q_k alle positiv.

Wir zeigen nun, daß die q_k eine absteigende Folge bilden:

$$q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq \lambda_1.$$

Zum Beweis betrachten wir nach dem Vorbild von [2], S. 181 die Funktionen

$$f \equiv a_{2k+1} f^{(k)} - a_{2k} f^{(k+1)}, \quad \vartheta \equiv a_{2k+1} \vartheta^{(k)} - a_{2k} \vartheta^{(k+1)}.$$

Zunächst ist $\int_G f \Delta \Delta f \, dx \, dy = \int_G (\Delta f)^2 \, dx \, dy \geq 0$. Andererseits ist

$$\begin{aligned} \int_G f \Delta \Delta f \, dx \, dy &= \int_G (a_{2k+1} f^{(k)} - a_{2k} f^{(k+1)}) (a_{2k+1} \vartheta_x^{(k-1)} - a_{2k} \vartheta_x^{(k)}) \, dx \, dy \\ &= - \int_G (a_{2k+1} \Delta \vartheta^{(k)} - a_{2k} \Delta \vartheta^{(k+1)}) (a_{k+1} \vartheta^{(k-1)} - a_{2k} \vartheta^{(k)}) \, dx \, dy \\ &= a_{2k} a_{2k+1}^2 (q_{2k} - q_{2k+1}) \geq 0, \end{aligned}$$

woraus $q_{2k} \geq q_{2k+1}$ folgt. Analog erhält man aus

$$\int_G |\text{grad } \vartheta|^2 \, dx \, dy = a_{2k} a_{2k+1} a_{2k+2} (q_{2k+1} - q_{2k+2}) \geq 0$$

die Ungleichung $q_{2k+1} \geq q_{2k+2}$.

Es seien c_k die Fourier-Koeffizienten der Ausgangsiterierten $\vartheta^{(0)}$:

$$c_k = \int_G \text{grad } \vartheta^{(0)} \text{grad } \vartheta_k \, dx \, dy.$$

Dann erhält man für die Koeffizienten $c_k^{(1)}$ der ersten Iterierten $\vartheta^{(1)}$

$$c_k^{(1)} = \int_G \text{grad } \vartheta^{(1)} \text{grad } \vartheta_k \, dx \, dy = - \int_G \Delta \vartheta^{(1)} \vartheta_k \, dx \, dy.$$

Benutzung von (9.1) bzw. von $\Delta \Delta f_k = \lambda_k (\vartheta_k)_x$, $\Delta \vartheta_k = (f_k)_x$ liefert dann $c_k^{(1)} = (\lambda_k)^{-1} c_k$ bzw. allgemeiner

$$c_k^{(n)} = (\lambda_k)^{-n} c_k$$

für die Fourier-Koeffizienten der n -ten Iterierten $\vartheta^{(n)}$. Nach (8.2) hat man daher

$$q_{2n} = J[f^{(n)}] = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2 (1/\lambda_k)^{2n}}{\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 (1/\lambda_k)^{2n}} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2 (\lambda_1/\lambda_k)^{2n}}{\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 (\lambda_1/\lambda_k)^{2n}}.$$

Daraus läßt sich ablesen, daß $q_{2n} \rightarrow \lambda_1$, falls der erste Fourier-Koeffizient $c_1 \neq 0$ ist. Wenn außerdem $\lambda_1 < \lambda_2$ ist, dann konvergiert $f^{(n)}$ (von einem Normierungsfaktor abgesehen) gegen f_1 .

Um λ_2 zu berechnen, muß man eine Ausgangsfunktion $f^{(0)}$ wählen, für die $c_1 \neq 0$ ausfällt. Im Verlauf der numerischen Rechnung geht allerdings die Orthogonalität der Iterierten ($f^{(n)}$, $\vartheta^{(n)}$) zu (f_1, ϑ_1) durch Rundungsfehler verloren, so daß man zweckmäßig bei jedem Iterationsschritt vorsorglich orthogonalisiert. Andererseits hat dieser numerische Effekt zur Folge, daß auch bei unglücklicher Wahl der Ausgangsfunktion (d. h. $c_1 = 0$ bei der Berechnung von λ_1 bzw. $c_1 = c_2 = 0$ bei der Berechnung von λ_2) mit der Zeit doch eine Komponente von (f_1, λ_1) bzw. von (f_2, λ_2) hereinkommt und man den gewünschten Eigenwert erhält.

10. Numerische Ergebnisse

Zur numerischen Behandlung des Eigenwertproblems (4.3), (4.3)' wurde ein Differenzenverfahren mit quadratischem Gitternetz benutzt (Maschenweite l). Es wurden die einfachen Differenzenformeln für den Laplace-Operator Δ bzw. für $\Delta\Delta$ benutzt, die dem Schema

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & +1 & & \\
 & & & & +2 & -8 & +2 & \\
 +1 & -4 & +1 & & +1 & -8 & +20 & -8 & +1 \\
 & & +1 & & & +2 & -8 & +2 & \\
 & & & & & & & +1 &
 \end{array}$$

entsprechen (s. etwa [3]). Die auftretenden ersten Ableitungen f_x und ϑ_x wurden durch zentrale Differenzenquotienten ersetzt. Am Rande wurde folgendermaßen verfahren: Die zunächst nur im Gittergebiet definierten Funktionswerte $f_{i,k}$ wurden durch Spiegelung an den stückweise geradlinigen Rändern in das Außengebiet fortgesetzt, so daß zunächst die $\partial f / \partial n = 0$ entsprechende Differenzenformel erfüllt war, und außerdem die Differenzenformel zu $\Delta\Delta$ im ganzen Gittergebiet ausnahmslos anwendbar war.

Da eine Fehlerabschätzung für die Differenzlösungen nicht vorlag, wurde zunächst das Eigenwertproblem für ein quadratisches Gebiet mit verschiedener Anzahl von Gitterpunkten behandelt, um den Einfluß der Maschenweite l zu studieren. Es wurde erhalten:

Anzahl der Gitterpunkte	Eigenwert λ_1
25	$6,66 \cdot 10^3$
64	$5,29 \cdot 10^3$
144	$5,08 \cdot 10^3$
400	$5,03 \cdot 10^3$

Zum Vergleich sei eine obere Schranke für λ_1 angegeben, die mit Hilfe eines einfachen Ritz-Ansatzes gefunden wurde (s. [18]):

$$\lambda_1 < 5,33 \cdot 10^3.$$

Im einzelnen wurden folgende Ergebnisse erhalten, wobei im Falle des Kreises ein approximierendes Achteck benutzt wurde:

Gebiet	λ_1	λ_2	Anzahl der Gitterpunkte
Kreis	$6,05 \cdot 10^3$	$10,05 \cdot 10^3$	264
Quadrat ($b=1$)	$5,03 \cdot 10^3$	$7,95 \cdot 10^3$	400
Rechtecke $b=\frac{2}{3}$	$13,38 \cdot 10^3$	$26,63 \cdot 10^3$	176
$b=1,3$	$3,51 \cdot 10^3$	$4,27 \cdot 10^3$	154
$b=1,5$	$3,09 \cdot 10^3$	$3,28 \cdot 10^3$	176
$b=2,0$	$2,35 \cdot 10^3$	$2,47 \cdot 10^3$	221

Natürlich wäre es erwünscht gewesen, ohne diesen Aufwand an numerischer Rechnung in den betrachteten Fällen zu zeigen, daß $\lambda_1 < \lambda_2$ ist, da ja die numeri-

schen Werte der Eigenwerte nicht benötigt werden sondern lediglich ihre Verschiedenheit. Es dürfte jedoch schwierig sein, ohne numerische Rechnung allgemeine Aussagen zu machen.

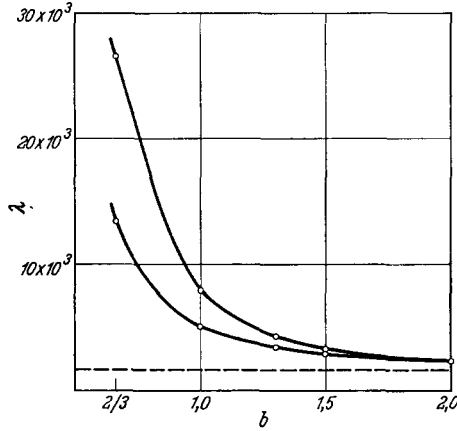


Fig. 1. Eigenwerte λ_1 und λ_2 beim Rechteck in Abhängigkeit von der Breite b . (Der von FELLEW und SOUTHWELL [15] für $b = \infty$ errechnete Wert $\lambda_1 = 1,7078 \cdot 10^3$ ist gestrichelt eingezeichnet.)

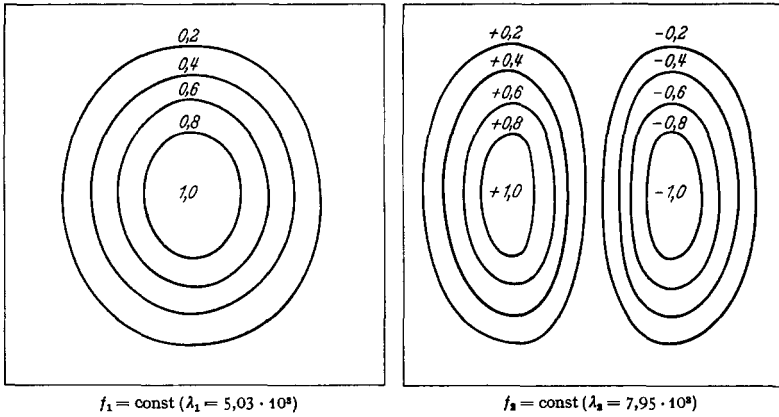


Fig. 2. Stromlinien $f = \text{const}$ für die Eigenfunktionen zu λ_1 und λ_2 beim Quadrat ($b=1$)

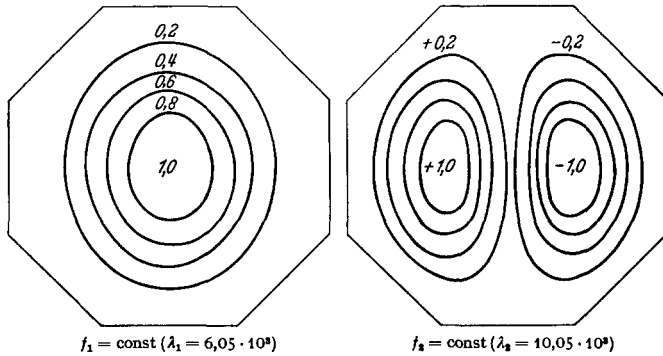


Fig. 3. Stromlinien $f = \text{const}$ für die Eigenfunktionen zu λ_1 und λ_2 beim Kreis (approximiert durch Achteck)

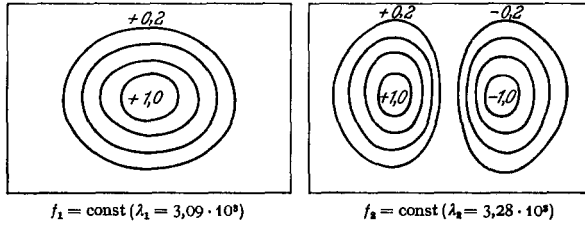


Fig. 4. Stromlinien $f = \text{const}$ für die Eigenfunktionen zu λ_1 und λ_2 beim Rechteck mit $b=1,5$

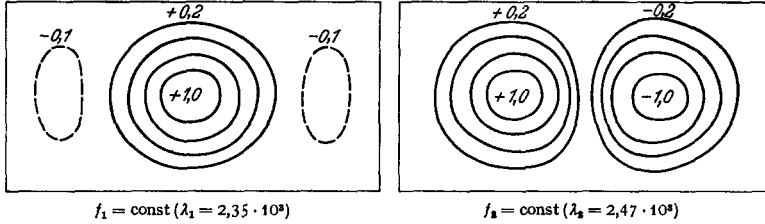


Fig. 5. Stromlinien $f = \text{const}$ für die Eigenfunktionen zu λ_1 und λ_2 beim Rechteck mit $b=2$

In Fig. 1 sind die Werte von λ_1 und λ_2 in Abhängigkeit von b im Falle von Rechtecken aufgetragen. Fig. 2–5 geben einige Stromlinienbilder wieder.

Zusammenfassung

Am Beispiel der Strömung in einem horizontalen Rohr mit von unten erwärmter Wand wird gezeigt, wie man mit Hilfe der Theorie des topologischen Abbildungsgrades von LERAY und SCHAUDER im überkritischen Bereich der Rayleigh-Zahl auf die Existenz einer von der Grundströmung verschiedenen, stationären Strömung (thermische Konvektionsströmung) schließen kann. Unterhalb der kritischen Rayleigh-Zahl existiert genau eine stationäre Lösung der Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen, nämlich die Grundströmung. Beim Überschreiten der kritischen Rayleigh-Zahl verzweigt sich diese stationäre Lösung, wobei die Grundströmung gleichzeitig instabil wird.

Die Methode des Abbildungsgrades ist auf ähnliche Strömungsbeispiele mit „zellulärer Instabilität“ anwendbar wie z. B. die Strömung zwischen rotierenden Zylindern (Taylor-Wirbel) oder die von unten erwärmte Flüssigkeitsschicht (Benard-Zellen).

Diese Arbeit entstand aus dem Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik der DVL an der Universität Freiburg i. Br. Über diese Untersuchung wurde bereits auf der GAMM-Tagung in Bonn (24.–28. 4. 1962) berichtet (s. [19]).

Literatur

- [1] BROWDER, F., On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **9**, 351–361 (1956).
- [2] COLLATZ, L., *Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung*. Leipzig: Akad. Verl. 1945.
- [3] COLLATZ, L., *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*. Grundlehren Math. Wiss., Bd. 60. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.
- [4] CRONIN, J., A topological method in nonlinear resonance. *J. Math. Anal. Appl.* **3**, 428–440 (1961).

- [5] COURANT, R., & D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, 2. Aufl. Berlin: Springer 1931.
- [6] FRIEDRICH, K., Die Randwert- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten. Math. Ann. **98**, 206–247 (1928).
- [7] FRIEDRICH, K., On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **6**, 299–325 (1953).
- [8] LEFSCHETZ, S., Introduction to Topology. Princeton Math. Series 11 (1949).
- [9] KRASNOSEL'SKIJ, J. A., Some problems of nonlinear analysis. Amer. Math. Soc. Translat. Ser. 2, **10**, 345–409 (1958).
- [10] LERAY, J., & J. SCHAUDER, Topologie et équations fonctionnelles. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 3 Ser. **51**, 45–78 (1934).
- [11] LICHTENSTEIN, L., Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen nebst Anwendungen. Berlin: Springer 1931.
- [12] LIN, C. C., The Theory of Hydrodynamic Stability. Cambridge: Cambridge University Press 1955.
- [13] MIRANDA, C., Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Erg. Math. Grenzgeb. Neue Folge Heft 2. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.
- [14] NIRENBERG, L., Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **8**, 648–674 (1955).
- [15] PELLEW, A., & R. V. SOUTHWELL, On maintained convective motion in a fluid heated from below. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **176**, 312–343 (1940).
- [16] ROTHE, E., Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen. Compos. Math. **5**, 177–197 (1937).
- [17] SCHMIDT, E., Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen. Math. Ann. **65**, 370–399 (1908).
- [18] VELTE, W., Zur Stabilität der Strömung in einem horizontalen Rohr bei ungleichmäßig erwärmter Wand. ZAMP **13**, 591–600 (1962).
- [19] VELTE, W., Über nichtlineare Stabilitätsprobleme der Hydrodynamik. ZAMM **42** (1962) T 167 (Vortragsauszug).

Institut für Angewandte Mathematik,
Universität Freiburg i. Br.

(Eingegangen am 16. Dezember 1963)