# *Existenzbeweis zur Kanaltheorie der Gezeiten*

Herbert Beckert

Wir betrachten in der vorliegenden Untersuchung Potentialströmungen einer schweren inkompressiblen Flüssigkeit um einen Zylinder unter folgenden Bedingungen:

a) Die Stromlinien verlaufen sämtlich in Ebenen senkrecht zur Zylinderachse, d.h. es handelt sich um eine ebene Strömung.

b) Die Flüssigkeitsmasse grenze im Außenraum allseitig an ein etwa gasförmiges Medium $\mathfrak{A}$ von konstantem Druck $p_0$, besitzt also eine freie Oberfläche.

c) In der Entfernung $D$ von der Zylinderachse befindet sich in $\mathfrak{A}$ ein Störkörper (Mond), dessen Gravitationspotential die Flüssigkeitsbewegung beeinflußt. Wir wollen die Schwerkraft, welche von konstantem Betrag zur Achse hingerichtet sei, sowie die Zentrifugalkraft berücksichtigen. Die gegenseitige Gravitation der Flüssigkeitsteilchen wird dagegen vernachlässigt.

Auf das vorliegende Strömungsmodell führt die sogenannte Kanaltheorie der Gezeiten[1]. Hierbei nimmt man an, der Mond beschreibe eine Kreisbahn etwa in der Äquatorebene des kugelförmigen Himmelskörpers, der seinerseits um die Achse senkrecht zur Äquatorebene gleichförmig rotiert und dabei die ihn bedeckende Flüssigkeitsmasse mitführt. Falls die Dimensionen groß genug sind, kann man die Strömung dieser Flüssigkeit in einer Kugelzone, welche die Äquatorebene als Symmetrieebene besitzt und von hinreichend kleiner Höhe ist, in guter Annäherung als ebene Zylinderströmung behandeln. Dabei studieren wir die Strömung bezüglich eines mit der Winkelgeschwindigkeit des Mondes in der Äquatorebene rotierenden $x, y$; $z = x + iy$ Koordinatensystems. Wir dürfen annehmen, daß in dieser komplexen $z$-Ebene der Mond die festen Koordinaten $x = D$, $y = 0$ besitzt. Wenn die Tiefe des Meeres nicht zu groß gegen den Radius des Äquatorkreises $R$ ist, kann man den Einfluß des Gravitationspotentials, welches von der Flüssigkeitsmasse herrührt, vernachlässigen. Da wir weiter Wirbelfreiheit der Strömung voraussetzen wollen, und die Bewegung im mitbewegten $z$-System stationären Charakter besitzt, stoßen wir in der Tat auf das eingangs formulierte Strömungsproblem.

In I stellen wir ein unserer Strömungsaufgabe äquivalentes Randwertproblem auf. Das Strömungsgebiet wird in bekannter Weise auf einen Kreisring $\mathfrak{K}$: $\varrho_1 \leqq |\zeta| \leqq 1$ einer $\zeta$-Hilfsebene transformiert. Zur Bestimmung der analytischen Funktion $\omega(\zeta) = \vartheta + i\tau = i \ln \frac{dW}{dz}$, wobei $W(z)$ das komplexe Strömungspotential

[1] Unter sehr einschränkenden Voraussetzungen wurde eine lineare Kanaltheorie der Gezeiten bereits von Airy aufgestellt, welche auf die inhomogene Schwingungsgleichung führt. Man findet eine ausführliche Darstellung über diesen Gegenstand in [2], S. 292ff.

bedeutet, ergibt sich längs $S_{\varrho_1}$: $|\zeta|=\varrho_1$; $S_1$: $|\zeta|=1$ jeweils eine komplizierte nichtlineare Integrodifferentialrelation zwischen $\vartheta$ und $\tau$; die eine Relation längs $S_1$ folgt aus der in Richtung der freien Linie differenzierten Bernoullischen Gleichung, die andere längs $S_{\varrho_1}$ aus der Abbildungsbedingung von $S_{\varrho_1}$ auf den Kreis $|z|=R$. Das ungestörte Strömungsproblem hat die triviale Lösungsschar $W(z)=\frac{c}{2\pi i}\ln z$, wobei $c$ die Zirkulation bedeutet. Die freie Linie ist in diesem Fall als Stromlinie jeweils ein Kreis. Die Frage, ob noch weitere Eigenlösungen im ungestörten Fall auftreten, wird hier nicht untersucht und aufgeschoben. Um die Zentrifugalkräfte berücksichtigen zu können, benötigen wir für unseren Lösungsansatz die Voraussetzung, daß diese Kräfte ein Potential haben. Dies wird natürlich streng nicht erfüllt sein. Wir können daher diese Kräfte nur näherungsweise in Rechnung stellen. Da die Tiefe des Meeres als klein gegenüber $R$ vorausgesetzt wird, darf man den Betrag der Zentrifugalkraft als konstant im Flüssigkeitsbereich ansehen. Dies führt auf ein Potential vom Typ der Schwerkraft. Die mittlere Rotationsgeschwindigkeit, welche dann das Potential der Zentrifugalkraft festlegt, gewinnen wir aus der Zirkulation.

In II definieren wir eine unserem Randwertproblem äquivalente Funktionaltransformation $T$ und geben konvexe Mengen in deren Definitionsbereich an, die durch $T$ stetig und vollstetig in sich abgebildet werden.

Nach dem Schauderschen Fixpunktsatz besitzt $T$ Fixpunkte, und zwar erhalten wir insgesamt eine zweiparametrige Schar. Für den Bereich, den die Parameter durchlaufen, werden Schranken bestimmt.

Haupthilfsmittel beim Beweis der Vollstetigkeit von $T$ sind die Sätze von FATOU-PRIWALOW über einem Kreisring; zur Herleitung von *a priori* Schranken verwenden wir mehrfach das Maximumprinzip.

In III beweisen wir, daß die Fixpunkte auf Lösungen unserer Strömungsaufgabe führen, sofern wir uns auf diejenigen beschränken, bei denen die Schwankung des Geschwindigkeitsbetrags entlang der freien Linie nicht zu groß ausfällt. Man beachte, daß für die obige triviale Lösungsschar des ungestörten Problems die genannte Schwankung verschwindet. Entsprechend der Spiegelsymmetrie des Gravitationspotentials des Mondes verlaufen unsere Lösungen spiegelsymmetrisch zur $x$- und $y$-Achse, insbesondere gilt dies für die freie Linie.

Bei vorgegebenem Zylinderradius $R$ und Störpotential des Mondes hängen unsere Lösungen von der Zirkulation $c$ und dem Fluß $\psi_1$ der Umströmung ab. Obwohl das ungestörte Problem für jeden Wert $c$ lösbar ist, gibt unser Existenzbeweis keinen direkten Aufschluß, ob im Fall des gestörten Problems Potentialströmungen auch mit beliebig kleinen Zirkulationen existieren. Die Zirkulation der hier konstruierten Potentialströmungen liegen in einem positiven Intervall beiderseits des Punktes $e=4\pi^2 g R^3$; $g=$ Schwerebeschleunigung.

## I

Der Strömungsbereich $\mathfrak{B}$ unseres eingangs formulierten Problems ist ein ringförmiges Gebiet in der $z$-Ebene, das von dem Kreis $S_R$: $|z|=R$ im Inneren und von der freien Stromlinie $\mathfrak{L}$ im Äußeren begrenzt wird. $W(z)=\varphi(x,y)+i\,\psi(x,y)$ sei das komplexe Strömungspotential; $S_R$ falle mit der Stromlinie $\psi=\psi_1$, $\mathfrak{L}$ mit

$\psi = 0$ zusammen. Wir setzen:

$$\frac{dW}{dz} = \varphi_x + i\psi_x = u - iv = w = e^{-i\omega} \tag{1}$$
$$\omega = \vartheta + i\tau; \qquad w = e^{\tau} e^{-i\vartheta} = e^{\tau}(\cos\vartheta - i\sin\vartheta).$$

Wie wir sehen werden, sind die Randbedingungen spiegelsymmetrisch zu den Achsen. Wir fordern daher nach Einführung von Polarkoordinaten: $z = re^{i\chi}$

$$\varphi(0,r) \equiv 0; \qquad \varphi\left(\frac{1}{2}\pi, r\right) \equiv \frac{c}{4}; \tag{2}$$
$$\varphi(\pi, r) \equiv \frac{c}{2}; \qquad \varphi\left(\frac{3}{2}\pi, r\right) \equiv \frac{3}{4}c; \qquad \varphi(2\pi, r) \equiv c$$

und beachten das Spiegelungsprinzip. Die Konstante $c$ definiert die Zirkulation der Umströmung des Zylinders:

$$c = \oint w\,dz = W(2\pi, r) - W(0, r).$$

$\mathfrak{B}$ wird zunächst durch die konforme Transformation $W = W(z)$ auf das Rechteck

$$\mathfrak{R}\colon\ 0 \leqq \psi \leqq \psi_1; \qquad 0 \leqq \varphi < c$$

abgebildet, danach vermöge

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{c} W(z)} = \varrho\, e^{i\sigma} \tag{3}$$
$$\varrho = e^{-\frac{2\pi\psi}{c}}; \sigma = \frac{2\pi\varphi}{c}$$

auf den Kreisring $\mathfrak{K}$: $\varrho_1 \leqq |\zeta| \leqq 1$ der $\zeta$-Ebene. Dabei gehen

$$\mathfrak{L} \text{ in } S_1\colon\ |\zeta| = 1$$
$$S_R \text{ in } S_{\varrho_1}\colon\ |\zeta| = \varrho_1 = e^{-\frac{2\pi\psi_1}{c}}$$

über. Die Rücktransformation von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{B}$ leistet dann

$$z = R_1 + \frac{c}{2\pi i} \int_1^{\zeta} e^{i\omega(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{4}$$

Hierbei bezeichnet $x_1 = R_1$ die Abszisse des Schnittpunktes $A$ von $\mathfrak{L}$ mit der positiven reellen Achse. Wir formulieren jetzt das Randwertproblem für die über $\mathfrak{K}$ analytische Funktion

$$\omega(\zeta) = \vartheta(\varrho, \sigma) + i\tau(\varrho, \sigma).$$

Wir setzen:

$$\omega(\zeta) = \omega_1(\zeta) - i\ln\zeta + \tfrac{1}{2}\pi + iK, \tag{5}$$
$$\vartheta(\varrho,\sigma) = \vartheta_1(\varrho,\sigma) + \sigma + \tfrac{1}{2}\pi; \qquad \tau(\varrho,\sigma) = \tau_1(\varrho,\sigma) - \ln\varrho + K$$

und verlangen wegen (2) die Symmetriebedingungen

$$\vartheta_1(\varrho, -\sigma) = -\vartheta_1(\varrho,\sigma); \qquad \tau_1(\varrho,-\sigma) = \tau_1(\varrho,\sigma),$$
$$\vartheta_1(\varrho, \tfrac{1}{2}\pi - \sigma) = -\vartheta_1(\varrho, \tfrac{1}{2}\pi + \sigma); \qquad \tau_1(\varrho, \tfrac{1}{2}\pi - \sigma) = \tau_1(\varrho, \tfrac{1}{2}\pi + \sigma), \tag{6}$$
$$\vartheta_1(\varrho, \tfrac{3}{2}\pi - \sigma) = -\vartheta_1(\varrho, \tfrac{3}{2}\pi + \sigma); \qquad \tau_1(\varrho, \tfrac{3}{2}\pi - \sigma) = \tau_1(\varrho, \tfrac{3}{2}\pi + \sigma).$$

$K$ bedeutet eine Konstante über die wir noch verfügen werden. $\vartheta(\varrho, \sigma)$ ist bekanntlich der Winkel, den der Geschwindigkeitsvektor im Bildpunkt zu $(\varrho, \sigma)$ mit der positiven $x$-Achse einschließt. Die Bedingungen (6) führen nach (5) gerade auf diejenigen, welche nach dem Spiegelungsprinzip aus (2) resultieren. Man findet sofort

$$\begin{aligned}\vartheta(\varrho, 2\pi - \sigma) &= \vartheta_1(\varrho, 2\pi - \sigma) + 2\pi - \sigma + \tfrac{1}{2}\pi \\ &\equiv -\vartheta(\varrho, \sigma) + \pi \mod 2\pi\end{aligned}$$

ebenso

$$\begin{aligned}\vartheta(\varrho, \tfrac{1}{2}\pi - \sigma) &\equiv -\vartheta(\varrho, \tfrac{1}{2}\pi + \sigma) \mod 2\pi, \\ \vartheta(\varrho, \tfrac{3}{2}\pi - \sigma) &\equiv -\vartheta(\varrho, \tfrac{3}{2}\pi + \sigma) \mod 2\pi,\end{aligned}$$

woraus nach (1) sogleich

$$\begin{aligned}&u(\varrho, 2\pi - \sigma) = -u(\varrho, \sigma); && v(\varrho, 2\pi - \sigma) = v(\varrho, 2\pi - \sigma), \\ &u(\varrho, \tfrac{1}{2}\pi - \sigma) = u(\varrho, \tfrac{1}{2}\pi + \sigma); && v(\varrho, \tfrac{1}{2}\pi - \sigma ( = - v(\varrho, \tfrac{1}{2}\pi + \sigma)\end{aligned} \tag{7}$$

folgt. Unsere Behauptung ergibt sich dann aus (7) und den Formeln (28) auf S. 386—387.

Wir leiten als Nächstes die Randbedingungen für $\vartheta_1$, $\tau_1$ längs $S_1$, $S_{\varrho_1}$ her. Bezeichnet $l$ die Bogenlänge längs $S_R$ von $x = R$, $y = 0$ aus gerechnet, dann liefert (4) sogleich der Zusammenhang zwischen den Bogenlängen der Kreise $S_{\varrho_1}$ und $S_R$.

$$l(\sigma) = \frac{c}{2\pi} \int_0^\sigma e^{-\tau(\varrho_1, \sigma)}\, d\sigma = R\chi(\sigma). \tag{8}$$

Da $S_R$ Stromlinie ist, und die Strömung in positivem Sinn um $S_R$ fließen soll, gilt:

$$\chi(\sigma) + \tfrac{1}{2}\pi = \vartheta(\varrho_1, \sigma), \tag{9}$$

also weiter nach (5) und (8)

$$\vartheta_1(\varrho_1, \sigma) = -\sigma + \frac{c\,\varrho_1 e^{-K}}{2\pi R} \int_0^\sigma e^{-\tau_1(\varrho_1, \sigma)}\, d\sigma. \tag{10}$$

Die Konstante $K$ wird wegen (6) durch die Bedingung $\vartheta_1(\varrho_1, \tfrac{1}{2}\pi) = 0$ festgelegt.

$$e^{-K} = \frac{\pi^2 R}{c\,\varrho_1 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\tau_1(\varrho_1, \sigma)}\, d\sigma} = \frac{2\pi R\beta}{c\,\varrho_1} \tag{11}$$

mit der Abkürzung

$$\beta = \frac{\tfrac{1}{2}\pi}{\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\tau_1(\varrho_1, \sigma)}\, d\sigma}. \tag{12}$$

Wir erhalten danach endgültig die zu fordernde Randbedingung längs $S_{\varrho_1}$:

$$\vartheta_1(\varrho_1, \sigma) = -\sigma + \beta \int_0^\sigma e^{-\tau_1(\varrho_1, \sigma)}\, d\sigma. \tag{13}$$

Nun zur Randbedingung längs $S_1$: Das Potential der Mondgravitation im Punkte $z = r\,e^{i\chi}$ beträgt bis auf Glieder höherer Ordnung in $r/D$:

$$\Omega = \frac{3}{2}\,\frac{\gamma M r^2}{D^3}\left(\frac{1}{3} - \cos^2\chi\right) = H\left(\frac{r^2}{3} - x^2\right), \tag{14}$$

$$H = \frac{3\gamma M}{2D^3}.$$

$M$ = Masse des Mondes, $\gamma$ = Gravitationskonstante, $D$ = Entfernung des Mondes vom Ursprung.

Längs $\mathfrak{L}$ besteht die Bernoullische Gleichung

$$p_0 + \tfrac{1}{2}\mu|w|^2 + \mu g r - \tilde{\omega}^2\mu R r + \Omega = \text{Konst.} \tag{15}$$

Hierbei bezeichnen $p_0$ den konstanten Außendruck, $\mu$ die Dichte der rotierenden Flüssigkeit, im folgenden gleich eins gesetzt, und $g$ die Schwerebeschleunigung. Das Glied $-\tilde{\omega}^2\mu R r$ ist das Potential der Zentrifugalkraft unter unserer Voraussetzung hinreichend kleiner Meerestiefe gegen $R$. Die mittlere Rotationsgeschwindigkeit $\tilde{\omega} = \frac{|\tilde{w}|}{R}$ entnehmen wir aus der Zirkulation, indem wir die mittlere Geschwindigkeit $|\tilde{w}|$ längs $S_R$ durch

$$c = 2\pi R|\tilde{w}|$$

definieren, also:

$$\tilde{\omega} = \frac{c}{2\pi R^2}.$$

Nach (4) gilt:

$$r^2 = z\cdot\bar{z} = \left(R_1 + \frac{c}{2\pi}\int_0^\sigma e^{-\tau}\cos\vartheta\,d\sigma\right)^2 + \frac{c^2}{4\pi^2}\left(\int_0^\sigma e^{-\tau}\sin\vartheta\,d\sigma\right)^2, \tag{16}$$

und weiter

$$\frac{dr}{d\sigma} = \frac{\frac{R_1 c}{2\pi}e^{-\tau}\cos\vartheta + \frac{c^2}{4\pi^2}\left\{e^{-\tau}\cos\vartheta\int_0^\sigma e^{-\tau}\cos\vartheta\,d\sigma + e^{-\tau}\sin\vartheta\int_0^\sigma e^{-\tau}\sin\vartheta\,d\sigma\right\}}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{c}{2\pi}\int_0^\sigma e^{-\tau}\cos\vartheta\,d\sigma\right)^2 + \left(\frac{c}{2\pi}\int_0^\sigma e^{-\tau}\sin\vartheta\,d\sigma\right)^2}}.$$

Differentiation von (15) nach $\sigma$ längs $S_1$ liefert

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = -g\,e^{-2\tau}\frac{dr}{d\sigma} + \tilde{\omega}^2 R\,e^{-2\tau}\frac{dr}{d\sigma} - e^{-2\tau}\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma}. \tag{17}$$

Auf Grund von (14) und (16) ergibt sich nach einfachen Rechnungen, wenn wir noch $\tau_1(\varrho,\sigma)$, $\vartheta_1(\varrho,\sigma)$ nach (5) sowie $K$ nach (11) in (17) einführen, schließlich die längs $S_1$ zu stellende nichtlineare Integrodifferentialrelation:

$$\begin{aligned}\frac{d\tau_1}{d\sigma} = {}&\left(\frac{4\pi^2 g R^3}{c^2} - 1\right)\frac{\beta^3 Z}{\varrho_1^3 r}e^{-3\tau_1} + \frac{8\pi^2 H R^3\beta^3}{3c^2\varrho_1^3}Z\,e^{-3\tau_1} - \\ &- \frac{8\pi^2 H R^3\beta^3}{c^2\varrho_1^3}e^{-3\tau_1}\left\{\sin(\vartheta_1+\sigma)\left(R_1 - \frac{R\beta}{\varrho_1}\int_0^\sigma e^{-\tau_1}\sin(\vartheta_1+\sigma)\,d\sigma\right)\right\}.\end{aligned} \tag{18}$$

Hierbei haben wir die Abkürzung:

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
Z &= \sin(\vartheta_1+\sigma)\left\{R_1 - \frac{R\beta}{\varrho_1}\int\limits_0^\sigma e^{-\tau_1}\sin(\vartheta_1+\sigma)\,d\sigma\right\} - \\
&\quad - \frac{R\beta}{\varrho_1}\cos(\vartheta_1+\sigma)\int\limits_0^\sigma e^{-\tau_1}\cos(\vartheta_1+\sigma)\,d\sigma
\end{aligned}
$$

eingeführt. Den Ausdruck für $r$ entnimmt man aus (16). (18) ist eine auf den ersten Blick recht kompliziert aussehende nichtlineare, algebraische Integrodifferentialrelation für die Randwerte $\vartheta_1(1,\sigma)$ und $\tau_1(1,\sigma)$ längs $S_1$.

Unsere Strömungsaufgabe führt also schließlich auf das folgende Randwertproblem:

(P): Es ist eine im Kreisring $\mathfrak{K}$: $\varrho_1 \leqq |\zeta| \leqq 1$ analytische Funktion $\omega_1(\zeta) = \vartheta_1(\varrho,\sigma) + i\,\tau_1(\varrho,\sigma)$ zu bestimmen, welche im abgeschlossenen Kreisring stetig differenzierbar ist. $\vartheta_1(\varrho,\sigma)$ und $\tau_1(\varrho,\sigma)$ sollen dabei die Symmetriebedingungen (6), längs $S_{\varrho_1}$ die Relation (12), (13) und längs $S_1$ die obige Relation (18) erfüllen. Zu diesen Bedingungen tritt noch die folgende Relation (20) zwischen den Konstanten $R$ und $R_1$:

$$
(20)\qquad R_1 = \frac{R\beta}{\varrho_1}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\tau_1(1,\sigma)}\sin\big(\vartheta_1(1,\sigma)+\sigma\big)\,d\sigma,
$$

welche zum Ausdruck bringt, daß der Bildpunkt von $\zeta = +i$ unter (4) mit dem Schnittpunkt von $\mathfrak{L}$ mit der positiven imaginären Achse der $z$-Ebene zusammenfällt. Über die Zirkulation $c$ werden wir geeignet verfügen. Durch $c$ und $\varrho_1$ wird der Fluß der Umströmung $\psi_1$ festgelegt (vgl. (3)). Bei unserem Lösungssatz können wir $R$ und $R_1$ nicht zugleich vorschreiben, bei willkürlicher Wahl einer dieser Konstanten, bestimmt sich die andere aus (20).

Im störungsfreien Fall, $H=0$, erwarten wir die Lösungsschar $W(z) = \frac{c}{2\pi i}\ln z$. In der Tat, der Ansatz $\vartheta_1 \equiv 0$, $\tau_1 = \tau_0 = \text{const}$ befriedigt zunächst die erste Randbedingung (10) längs $S_{\varrho_1}$. (18), (20) gelten ebenfalls; denn

$$
Z = \sin\sigma\left\{R_1 - \frac{R\beta}{\varrho_1}\int\limits_0^\sigma e^{-\tau_0}\sin\sigma\,d\sigma\right\} - \frac{R\beta}{\varrho_1}\cos\sigma\int\limits_0^\sigma e^{-\tau_0}\cos\sigma\,d\sigma = 0,
$$

da $\beta = e^{\tau_0}$ und (20) auf $R_1\varrho_1 = R$ führt. Die Lösung lautet also:

$$
\vartheta = \sigma + \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \tau = \tau_0 - \ln\varrho + K,
$$

wobei noch (11)

$$
K = \ln\frac{c\,\varrho_1}{2\pi R} - \tau_0,
$$

also schließlich

$$
\vartheta = \sigma + \frac{1}{2}\pi; \qquad \tau = \ln\frac{c}{2\pi R_1\varrho}.
$$

Wir erhalten hieraus weiter aus (4)

$$
z = R_1\zeta; \qquad \frac{dW}{dz} = e^{-i\omega} = \frac{c}{2\pi i z}.
$$

Der die Störung berücksichtigende letzte Term $S$ auf der rechten Seite von (18) hat für die konstante Funktion $\vartheta_1 \equiv 0$, $\tau_0 = \text{const}$ den Wert

$$S = -\frac{4\pi^2 H R_1 R^3}{c^2 \varrho_1^3} \sin 2\sigma. \tag{21}$$

## II

Wir leiten aus den Randbedingungen (13), (18) eine Funktionaltransformation

$$T\big(\tau_1(\varrho_1, \sigma), \vartheta_1(1, \sigma)\big) \to \big(\tau_1'(\varrho_1, \sigma), \vartheta_1'(1, \sigma)\big) \tag{22}$$

der Randwerte von $\tau_1(\varrho, \sigma)$ längs $S_{\varrho_1}$ und derjenigen von $\vartheta_1(\varrho, \sigma)$ längs $S_1$ her und suchen Fixpunkte zu bestimmen. Wir zeigen dann, daß diese auf eine Lösung unserer Randwertaufgabe (P) führen. Zur Definition von $T$ setzen wir Randwerte $\tau_1(\sigma)$ in die rechte Seite von (13) für $\tau_1(\varrho_1, \sigma)$ ein, ebenso Randwerte $\vartheta_1(\sigma)$ an Stelle von $\vartheta_1(1, \sigma)$ in (18). Es seien hierfür die (6) entsprechenden Symmetriebedingungen

$$\tau_1(\sigma) = \tau_1(-\sigma); \qquad \tau_1(\tfrac{1}{2}\pi + \sigma) = \tau_1(\tfrac{1}{2}\pi - \sigma), \tag{23a}$$

$$\vartheta_1(\sigma) = -\vartheta_1(-\sigma); \qquad \vartheta_1(\tfrac{1}{2}\pi + \sigma) = -\vartheta_1(\tfrac{1}{2}\pi - \sigma) \tag{23b}$$

erfüllt. Den Funktionalraum, in dem das Funktionenpaar $\{\tau_1(\sigma), \vartheta_1(\sigma)\}$ liegen soll, definieren später genauer. Die linke Seite von (13) liefert uns nach dieser Ersetzung Randwerte $\vartheta_{\varrho_1}(\sigma)$ längs $S_{\varrho_1}$, welche (23b) erfüllen.

$$\begin{aligned} \vartheta_{\varrho_1}(\pi + \sigma) &= -\pi - \sigma + \beta \int_0^{\pi+\sigma} e^{-\tau_1(\sigma)} d\sigma = -\sigma + \beta \int_{\pi-\sigma}^{\pi} e^{-\tau_1(\sigma)} d\sigma \\ &= -\sigma + \pi - \beta \int_0^{\pi-\sigma} e^{-\tau_1(\sigma)} d\sigma = -\vartheta_{\varrho_1}(\pi - \sigma), \end{aligned} \tag{24}$$

ebenso

$$\begin{aligned} \vartheta_{\varrho_1}(\tfrac{1}{2}\pi + \sigma) &= -\tfrac{1}{2}\pi - \sigma + \beta \int_0^{\frac{1}{2}\pi+\sigma} e^{-\tau_1(\sigma)} d\sigma = -\sigma + \beta \int_{\frac{1}{2}\pi-\sigma}^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\tau_1(\sigma)} d\sigma \\ &= -\sigma + \tfrac{1}{2}\pi - \beta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\tau_1(\sigma)} d\sigma + \beta \int_{\frac{1}{2}\pi-\sigma}^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\tau_1(\sigma)} d\sigma \\ &= -\sigma + \tfrac{1}{2}\pi - \beta \int_0^{\frac{1}{2}\pi-\sigma} e^{-\tau_1(\sigma)} d\sigma = -\vartheta_{\varrho_1}(\tfrac{1}{2}\pi - \sigma). \end{aligned}$$

Um auf der rechten Seite von (18) die Randwerte $\tau_1$ festzulegen, bestimmen wir die im Kreisring $\mathfrak{R}$ eindeutige analytische Funktion $\bar{\omega}_1(\zeta) = \bar{\vartheta}_1 + i\,\bar{\tau}_1$ mit den Randwerten

$$\bar{\vartheta}_1(\varrho_1, \sigma) = \vartheta_{\varrho_1}(\sigma); \qquad \bar{\vartheta}_1(1, \sigma) = \vartheta_1(\sigma), \tag{25}$$

dabei wird über die willkürliche Konstante noch so verfügt, daß $\bar{\tau}_1(\sigma)$ für $\sigma = 0$ einen vorgegebenen Wert $\gamma_0$ annimmt:

$$\bar{\tau}_1(0) = \gamma_0. \tag{26}$$

Wir setzen nunmehr die soeben errechneten Randwerte $\bar{\tau}_1(\sigma)$ an Stelle von $\tau_1(\sigma)$ in die rechte Seite von (18) ein und bemerken noch, daß $\bar{\tau}_1(\sigma)$ wegen (23b), (24) den Symmetriebedingungen (23a) genügt.

Durch (20) in $\tau_1(1, \sigma) = \bar{\tau}_1(\sigma)$; $\vartheta_1(1, \sigma) = \vartheta_1(\sigma)$ wird jetzt $R_1$, falls $R$ vorgelegt war oder $R$, falls $R_1$ festgelegt war, bestimmt. Erteilen wir der Konstanten $c$, über welche wir später noch geeignet verfügen werden, einen festen Wert, so ist die rechte Seite von (18) und damit nach deren Integration eine neue Randfunktion $\tau_1'(\sigma)$ längs $S_1$ definiert. Die Integrationskonstante legen wir nach (27) fest.

$$\tau_1'(0) = \bar{\tau}(0) = \gamma_0. \tag{27}$$

Es ist wichtig, sich zu vergewissern, daß auch $\tau_1(\sigma)$ die Symmetriebedingungen (23a) erfüllt. In der Tat wegen (23b) und der Gültigkeit von (23a) für $\bar{\tau}_1(\sigma)$ hat man

$$\sin\left(\vartheta_1(\sigma) + \sigma\right) = -\sin\left(\vartheta_1(-\sigma) - \sigma\right)$$

$$\begin{aligned} \sin\left(\vartheta_1(\tfrac{1}{2}\pi - \sigma) + \tfrac{1}{2}\pi - \sigma\right) &= \sin\left(-\vartheta_1(\tfrac{1}{2}\pi - \sigma) + \tfrac{1}{2}\pi + \sigma\right) \\ &= \sin\left(\vartheta_1(\tfrac{1}{2}\pi + \sigma) + \tfrac{1}{2}\pi + \sigma\right), \end{aligned} \tag{28a}$$

$$\cos\left(\vartheta_1(\sigma) + \sigma\right) = \cos\left(\vartheta_1(-\sigma) - \sigma\right) \tag{28b}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\vartheta_1(\tfrac{1}{2}\pi - \sigma) + \tfrac{1}{2}\pi - \sigma\right) &= -\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi + \sigma - \vartheta_1(\tfrac{1}{2}\pi - \sigma)\right) \\ &= -\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi + \sigma + \vartheta_1(\tfrac{1}{2}\pi + \sigma)\right). \end{aligned}$$

Wir setzen:

$$R_1 - \frac{R\beta}{\varrho_1}\int_0^{\delta} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma)} \sin\left(\vartheta_1(\sigma) + \sigma\right) d\sigma = \frac{R\beta}{\varrho_1}\int_{\delta}^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma)} \sin\left(\vartheta_1(\sigma) + \sigma\right) d\sigma = F. \tag{28c}$$

Nach der Transformation

$$\pi - \sigma = \sigma'$$

gilt:

$$\begin{aligned} F &= -\frac{R\beta}{\varrho_1}\int_{\pi-\delta}^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\bar{\tau}_1(\pi-\sigma')} \sin\left(\vartheta_1(\pi - \sigma') + \pi - \sigma'\right) d\sigma' \\ &= -\frac{R\beta}{\varrho_1}\int_{\pi-\delta}^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma')} \sin\left(\vartheta_1(\sigma') + \sigma'\right) d\sigma' \\ &= \frac{R\beta}{\varrho_1}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi-\delta} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma')} \sin\left(\vartheta_1(\sigma') + \sigma'\right) d\sigma' \\ &= -\left(R_1 - \frac{R\beta}{\varrho_1}\int_0^{\pi-\delta} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma')} \sin\left(\vartheta_1(\sigma') + \sigma'\right) d\sigma'\right) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\delta} \cos\left(\vartheta_1(\sigma) + \sigma\right) e^{-\bar{\tau}_1(\sigma)}\, d\sigma = \int_0^{\pi-\delta} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma)} \cos\left(\vartheta_1(\sigma) + \sigma\right) d\sigma. \tag{28d}$$

Dies folgt aus:

$$F_1 = \int_{\delta}^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma)} \cos\left(\vartheta_1(\sigma) + \sigma\right) d\sigma = -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi-\delta} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma)} \cos\left(\vartheta_1(\sigma) + \sigma\right) d\sigma;$$

man erhält nach der Transformation $\pi-\sigma=\sigma'$

$$\begin{aligned}F_1 &= -\int_{\pi-\delta}^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\bar{\tau}_1(\pi-\sigma')}\cos\left(\vartheta_1(\pi-\sigma')+\pi-\sigma'\right)d\sigma'\\ &= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi-\delta} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma')}\cos\left(-\vartheta_1(\sigma')-\sigma'+\pi\right)d\sigma'\\ &= -\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi-\delta} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma')}\cos\left(\vartheta_1(\sigma')+\sigma'\right)d\sigma'.\end{aligned}$$

Wir haben weiter

$$F_2=\int_{\delta}^{\pi} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma)}\sin\left(\vartheta_1(\sigma)+\sigma\right)d\sigma=-\int_{\pi}^{2\pi-\delta} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma)}\sin\left(\vartheta_1(\sigma)+\sigma\right)d\sigma \tag{28e}$$

denn nach $2\pi-\sigma=\sigma'$

$$\begin{aligned}F_2 &= -\int_{2\pi-\delta}^{\pi} e^{-\bar{\tau}_1(2\pi-\sigma')}\sin\left(\vartheta_1(2\pi-\sigma')+2\pi-\sigma'\right)d\sigma'\\ &= \int_{\pi}^{2\pi-\delta} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma')}\sin\left(-\vartheta_1(\sigma')-\sigma'\right)d\sigma'\\ &= -\int_{\pi}^{2\pi-\delta} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma')}\sin\left(\vartheta_1(\sigma')+\sigma'\right)d\sigma'\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma)}\cos(\vartheta_1+\sigma)\,d\sigma=0, \tag{28f}$$

also

$$\begin{aligned}\int_0^{\delta} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma)}\cos\left(\vartheta_1(\sigma)+\sigma\right)d\sigma &= -\int_{\delta}^{\pi} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma)}\cos\left(\vartheta_1(\sigma)+\sigma\right)d\sigma\\ &= \int_{2\pi-\delta}^{\pi} e^{-\bar{\tau}_1(2\pi-\sigma')}\cos\left(\vartheta_1(2\pi-\sigma')+2\pi-\sigma'\right)d\sigma'\\ &= -\int_{\pi}^{2\pi-\delta} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma')}\cos\left(-\vartheta_1(\sigma')-\sigma'\right)d\sigma'\\ &= -\int_{\pi}^{2\pi-\delta} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma')}\cos\left(\vartheta_1(\sigma')+\sigma'\right)d\sigma'\\ &= -\int_{0}^{2\pi-\delta} e^{-\bar{\tau}_1(\sigma')}\cos\left(\vartheta_1(\sigma')+\sigma'\right)d\sigma'.\end{aligned}$$

Berücksichtigt man in (18) diese letzten Relationen (28 a, b, c, d, e, f), so ergibt sich sofort:

$$\frac{d\tau_1'(\sigma)}{d\sigma}=-\frac{d\tau_1'(-\sigma)}{d\sigma};\qquad \frac{d\tau_1'(\sigma)}{d\sigma}=-\frac{d\tau_1'(\pi-\sigma)}{d\sigma}, \tag{29}$$

und hieraus (23a) für $\tau_1'(\sigma)$.

Als nächstes bestimmen wir diejenige in $\mathfrak{K}$ analytische Funktion $\omega_1'(\zeta)=\vartheta_1'(\varrho,\sigma)+i\,\tau_1'(\varrho,\sigma)$, deren Imaginärteil längs $S_1$ mit $\tau_1'(\sigma)$ und deren Realteil längs $S_{\varrho_1}$ mit $\vartheta_{\varrho_1}(\sigma)$ übereinstimmt. Nach dem Spiegelungsprinzip genügen der

Imaginärteil $\tau_1'(\varrho, \sigma)$ von $\omega_1'(\zeta)$ längs $S_{\varrho_1}$ und der Realteil $\vartheta_1'(\varrho, \sigma)$ von $\omega_1'(\zeta)$ längs $S_1$ den Symmetriebedingungen (23a), (23b). Die angekündigte Funktionaltransformation $T$ ist nun dadurch festgelegt, daß wir dem Ausgangspaar $(\tau_1(\sigma), \vartheta_1(\sigma))$ das Paar $(\tau_1'(\varrho_1, \sigma), \vartheta_1'(1, \sigma))$ zuordnen. Offenbar definiert ein Fixpunkt von $T$ den Imaginärteil längs $S_{\varrho_1}$ und den Realteil längs $S_1$ einer über $\mathfrak{R}$ analytischen Funktion $\omega_1(\zeta)$, die unsere Randwertaufgabe löst. Zur genauen Charakterisierung des Definitionsbereichs von $T$ betrachten wir den Banach-Raum $\mathfrak{B}_\lambda^2 = \mathfrak{B}_\lambda \times \mathfrak{B}_\lambda$, dessen Elemente aus den Paaren $(\tau_1(\sigma), \vartheta_1(\sigma))$ besteht, wobei die Funktionen $\tau_1(\sigma), \vartheta_1(\sigma)$ wie soeben (23a), (23b) erfüllen und $H$-stetig nach dem Exponenten $\lambda$, $0 < \lambda < 1$, sind. Sie definieren einen Banach-Raum in der üblichen Metrik:

$$\|\tau_1(\sigma), \vartheta_1(\sigma)\|_\lambda = \operatorname{Max}|\tau_1(\sigma)| + \operatorname{Max}|\vartheta_1(\sigma)| + H_\lambda(\vartheta_1(\sigma)) + H_\lambda(\tau_1(\sigma)),$$

$H_\lambda(\vartheta_1(\sigma))$ = Hölder-Konstante von $\vartheta_1(\sigma)$ nach dem Exponenten $\lambda$.

Wir grenzen zunächst den Definitionsbereich von $T$ durch (30) ab:

$$|\vartheta_1(\sigma)| \leqq L_1, \qquad H_\lambda(\vartheta_1(\sigma)) \leqq L_1' \tag{30}$$

mit Konstanten $L_1, L_1'$, die später noch präzisiert werden. Nach (13) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta_{\varrho_1}}{d\sigma} &= -1 + \frac{1}{2}\pi \frac{e^{-\tau_1(\sigma)}}{\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\tau_1(\sigma)}\, d\sigma} \\ &= -1 + e^{-(\tau_1(\sigma) - \tau_1(\sigma^*))} = -(\tau_1(\sigma) - \tau_1(\sigma^*)) + o(\tau_1(\sigma) - \tau_1(\sigma^*)), \\ & \qquad 0 < \sigma^* < \tfrac{1}{2}\pi \end{aligned} \tag{31}$$

nach dem Mittelwertsatz. Zur weiteren Abgrenzung schreiben wir mit einer vorgelegten Konstanten $L_2 > 0$ die Schwankung $\nu(\tau_1(\sigma))$ von $\tau_1(\sigma)$ über $0 \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2}\pi$ vor

$$\operatorname*{Max}_{0 \leqq \sigma, \sigma', \leqq \frac{1}{2}\pi} |\tau_1(\sigma) - \tau_1(\sigma')| = \nu(\tau_1(\sigma)) \leqq L_2. \tag{32}$$

Aus (31) entnimmt man dann

$$\left|\frac{d\vartheta_{\varrho_1}}{d\sigma}\right| \leqq C\nu(\tau_1(\sigma)) \leqq C L_2, \tag{33}$$

wobei $C(L_2) > 1$ eine für alle (32) genügenden Funktionen $\tau_1(\sigma)$ zutreffende Konstante bedeutet. Für eine spätere Anwendung können wir $L_2$ von vornherein so klein wählen, daß die Ungleichung:

$$\begin{aligned} &0 \leqq \vartheta_{\varrho_1}(\sigma) + \sigma \leqq \tfrac{1}{2}\pi, \\ &0 \leqq \sigma \leqq \tfrac{1}{2}\pi \end{aligned} \tag{33'}$$

zutrifft.

Die Bildfunktion $\omega_1'(\zeta) = \vartheta_1'(\varrho, \sigma) + i\,\tau_1'(\varrho, \sigma)$ resultierte nach dem vorhin geschilderten Aufbau von $T$ aus der Vorgabe von

$$\begin{aligned} \vartheta_1'(\varrho_1, \sigma) &= \vartheta_{\varrho_1}(\sigma) \quad \text{längs } S_{\varrho_1}, \\ \tau_1'(1, \sigma) &= \tau_1'(\sigma) \quad \text{längs } S_1. \end{aligned} \tag{34}$$

Wir können die Lösung $\omega_1'(\zeta)$ dieses Randwertproblems durch Addition der Lösungen der beiden folgenden Nebenprobleme (A), (B) gewinnen:

(A) Gesucht sei eine in $\mathfrak{K}$ analytische Funktion $\hat{\omega} = \hat{\vartheta} + i\hat{\tau}$ unter den Randbedingungen

$$\hat{\vartheta}(\varrho_1, \sigma) = \vartheta_{\varrho_1}(\sigma) \quad \text{längs } S_{\varrho_1},$$
$$\hat{\tau}(1, \sigma) = 0 \quad \text{längs } S_1.$$

(B) Gesucht sei eine in $\mathfrak{K}$ analytische Funktion $\hat{\hat{\omega}} = \hat{\hat{\vartheta}} + i\hat{\hat{\tau}}$ mit

$$\hat{\hat{\vartheta}}(\varrho_1, \sigma) = 0 \quad \text{längs } S_{\varrho_1},$$
$$\hat{\hat{\tau}}(1, \sigma) = \tau_1'(\sigma) \quad \text{längs } S_1,$$
$$\omega_1'(\zeta) = \hat{\omega}(\zeta) + \hat{\hat{\omega}}(\zeta).$$

Nach dem Spiegelungsprinzip kann man (A), (B) durch Randwertprobleme (A'), (B') ersetzen, wobei $\hat{\omega}$ bei (A') über den Kreis $\mathfrak{K}_1$: $\varrho_1 \leqq |\zeta| \leqq \varrho_1^{-1}$ und $\hat{\hat{\omega}}$ bei (B') über den Kreis $\mathfrak{K}_2$: $\varrho_1^2 \leqq |\zeta| \leqq 1$ unter den jeweiligen Bedingungen

$$\text{(A')} \qquad \hat{\vartheta}(\varrho_1, \sigma) = \vartheta_{\varrho_1}(\sigma) \quad \text{längs } S_{\varrho_1},$$
$$\hat{\vartheta}(\varrho_1^{-1}, \sigma) = \vartheta_{\varrho_1}(\sigma) \quad \text{längs } S_{\varrho_1^{-1}};$$
$$\text{(B')} \qquad \hat{\hat{\tau}}(\varrho_1^2, \sigma) = \tau_1'(\sigma) \quad \text{längs } S_{\varrho_1^2},$$
$$\hat{\hat{\tau}}(1, \sigma) = \tau_1'(\sigma) \quad \text{längs } S_1$$

zu bestimmen sind. Wir leiten folgendes Resultat her:

(R) Unter den beiden Ungleichungen (35), (36) für $\varrho_1$ und $\frac{d\tau_1'}{d\sigma}$ längs $S_1$:

$$\frac{C(L_2)}{C(L_2) + \frac{s-1}{2s}} < \varrho_1 < 1, \tag{35}$$

$$\left|\frac{d\tau_1'}{d\sigma}\right|_{S_1} < \frac{2L_2}{s\pi} \tag{36}$$

bleibt bei Gültigkeit von (32) auch die Schwankung $\nu(\tau_1'(\varrho_1, \sigma))$ von $\tau_1'(\varrho, \sigma)$ längs $S_{\varrho_1}$ unter $L_2$; $s > 1$ ist eine beliebige im folgenden festgewählte Konstante.

*Beweis.* Weil mit $\hat{\vartheta}$, $\hat{\hat{\tau}}$ auch $\frac{d\hat{\vartheta}}{d\sigma}$, $\frac{d\hat{\hat{\tau}}}{d\sigma}$ Potentialfunktionen sind, gelten nach dem Maximumprinzip die Abschätzungen

$$\left|\frac{d\hat{\vartheta}(\varrho, \sigma)}{d\sigma}\right| \leqq \operatorname{Max}\left|\frac{d\vartheta_{\varrho_1}}{d\sigma}\right|_{S_{\varrho_1}} \tag{37}$$

für $\varrho_1 \leqq \varrho \leqq 1$,

$$\left|\frac{d\hat{\hat{\tau}}(\varrho, \sigma)}{d\sigma}\right| \leqq \operatorname{Max}\left|\frac{d\tau_1'}{d\sigma}\right|_{S_1} \tag{38}$$

für $\varrho_1 \leqq \varrho \leqq 1$.

Da $\frac{d\vartheta_{\varrho_1}}{d\sigma}$ einer $H$-Bedingung genügt, gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen bis einschließlich des Randes, also

$$-\frac{d\hat{\vartheta}}{d\sigma} = \varrho \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial \varrho},$$

und daher für $\varrho_1 \leqq \varrho \leqq 1$:

$$\left|\frac{d\hat{\tau}(\varrho,\sigma)}{d\varrho}\right| \leqq \frac{1}{\varrho_1} \operatorname{Max}\left|\frac{d\vartheta_{\varrho_1}}{d\sigma}\right| \leqq \frac{C(L_2)}{\varrho_1} \nu\big(\tau_1(\sigma)\big). \tag{39}$$

Wegen

$$\tau_1'(\varrho,\sigma) = \hat{\tau}(\varrho,\sigma) + \hat{\hat{\tau}}(\varrho,\sigma)$$

gilt weiter für $0 \leqq \sigma_1,\ \sigma_2 \leqq \frac{1}{2}\pi$:

$$\begin{aligned} |\tau_1'(\varrho_1,\sigma_1) - \tau_1'(\varrho_1,\sigma_2)| &\leqq \nu\big(\hat{\tau}(\varrho_1,\sigma)\big) + \nu\big(\hat{\hat{\tau}}(\varrho_1,\sigma)\big) \\ &\leqq \frac{2(1-\varrho_1)}{\varrho_1} C(L_2)\,\nu\big(\tau_1(\sigma)\big) + \frac{1}{2}\pi \operatorname{Max}\left|\frac{d\tau_1'}{d\sigma}\right|_{S_1} < L_2 \end{aligned}$$

nach (38), (39), $\hat{\tau}(1,\sigma)=0$ sowie (35) und (36), q.e.d. Wir finden weiter unter den Voraussetzungen von (R)

$$\operatorname{Max}|\tau_1'(\sigma)|_{S_1} < \gamma_0 + \frac{L_2}{s}, \tag{40}$$

also nach dem Maximumprinzip

$$|\hat{\hat{\tau}}(\varrho,\sigma)| < \gamma_0 + \frac{L_2}{s}, \tag{40'}$$

wegen $\hat{\tau}(1,\sigma)=0$ hat man

$$|\hat{\tau}(\varrho,\sigma)| \leqq \frac{1-\varrho_1}{\varrho_1} C(L_2)\,L_2, \tag{41}$$

d.h. nach Addition der Gleichungen (40′), (41) sowie Beachtung von (35)

$$\operatorname{Max}|\tau_1'(\varrho,\sigma)| \leqq \gamma_0 + \frac{s+1}{2s} L_2. \tag{42}$$

In Anbetracht von (R) und der letzten Ungleichung legen wir in $\mathfrak{B}_\lambda^2$ nunmehr den konvexen Definitionsbereich $\mathfrak{M}_{L_1,L_2}$ von $T$ fest, der eine Selbstabbildung erleidet. Das Paar $\big(\tau_1(\sigma),\vartheta_1(\sigma)\big)$ gehöre dann und nur dann zu $\mathfrak{M}_{L_1,L_2}$, wenn

$$\begin{aligned} &\text{a) } \vartheta_1(\sigma) \text{ den Ungleichungen (30) genügt,} \\ &\text{b) } |\tau_1(\sigma)| \leqq g_0 + \frac{s+1}{2s} L_2; \qquad \nu\big(\tau_1(\sigma)\big) \leqq L_2, \\ &\qquad H_\lambda\big(\tau_1(\sigma)\big) \leqq L_3 \end{aligned} \tag{43}$$

erfüllt wird. Die vorgelegte Schranke $L_3$ für die Hölder-Konstante von $\tau_1(\sigma)$ geht nicht mit in die Abschätzungen ein, sondern sichert nur die Herleitung von (39). Bei vorgegebenen Konstanten $L_2$, $\varrho_1$, $s$ erfüllt die Bildfunktion $\tau_1'(\varrho_1,\sigma)$ längs $S_{\varrho_1}$ offenbar eine $H$-Bedingung nach dem Exponenten $\lambda$ mit einer gleichmäßig gültigen Ungleichung des Typs: $H_\lambda\big(\tau_1'(\sigma)\big) \leqq L_3'$. Wir wählen $L_3' \leqq L_3$.

$\mathfrak{M}_{L_1,L_2}$ ist konvex in $\mathfrak{B}_\lambda^2$. Unter den Voraussetzungen (35), (36) erfüllt die erste Bildfunktion $\tau_1'(\varrho_1,\sigma)$ eines Paares aus $\mathfrak{M}_{L_1,L_2}$ jedenfalls wieder (43b).

Wir untersuchen als Nächstes, unter welchen Bedingungen $\vartheta_1'(1,\sigma)$ den Ungleichungen (30) genügt. $\vartheta_1'(1,\sigma)$ sind die Randwerte der Potentialfunktion $\vartheta_1'(\varrho,\sigma)$ längs $S_1$, die sich aus dem Randwertproblem (34) für $\omega_1'(\zeta)=\vartheta_1'(\varrho,\sigma)+i\,\tau_1'(\varrho,\sigma)$ ergeben. Unter den Bedingungen (33), (35), (36) genügt $\vartheta_1'(1,\sigma)$ einer Hölder-Bedingung nach jedem Exponenten $\lambda$, $0<\lambda<1$, auf Grund der Sätze von FATOU-PRIVALOW, wobei eine Abschätzung der Gestalt (44) für die $H$-Konstante zutrifft:

$$H_\lambda\big(\vartheta_1'(1,\sigma)\big) \leqq D(s, L_2, \lambda, \varrho_1). \tag{44}$$

Wir unterwerfen von vornherein $L_1'$ in (30) der Bedingung

(45) $$D(s, L_2, \lambda, \varrho_1) \leqq L_1'$$

und beachten, daß $D(s, L_2, \lambda, \varrho_1)$ nur von den in der Klammer aufgeführten Konstanten abhängt. Zur Herleitung einer Schranke für $|\vartheta_1'(1, \sigma)|$ schließen wir analog wie beim Beweis von (R).

Nach dem Maximumprinzip gilt nach (A') wegen (33)

(46) $$|\hat{\vartheta}(1, \sigma)| \leqq \operatorname{Max} |\vartheta_{\varrho_1}(\sigma)| \leqq \tfrac{1}{2}\pi C \nu(\tau_1(\sigma)) \leqq \tfrac{1}{2}\pi C(L_2) L_2 .$$

$\hat{\hat{\vartheta}}(1, \sigma)$ schätzen wir in (B') ab und beachten dabei (38) sowie

$$\frac{\partial \hat{\hat{\vartheta}}}{\partial \varrho} = \frac{\partial \hat{\hat{\tau}}}{\varrho\, \partial \sigma} .$$

Wir erhalten

$$\left|\frac{\partial \hat{\hat{\vartheta}}}{\partial \varrho}\right| \leqq \frac{1}{\varrho_1} \left|\frac{\partial \hat{\hat{\tau}}}{\partial \sigma}\right| \leqq \frac{2 L_2}{\pi \varrho_1 s}$$

und wegen $\hat{\hat{\vartheta}}(\varrho_1, \sigma) \equiv 0$ schließlich

(47) $$|\hat{\hat{\vartheta}}(1, \sigma)| \leqq \frac{1-\varrho_1}{\varrho_1} \frac{2 L_2}{s \pi} .$$

Addition der Ungleichungen (46), (47) führt auf

(48) $$|\vartheta_1'(1, \sigma)| = L_2 \left( \frac{\pi C(L_2)}{2} + \frac{2(1-\varrho_1)}{\pi s \varrho_1} \right) .$$

Die Abschätzungen (44), (45), (48) zeigen folgendes: Wählt man bei der Definition von $\mathfrak{M}_{L_1, L_2}$ die Konstanten $L_1, L_1'$ in (30) von vornherein so, daß

(49) $$L_2 \left( \frac{\pi C(L_2)}{2} + \frac{2(1-\varrho_1)}{\pi s \varrho_1} \right) \leqq L_1 ,$$
$$D(L_2, s, \lambda, \varrho_1) \leqq L_1'$$

zutrifft, dann wird bei vorgegebenem $L_2$ $\mathfrak{M}_{L_1, L_2}$ durch $T$ in sich transformiert, vorausgesetzt, daß $\varrho_1$ im Intervall (35) liegt und (36) zutrifft. Es kommt daher alles darauf an, sich zu vergewissern, ob man durch geeignete Wahl von $c$, über diese Konstante in (18) können wir noch verfügen, die Ungleichung (36) gleichmäßig in $\mathfrak{M}_{L_1, L_2}$ sicherstellen kann für festes $\varrho_1$ im Intervall (35). Dem wenden wir uns jetzt zu.

Bei der allgemeinen Annahme von $L_2$ ist es möglich, daß nach Berechnung von $\bar{\tau}(\sigma)$ der Ausdruck (16) für $r^2$ verschwinden kann. Dem wollen wir Rechnung tragen, indem wir $r$ für $0 \leqq r \leqq \delta < R$ durch $\delta$ ersetzen; $\delta$ ist eine hinreichend kleine positive Größe. Das bedeutet keine Einschränkung unseres Lösungsbereichs, denn die freie Oberflächenkurve $\mathfrak{L}$ darf bei einer physikalisch sinnvollen Lösung den Kreis $S_R$ nicht schneiden.

Wir wollen zur Herleitung von (36) bei vorgegebenem $s > 1$ auch $H$ mit $c$ als veränderlich ansehen. Aus der Definition von $T$ geht unmittelbar folgende für jedes Ausgangspaar $(\tau_1(\sigma), \vartheta_1(\sigma)) \in \mathfrak{M}_{L_1, L_2}$ zutreffende Abschätzung der rechten Seite von (18) hervor:

(50) $$\left|\frac{d\tau_1'}{d\sigma}\right| \leqq A \left|\frac{e}{c^2} - 1\right| + B \frac{H}{c^2} ,$$

wobei

$$e = 4\pi^2 g R^3$$

und

$$A = \operatorname{Sup} \frac{|Z|}{\varrho_1^3 r} e^{-3\tau_1} \beta^3$$

$$B = \operatorname{Sup} \frac{8\pi^2 R^3}{3\varrho_1^3} \left| Z - 3\sin(\vartheta_1 + \sigma)\left(R_1 - \frac{R\beta}{\varrho_1} \int_0^\sigma e^{-\tau_1(\sigma)} \sin(\vartheta_1 + \sigma)\, d\sigma\right)\right| \cdot e^{-3\tau_1} \beta^3$$

feste von $L_1, L_2, \varrho_1, R$ abhängige positive Konstanten bedeuten. (36) ist befriedigt, wenn

$$A\left|\frac{e}{c^2} - 1\right| + B\frac{H}{c^2} \leqq \frac{2L_2}{s\pi} = E \tag{51}$$

oder bei $e \geqq c^2$, $H > 0$

$$(A + E)\,c^2 - BH \geqq A\,e \tag{52}$$

gilt. Hieraus ergibt sich sofort:

Liegen die Werte von $c$ und $H$ im Bereich:

$$\begin{gathered} \frac{A\,e}{E+A} < c^2 \leqq e \\ 0 < H \leqq \frac{(E+A)\,c^2 - A\,e}{B}, \end{gathered} \tag{53}$$

dann besteht sicher die Ungleichung (36) längs $S_1$ für alle Ausgangspaare aus $\mathfrak{M}_{L_1, L_2}$ und $\varrho_1$ im Intervall (35). Der Konstanten $L_2$, die die Maximalschwankung der Geschwindigkeit längs $S_R$ bestimmt, wurde dabei zunächst keine Beschränkung auferlegt. Indessen kann man, wie aus III ersichtlich ist, bei derartigen Lösungen nicht von vornherein ausschließen, daß die zugehörige freie Linie $\mathfrak{L}$ mehrfache Punkte besitzt. Physikalisch sinnvolle Lösungen lassen sich nur für nicht allzu große Werte von $L_2$ sichern und dann auch für jeden Parameterwert $c$ und $H$ im Bereich (53) und $\varrho_1$ im Bereich (35), wie wir gleich zeigen werden. Das ungestörte Problem $H = 0$ besitzt die Lösungsschar $W(z) = \frac{c}{2\pi i} \ln z$. Dabei kann die Zirkulation $c$ jeden Wert annehmen trotz Berücksichtigung der Zentrifugalkraft. Bei großen Werten von $c$ werden diese Strömungen nicht mehr physikalisch sinnvoll sein; wir haben das Auftreten von Wirbeln zu erwarten. Damit steht auch unsere bei Diskussion von (51) nicht notwendige Forderung $e \geqq c^2$ im Zusammenhang, welche zum Ausdruck bringt, daß die Zentrifugalkraft auf ein längs $S_R$ strömendes Teilchen, die auf dieses Teilchen wirkende Schwerkraft nicht übertrifft. Im Falle der Gezeitenströmung um die Erde ist $e > c^2$ mit $\frac{e}{c^2} \sim 289$ erfüllt. Weitere Bemerkungen zu den Ungleichungen (53) verschieben wir auf später.

Die Selbstabbildung von $\mathfrak{M}_{L_1, L_2}$ durch $T$, welche wir bei Erfülltsein der Ungleichungen (35), (49) und (53) sichergestellt haben, ist stetig und vollstetig. Die Vollstetigkeit ist eine unmittelbare Folge der Sätze von FATOU-PRIVALOW auf Grund der Ungleichungen (33), (36). Hiernach genügen die Bildfunktionen

$\tau_1'(\sigma), \vartheta_1'(\sigma)$ Hölder-Bedingungen nach jedem Exponenten $\lambda'$, $0<\lambda'<1$, insbesondere nach einem festgewählten Exponenten $\lambda'$; $\lambda'>\lambda$ mit $H$-Konstanten, welche nur von $\lambda'$, $L_2$ und $\varrho_1$ abhängen. Dies führt in bekannter Weise auf die Vollstetigkeit von $T$. Die Stetigkeit von $T$ ist ebenfalls eine Folgerung der Fatou-Privalowschen Sätze, wonach gilt:

Seien $\tau_j(1,\sigma)$, $\vartheta_j(\varrho_1,\sigma)$, $j=1,2,\ldots,$ inf stetig differenzierbare Randwerte längs $S_1$, $S_{\varrho_1}$ für Imaginärteil und Realteil der in $\mathfrak{K}$ analytischen Funktionen

$$\omega_j(\zeta)=\vartheta_j(\varrho,\sigma)+i\,\tau_j(\varrho,\sigma)$$

und gilt im Sinne gleichmäßiger Konvergenz

$$\vartheta_j(\varrho_1,\sigma)\rightrightarrows 0; \qquad \tau_j(1,\sigma)\rightrightarrows 0,$$
$$\frac{d\vartheta_1(\varrho_1,\sigma)}{d\sigma}\rightrightarrows 0; \qquad \frac{d\tau_1(1,\sigma)}{d\sigma}\rightrightarrows 0,$$

dann konvergiert für $\lambda$, $0<\lambda<1$ auch

$$\|\vartheta_j(1,\sigma)\|_\lambda\to 0, \qquad \|\tau_j(\varrho_1,\sigma)\|_\lambda\to 0.$$

Damit sind alle Voraussetzungen zur Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes auf die durch $T$ definierte Selbstabbildung von $\mathfrak{M}_{L_1,L_2}$ bestätigt: Für jedes $c$, $H$ und $\varrho_1$ in den Intervallen (53) und (35) besitzt $T$ Fixpunkte in $\mathfrak{M}_{L_1,L_2}$. Jeder von diesen definiert eine in $\mathfrak{K}$ analytische Funktion, deren Real- und Imaginärteil längs $S_{\varrho_1}$ und $S_1$ die vorgeschriebenen Randrelationen (13) und (18) befriedigen, ferner ist (20) erfüllt.

## III

Wir haben zu zeigen, daß die Fixpunkte auf eine Lösung unserer Strömungsaufgabe führen. Sei $(\tau_1(\sigma), \vartheta_1(\sigma))$ ein Fixpunkt von $T$ zu $c$, $H$, $\varrho_1$, $R$ bzw. $R_1$, $\gamma_0$ nach (53), (35), (20), (26). Wir berechnen $K$ nach (11), $\beta$ nach (12) und definieren die analytische Funktion $\omega(\zeta)=\vartheta(\varrho,\sigma)+i\,\tau(\varrho,\sigma)$ durch (5). Wir bemerken, daß $\gamma_0$ kein wesentlicher Parameter ist. Wegen (13) gilt (10) längs $S_{\varrho_1}$. Durch (4) wird eine konforme Abbildung des Kreisrings $\mathfrak{K}$ auf einen Strömungsbereich $\mathfrak{B}$ der $z$-Ebene erklärt. Das zu dieser Strömung gehörige komplexe Strömungspotential laute

$$W(z)=\frac{c}{2\pi i}\ln\zeta,$$

woraus

$$\frac{dW}{dz}=w=e^{-i\omega(\zeta)}=e^{\tau}e^{-i\vartheta} \tag{1'}$$

folgt. Den Randkreisen $S_{\varrho_1}$, $S_1$ von $\mathfrak{K}$ entsprechen in der $z$-Ebene die beiden geschlossenen Stromlinien $\mathfrak{L}$: $\psi=0$ und $\mathfrak{L}_1$: $\psi_1=-\frac{c}{2\pi}\ln\varrho_1$. Von der Differentialrelation (18) gelangen wir über (4), (5), (11), (12) zur Gültigkeit der Bernoullischen Gleichung längs $\mathfrak{L}$. Nun zur Randbedingung (10). Nach (1'), (4) schließt man längs der Stromlinie $\psi_1=-\frac{c}{2\pi}\ln\varrho_1$ auf die Relation

$$\hat{\chi}(\sigma)=\frac{l(\sigma)}{R}, \tag{8'}$$

Hierbei bedeutet $l(\sigma)$ die Länge desjenigen Kurvenstücks längs $\mathfrak{L}_1$, welches die Punkte $P_0$ und $P_\sigma$ verbindet. $P_0, P_\sigma$ entsprechen den Punkten $\zeta=\varrho_1$ und $\zeta\equiv\varrho_1 e^{i\sigma}$ in der $\zeta$-Ebene. $\hat{\chi}(\sigma)$ bezeichnet den Winkel der ins Strömungsgebiet weisenden Kurvennormalen an $\mathfrak{L}_1$ mit der positiven $x$-Richtung im Punkte $P_\sigma$. Wir betrachten das Bild $S'$ der Kontur des Viertelkreisrings von $\mathfrak{K}$ mit den Eckpunkten $\zeta=1$; $\zeta=\varrho_1$; $\zeta=i\,\varrho_1$; $\zeta=i$. $S'$ ist nach dem Cauchyschen Integralsatz geschlossen. Die obigen Eckpunkte mögen unter (4) in die Punkte $z_1, z_2, z_3, z_4$ übergehen. Wir konnten uns eine der Konstanten $R_1$, $R$ vorgeben und die andere nach (20) berechnen. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir an, $R_1$ sei vorgegeben. Offenbar gilt $z_1=R_1$. Falls ein variabler Punkt $Q$ monoton den Abschnitt $\varrho_1\leqq\xi\leqq 1$ durchläuft, wandert der Bildpunkt $Q'$ von $z_1=R_1$ aus monoton entlang der $x$-Achse in negativer Richtung bis $z_2$; es gilt, da $\vartheta(\varrho, 0)=\frac{1}{2}\pi$

$$z_2 = \frac{c}{2\pi}\int\limits_1^{\varrho_1} e^{-\tau(\varrho,0)}\frac{d\varrho}{\varrho}. \tag{54}$$

Nunmehr durchlaufe $Q$ von $\zeta=\varrho_1$ den Kreisbogen $S_{\varrho_1}$ positiv bis $\zeta=i\,\varrho_1$, der Bildpunkt $Q'$ beschreibt dabei den Viertelbogen eines Kreises $K_R$ vom Radius $R$ im positiven Sinn, der die $x$-Achse senkrecht schneidet, und dessen Mittelpunkt $M$ folglich auf der $x$-Achse etwa im Punkte $x=m$ liegt. Dies folgt einmal aus $\vartheta(\varrho_1, 0)=\frac{1}{2}\pi$, aus (8), (10), (11) und (33'), wonach

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{c}{2\pi R}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\tau(\varrho_1,\sigma)}\,d\sigma = \frac{l(\frac{1}{2}\pi)}{R},$$

zutrifft, und der Differentialgleichung (8'). Die Integralkurven von (8') sind nämlich Kreise vom Radius $R$. Den monotonen Durchlaufsinn sichert (33'). Wandert $Q$ weiter von $\zeta=i\,\varrho_1$ längs der positiven imaginären Achse monoton bis $\zeta=+i$, dann durchläuft $Q'$ vom Endpunkt $z_3$ des Viertelkreises ein Geradenstück in Richtung der positiven $y$-Achse bis zum Punkt $z_4$:

$$z_4 = z_3 + i\,\frac{c}{2\pi}\int\limits_{\varrho_1}^{1} e^{-\tau(\varrho,\frac{1}{2}\pi)}\frac{d\varrho}{\varrho}$$

wegen $\vartheta(\varrho, \frac{1}{2}\pi)=\pi$. Es gilt daher

$$\mathrm{Re}(z_4) = \mathrm{Re}(z_3) = m. \tag{55}$$

Lassen wir $Q$ den Viertelbogen des Einheitskreises monoton von $\zeta=1$ bis $\zeta=i$ durchlaufen, so wandert $Q'$ von $z=R_1$ auf $\mathfrak{L}$ bis $z_4$. Daher hat man

$$\begin{aligned} z_4 &= R_1 + \frac{c}{2\pi i}\int\limits_1^{i} e^{i\omega(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= R_1 + \frac{c}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\tau(1,\sigma)}\cos\vartheta(1,\sigma)\,d\sigma + \frac{i\,c}{2\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\tau(1,\sigma)}\sin\vartheta(1,\sigma)\,d\sigma. \end{aligned}$$

Aus der Bedingung (20) erkennt man sogleich $R(z_4)=0$ und wegen (55) $m=0$. Der Mittelpunkt des Kreises $K_R$ liegt also im Nullpunkt. Es ist weiter $z_2=R<R_1$

erfüllt. Die Symmetriebedingungen (6) haben zur Folge, daß der Strömungsbereich spiegelsymmetrisch zur $x$- und $y$-Achse ist. $S_{\varrho_1}$ wird also durch (4) eineindeutig auf $S_R$ abgebildet. Die freie Linie $\mathfrak{L}$, längs welcher die Bernoullische Gleichung erfüllt wird, ist eine geschlossene spiegelbildlich zu den beiden Achsen gelegene Kurve.

Wir müssen uns noch vergewissern, daß $S_R$ in keinem Punkt von $\mathfrak{L}$ getroffen wird, und $\mathfrak{L}$ keine mehrfachen Punkte besitzt. Sei $P_1$: $\zeta_1 = \varrho_1 e^{i\nu}$ ein beliebiger Punkt auf $S_{\varrho_1}$. Die Abbildung der Strecke $\zeta = \varrho\, e^{i\nu}$, $\varrho_1 \leqq \varrho \leqq 1$ auf die Strömungsebene ist durch (56) gegeben

$$\begin{aligned} z(\zeta) &= z(\zeta_1) + \frac{c}{2\pi i} \int\limits_{\varrho_1}^{\varrho} e^{i\vartheta(\varrho,\nu) - \tau(\varrho,\nu)} \frac{d\varrho}{\varrho} \\ &= z(\zeta_1) + \frac{c}{2\pi} \int\limits_{\varrho_1}^{\varrho} e^{-\tau(\varrho,\nu)}\, e^{i(\vartheta(\varrho,\nu) - \frac{1}{2}\pi)} \frac{d\varrho}{\varrho}. \end{aligned} \tag{56}$$

Offenbar mündet der Weg $z(\zeta)$ im Punkt $z(\zeta_1)$ senkrecht in $S_R$ ein. Wenn die Ableitung $\frac{d\vartheta}{d\varrho}(\varrho, \sigma)$ im Kreisring $\mathfrak{K}$ etwa der Ungleichung

$$\left|\frac{d\vartheta}{d\varrho}\right| < \frac{\pi}{2(1-\varrho_1)} \tag{57}$$

genügt, zeigt (56), daß der Bildweg $z(\zeta)$ $S_R$ in keinem weiteren Punkt als $z = z(\zeta_1)$ treffen kann. Das gilt bei beliebiger Wahl von $P$ auf $S_{\varrho_1}$. $\mathfrak{L}$ trifft also $S_R$ nicht, wenn (57) oder auch (58) in $\mathfrak{K}$ zutrifft.

$$\left|\frac{d\tau}{d\sigma}\right| < \frac{\varrho_1 \pi}{2(1-\varrho_1)}. \tag{58}$$

Wegen (36) braucht man $L_2$ nur nach (59)

$$\frac{\pi^2 s\, \varrho_1}{4(1-\varrho_1)} \geqq L_2 \tag{59}$$

zu wählen, um (58) längs $S_1$ zu sichern. Nach den Sätzen von FATOU-PRIVALOW genügt $\tau(\varrho_1, \sigma)$ zunächst einer $H$-Bedingung nach jedem Exponenten $\lambda$, $0 < \lambda < 1$, mit einer $H$-Konstanten, die wegen (33) durch $L_2$ abgeschätzt wird. Hieraus folgt nach obigen Sätzen und (31), (36) weiter, daß auch $\frac{d\tau(\varrho_1, \sigma)}{d\sigma}$ längs $S_{\varrho_1}$ einer $H$-Bedingung genügt, und für hinreichend kleine Wahl von $L_2$ (58) längs $S_{\varrho_1}$ zutrifft. Wegen des Maximumprinzips wird dann (58) in $\mathfrak{K}$ erfüllt; die freie Linie trifft so $S_R$ in keinem Punkt.

Nun zur zweiten Frage der mehrfachen Punkte von $\mathfrak{L}$. Analog wie oben sehen wir, daß diese für hinreichend kleine Werte von $L_2$ nicht möglich sind. Nach den Sätzen von FATOU-PRIVALOW wird nämlich mit $L_2$ in (36) die Ableitung $\frac{d\vartheta_1(1,\sigma)}{d\sigma}$, $0 \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2}\pi$ dem Betrag nach klein, so daß $\vartheta_1(1, \sigma) + \sigma$ im Intervall

$$0 \leqq \vartheta_1(1,\sigma) + \sigma \leqq \tfrac{1}{2}\pi; \qquad 0 \leqq \sigma \leqq \tfrac{1}{2}\pi \tag{60}$$

verbleibt. Bei Gültigkeit von (60) wächst die $y$-Koordinate eines $\mathfrak{L}$ positiv durchlaufenden Punktes monoton, während die entsprechende $x$-Koordinate monoton von $R_1$ bis Null fällt. Wir gewinnen also das Resultat:

Unsere Strömungsaufgabe besitzt sicher eine dreiparametrische Lösungsschar. Dabei liegen die Parameter $\varrho_1$, $c$ und $H$ in den Bereichen (35) und (53). Die Maximalschwankung der Geschwindigkeit längs $S_R$ ist bei diesen Strömungen von vorgebbar kleinem Betrag.

Hieran schließen wir folgende Bemerkungen. Wie schon angedeutet, ist die Forderung $e \geqq c^2$ in (53) zur Sicherstellung von (51) also (36) keinesfalls notwendig. Solange für $c^2 > e$ noch

$$A\left(1 - \frac{e}{c^2}\right) < E \tag{61}$$

zutrifft, läßt sich (51) also (36) durch genügend kleine Wahl von $H$ befriedigen. Wir konstruieren in diesen Fällen die Lösung unserer Strömungsaufgabe wie früher. Wenn für eine bestimmte Wahl $L_2$ und $\varrho_1$ nach (35) $A < E$ erfüllt wäre, dann ließe sich (60) für alle $c \geqq e$ befriedigen. Es existieren also selbst bei beliebig großen Zirkulationen Lösungen unseres Strömungsproblems, obwohl wir die Zentrifugalkräfte in der beschriebenen Weise in Rechnung stellten. Andererseits folgte aus $A \geqq E$ für alle $L_2$ und $\varrho_1$, $L_1$ nach (35) bzw. (49) auf Grund von (53), daß wir nach unserer Abschätzungsmethode zumindest nur Lösungen konstruieren können, für die die Zirkulation oberhalb einer positiven Schranke bleibt.

Für hinreichend kleine $L_2$, $L_1$ wird in der Differentialrelation (18) der letzte Term auf der rechten Seite bestimmend, da $Z$ klein wird, und jener Term gegen den Ausdruck (21) strebt. In diesem Lösungsbereich mit kleinem $L_2$, $L_1$ ist daher $\frac{d\tau_1}{d\sigma}(1, \sigma)$ für $0 < \sigma < \frac{1}{2}\pi$ negativ; die Geschwindigkeit der Strömung erreicht in den Schnittpunkten von $\mathfrak{L}$ mit der $x$-Achse einen Maximalwert und einen Minimalwert in den Schnittpunkten mit der $y$-Achse.

## Literatur

[1] AIRY, G. B., Tides and Waves. Encycl. Metrop., Abschnitt VI (1845).
[2] LAMB, H., Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig: B. G. Teubner 1931.
[3] STOKER, J., Water Waves. New York: Interscience 1957.
[4] VILLAT, H., Sur la résolution de certaines équations intégrales et sur quelques problèmes qui s'y rattachent. Acta Math. **40**, 101—178 (1916).

Mathematisches Institut
Universität Leipzig

*(Eingegangen am 6. Oktober 1964)*