Über ein Eigenwertproblem linearer Differentialoperatoren mit zwei Parametern

FRITZ HILLER und ADAM SCHMIDT

Vorgelegt von H. BECKERT

Wir betrachten das Eigenwertproblem[1]

$$(1)\qquad \begin{aligned} L_0[y] + \lambda L_1[y] + \varepsilon L_2[y] + \varepsilon \lambda L_3[y] &= 0 \\ U_\mu[y] &= 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

mit den Differentialoperatoren n-ter, bzw. höchstens n-ter Ordnung

$$L_i[y] \equiv \sum_{k=1}^{n} l_{ik}(x)\, y^{(k)}(x), \qquad l_{0n}(x) \neq 0$$

und den Randbedingungen

$$U_\mu[y] \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \{a_{\mu\nu}\, y^{(\nu-1)}(\alpha) + b_{\mu\nu}\, y^{(\nu-1)}(\beta)\} \qquad (\mu = 1, \ldots, n).$$

Die $l_{ik}(x)$ sind reelle oder komplexwertige Funktionen der reellen Veränderlichen x und im Intervall $\langle\alpha, \beta\rangle$ stetig. Über die $l_{0k}(x)$ und $l_{1k}(x)$ setzen wir noch voraus, daß sie k-mal stetig differenzierbar sind[2]. Die $a_{\mu\nu}$, $b_{\mu\nu}$ sind konstant, $\operatorname{rang}(a_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}) = n$.

Für $\varepsilon = 0$, im ungestörten Fall, möge das Problem (1) einen einfachen Eigenwert λ_0 haben, wobei ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\lambda_0 = 0$ angenommen werden darf.

Es hat dann nicht nur das ungestörte Problem

$$(2)\qquad L_0[y] = 0, \qquad U_\mu[y] = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

eine bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte Lösung, $y_0(x)$, sondern es hat auch das zu (2) adjungierte Randwertproblem eine ebenfalls eindeutig bestimmte nicht triviale Lösung, $v_0(x)$ [3]. Es wird nun noch vorausgesetzt

$$(3)\qquad \int_\alpha^\beta L_1[y_0(x)]\, v_0(x)\, dx = 1,$$

was stets erreicht werden kann, wenn nur das Integral (3) nicht verschwindet.

[1] Die vorliegende Note ist aus der Bearbeitung eines Abschnittes der Dissertation des erstgenannten Verfassers entstanden.

[2] Es wird nur benötigt, daß $l_{0k}(x) + \lambda_0 l_{1k}(x)$ k-fach stetig differenzierbar ist, wobei λ_0 der im folgenden benützte Eigenwert ist. Wie der zweite Verfasser jedoch in einer weiteren Note zeigen wird, kann man mit stetigen l_{0k}, l_{1k} auskommen, wenn man den zu (2) adjungierten Operator in geeigneter Weise abweichend von der klassischen Vorschrift bildet.

[3] Vgl. z.B. KAMKE *l.c.* S. 187 (s. Literaturverzeichnis).

Es soll im folgenden gezeigt werden, daß der Ansatz der „Störungsrechnung"

$$(4)\qquad \begin{aligned} \lambda(\varepsilon) &= \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \cdots \\ y(x;\varepsilon) &= y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots \end{aligned}$$

zu zwei konvergenten Reihen führt, die einen einfachen Eigenwert des Problems (1) und die dazu gehörige Eigenfunktion darstellen. $y(x;\varepsilon)$ ist dabei bis auf einen Faktor $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \varepsilon^\nu$ eindeutig bestimmt.

Die Störungsrechnung und ihre Anwendung auf lineare Operatoren in Hilbertschen Räumen oder speziell auf lineare Differentialoperatoren wurde schon unter den verschiedensten Aspekten untersucht. Sieht man von der formalen Störungsrechnung[4] ab, bei der die Existenz von konvergenten Reihen (4) vorausgesetzt wird, so wurde anscheinend bisher nur der Fall behandelt, wo das ungestörte Problem selbstadjungiert ist oder es sich um Probleme vom Typ

$$L[y;\varepsilon] = \lambda y, \qquad U_\mu[y] = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

handelt[5].

Auf Voraussetzungen dieser Art konnten wir verzichten. Daß wir für unsere Untersuchungen lediglich im Grunde elementare Ergebnisse aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen heranziehen, darf vielleicht auch als Vorzug gegenüber anderen denkbaren nicht so direkten Lösungsmöglichkeiten angesehen werden.

Zu dem Problem (2) existiert nach ELLIOTT[6] eine „allgemeinste" Greensche Funktion $\Gamma(x,\xi)$, die das halbhomogene Randwertproblem

$$L_0[y] = f(x), \qquad U_\mu[y] = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

in der Form

$$(5)\qquad y(x) = \int_\alpha^\beta \Gamma(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi + \gamma\, y_0(x)$$

löst, sofern eine solche Lösung überhaupt existiert, wofür

$$(6)\qquad \int_\alpha^\beta v_0(\xi)\, f(\xi)\, d\xi = 0$$

notwendig und hinreichend ist. Die Konstante γ in (5) bleibt unbestimmt.

Unter der Annahme, daß eine Lösung (4) existiert, erhält man durch Einsetzen in (1) und Koeffizientenvergleich

$$(7)\qquad \begin{aligned} L_0[y_\nu] &= -\left\{\sum_{p=1}^{\nu} \lambda_p L_1[y_{\nu-p}] + L_2[y_{\nu-1}] + \sum_{p=1}^{\nu-1} \lambda_p L_3[y_{\nu-1-p}]\right\} \\ U_\mu[y_\nu] &= 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

y_ν erfüllt also für $\nu = 0$ das Randwertproblem (2), für $\nu > 0$ ein halbhomogenes Randwertproblem.

Das Kriterium (6) ergibt zusammen mit (3)

$$(8)\qquad \lambda_\nu = -\int_\alpha^\beta \left\{\sum_{p=1}^{\nu-1} \lambda_p L_1[y_{\nu-p}] + L_2[y_{\nu-1}] + \sum_{p=1}^{\nu-1} \lambda_p L_3[y_{\nu-1-p}]\right\}_x v_0(x)\, dx.$$

[4] Vgl. COLLATZ *l.c.*

[5] Vgl. RELLICH, SCHÄFKE, SCHRÖDER *l.c.*

[6] *l.c.* S. 243, vgl. auch KAMKE, *l.c.* S. 192. $\Gamma(x,\xi)$ ist nicht eindeutig bestimmt.

Mit Hilfe von (5) erhält man

$$
(9)\qquad \begin{aligned} y_\nu(x) = -\int_\alpha^\beta \Gamma(x,\xi)\Big\{\sum_{p=1}^{\nu} \lambda_p L_1[y_{\nu-p}(\xi)] + L_2[y_{\nu-1}(\xi)] + \\ + \sum_{p=1}^{\nu-1} \lambda_p L_3[y_{\nu-1-p}(\xi)]\Big\}\, d\xi + \gamma_\nu y_0(x). \end{aligned}
$$

Es bedarf nun einer besonderen Untersuchung, inwieweit die λ_ν, $y_\nu(x)$ hierdurch rekursiv bestimmt sind, da die Konstanten γ_ν und auch noch $\Gamma(x,\xi)$ auf mehrfache Weise gewählt werden können.

Einleitend bemerken wir, daß eine Lösung (4) im wesentlichen unverändert bleibt, wenn man y mit einem Faktor ε^p multipliziert oder einen solchen Faktor fortläßt. Wir dürfen daher $y_0(x) \not\equiv 0$ annehmen, so daß dann $y_0(x)$ die bis auf einen Faktor eindeutig bestimmte nichttriviale Lösung von (2) ist.

Wir nehmen jetzt an, es gäbe zwei Lösungen

$$
\lambda(\varepsilon) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \varepsilon^\nu, \quad y(x;\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu y_\nu(x) \quad \text{und} \quad \bar\lambda(\varepsilon) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar\lambda_\nu \varepsilon^\nu, \quad \bar y(x;\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu \bar y_\nu(x)
$$

mit $y_0(x) \not\equiv 0$ und $\bar y_0(x) \not\equiv 0$. Es ist dann

$$
\bar y_0(x) = c_0\, y_0(x), \qquad c_0 \neq 0.
$$

Durch vollständige Induktion soll gezeigt werden

$$
(10)\qquad \bar\lambda_\nu = \lambda_\nu, \quad \bar y_\nu(x) = \sum_{\varrho=0}^{\nu} c_\varrho\, y_{\nu-\varrho}(x) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).
$$

Ist diese Behauptung bis zu $\nu - 1$ bewiesen, so folgt

$$
\begin{aligned}
L_0[\bar y_\nu] &= -\Big\{\sum_{p=1}^{\nu} \bar\lambda_p L_1[\bar y_{\nu-p}] + L_2[\bar y_{\nu-1}] + \sum_{p=1}^{\nu-1} \bar\lambda_p L_3[\bar y_{\nu-1-p}]\Big\} \\
&= -\Big\{\sum_{p=1}^{\nu} \bar\lambda_p \sum_{\varrho=0}^{\nu-p} c_\varrho L_1[y_{\nu-p-\varrho}] + \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} c_\varrho L_2[y_{\nu-1-\varrho}] + \sum_{p=1}^{\nu-1} \bar\lambda_p \sum_{\varrho=0}^{\nu-1-p} c_\varrho L_3[y_{\nu-1-p-\varrho}]\Big\} \\
&= -c_0\Big\{\sum_{p=1}^{\nu} \bar\lambda_p L_1[y_{\nu-p}] + L_2[y_{\nu-1}] + \sum_{p=1}^{\nu-1} \bar\lambda_p L_3[y_{\nu-1-p}]\Big\} - \\
&\quad - \sum_{\varrho=1}^{\nu-1} c_\varrho \Big\{\sum_{p=1}^{\nu-\varrho} \lambda_p L_1[y_{\nu-p-\varrho}] + L_2[y_{\nu-1-\varrho}] + \sum_{p=1}^{\nu-1-\varrho} \lambda_p L_3[y_{\nu-1-p-\varrho}]\Big\}.
\end{aligned}
$$

Die geschweiften Klammern der letzten Summe sind gleich $-L_0[y_{\nu-\varrho}]$. Also gilt

$$
L_0\Big[\bar y_\nu - \sum_{\varrho=1}^{\nu-1} c_\varrho y_{\nu-\varrho}\Big] = -c_0\Big\{\sum_{p=1}^{\nu} \bar\lambda_p L_1[y_{\nu-p}] + L_2[y_{\nu-1}] + \sum_{p=1}^{\nu-1} \lambda_p L_3[y_{\nu-1-p}]\Big\}.
$$

Da nun auch

$$
U_\mu\Big[\bar y_\nu - \sum_{\varrho=1}^{\nu-1} c_\varrho y_{\nu-\varrho}\Big] = 0 \qquad (\mu = 1, \ldots, n)
$$

gilt, so kann das Kriterium (6) auf das nach den beiden letzten Gleichungen durch $\left(\bar y_\nu - \sum_{\varrho=1}^{\nu-1} c_\varrho y_{\nu-\varrho}\right)$ erfüllte Randwertproblem angewendet werden. Wegen $\bar\lambda_p = \lambda_p$ für $p = 1, \ldots, \nu - 1$ ergibt (6) aber $\bar\lambda_\nu = \lambda_\nu$. Das halbhomogene Randwertproblem (7) wird also außer durch y_ν auch durch $\frac{1}{c_0}\left(\bar{y}_\nu - \sum_{\varrho=1}^{\nu-1} c_\varrho y_{\nu-\varrho}\right)$ gelöst. Daher ist

$$\bar{y}_\nu - \sum_{\varrho=1}^{\nu-1} c_\varrho\, y_{\nu-\varrho} = c_0\, y_\nu + c_\nu\, y_0$$

mit einer gewissen Konstanten c_ν.

Aus (10) folgt außer $\bar{\lambda} = \lambda$ für festes x mit $y(x;\varepsilon) \neq 0$

$$\bar{y}(x;\varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, \varepsilon^\nu \sum_{\nu=0}^{\infty} y_\nu(x)\, \varepsilon^\nu, \tag{11}$$

wobei $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu\, \varepsilon^\nu$ für die ε konvergiert, für welche die Reihen für $\bar{y}$ und y konvergent sind. Da bei festem ε $y(x;\varepsilon)$ als Funktion von x nirgends identisch verschwindet, gilt (11) für alle x aus $\langle\alpha, \beta\rangle$.

Die Formeln (8) und (9) können zur rekursiven Berechnung der λ_ν und y_ν dienen, auch, wenn die Existenz einer Lösung (4) nicht vorausgesetzt wird. Wir denken uns diese Rechnung ausgeführt, wobei für alle $y_\nu(x)$ stets dieselbe allgemeinste Greensche Funktion $\Gamma(x, \xi)$ verwendet werde, und alle $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ Null gesetzt werden. $y_0(x) \not\equiv 0$ sei als Lösung von (2) gegeben.

Es soll nun gezeigt werden, daß man auf diesem Wege zu konvergenten Reihen (4) gelangt, die eine Lösung des Problems (1) darstellen.

Die Ableitungen

$$\frac{\partial^k\, \Gamma(x, \xi)}{\partial x^k}$$

sind stetig[7] im Rechteck $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$ für $k < n-1$ und in den Dreiecken $\alpha \leqq x \leqq \xi \leqq \beta$, $\alpha \leqq \xi \leqq x \leqq \beta$ auch noch für $k = n-1$. Neben (5) gilt also

$$y^{(k)}(x) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial^k\, \Gamma(x, \xi)}{\partial x^k} f(\xi)\, d\xi + \gamma\, y_0^{(k)}(x) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Mit Hilfe der Differentialgleichung $L_0[y] = f(x)$ kann $y^{(n)}(x)$ linear durch $f(x), y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ mit von $f(x)$ unabhängigen Koeffizienten ausgedrückt werden. Das ermöglicht, Abschätzungen für $|f(x)|$ auf $|y|, |y'|, \ldots, |y^{(n-1)}|$ und sogar auf $|y^{(n)}|$ zu übertragen.

Aus (8) erhält man ohne weiteres mit von ν unabhängigen Konstanten A, B, C

$$|\lambda_\nu| \leqq A \sum_{p=1}^{\nu-1} |\lambda_p| \operatorname*{Max}_{k,x} |y_{\nu-p}^{(k)}(x)| + B \operatorname*{Max}_{k,x} |y_{\nu-1}^{(k)}(x)| + C \sum_{p=1}^{\nu-1} |\lambda_p| \operatorname*{Max}_{k,x} |y_{\nu-1-p}^{(k)}(x)|.$$

$\operatorname*{Max}_{k,x} |y_\mu^{(k)}(x)|$ sei der größte Wert, den $|y_\mu^{(k)}(x)|$ in $\langle\alpha, \beta\rangle$ und für $k = 0, 1, \ldots, n$ annimmt.

Die oben angestellten Überlegungen ergeben weiter Abschätzungen

$$\operatorname*{Max}_{k,x} |y_\nu^{(k)}(x)| = D \sum_{p=1}^{\nu} |\lambda_p| \operatorname*{Max}_{k,x} |y_{\nu-p}^{(k)}(x)| + E \operatorname*{Max}_{k,x} |y_{\nu-1}^{(k)}(x)| + F \sum_{p=1}^{\nu-1} |\lambda_p| \operatorname*{Max}_{k,x} |y_{\nu-1-p}^{(x)}(x)|.$$

[7] Vgl. KAMKE l.c. S. 192 sowie S. 74.

Diese gelten für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ mit ebenfalls von ν unabhängigen Konstanten D, E, F.

Wir setzen nun

$$Y_0 = \operatorname*{Max}_{k,x} |y^{(k)}(x)|$$

und definieren für $\nu = 1, 2, \ldots$ rekursiv

$$\Lambda_\nu = A \sum_{p=1}^{\nu-1} \Lambda_p Y_{\nu-p} + B Y_{\nu-1} + C \sum_{p=1}^{\nu-1} \Lambda_p Y_{\nu-1-p}$$

$$Y_\nu = D \sum_{p=1}^{\nu} \Lambda_p Y_{\nu-p} + E Y_{\nu-1} + F \sum_{p=1}^{\nu-1} \Lambda_p Y_{\nu-1-p}.$$

Es folgt dann

$$|\lambda_\nu| \leqq \Lambda_\nu, \qquad \operatorname*{Max}_{k,x} |y_\mu^{(k)}(x)| \leqq Y_\mu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die Reihen

$$\Lambda = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Lambda_\nu \varepsilon^\nu, \qquad Y = \sum_{\nu=0}^{\infty} Y_\nu \varepsilon^\nu$$

sind Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \Lambda &= A\Lambda(Y \dot{-} Y_0) + B\varepsilon Y + C\varepsilon\Lambda Y \\ Y &= D\Lambda Y + E\varepsilon Y + F\varepsilon\Lambda Y + Y_0 \end{aligned} \tag{12}$$

und als solche in einem Kreis $|\varepsilon| < R$ konvergent. R kann explizit angegeben werden, indem man Λ aus (12) eliminiert und Y aus der entstehenden quadratischen Gleichung ausrechnet, und zwar als diejenige der beiden Lösungen, die sich für $\varepsilon = 0$ auf Y_0 reduziert.

Die bei dieser Rechnung auftretenden Nenner und die Diskriminante der quadratischen Gleichung geben die einzigen Beschränkungen für ε.

Für $|\varepsilon| < R$ konvergieren auch die Reihen (4), sowie die durch $1, 2, \ldots, n$-malige gliedweise Differentiation aus der zweiten Reihe (4) entstehenden Reihen. Die Konvergenz ist gleichmäßig für $x \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Daraus ergibt sich in bekannter Weise, daß durch die Reihen (4) eine Lösung von (1) gegeben ist.

Literatur

ELLIOTT: Generalized Green's Functions. Amer. J. Math. **50**, 243 (1928).

RELLICH: Störungstheorie der Spektralzerlegung. 1. bis 5. Mitteilung. Math. Ann. **113**, 600, 677 (1936); **116**, 555 (1939); **117**, 356 (1940/41).

COLLATZ: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig 1949.

SCHRÖDER: Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung für lineare Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. ZAMM **34**, 140 (1954). — Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung bei linearen Eigenwertproblemen mit Operatoren eines Hilbertschen Raumes. Math. Nachr. **10**, 113 (1953).

SCHÄFKE: Zur Störungsrechnung der Spektralzerlegung. Math. Ann. **133** (1957).

KAMKE: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, 5. Aufl. Leipzig 1956.

Universität Rostock

(Eingegangen am 26. Oktober 1961)