Die Spanne von Gebieten bei quasikonformen Abbildungen

REINER KÜHNAU

Vorgelegt von M. M. SCHIFFER

1. Einleitung und Ergebnisse

In der z-Ebene sei ein endlich vielfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$ mit dem Rand $\mathfrak{L}$ und dem inneren Punkt $z=\infty$ gegeben. In $\mathfrak{G}$ sei weiter eine reelle Funktion $v(z)$ mit $0 \leqq v(z) \leqq v_0 < 1$ definiert, für die in einer Umgebung von $z=\infty$ gelte $v(z) \equiv 0$. Dabei sei der Einfachheit halber $v(z)$ stückweise stetig und glatt, $\mathfrak{L}$ stückweise analytisch, alle unten vorkommenden Abbildungen stetig und mit Einschluß des Randes stückweise glatt (z.B. im in [15] präzisierten Sinne), so daß ohne weiteres der GAUSSsche Integralsatz anwendbar ist. Es wird zugelassen, daß überhaupt kein Rand $\mathfrak{L}$ auftritt, $\mathfrak{G}$ also die Vollebene ist, in welchem Falle jedoch $v \not\equiv 0$ sei.

Es sei $g_\Theta(z)$ diejenige schlichte Abbildung von $\mathfrak{G}$, bei der die Randkomponenten (sofern vorhanden) von $\mathfrak{G}$ in Strecken der Neigung Θ zur positiv reellen Achse übergehen, und für die $e^{-i\Theta} g_\Theta(z)$ die Differentialgleichung

$$f_{\bar{z}} = v\,\overline{f_z} \tag{1}$$

erfüllt, wobei in Umgebung von $z=\infty$ (wo also die Abbildung konform ist) hydrodynamische Normierung

$$g_\Theta(z) = z + a_{1,\Theta}\, z^{-1} + \cdots$$

vorliegt. Nach [12] gilt mit einem komplexen m und $r>0$

$$a_{1,\Theta} = m + r\, e^{2i\Theta}.$$

Die Größe $2r$ könnte man als „quasikonforme Spanne" von $\mathfrak{G}$ bezeichnen im Anschluß an die im konformen Falle (entsprechend $v \equiv 0$) übliche Terminologie.

Wir bilden weiter

$$M(z) = \tfrac{1}{2}\,[g_0(z) - g_{\pi/2}(z)], \qquad N(z) = \tfrac{1}{2}\,[g_0(z) + g_{\pi/2}(z)]. \tag{2}$$

Jeder in $\mathfrak{G}$ stetigen stückweise glatten (nicht notwendig schlichten) Abbildung bzw. Funktion $w(z)$, die in einer gewissen (von $w(z)$ abhängigen) Umgebung von $z=\infty$ konform und durch $w(z) = z + a_1 z^{-1} + \cdots$ hydrodynamisch normiert ist,

$w_{\bar z}=0$ bei $\nu=0$ erfüllt, wobei $|w_{\bar z}|^2/\nu$ stetig bleibt, wenn man dieses dort $=0$ definiert (*Abbildungsklasse* $\mathfrak{A}$), ordnen wir die Größen

$$(3)\qquad I_w=-\frac{1}{2i}\int_{\mathfrak{L}}\bar w\,dw,\qquad I_w^*=I_w+\iint_{\mathfrak{G}}[\nu|w_z|^2-\nu^{-1}|w_{\bar z}|^2]\,dx\,dy\quad(z=x+iy)$$

zu. Die Orientierung der Kurven erfolgt stets so, daß $\mathfrak{G}$ zur Linken liegt. I_w stellt einen vorzeichenbehafteten Flächeninhalt dar, im Falle schlichter Abbildungen einfach den Flächeninhalt des Komplementes des Bildgebietes.

Unten beweisen wir dann den folgenden

Satz 1. (a) *Wenn für $w(z)\in\mathfrak{A}$ gilt $|a_1-m|\geqq tr\,(t\geqq 0)$, dann folgt*

$$(4)\qquad I_w^*\leqq\pi r(1-t^2),$$

wobei das Gleichheitszeichen genau für $w\equiv N+\lambda M$ mit $|\lambda|=t$ steht. (b) *Umgekehrt folgt aus $I_w^*\geqq\pi r(1-t^2)$ mit $t\geqq 0$ die scharfe Ungleichung*

$$(5)\qquad |a_1-m|\leqq t\,r$$

mit gleichen Extremalfunktionen.

Genauer bedeutet dies im Falle (b), daß durch (5) der genaue Wertebereich der Koeffizienten a_1 als abgeschlossene Kreisscheibe charakterisiert wird, wobei jeder Randpunkt von genau einer Abbildung, nämlich von der Form $N+\lambda M$, angenommen wird.

Im Sonderfalle $\nu\equiv 0$ findet sich Satz 1 in [5], [6], [18] (Aufgabe 4 auf Seite 367).

Nach Satz 1 (a) gilt (mit $t=0$) sicher stets (ohne Einschränkung bezüglich a_1) $I_w^*\leqq\pi r$, mit Gleichheit genau für $w\equiv N$. Das wurde im Wesentlichen schon in [15] bewiesen; zum klassischen Sonderfalle $\nu\equiv 0$ vgl. man [9], [20], [21], [22] sowie [6], [1], [18] (Seite 361 ff.), [2] (Seite 181 ff.), [17] (Seite 172 ff.). Nach Satz 1 (b) gilt sicher $|a_1-m|\leqq r$, falls $w(z)$ schlicht und gemäß

$$(6)\qquad |w_{\bar z}|\leqq\nu|w_z|$$

quasikonform ist. Das wurde schon in [12], [15] hergeleitet; zum Sonderfalle $\nu\equiv 0$ vgl. man [7], [19].

Der Beweis von Satz 1 und des folgenden Satz 2 ergibt sich wie in [15] durch eine Ausgestaltung der Methode der GRUNSKYschen Randintegration, wobei wieder wesentliches Hilfsmittel der GAUSSsche Integralsatz ist.

In Ergänzung von Satz 1 sei noch bemerkt, daß $N+\lambda M$ für $|\lambda|\leqq 1$ schlicht ist und (6) erfüllt (wobei für $|\lambda|<1$ im Innern von $\mathfrak{G}$ niemals das Gleichheitszeichen stehen kann in dieser Ungleichung). Also liefert Satz 1 dann auch die scharfen Abschätzungen der betreffenden Größen, falls $0\leqq t\leqq 1$ ist und die Teilklasse derjenigen Abbildungen von $\mathfrak{A}$ betrachtet wird, die zusätzlich schlicht und gemäß (6) quasikonform sind.

Im Zusammenhang mit Satz 1 ergibt sich noch der

Satz 2. *Für $w(z)\in\mathfrak{A}$ gilt*

$$(7)\qquad I_w^*\leqq\pi r-\pi r^{-1}|m|^2+2\pi\,\mathfrak{Re}\,(\bar m\,a_1/r),$$

speziell für $w(z)\equiv z$ *auch*

$$I_z+\iint_{\mathfrak{G}} v\,dx\,dy \leqq \pi r-\pi r^{-1}|m|^2, \tag{8}$$

insbesondere

$$I_z+\iint_{\mathfrak{G}} v\,dx\,dy \leqq \pi r. \tag{9}$$

In (7) entsteht Gleichheit genau für $w\equiv N-r^{-1}\,m M$, in (8) genau dann, wenn $\mathfrak{G}$ und die Funktion $v(z)$ so beschaffen sind, daß $N-r^{-1}\,m M\equiv z$, in (9) genau dann, wenn $N\equiv z$ ist.

Für $v\equiv 0$ führt (9) auf eine Ungleichung in [20], (8) auf eine Ungleichung in [5], wenn man die für alle Θ gültige Identität

$$\pi r-\pi r^{-1}|m|^2=2\pi\,\Re\mathrm{e}\,(a_\Theta\, e^{-2i\Theta})-\pi r^{-1}|a_\Theta|^2$$

beachtet. Im Sonderfalle, $\mathfrak{G}$ besitzt keine Randkomponenten und es ist $v(z)\equiv 0$ in einem Gebiet $\mathfrak{G}_1$, welches die allgemeinen Eigenschaften besitzt, wie oben bei den Gebieten $\mathfrak{G}$ formuliert, und $v(z)\equiv q$ $(=\text{const})$ im Komplement mit dem Inhalt I, folgt aus (9)

$$q\,I\leqq \pi r \quad \bigl(r=r(q)\bigr). \tag{10}$$

Aus (10) entsteht für $q\to 1$ wieder die genannte Ungleichung in [20]. Es sei noch bemerkt, daß nach [16] gilt

$$\lim_{q\to 0} r(q)/q=I/\pi.$$

Die Überlegungen, die zu Satz 1 und 2 führen, lassen sich analog auf weitere im konformen Falle in der Literatur betrachtete Situationen übertragen. Es sei hierzu nur verwiesen auf die schon in [6] im Zusammenhang mit Flächeninhalten in logarithmischer Metrik betrachteten Spiralschlitzabbildungen, ferner auf die Abbildungen in [11], sowie die nichtschlichten konformen Parallelschlitzabbildungen in [3], [4] (hier ergeben sich Extremaleigenschaften der in [14] betrachteten nichtschlichten quasikonformen Parallelschlitzabbildungen), schließlich auf die in [8] im Mittelpunkt stehenden Abbildungen. Auch liefert die Methode der zweiblättrigen Überlagerung z.B. aus obigen Sätzen 1 und 2 sofort neue Sätze, die Satz 6 in [13] im konformen Falle entsprechen.

2. Beweise

Es sei $\mathfrak{G}_R$ das Teilstück von $\mathfrak{G}$ innerhalb $|z|<R$. Mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen wir den Kreis $|z|=R$, der so orientiert werde, daß $\mathfrak{G}_R$ zur Linken liegt. Dann folgt mit beliebigem komplexen λ

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathfrak{G}_R}\left[|(N+\lambda M-w)_z|^2-|(N+\lambda M-w)_{\bar z}|^2\right]dx\,dy\\ &\qquad=\frac{1}{2i}\int_{\mathfrak{K}}\overline{(N+\lambda M-w)}\,d(N+\lambda M-w)-\Re\mathrm{e}\left\{\frac{1}{i}\int_{\mathfrak{L}}(N+\lambda M-w)\,d(M+\bar\lambda N)\right\}\\ &\qquad\quad+I_{N+\lambda M}-I_w\end{aligned}$$

bei Zuhilfenahme von $dN = \overline{dM}$ längs $\mathfrak{L}$. Hierbei ist weiter bei Benutzung von $M_{\bar z} = v\overline{N_z}$, $N_{\bar z} = v\overline{M_z}$

$$\begin{aligned}
&\Re\mathrm{e}\left\{\frac{1}{i}\int_{\mathfrak{L}+\mathfrak{R}} (N+\lambda M - w)\, d(M+\bar\lambda N)\right\} \\
&\quad = 2\,\Re\mathrm{e} \iint_{\mathfrak{G}_R} \{[(N+\lambda M-w)(M_z+\bar\lambda N_z)]_{\bar z} - [(N+\lambda M-w)(M_{\bar z}+\bar\lambda N_{\bar z})]_z\}\, dx\, dy \\
&\quad = -\iint_{\mathfrak{G}_R} [v|N_z+\lambda M_z|^2 - v^{-1}|N_{\bar z}+\lambda M_{\bar z}|^2]\, dx\, dy + \iint_{\mathfrak{G}_R} [v|w_z|^2 - v^{-1}|w_{\bar z}|^2]\, dx\, dy \\
&\qquad - \iint_{\mathfrak{G}_R} [v|N_z+\lambda M_z - w_z|^2 - v^{-1}|N_{\bar z}+\lambda M_{\bar z} - w_{\bar z}|^2]\, dx\, dy.
\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen fließt

$$\begin{aligned}
I^*_{N+\lambda M} - I^*_w &= \iint_{\mathfrak{G}_R} [(1-v)|N_z+\lambda M_z - w_z|^2 + (v^{-1}-1)|N_{\bar z}+\lambda M_{\bar z} - w_{\bar z}|^2]\, dx\, dy \\
&\quad - \frac{1}{2i}\int_{\mathfrak{R}} \overline{(N+\lambda M - w)}\, d(N+\lambda M - w) - \Re\mathrm{e}\left\{\frac{1}{i}\int_{\mathfrak{R}} (N+\lambda M-w)\, d(M+\bar\lambda N)\right\},
\end{aligned} \tag{11}$$

wenn R hinreichend groß ist. Hier strebt rechts das erste Kurvenintegral für $R \to \infty$ nach 0, das zweite nach

$$-2\pi\,\Re\mathrm{e}\,[\bar\lambda(m-a_1)] - 2\pi|\lambda|^2 r.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
I^*_{N+\lambda M} &= I_{N+\lambda M} + \iint_{\mathfrak{G}_R} [(N_z+\lambda M_z)(M_{\bar z}+\bar\lambda N_{\bar z}) - (N_{\bar z}+\lambda M_{\bar z})(M_z+\bar\lambda N_z)]\, dx\, dy \\
&= I_{N+\lambda M} + \frac{1}{2i}\int_{\mathfrak{L}} (M+\bar\lambda N)\, d(N+\lambda M) + \frac{1}{2i}\int_{\mathfrak{R}} (M+\bar\lambda N)\, d(N+\lambda M) \\
&= I_{N+\lambda M} - \frac{1}{2i}\int_{\mathfrak{L}} (N+\lambda M)\, \overline{d(N+\lambda M)} + \frac{1}{2i}\int_{\mathfrak{R}} (M+\bar\lambda N)\, d(N+\lambda M) \\
&= \frac{1}{2i}\int_{\mathfrak{R}} (M+\bar\lambda N)\, d(N+\lambda M) = \pi(r - |\lambda|^2 r)
\end{aligned}$$

folgt dann leicht Satz 1 aus der entstehenden Ungleichung

$$\begin{aligned}
I^*_w &\leqq \pi r + \pi r|\lambda|^2 + 2\pi\,\Re\mathrm{e}\,[\bar\lambda(m-a_1)] \\
&= \pi r - \pi|m|^2/r - 2\pi\,\Re\mathrm{e}(\bar\lambda a_1) + \pi r|\lambda + r^{-1} m|^2
\end{aligned} \tag{12}$$

für $\lambda = -(m-a_1)/r$. Für $\lambda = -m/r$ entsteht hieraus sofort weiter Satz 2.

Die schließlich noch bemerkte Tatsache, daß $N+\lambda M$ für $|\lambda| \leqq 1$ schlicht ist und (6) erfüllt, ergibt sich ähnlich wie in [15] (dort der Fall $\lambda = 0$). Wir können dabei $|\lambda| < 1$ annehmen, da für $|\lambda| = 1$ die Tatsache bekannt ist [12]. Es ist für $|\lambda| < 1$ nach [15] mit $\sigma = g_{0z}/g_{\pi/2\,z}$ für $z \in \mathfrak{G}$ sicher $\Re\mathrm{e}\,\sigma > 0$, also

$$\left|\sigma - \overline{\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)}\right| \Big/ \left|\sigma + \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)\right| < 1,$$

da dann $\Re\mathrm{e}\,[(1-\lambda)/(1+\lambda)] > 0$ ist. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
|N_{\bar z} + \lambda M_{\bar z}| &= \tfrac{1}{2} v |g_{0z}(1+\bar\lambda) - g_{\pi/2\,z}(1-\bar\lambda)| \\
&< \tfrac{1}{2} v |g_{0z}(1+\lambda) + g_{\pi/2\,z}(1-\lambda)| = v|N_z + \lambda M_z|,
\end{aligned}$$

woraus wie in [15] die Behauptung folgt.

Literatur

1. AHLFORS, L. V., & A. BEURLING, Conformal invariants and function-theoretic null-sets. *Acta Math.* **83**, 101–129 (1950).
2. AHLFORS, L. V., & L. SARIO, *Riemann surfaces.* Princeton 1960.
3. ALENICYN, JU. E., a) Einige Extremaleigenschaften von Funktionen, die in mehrfach zusammenhängenden Gebieten mehrblättrig sind. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **146**, 267–269 (1962) (Engl. Übersetzung: *Soviet Math. Doklady* **3** (1962), 1263–1266 (1963)); b) Konforme Abbildungen eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes auf mehrblättrige kanonische Flächenstücke. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **150**, 711–714 (1963) (Engl. Übersetzung: *Soviet Math. Doklady* **4**, 717–719 (1963)); c) Konforme Abbildungen mehrfach zusammenhängender Gebiete auf mehrblättrige kanonische Flächenstücke. *Izvestija Akad. Nauk SSSR*, Ser. mat. **28**, 607–644 (1964).
4. ALENICYN, JU. E., a) Konforme Abbildungen eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes auf mehrblättrige Flächenstücke mit geradlinigen Schlitzen. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **160**, 13–14 (1965) (Engl. Übersetzung: *Soviet Math. Doklady* **6**, 6–8 (1965)); b) Konforme Abbildungen eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes auf mehrblättrige Flächenstücke mit geradlinigen Schlitzen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR*, Ser. mat. **29**, 887–902 (1965).
5. EPSTEIN, B., Some inequalities relating to conformal mapping upon canonical slit-domains. *Bull. Amer. Math. Soc.* **53**, 813–819 (1947).
6. GARABEDIAN, P. R., & M. SCHIFFER, Identities in the theory of conformal mapping. *Trans. Amer. Math. Soc.* **65**, 187–238 (1949).
7. GRÖTZSCH, H., Über das Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter Bereiche. *Berichte d. Math.-phys. Kl. d. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig* **84**, 15–36 (1932).
8. GRÖTZSCH, H., Die Werte des Doppelverhältnisses bei schlichter konformer Abbildung. *Sitzungsberichte d. Preuß. Akad. d. Wiss. Berlin, phys.-math. Kl.* 501–515 (1933).
9. GRUNSKY, H., Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche. *Schr. Math. Seminars u. Inst. f. angew. Math. Univ. Berlin* **1**, 93–140 (1932).
10. GRUNSKY, H., Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Funktionen. *Math. Z.* **45**, 29–61 (1939).
11. JENKINS, J. A., On some span theorems. *Illinois J. Math.* **7**, 104–117 (1963).
12. KÜHNAU, R., Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung. *Math. Nachr.* **40**, 1–11 (1969).
13. KÜHNAU, R., Einige elementare Bemerkungen zur Theorie der konformen und quasikonformen Abbildungen. *Math. Nachr.* **45**, 307–316 (1970).
14. KÜHNAU, R., Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom GRUNSKYschen Typ für quasikonforme Abbildungen. *Math. Nachr.* **48**, 77–105 (1971).
15. KÜHNAU, R., Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen. *Ann. Polon. Math.* **31**, 269–289 (1975/76).
16. KÜHNAU, R., Eine Integralgleichung in der Theorie der quasikonformen Abbildungen. *Math. Nachr.* **76**, 139-152 (1977).
17. MESCHKOWSKI, H., *Hilbertsche Räume mit Kernfunktion.* Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1962.
18. NEHARI, Z., *Conformal mapping.* New York-Toronto-London 1952.
19. POSSEL, R. DE, Sur quelques propriétés de la représentation conforme des domaines multiplement connexes, en relation avec le théorème des fentes parallèles. *Math. Ann.* **107**, 496–504 (1933).
20. SCHIFFER, M., The span of multiply connected domains. *Duke Math. J.* **10**, 209–216 (1943).
21. SCHIFFER, M., An application of orthonormal functions in the theory of conformal mapping. *Amer. J. Math.* **70**, 147–156 (1948).
22. SCHIFFER, M., Some recent developments in the theory of conformal mapping. Appendix zum Buch von R. COURANT, *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces.* New York-London, 1950.

Sektion Mathematik der
Martin-Luther-Universität
Halle-Wittenberg,
DDR 40 Halle an der Saale

(Eingegangen am 17. Dezember 1976)