

Stabilität und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen beim Taylorproblem

W. VELTE

Vorgelegt von R. FINN

Im folgenden wird das erste Randwertproblem für die stationären Navier-Stokesschen Gleichungen betrachtet. Es wird gezeigt, daß Verzweigungen stationärer Lösungen auftreten können, so daß man im allgemeinen nicht mit Eindeutigkeit der Lösung rechnen kann.

Eine solche Verzweigung wird für den Fall der Taylorschen Versuchsanordnung (Strömung zwischen konzentrischen, rotierenden Zylindern) nachgewiesen. Und zwar findet eine Verzweigung bei demjenigen „kritischen“ Wert der Reynoldsschen Zahl statt, der sich in der Theorie kleiner Störungen als kleinster Eigenwert eines Eigenwertproblems ergibt. Im Experiment beobachtet man nach Überschreiten dieser kritischen Reynoldszahl an Stelle der Couetteströmung eine neue, stationäre Strömungsform, nämlich die bekannten torusförmigen Taylorwirbel.

Um eine Verzweigung stationärer Lösungen im Falle der Taylorschen Versuchsanordnung theoretisch nachzuweisen, wird wie schon in [8] als mathematisches Hilfsmittel die Theorie des topologischen Abbildungsgrades für vollstetige Operatoren in Banachräumen herangezogen. In [8] wurde zwar auch schon ein hydrodynamisches Problem betrachtet. Es handelte sich jedoch dort um die Strömung durch ein horizontales Rohr unter dem Einfluß eines vertikal gerichteten Temperaturgradienten. Für dieses Problem wurde die Temperaturgleichung zusammen mit den Navier-Stokesschen Gleichungen zugrundegelegt, in denen zusätzlich die Auftriebskräfte in der Näherung von BOUSSINESQ berücksichtigt wurden. Instabilität und Verzweigung der Grundströmung ergaben sich als Folge genügend großer Temperaturgradienten bzw. Auftriebskräfte.

Das im folgenden diskutierte Beispiel der Taylorschen Strömung zeigt, daß Verzweigungen nicht nur bei Problemen mit thermischen Auftriebskräften auftreten können, sondern auch bei stationären Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen. Die Untersuchung verläuft ganz analog zu der Behandlung des Strömungsproblems in [8], so daß der Kürze halber mehrfach auf [8] verwiesen werden kann.

1. Problemstellung

Es seien R_1 und R_2 die Radien der konzentrischen Zylinder ($R_1 < R_2$). Der äußere Zylinder sei fest, während der innere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_1 rotiert ($\omega_1 > 0$). Wie üblich sind ν und ρ kinematische Zähigkeit bzw. Dichte der inkompressiblen Flüssigkeit. Die Navier-Stokesschen Gleichungen werden in Zylinderkoordinaten zugrundegelegt, wobei p den Druck und u, v, w

die Komponenten der Geschwindigkeit in r, ψ, z -Richtung bezeichnen. Die Gleichungen seien bereits dimensionslos geschrieben mit Hilfe der Bezugsgrößen R_1 (Länge), $R_1 \omega_1$ (Geschwindigkeit), ω_1^{-1} (Zeit) und $\rho(R_1 \omega_1)^2$ (Druck). Beschränkt man sich auf stationäre Lösungen, die von der Winkelkoordinaten ψ unabhängig sind, dann haben die Navier-Stokesschen Gleichungen die Form

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u u_r + w u_z - \frac{1}{r} v^2 &= -p_r + \frac{1}{\text{Re}} \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right) \\ u v_r + w v_z + \frac{1}{r} u v &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\Delta v - \frac{v}{r^2} \right) \\ u w_r + w w_z &= -p_z + \frac{1}{\text{Re}} \Delta w \\ (ru)_r + r w_z &= 0 \end{aligned}$$

mit

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

und mit $\text{Re} = \omega_1 R_1^2 \nu^{-1}$ (Reynoldszahl). Das Gebiet G , das man zu betrachten hat, ist der unendliche Streifen

$$G: \quad r_1 < r < r_2, \quad -\infty < z < +\infty$$

mit $r_1 = R_1/R_1$ und $r_2 = R_2/R_1$. Die Randbedingungen lauten:

$$(1.1)' \quad \begin{aligned} u = w = 0, \quad v = 1 & \quad \text{für } r = r_1 \\ u = v = w = 0 & \quad \text{für } r = r_2. \end{aligned}$$

Eine spezielle Lösung des Randwertproblems (1.1), (1.1)', die für beliebige Reynoldszahlen Re existiert, ist die Couetteströmung:

$$(1.2) \quad u_0 \equiv 0, \quad w_0 \equiv 0, \quad v_0(r) = \frac{1}{r_2^2 - 1} \left(\frac{r_2^2}{r} - r \right), \quad p_0(r) = \int_{r_1}^r \frac{v_0^2}{r} dr + \text{const.}$$

Diese spezielle Lösung wird im folgenden auch als „Grundströmung“ bezeichnet.

Setzt man die Lösungen der Randwertaufgabe (1.1), (1.1)' in der Form

$$u_0 + u(r, z), \quad v_0 + v(r, z), \quad w_0 + w(r, z), \quad p_0 + p(r, z)$$

an, so ergeben sich für die hier eingeführten u, v, w, p die Gleichungen¹

$$(1.3) \quad \begin{aligned} u u_r + w u_z - \frac{1}{r} v^2 - \frac{2}{r} v v_0 &= -p_r + \frac{1}{\text{Re}} \left(\Delta u - \frac{u}{r^2} \right) \\ u v_r + w v_z + \frac{1}{r} u v + \frac{1}{r} (v_0 + r v_0') u &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\Delta v - \frac{v}{r^2} \right) \\ u w_r + w w_z &= -p_z + \frac{1}{\text{Re}} \Delta w \\ (ru)_r + r w_z &= 0. \end{aligned}$$

¹ v_0' steht für $dv_0(r)/dr$.

Führt man eine Stromfunktion $f(r, z)$ mit

$$(rf)_z = ru, \quad (rf)_r = -rw$$

ein, so ist zunächst die Gl. (1.3)₄ erfüllt. Ferner läßt sich in bekannter Weise der Druck p eliminieren, indem man (1.3)₁ nach z und (1.3)₃ nach r differenziert. Schreibt man zur Abkürzung

$$\mathcal{L} = \Delta - \frac{1}{r^2}$$

$$M(f, v) = -\frac{\partial}{\partial r}(f_z \mathcal{L}f) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}(rf)_r \mathcal{L}f\right) + \frac{1}{r^2}(v^2)_z$$

$$N(f, v) = -\frac{1}{r}(rv)_r f_z + \frac{1}{r}(rf)_r v_z$$

$$a(r) = \frac{2v_0}{r} = \frac{2}{r_2^2 - 1} \left(\frac{r_2^2}{r^2} - 1\right)$$

$$b = -\left(\frac{v_0}{r} + v'_0\right) = \frac{2}{r_2^2 - 1},$$

dann erhält man wegen

$$u_z - u_r = \mathcal{L}f \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial r}(\Delta w) = \mathcal{L}(w_r)$$

aus (1.3) schließlich die Gleichungen

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\text{Re}} \mathcal{L} \mathcal{L} f + a(r) v_z + M(f, v) &= 0 \\ \frac{1}{\text{Re}} \mathcal{L} v + b f_z + N(f, v) &= 0. \end{aligned}$$

Die Randbedingungen seien²

$$(1.4)' \quad f = \frac{\partial f}{\partial r} = v = 0 \quad \text{für} \quad r = r_1 \quad \text{und} \quad r = r_2.$$

2. Wahl des Funktionenraumes

Schreibt man die elliptische Randwertaufgabe (1.4), (1.4)' in der Form

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{L} \mathcal{L} f + \lambda(a v_z + M(f, v)) &= 0 \quad (\lambda \equiv \text{Re}) \\ \mathcal{L} v + \lambda(b f_z + N(f, v)) &= 0, \end{aligned}$$

$$(2.1)' \quad f = \frac{\partial f}{\partial r} = v = 0 \quad \text{für} \quad r = r_1, \quad r = r_2,$$

² Aus den Nullrandbedingungen für die Störungen

$$u = v = w = 0 \quad \text{für} \quad r = r_1, \quad r = r_2$$

folgt an sich nur $f + r f_r = 0$ und $f_z = 0$, d.h. $f = \text{const}$. Fordert man zusätzlich $\text{const} = 0$, so folgt (1.4)'.

so entsteht nach Streichung der nichtlinearen Terme $M(f, v)$, $N(f, v)$ das lineare Eigenwertproblem

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{L} \mathcal{L} f + \lambda a v_z &= 0 \\ \mathcal{L} v + \lambda b f_z &= 0, \end{aligned}$$

$$(2.2)' \quad f = \frac{\partial f}{\partial r} = v = 0 \quad \text{für } r = r_1, r = r_2$$

mit dem Eigenwertparameter λ . Wir interessieren uns speziell für Lösungen der beiden Randwertprobleme, die in der Variablen z periodisch sind:

$$f(r, z) = f(r, z + nL), \quad v(r, z) = v(r, z + nL) \quad \text{für } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Über die Periodenlänge L wird später noch in ganz bestimmter Weise verfügt werden. Als Periodengebiet kann dann etwa das Rechteck

$$G_L: r_1 < r < r_2, \quad 0 < z < L$$

gewählt werden.

Es werde nun mit $C^k(G, L)$ die Klasse der Funktionen bezeichnet, die im ganzen unendlichen Gebietsstreifen G als stetige Funktionen definiert sind, die bezüglich z periodisch mit der Periode L sind, und die ferner in G stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung k besitzen. Mit $C^k(\bar{G}, L)$ wird dann die Klasse derjenigen Funktionen bezeichnet, die sogar in einem breiteren Gebietsstreifen G_1 mit $\bar{G} \subset G_1$ zur Klasse $C^k(G_1, L)$ gehören.

Definiert man in $C^k(\bar{G}, L)$ die Norm $\|u\|_k$ durch

$$\|u\|_k = \|u\|_0 + \sum \|D^1 u\|_0 + \dots + \sum \|D^k u\|_0$$

mit

$$\|u\|_0 = \left(\int_{G_L} u^2 dr dz \right)^{\frac{1}{2}},$$

dann entsteht durch Abschließen von $C^k(\bar{G}, L)$ bezüglich dieser Norm der vollständige Raum $H_k(G, L)$. Seine Elemente sind in bezug auf das Periodengebiet G_L quadratintegrierbare Funktionen, wobei wegen der Periodizität der Funktionen aus $C^k(\bar{G}, L)$ das Periodengebiet eine beliebige Lage im Streifen G haben kann, etwa

$$r_1 < r < r_2, \quad z_0 < z < z_0 + L.$$

Ferner besitzen die Elemente von $H_k(G, L)$ verallgemeinerte Ableitungen bis zur Ordnung k , wobei diese verallgemeinerten Ableitungen ebenfalls in jedem Periodengebiet quadratintegrierbare Funktionen sind.

Die „Testfunktionen“ φ sind jetzt wie folgt zu definieren: Sie sind die Funktionen aus $C^\infty(G, L)$, die in einem Randstreifen von G identisch null sind. Der Raum dieser Testfunktionen wird mit $\dot{H}(G, L)$ bezeichnet. Durch Abschließung bezüglich der Norm $\|\varphi\|_k$ entsteht der Raum $\dot{H}_k(G, L)$.

In Abschnitt 4 wird näher begründet, daß für die Dirichletsche Randwertaufgabe im unendlichen Gebietsstreifen G mit dem Periodenrechteck G_L folgende Aussagen wörtlich wie im Falle endlicher Gebiete gelten:

Es sei g eine in G definierte, in der Variablen z periodische Funktion mit der Periode L , die über G_L quadratintegrierbar ist. Dann besitzen die beiden

Gleichungen

$$-\mathcal{L}u = g \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\mathcal{L}u = g$$

genau eine schwache Lösung im Funktionenraum $\dot{H}_1(G, L)$ bzw. $\dot{H}_2(G, L)$. Diese Lösung liegt sogar im Funktionenraum $H_{2m}(G, L)$, wenn $2m$ die gerade Ordnung des elliptischen Differentialoperators \mathcal{L} bzw. $\mathcal{L}\mathcal{L}$ ist. Ferner gilt mit einer nur vom Operator \mathcal{L} bzw. $\mathcal{L}\mathcal{L}$ und dem Periodengebiet G_L abhängigen Konstanten c die a priori Abschätzung

$$(2.3) \quad \|u\|_{2m} \leq c \|g\|_0.$$

Wenn die Voraussetzung $g \in H_s(G, L)$ erfüllt ist, dann folgt sogar $u \in H_{2m+s}(G, L)$. Insbesondere folgt für Funktionen $u \in H_{2m+2}(G, L)$, daß sie in G stetig sind, stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung $2m$ besitzen, die Dirichletschen Nullrandwerte annehmen und somit periodische Lösungen der Dirichletschen Randwertaufgabe im klassischen Sinne sind. Aus der a priori Abschätzung (2.3) und dem Relichschen Auswahlssatz folgt dann wie üblich, daß die Abbildung $g \rightarrow u$, die durch die Randwertaufgabe $-\mathcal{L}u = g$ bzw. $\mathcal{L}\mathcal{L}u = g$ vermittelt wird, eine *vollstetige* Abbildung von $H_0(G, L)$ in $H_{2m-1}(G, L)$ definiert.

In Analogie zu den Gln. (6.1) und (6.2) in [8] werden auch hier zunächst die Dirichletschen Randwertaufgaben

$$(2.4) \quad \mathcal{L}\mathcal{L}f' = -\lambda(av_z + M(f, v)),$$

$$(2.5) \quad \mathcal{L}v' = -\lambda(bf_z + N(f, v))$$

betrachtet. Für Funktionen $f \in H_3(G, L)$ und $v \in H_1(G, L)$ ergeben sich rechte Seiten, die Funktionen aus $H_0(G, L)$ sind. Die in $\dot{H}_2(G, L)$ bzw. in $\dot{H}_1(G, L)$ eindeutig existierenden Lösungen f' und v' liegen dann ebenfalls in $H_3(G, L)$ bzw. in $H_1(G, L)$. Betrachtet man nun die Funktionenpaare (f, v) als Elemente eines Banachraumes B mit der Norm

$$\|f, v\|_B = \|f\|_3 + \|v\|_1,$$

so wird durch (2.4), (2.5) eine vollstetige Abbildung

$$T: (f, v) \rightarrow (f', v')$$

von B in sich definiert. Für Fixpunkte $(f, v) = (f', v')$ ergibt sich genau wie in [8], daß $f \in H_{4+s}(G, L)$ und $v \in H_{2+s}(G, L)$ ist für beliebiges $s = 1, 2, 3, \dots$. Daher ist f, v eine klassische Lösung von (2.1), (2.1)', die sogar unendlich oft differenzierbar in \bar{G} ist.

Ganz analog wird durch die Dirichletschen Randwertaufgaben

$$(2.6) \quad \mathcal{L}\mathcal{L}f'' = -\lambda av_z,$$

$$(2.7) \quad \mathcal{L}v'' = -\lambda bf_z$$

eine vollstetige *lineare* Abbildung

$$A: (f, v) \rightarrow (f'', v'')$$

von B in sich definiert, deren Fixpunkte $(f, v) = (f'', v'')$ klassische, in \bar{G} unendlich oft differenzierbare Eigenlösungen von (2.2), (2.2)' zum Eigenwert λ sind.

Genau wie in [8] zeigt man dann, daß der lineare Operator A das Fréchet'sche Differential des nichtlinearen Operators T an der Stelle des Nullelementes $(f, v) = (0, 0)$ ist. Damit sind wieder alle Voraussetzungen für die Anwendung der Leray-Schauderschen Theorie gegeben: Ist λ_1 Eigenwert ungerader Vielfachheit, so wechselt der Index der Lösung $u=0$ von $u-\lambda T u=0$ das Vorzeichen bei $\lambda=\lambda_1$. Das reicht aus um zu zeigen (s. [4]), daß λ_1 Verzweigungspunkt von Lösungen der nichtlinearen Operatorgleichung bzw. von (2.1), (2.1)' ist.

3. Existenz eines positiven Eigenwertes und Berechnung seiner Vielfachheit

Falls Eigenfunktionen f, v von (2.2), (2.2)' existieren, sind sie nach obigem sogar unendlich oft differenzierbar und können daher als Fourierreihen

$$(3.1) \quad \begin{aligned} f(r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \sin n \sigma z + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_n(r) \cos n \sigma z \quad (\sigma = 2\pi/L) \\ v(r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}_n(r) \sin n \sigma z + \sum_{n=0}^{\infty} v_n(r) \cos n \sigma z \end{aligned}$$

angesetzt werden. Ferner darf nach Einsetzen der Reihen in (2.2) der Differentialoperator $\mathcal{L}\mathcal{L}$ bzw. \mathcal{L} mit der Summation vertauscht werden. Man erhält dann für $f_n(r)$ und $v_n(r)$ das unendliche System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(3.2) \quad \begin{aligned} (\mathcal{M} - (n\sigma)^2) f_n(r) &= \lambda a n \sigma v_n(r) \\ -(\mathcal{M} - (n\sigma)^2) v_n(r) &= \lambda b n \sigma f_n(r) \end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{M} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}$$

und mit den Randbedingungen

$$(3.2)' \quad f_n(r) = \frac{df_n(r)}{dr} = v_n(r) = 0 \quad \text{für } r=r_1, r=r_2.$$

(Analoge Gleichungen gelten für $\bar{f}_n(r)$ und $\bar{v}_n(r)$.)

Wenn nun umgekehrt zwei Funktionen $f_n(r), v_n(r)$ gegeben sind, die Eigenlösungen der entsprechenden Gln. (3.2), (3.2)' sind, so hat man zwei linear unabhängige Eigenlösungen der Gln. (2.2), (2.2)' gefunden, nämlich

$$(3.1)_1 \quad f_n(r) \sin n \sigma z, \quad v_n(r) \cos n \sigma z$$

und

$$(3.3)_2 \quad f_n(r) \cos n \sigma z, \quad -v_n(r) \sin n \sigma z.$$

Solche Eigenlösungen treten also in gerader Anzahl auf. Die Methode des Abbildungsgrades liefert aber im allgemeinen nur dann ein hinreichendes Kriterium für das Vorliegen einer Verzweigung stationärer Lösungen, wenn die Vielfachheit des betrachteten Eigenwertes ungerade ausfällt. Man wird daher den Funktionenraum B so einschränken, daß von den beiden Eigenlösungen (3.1)₁ und (3.1)₂, die physikalisch völlig äquivalent sind, nur noch *eine* im eingeschränkten Funktionenraum liegt.

Dieser eingeschränkte Funktionenraum wird wie folgt konstruiert: Man betrachtet zunächst den linearen Teilraum derjenigen Funktionen aus $C^k(\bar{G}, L)$, die in z unsymmetrisch sind, d.h.

$$f(r, -z) = -f(r, z).$$

Abschließung dieses linearen Raumes bezüglich der Norm $\|f\|_k$ führt zu einem Banachraum $U_k(G, L) \subset H_k(G, L)$, dessen Elemente bezüglich z unsymmetrische Funktionen sind. Betrachtet man entsprechend den linearen Teilraum derjenigen Funktionen aus $C^k(\bar{G}, L)$, die in z symmetrisch sind,

$$v(r, -z) = v(r, z),$$

so erhält man durch Abschließung dieses linearen Raumes bezüglich der Norm $\|v\|_k$ einen Banachraum $S_k(G, L) \subset H_k(G, L)$, dessen Elemente bezüglich z symmetrische Funktionen sind.

Der endgültige Funktionenraum B^* , in dem eine Verzweigung stationärer Lösungen nachgewiesen werden soll, wird nun wie folgt definiert:

Definition. Der Teilraum B^* von B ist die Gesamtheit der Funktionenpaare (f, v) mit $f \in U_3(G, L)$ und mit $v \in S_1(G, L)$. Die Norm in B^* ist dieselbe wie in B :

$$\|f, v\|_{B^*} = \|f\|_3 + \|v\|_1.$$

Grundlegend für das weitere ist nun die Bemerkung, daß für beliebiges $(f, v) \in B^*$ folgendes gilt: Es ist $M(f, v) + v_z \in U_0(G, L)$, und es ist $N(f, v) + f_z \in S_0(G, L)$. Die Abbildungen T und A , die durch (2.4), (2.5) bzw. (2.6), (2.7) definiert sind, bilden daher den Teilraum B^* in sich ab. In diesem Teilraum liegt aber nur noch eine der beiden Eigenlösungen, nämlich $(3.3)_1$.

Der allgemeine Ansatz für eine *klassische* Lösung lautet daher bei Beschränkung auf den Teilraum B^* anstelle von (3.1) jetzt:

$$(3.1)^* \quad \begin{aligned} f(r, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \sin n \sigma z \\ v(r, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_n(r) \cos n \sigma z. \end{aligned}$$

Im Falle des Eigenwertproblems (2.2), (2.2)' wird man dann wieder auf das unendliche System (3.2), (3.2)' geführt, dem die $f_n(r)$, $v_n(r)$ genügen müssen. Diese Gleichungen lassen sich gemeinsam diskutieren, indem man $k = \sigma n$ setzt und den Index n bei den Funktionen fortläßt:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} (\mathcal{M} - k^2)^2 f(r) &= \lambda a k v(r) \\ -(\mathcal{M} - k^2) v(r) &= \lambda b k f(r), \end{aligned}$$

$$(3.4)' \quad f(r) = \frac{df(r)}{dr} = v(r) = 0 \quad \text{für } r=r_1 \quad \text{und } r=r_2.$$

Dies ist genau dasjenige Eigenwertproblem, das im Rahmen der linearen Theorie kleiner Störungen unter anderen von WITTING [9] und von KIRCHGÄSSNER [3] betrachtet worden ist. Nach WITTING [9] läßt sich das Eigenwertproblem (3.4),

(3.4)' auch als System von Integralgleichungen

$$(3.5) \quad \begin{aligned} f(r) &= \lambda \int_{r_1}^{r_2} G(k; r, s) a(s) k v(s) ds \\ v(r) &= \lambda \int_{r_1}^{r_2} H(k; r, s) b k f(s) ds \end{aligned}$$

schreiben bzw. nach Elimination von v auch in der Form

$$(3.6) \quad f(r) = \mu \int_{r_1}^{r_2} K(k; r, s) f(s) ds \quad (\mu = \lambda^2).$$

Nach WITTING ist der Kern $K(k; r, s)$ eine in $r_1 \leq r \leq r_2, r_1 \leq s \leq r_2$ stetige Funktion mit $K(k; r, s) > 0$ für innere Punkte des Quadrates. Aus dieser Eigenschaft folgt die schon bei WITTING [9] benutzte Aussage (Satz von JENTZSCH, s. etwa [7]):

Lemma 1. Die Gl. (3.6) besitzt für festes k in der Klasse $C^0[r_1, r_2]$ eine positive Eigenfunktion $f_1(r)$, d. h. mit $f_1(r) > 0$ für $r_1 < r < r_2$. Der zugehörige Eigenwert μ_1 ist reell und positiv. Jede andere eventuell vorhandene Eigenfunktion $f^*(r)$ gehört zu einem Eigenwert μ^* mit $|\mu^*| > \mu_1$.

Setzt man

$$\lambda_1 = +\sqrt{\mu_1} \quad \text{und} \quad v_1(r) = \lambda_1 \int_{r_1}^{r_2} K(k; r, s) f_1(s) ds,$$

so ist $f_1(r), v_1(r)$ zunächst Eigenlösung von (3.5) zum positiven Eigenwert λ_1 , und dann auch Eigenlösung von (3.2), (3.2)'.

Damit ist zunächst nur gezeigt, daß für $k = \sigma$ die Eigenwertgleichungen (3.2), (3.2)' mit $n=1$ einen kleinsten positiven Eigenwert λ_1 besitzen, zu dem es (bis auf Normierung) genau eine Eigenlösung gibt. Es könnte aber sein, daß eine der übrigen Gleichungen mit $k = n\sigma, n=2, 3, \dots$ ebenfalls λ_1 als Eigenwert besitzt. Es läßt sich aber folgendes zeigen:

Lemma 2. Man kann stets $\sigma = 2\pi/L$ so wählen, daß der kleinste positive Eigenwert λ_1 von (3.2), (3.2)' nur Eigenwert der Gleichungen mit $k = \sigma, n=1$ ist, dagegen kein Eigenwert der Gleichungen mit $k = n\sigma, n=2, 3, \dots$.

Beweis. Multipliziert man in (3.4) mit $r f(r)$ bzw. mit $r v(r)$ und integriert über das Intervall $[r_1, r_2]$, so entsteht nach Addition der Gleichungen³

$$(3.7) \quad \int f(\mathcal{M} - k^2)^2 f r dr - \int v(\mathcal{M} - k^2) v r dr = \lambda k \int (a+b) f v r dr.$$

Auf der linken Seite stehen positiv definite Ausdrücke, die durch partielle Integration unter Benutzung von (3.4)' so umgeformt werden können:

$$J_1[f] = \int f(\mathcal{M} - k^2)^2 f r dr = \int \left\{ (\mathcal{M} f)^2 + 2k^2 \left(f'^2 + \frac{1}{r^2} f^2 \right) + k^4 f^2 \right\} r dr,$$

$$J_2[v] = - \int v(\mathcal{M} - k^2) v r dr = \int \left\{ \left(v'^2 + \frac{1}{r^2} v^2 \right) + k^2 v^2 \right\} r dr.$$

³ Im folgenden steht \int für das bestimmte Integral $\int_{r_1}^{r_2}$.

(Hierin steht f' und v' für df/dr bzw. dv/dr .) Mit einer beliebigen positiven Konstanten α gilt dann

$$\int (a+b) f v r dr \leq \max \frac{|a+b|}{2} \cdot \int 2 |f v| r dr \leq \max \frac{|a+b|}{2} \left\{ \alpha \int f^2 r dr + \frac{1}{\alpha} \int v^2 r dr \right\}.$$

(Maximum im Intervall $r_1 \leq r \leq r_2$.) Aus (3.7) folgt daher für den positiven Eigenwert λ_1 die Abschätzung

$$(3.8) \quad \lambda_1 \geq \frac{2}{\max |a+b|} \frac{1}{k} \frac{J_1[f] + J_2[v]}{\alpha \int f^2 r dr + \frac{1}{\alpha} \int v^2 r dr}.$$

Setzt man speziell $\alpha = k$, so erhält man die untere Schranke

$$(3.8)^* \quad \lambda_1 \geq \frac{2}{\max |a+b|} \cdot k^2.$$

Es sei nun $\sigma^* > 0$ willkürlich gewählt, und es sei λ_1 der zu $k = \sigma^*$ gehörige kleinste positive Eigenwert von (3.4), (3.4)'. Betrachtet man nun die Folge $k = n \sigma^*$, $n = 2, 3, \dots$, so folgt aus (3.8), daß λ_1 höchstens für diejenigen $k = n \sigma^*$ ebenfalls Eigenwert sein kann, die der Ungleichung

$$(n \sigma^*)^2 \leq \max \frac{|a+b|}{2} \cdot \lambda_1$$

genügen. Bezeichnet man nun mit $m \sigma^*$ die größte der Zahlen $n \sigma^*$, die der Ungleichung genügen und für die außerdem λ_1 ein Eigenwert von (3.4), (3.4)' ist, so besitzt $\sigma = m \sigma^*$ die gewünschte Eigenschaft.

Für den so konstruierten Wert $\sigma = 2\pi/L$ besitzt dann zunächst das unendliche System (3.2), (3.2)' bis auf Normierung genau eine Eigenlösung zum kleinsten positiven Eigenwert λ_1 , woraus dann auch weiter folgt, daß die Gleichung $(I - \lambda A) u = 0$ in B^* bis auf Normierung genau eine Eigenlösung zum Eigenwert λ_1 besitzt.

Lemma 3. *Es sei $\sigma = 2\pi/L$ gemäß Lemma 2 so gewählt, daß es zum kleinsten positiven Eigenwert λ_1 von $(I - \lambda A) u = 0$ bis auf Normierung in B^* genau eine Eigenlösung gibt. Dann ist jede Lösung von $(I - \lambda_1 A)^k u = 0$ (k positiv ganze Zahl) bereits eine Lösung von $(I - \lambda_1 A) u = 0$, d.h. die Vielfachheit von λ_1 im Raum B^* ist gleich 1.*

Beweis. Für $k=1$ ist die Aussage trivial. Es werde nun angenommen, die Behauptung sei für $k=1, 2, \dots, n$ bewiesen. Dann soll durch vollständige Induktion gezeigt werden, daß sie auch für $n+1$ richtig ist. Es bezeichne $u^0 \in B^*$ irgend eine nichttriviale Lösung von $(I - \lambda_1 A)^{n+1} u = 0$. Man setze dann

$$(3.9) \quad u_1 = (I - \lambda_1 A) u^0.$$

Falls u_1 das Nullelement ist, so ist man fertig. Im anderen Fall ist u_1 nichttriviale Lösung von

$$(I - \lambda_1 A)^n u = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist dann u_1 bereits Lösung von $(I - \lambda_1 A)u = 0$, d.h. u_1 ist bis auf Normierung das eindeutig bestimmte Eigenelement zum kleinsten positiven Eigenwert λ_1 . Schreibt man

$$u^0 = (f^0, v^0), \quad u_1 = (f_1, v_1),$$

so ist zunächst f_1, v_1 eine klassische Eigenlösung von (2.2), (2.2)', von der man überdies weiß, daß $f_1(r)$ in $r_1 < r < r_2$ keinen Vorzeichenwechsel aufweist. Schreibt man nun (3.9) in der Form

$$u^0 = \lambda_1 A(u^0 + u_1),$$

so folgt genau wie früher, daß f^0, v^0 klassische, sogar unendlich oft differenzierbare Lösung von

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}f^0 &= \lambda_1 a(v^0 + v_1)_z \\ \mathcal{L}v^0 &= \lambda_1 b(f^0 + f_1)_z, \end{aligned}$$

ist, die man daher in folgender Form ansetzen darf:

$$f^0(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^0(r) \sin n \sigma z, \quad v^0(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^0(r) \cos n \sigma z,$$

während für die Eigenlösung $u_1 = (f_1, v_1)$ einfach

$$f_1(r, z) = f_1(r) \sin \sigma z, \quad v_1(r, z) = v_1(r) \cos \sigma z$$

ist. Setzt man dies in (3.10) ein, so ergibt sich für die Funktionen $f_1^0(r), v_1^0(r)$

$$(3.11) \quad \begin{aligned} (\mathcal{M} - \sigma^2)^2 f_1^0(r) &= \lambda_1 a \sigma (v_1^0 + v_1) \\ -(\mathcal{M} - \sigma^2) v_1^0(r) &= \lambda_1 b \sigma (f_1^0 + f_1). \end{aligned}$$

Die übrigen Funktionen $f_n^0(r), v_n^0(r), n=2, 3, \dots$ müssen identisch null sein, da sie Lösungen der Gln. (3.2) sein müssen, aber λ_1 für $n=2, 3, \dots$ kein Eigenwert dieser Gleichungen ist. Geht man zu Integralgleichungen über und benutzt dabei (3.5), so erhält man aus (3.11) das System

$$\begin{aligned} f_1^0(r) &= \lambda_1 \int G(r, s) a(s) \sigma v_1^0(s) ds + f_1(r) \\ v_1^0(r) &= \lambda_1 \int H(r, s) b \sigma f_1^0(s) ds + v_1(r) \end{aligned}$$

bzw. nach Elimination von $v_1^0(r)$ die inhomogene Integralgleichung

$$(3.12) \quad f_1^0(r) - \lambda_1^2 \int K(r, s) f_1^0(s) ds = 2f_1(r).$$

Nach Lemma 1 weist die Funktion $f_1(r)$ in $r_1 < r < r_2$ keinen Vorzeichenwechsel auf. Das gleiche gilt für die Eigenfunktion $g_1(r)$ der adjungierten Integralgleichung

$$g(r) - \lambda_1^2 \int K^*(r, s) g(s) ds = 0$$

mit $K^*(r, s) = K(s, r)$. Folglich ist $\int f_1(s) g_1(s) ds \neq 0$. Andererseits ist nach der Fredholmschen Theorie die inhomogene Gl. (3.12) nur dann lösbar, wenn die rechte Seite von (3.12) zu $g_1(r)$ orthogonal ist, d.h. wenn $\int f_1(s) g_1(s) ds = 0$ gilt.

Es muß daher $f_1(r) \equiv 0$ sein bzw. u_1 notwendig das Nullelement, so daß aus (3.9) in jedem Fall $(I - \lambda_1 A) u = 0$ folgt.

Führt man noch den Produktraum $B^* \times A$ ein mit $A: -\infty < \lambda < +\infty$ und mit der Norm $\|u\|_{B^*} + |\lambda|$, so ergibt sich aus Lemma 1 bis 3 nach [5], [4] das

Theorem. *Man kann unendlich viele Periodenlängen L bzw. Wellenzahlen $\sigma = 2\pi/L$ so wählen, daß der zugehörige kleinste Eigenwert λ_1 von $(I - \lambda A) u = 0$ in B^* die Vielfachheit eins besitzt, so daß bei $\text{Re} = \lambda_1$ eine Verzweigung stationärer Lösungen von (2.1), (2.1)' vorliegt.*

Genauer gilt folgendes: Im Produktraum $B^* \times A$ existiert in einer gewissen Umgebung des Punktes $(0, \lambda_1)$ ein Kontinuum $(u(\lambda), \lambda)$ von Lösungen der Operatorgleichung $u - \lambda T u = 0$, das mit dem Lösungskontinuum $u = 0, \lambda \in A$ nur den Punkt $(0, \lambda_1)$ gemeinsam hat. Es gibt daher auch ein Kontinuum von Lösungen der nichtlinearen Gln. (2.1), (2.1)', das bei der Reynoldszahl $\text{Re} = \lambda_1$ von der Grundströmung abzweigt. (Ob der Zweig zu Werten $\lambda > \lambda_1$ oder $\lambda < \lambda_1$ gehört, bleibt offen.) Da nur Lösungen $u \in B^*$ betrachtet wurden, haben die Lösungen von (2.1), (2.1)' die Form $f_0 + f(r, z), v_0 + v(r, z)$ mit

$$f_0 = 0 \quad \text{und} \quad f(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \sin n \sigma z.$$

Daher ist der Rand des Periodenrechtecks $r_1 < r < r_2, 0 < z < L$ eine Stromlinie, auf der $f_0 + f(r, z) = 0$ ist, was man im Experiment für $\lambda > \lambda_1$ beobachtet.

Numerisches Beispiel. Für das spezielle Radienverhältnis $R_2/R_1 = 2$ liegen einerseits Experimente von DONELLY [2] vor, während andererseits der kleinste positive Eigenwert λ_1 in Abhängigkeit von k von KIRCHGÄSSNER [3] numerisch

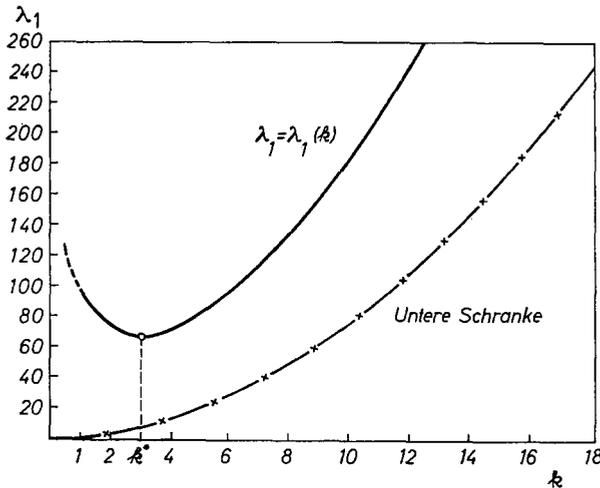


Abb. 1. Eigenwertkurve $\lambda_1 = \lambda_1(k)$ und untere Schranke $\frac{2}{\max |a+b|} \cdot k^2$ für das Radienverhältnis $R_2/R_1 = 2,0$

berechnet wurde. (In [3] ist die Reynoldszahl mit einer anderen charakteristischen Länge gebildet. Außerdem ist in [3] λ_1^2 als Funktion von k aufgetragen, und zwar für $1 \leq k \leq 5$.) In Abb. 1 ist die Eigenwertkurve $\lambda_1 = \lambda_1(k)$ dargestellt, die für $5 \leq k \leq 12,5$ neu berechnet wurde.

Außerdem ist die untere Schranke (3.8) für diesen Fall mit eingezeichnet. Aus Abb. 1 geht hervor, daß man in Lemma 2 z. B. $\sigma = k^*$ wählen darf, wobei $k^* \approx 3,0$ die Stelle ist, an der die Kurve ein Minimum besitzt. Man hat also bereits für $\lambda_1^* = \lambda_1(k^*)$ eine Verzweigung stationärer Lösungen. Dem entspricht, daß man im Experiment die stationären Taylorwirbel beobachtet, sobald die Reynoldszahl den Wert λ_1^* überschreitet.

Die Frage, ob die Eigenwertkurve $\lambda_1 = \lambda_1(k)$ im ganzen Verlauf und für alle Radienverhältnisse R_2/R_1 konkav ist und ein absolutes Minimum aufweist, bleibt hier unbeantwortet. Immerhin kann man *im allgemeinen Fall* so viel aussagen:

Aus (3.8) folgt, indem man nicht $\alpha = k$ sondern $\alpha = 1$ setzt, die von (3.8)* verschiedene untere Schranke

$$(3.13) \quad \lambda_1 \geq c \frac{1}{k},$$

worin c eine positive Konstante ist, die kleiner als das Infimum der beiden positiv definiten Variationsausdrücke

$$J_3[f] = \frac{\int (\mathcal{M}f)^2 r dr}{\int f^2 r dr}, \quad J_4[v] = \frac{\int \left(v'^2 + \frac{1}{r^2} v^2 \right) r dr}{\int v^2 r dr}$$

(Randbedingungen $f = df/dr = v = 0$) ist. (Das Infimum hängt natürlich vom Radienverhältnis R_2/R_1 ab.) Die kleinsten positiven Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_1(k)$ besitzen wegen (3.8)* und (3.13) eine positive untere Grenze

$$\lambda_0 = \inf_{0 \leq k < \infty} \lambda_1(k).$$

Man kann daher zu beliebig kleinem, positivem ε stets einen Wert k finden, so daß

$$\lambda_0 \leq \lambda_1(k) < \lambda_0 + \varepsilon$$

ist. Mit diesem k bzw. λ_1 läßt sich dann die Konstruktion von Lemma 2 ausführen, d. h. es gibt verzweigte Lösungen zu Reynoldszahlen Re mit

$$\lambda_0 \leq Re < \lambda_0 + \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ beliebig klein}).$$

4. Zur Existenz, Eindeutigkeit und Regularität

Im folgenden wird auseinandergesetzt, daß sich die in Abschnitt 2 benötigten Sätze, die für elliptische Randwertprobleme mit Dirichletschen Randwerten in *endlichen* Gebieten wohlbekannt sind, auch für periodische Lösungen im unendlichen Gebietsstreifen G gültig bleiben.

Existenz und Eindeutigkeit für (schwache) Lösungen der Dirichletschen Randwertaufgaben $-r \mathcal{L}u = g$ bzw. $r \mathcal{L}^2 u = g$ in den Räumen $\dot{H}_1(G, L)$ bzw. $\dot{H}_2(G, L)$ ergibt sich wie üblich aus dem

Darstellungstheorem (LAX und MILGRAM [6]): Es sei H ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt (u, v) und mit der Norm $\|u\| = (u, u)^{1/2}$. Es sei ferner $B[u, v]$

eine in H definierte Bilinearform mit

$$(4.1) \quad |B[u, v]| \leq c_1 \|u\| \|v\|,$$

$$(4.2) \quad |B[u, u]| \geq c_2 \|u\|^2, \quad c_2 > 0.$$

Dann kann jedes in H definierte, beschränkte lineare Funktional $F(u)$ in der Form $F(u) = B[u, w]$ dargestellt werden mit eindeutig bestimmtem w aus H .

Die Anwendung auf die betrachteten Randwertprobleme ergibt sich unmittelbar, wenn man in $\dot{H}_m(G, L)$ anstelle der Norm $\|u\|_m$ die äquivalente Norm

$$\|u\|_m^* = (\|u\|_0^2 + \sum \|D^1 u\|_0^2 + \dots + \sum \|D^m u\|_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

bzw. das Skalarprodukt

$$(u, v)_m = (u, v)_0 + \sum (D^1 u, D^1 v)_0 + \dots + \sum (D^m u, D^m v)_0 \quad \text{mit} \quad (u, v)_0 = \int_{G_L} u v r \, dr \, dz$$

einführt.

Im Falle der Randwertaufgabe $-\mathcal{L}u = g$ mit $m=1$, $g \in H_0(G, L)$, $u \in \dot{H}_1(G, L)$ bestätigt man für die Bilinearform

$$B[u, v] = \int_{G_L} \left(u_r v_r + u_z v_z + \frac{1}{r^2} u v \right) r \, dr \, dz$$

sofort die Ungleichungen (4.1), (4.2) mit geeigneten positiven Konstanten c_1, c_2 . Das beschränkte lineare Funktional $F(u) = \int u g \, dr \, dz$ gestattet dann die Darstellung $B[u, w] = F(u)$ bzw. für den Sonderfall, daß u eine Testfunktion φ ist, nach partieller Integration

$$-\int_{G_L} w \mathcal{L}\varphi r \, dr \, dz = \int_{G_L} g \varphi r \, dr \, dz,$$

d.h. w ist eindeutig bestimmte schwache Lösung des Dirichletschen Randwertproblems. Ganz analog verläuft die Betrachtung bei $\mathcal{L}^2 u = g$.

Die Frage nach Regularitätseigenschaften einer schwachen Lösung und die Gültigkeit der in Abschnitt 2 formulierten a priori Abschätzung wird in der Theorie elliptischer Randwertprobleme in endlichen Gebieten zunächst lokal untersucht: Man beweist die gewünschten Eigenschaften einerseits in (endlichen) Teilgebieten G_i mit $\bar{G}_i \subset G$ und andererseits für „patches“ A_i am Rande. (Im Falle eines zweidimensionalen Gebietes kann für die A_i der Durchschnitt von \bar{G} mit offenen Kreisscheibchen genommen werden, deren Mittelpunkt auf dem Rand von G liegt.) Sodann wird benutzt, daß sich \bar{G} durch endlich viele der G_i bzw. A_i überdecken läßt. Das liefert die Regularitätseigenschaften für ganz \bar{G} und die a priori Abschätzung mit einer nur von G abhängigen Konstanten. Im Falle einer periodischen Lösung im unendlichen Streifen hat man die *lokalen* Aussagen genau wie im Falle endlicher Gebiete zur Verfügung. Da man nun ein Periodenrechteck durch endlich viele G_i bzw. A_i überdecken kann, übertragen sich die in [I] bzw. [6] angegebenen Sätze über Regularitätseigenschaften sowie die a priori Abschätzung unmittelbar auf den Fall periodischer Lösungen.

Literatur

- [1] BROWDER, F., On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **9**, 351—361 (1956).
- [2] DONELLY, R. J., Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders. *Proc. Roy. Soc. [A]* **246**, 312 (1958).
- [3] KIRCHGÄSSNER, K., Die Instabilität der Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern gegenüber Taylor-Wirbeln für beliebige Spaltbreiten. *ZAMP* **12**, 14—30 (1961).
- [4] KRASNOSEL'SKIĬ, M. A., *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*. New York: Pergamon Press 1964.
- [5] LERAY, J., & J. SCHAUDER, Topologie et équations fonctionnelles. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 3 Ser. **51**, 45—78 (1934).
- [6] NIRENBERG, L., Remarks on strongly elliptic partial differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.* **8**, 648—674 (1955).
- [7] SCHMEIDLER, W., *Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik*, Bd. I. Berlin 1950.
- [8] VELTE, W., Stabilitätsverhalten und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokes-schen Gleichungen. *Arch. Rational Mech. Anal.* **16**, 97—125 (1964).
- [9] WITTING, H., Über den Einfluß der Stromlinienkrümmung auf die Stabilität laminarer Strömungen. *Arch. Rational Mech. Anal.* **2**, 243—283 (1958).

Institut für Angewandte Mathematik
Universität Freiburg i. Br.

(Eingegangen am 17. Januar 1966)