Equivalence de Deux Inéquations Variationnelles et Applications

H. Brezis & M. Sibony

Mémoire présenté par J. L. Lions

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière Γ. On utilisera dans la suite les notations suivantes:

$$H_0^1(\Omega)=\left\{v\in L^2(\Omega);\ \frac{\partial v}{\partial x_i}\in L^2(\Omega) \text{ et } v=0 \text{ sur } \Gamma\right\}$$

et $H^{1,\infty}(\Omega)$ est l'espace des fonctions (uniformément) lipschitziennes sur $\bar{\Omega}$ et $H_0^{1,\infty}(\Omega)=H^{1,\infty}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Si $v\in H^{1,\infty}(\Omega)$ on pose

$$\|v\|_{1,\infty}=\operatorname*{Sup}_{\substack{x_1,x_2\in\Omega\\ x_1\neq x_2}}\frac{|v(x_1)-v(x_2)|}{|x_1-x_2|}.$$

Enfin on désigne par $\delta(x)$ la distance de $x\in\Omega$ à Γ.

On considère le problème suivant (qui intervient dans l'étude de la torsion élasto-plastique cf. [5], [11]): Etant donnés $f\in L^2(\Omega)$ et $\lambda\geqq 0$, trouver $u\in K_1=\{v\in H_0^{1,\infty}(\Omega);\ \|v\|_{1,\infty}\leqq 1\}$ tel que

$$(1)\qquad \int_\Omega (f-\lambda u)(v-u)\,dx-\sum_{i=1}^n\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx\leqq 0 \qquad \forall\, v\in K_1.$$

Le problème (1) est un exemple particulier d'inéquation variationnelle (cf. [4], [6], [8]) et admet une solution unique.

On montre au § I que, sous certaines hypothèses, le problème (1) est équivalent au problème suivant: trouver $u\in K_2=\{v\in H_0^1(\Omega);\ |v(x)|\leqq\delta(x) \text{ p.p. sur } \Omega\}$ tel que

$$(2)\qquad \int_\Omega (f-\lambda u)(v-u)\,dx-\sum_{i=1}^n\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}-\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx\leqq 0 \qquad \forall\, v\in K_2$$

(on notera que (2) admet aussi une solution unique).

On indique au § II diverses techniques permettant de calculer la solution de (2). Il est clair qu'en analyse numérique les contraintes de type K_2 sont plus simples à représenter que celles de type K_1; d'où l'intérêt de cette méthode pour la résolution de (1).

I. Equivalence des Problèmes (1) et (2)

Plus précisément on a le

Théorème 1. *Si $f \in H^{1,\infty}(\Omega)$ et $\lambda \geqq \|f\|_{1,\infty}$ alors la solution de* (1) *coïncide avec la solution de* (2).

Remarques (A). 1) Les conditions du Théorème 1 sont en particulier vérifiées si f est constante et $\lambda=0$. Dans ce cas précis (correspondant au problème de la torsion élasto-plastique) un résultat remblable a été prouvé par T. W. Ting [11] lorsque Ω est un polygone régulier de $\mathbb{R}^2$ mais la démonstration exposée ici est totalement différente.

2) Si l'on suppose que $f \in H^{1,\infty}(\Omega)$, $f \geqq 0$ sur Ω et $\lambda \geqq \|f\|_{1,\infty}$ alors la solution de (1) est aussi caractérisée par

$$u \in K_3 = \{v \in H_0^1(\Omega);\ 0 \leqq v(x) \leqq \delta(x) \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

et

$$\int_\Omega (f-\lambda u)(v-u)\,dx - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx \leqq 0 \qquad \forall\, v \in K_3. \tag{3}$$

Le Théorème 1 sera démontré à partir du résultat suivant:

Théorème 2. *Soient $\Psi_1, \Psi_2 \in H_0^{1,\infty}(\Omega)$ tels que $\Psi_1 \leqq \Psi_2$ sur Ω et soit*

$$K_4 = \{v \in H_0^1(\Omega);\ \Psi_1 \leqq v \leqq \Psi_2 \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

On suppose que $f \in H^{1,\infty}(\Omega)$ et que $\lambda > 0$.

Soit $u \in K_4$ la solution de l'inéquation

$$\int_\Omega (f-\lambda u)(v-u)\,dx - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) dx \leqq 0 \qquad \forall\, v \in K_4. \tag{4}$$

Alors $u \in H_0^{1,\infty}(\Omega)$ et

$$\|u\|_{1,\infty} \leqq \operatorname{Max}\left\{\|\Psi_1\|_{1,\infty},\ \|\Psi_2\|_{1,\infty},\ \frac{1}{\lambda}\|f\|_{1,\infty}\right\}. \tag{5}$$

Démonstration du Théorème 2. On utilise ici une méthode analogue à celle de P. Hartman & G. Stampacchia [6]. Soit $C = \operatorname{Max}\left\{\|\Psi_1\|_{1,\infty}, \|\Psi_2\|_{1,\infty}, \frac{1}{\lambda}\|f\|_{1,\infty}\right\}$ et soit $h \in \mathbb{R}^n$; on pose

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n,\ x \notin \Omega \end{cases}$$

$$u_h^+(x) = \operatorname{Max}\{\tilde{u}(x-h) - C|h|, \tilde{u}(x)\}, \qquad u_h^-(x) = \operatorname{Min}\{\tilde{u}(x+h) + C|h|, \tilde{u}(x)\}$$

$$E_h^+ = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \tilde{u}(x-h) - C|h| > \tilde{u}(x)\}, \qquad E_h^- = \{x \in \mathbb{R}^n;\ u(x+h) + C|h| < \tilde{u}(x)\}.$$

On vérifie sans difficultés que

$$\Psi_1(x) \leqq u_h^-(x) \leqq u(x) \leqq u_h^+(x) \leqq \Psi_2(x) \qquad \text{p.p. sur } \Omega$$

et comme $u_{h|\Omega}^{+}$ et $u_{h|\Omega}^{-}$ appartiennent à $H_0^1(\Omega)$, on en déduit que $u_{h|\Omega}^{+}$ et $u_{h|\Omega}^{-}$ sont dans K_4. De plus $E_h^+ \subset \Omega$, $E_h^- \subset \Omega$ et $E_h^+ = E_h^- + h$. Enfin on a p.p. sur Ω

$$\frac{\partial u_h^+}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x-h) & \text{si } x \in E_h^+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x) & \text{si } x \in \Omega, x \notin E_h^+ \end{cases}$$

$$\frac{\partial u_h^-}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x+h) & \text{si } x \in E_h^- \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x) & \text{si } x \in \Omega, x \notin E_h^-. \end{cases}$$

Reportant $v = u_{h|\Omega}^{+}$ puis $v = u_{h|\Omega}^{-}$ dans (4) il vient

$$\begin{aligned}\int_{E_h^+} (f(x) - \lambda u(x))(u(x-h) - C|h| - u(x))\,dx \\ - \int_{E_h^+} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x-h) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)dx \leqq 0\end{aligned} \tag{6}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{E_h^-} (f(x) - \lambda u(x))(u(x+h) + C|h| - u(x))\,dx \\ - \int_{E_h^-} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x+h) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)dx \leqq 0.\end{aligned} \tag{7}$$

Après le changement de variable $x \to x-h$ dans (7) on obtient

$$\begin{aligned}\int_{E_h^+} (-f(x-h) + \lambda u(x-h))(u(x-h) - C|h| - u(x))\,dx \\ + \int_{E_h^+} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x-h)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(x-h) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right)dx \leqq 0.\end{aligned} \tag{8}$$

On déduit de (6) et (8) par addition

$$\begin{aligned}\lambda \int_{E_h^+} (u(x-h) - u(x))(u(x-h) - C|h| - u(x))\,dx \\ \leqq \int_{E_h^+} (f(x-h) - f(x))(u(x-h) - C|h| - u(x))\,dx.\end{aligned} \tag{9}$$

Donc

$$\begin{aligned}\lambda \int_{E_h^+} (u(x-h) - u(x) - C|h|)^2\,dx \\ \leqq \int_{E_h^+} (f(x-h) - f(x) - C|h|)(u(x-h) - C|h| - u(x))\,dx.\end{aligned} \tag{10}$$

Or $f(x-h) - f(x) - \lambda C|h| \leqq 0$ et $u(x-h) - u(x) - C|h| > 0$ sur E_h^+. Par conséquent mes $(E_h^+) = 0$ et

$$|\tilde{u}(x-h) - \tilde{u}(x)| \leqq C|h| \qquad \forall\, h \in \mathbb{R}^n \text{ et p.p. } x \in R^n.$$

D'où $\|u\|_{1,\infty} \leqq C$, ce qui prouve (5).

Démonstration du Théorème 1. On suppose d'abord que $\lambda>0$. Soit u la solution du problème (2). Il résulte du Théorème 2 que

$$\|u\|_{1,\infty} \leqq \operatorname{Max}\left(\|\delta\|_{1,\infty}, \frac{1}{\lambda}\|f\|_{1,\infty}\right) \leqq 1$$

et par suite $u\in K_1$. On achève la démonstration en notant que $K_1 \subset K_2$ et que les problèmes (1) et (2) admettent une solution unique. Supposons maintenant que $\lambda=0$ et soit $\lambda_n>0$ une suite tendant vers 0. Les inéquations (1) et (2) correspondant à $\lambda=\lambda_n$ admettent la même solution $u=u_n$ d'après ce qui précède. Lorsque $n\to+\infty$, $u_n\to u$ dans $H_0^1(\Omega)$ et u est solution de (1) et (2) d'après un argument classique.

Remarque (B). Les Théorèmes 1 et 2 sont valables sans changement si l'on remplace l'opérateur Δ par $\sum a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ où les a_{ij} sont des *constantes* telles que $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j \geqq a|\xi|^2$, $a>0$.

II. Résolution Numérique du Problème (2)

On se propose maintenant de résoudre numériquement le problème: trouver $u\in K_2$ tel que

$$(11) \qquad (Au, v-u) \geqq (f, v-u) \quad \forall\ v\in K_2$$

pour f donné dans $H^{1,\infty}(\Omega)$, avec

$$Au=-\Delta u+\lambda u, \qquad \lambda \geqq \|f\|_{1,\infty}$$
$$K_2=\{v\in H_0^1(\Omega);\ |v(x)|<\delta(x) \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Une première méthode consiste à ramener le problème (11) à un problème de minimisation d'une fonctionnelle sur le convexe fermé K_2, problème pour lequel on peut appliquer la méthode de résolution directe introduite dans M. Sibony [9]. Une deuxième méthode consiste à résoudre (11) au moyen d'un procédé itératif basé sur la projection sur le convexe K_2 (plus simple que K_1) que nous savons calculer explicitement (cf. J. L. Lions & G. Stampacchia [8], M. Sibony [10]).

II.1. Méthode Directe: Minimisation d'une Fonctionnelle sur K_2

On se donne un paramètre $h=(h_1, \ldots, h_n)\in\mathscr{R}_+^n$ destiné à tendre vers 0. Nous désignerons par $\mathscr{R}_h$ le réseau régulier des points M de la forme $M=(m_1 h_1, \ldots, m_n h_n)$, $m_i\in\mathbb{Z}$, $h_i=h_j=h$, $i, j=1, \ldots, n$. Posons

$$\omega_{h,q}^M=\prod_{i=1}^n \left[\left(m_i-\frac{q+1}{2}\right)h_i, \left(m_i+\frac{q+1}{2}\right)h_i\right], \qquad q \text{ entier} \geqq 0$$

$$\mathscr{R}_h^1=\{M\in\mathscr{R}_h \mid \omega_{h,1}^M \subset \Omega\}.$$

Soit $N(h)$ le nombre d'éléments de $\mathscr{R}_h^1$; $N(h)\to+\infty$ quand $h\to 0$.

A l'espace $V=H_0^1(\Omega)$ nous associons comme dans [3] et [9] l'espace V_h des suites de nombres réels $(u_h^M)_{M\in\mathscr{R}_h^1}$. Si $x\in\Omega$ on pose $u_h(x)=u_h^M$, $u_h\in V_h$. V_h est donc identifié à l'espace des fonctions

$$u_h = \sum_{M \in \mathscr{R}_h^1} u_h^M \theta_h^M$$

où θ_h^M est la fonction caractéristique de $\omega_{h,0}^M$.

Posons

$$\nabla_i u_h(x) = \frac{u_h(x+h_i/2) - u_h(x-h_i/2)}{h_i}$$

avec

$$x + \frac{h_i}{2} = \left(x_1, \ldots, x_i + \frac{h_i}{2}, \ldots, x_n\right).$$

On munit V_h du produit scalaire $(,)_h = (,)_{L^2(\Omega)}$. On sait cf. [1] qu'il existe un prolongement injectif $p_h \in \mathscr{L}(V_h, V)$. Nous associons maintenant au problème (11) son discrétisé:

$$(12) \qquad u_h \in K_{2h}, \quad (A_h u_h, v_h - u_h)_h \geqq (f_h, v_h - u_h)_h \quad \forall\ v_h \in K_{2h}$$

avec

$$(A_h u_h, v_h)_h = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_i u_h, \nabla_i v_h)_h + \lambda (u_h, v_h)_h \quad \forall\ v_h \in V_h$$

$$(f_h, v_h)_h = (f, p_h v_h) \quad \forall\ v_h \in V_h$$

$$K_{2h} = \{v_h \in V_h \,|\, |u_h(x)| \leqq \delta_h(x) \text{ p.p.}\}$$

où $\delta_h(x) = \text{distance}\,(x, \Gamma_h)$, $\Gamma_h = \Omega \cap \mathscr{R}_h$. On démontre alors la proposition ci-après.

Proposition 1. 1) *Il existe* $u_h \in K_{2h}$ *unique solution de* (12).

2) $p_h u_h \to u$ *dans* $H_0^1(\Omega)$ *fort quand* $h \to 0$ *u étant la solution de* (11).

3) *Toute solution de* (12) *est solution de*

$$(13) \qquad u_h \in K_{2h}, \quad F_h(u_h) \leqq F_h(v_h) \quad \forall\ v_h \in K_{2h}$$

avec

$$F_h(v_h) = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \|\nabla_i v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 - (f_h, v_h)$$

et réciproquement.

Résultats Numériques pour la Première Méthode

Soit $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. On se propose de résoudre le problème (13) à l'aide de la méthode de la mire (cf. M. SIBONY [9]). On pose $h_1 = h_2 = h$ et on note par $\{u_{ij}\}$ les valeurs de $u_h(x, y)$ aux points $M_{ij} = (x, y)$, $i, j = 1, \ldots, N+1$, du réseau $\mathscr{R}_h$ correspondant à l'ouvert Ω et au pas h de discrétisation. Il s'agit alors de minimiser la fonction de $(N+1)^2$ variables $F(\{v_{ij}\})$, $i, j = 1, \ldots, N+1$, avec les conditions

$$(14) \qquad \begin{aligned} &v_{ij} = 0 \text{ pour } i = 0 \text{ et } i = N+1 \ \forall\, j \\ &v_{ij} = 0 \text{ pour } j = 0 \text{ et } j = N+1 \ \forall\, i \\ &|v_{ij}| \leqq \delta. \end{aligned}$$

Nous pouvons rendre la méthode de la mire plus performante du point de vue du temps d'exécution sur ordinateur en opérant comme suit: Au lieu de calculer la valeur de $F(u_{11}, \ldots, u_{kl}+t, \ldots, u_{NN})$ aux extrémités d'une mire (de type I ou II) à l'aide de la formule (13), on peut la calculer à l'aide d'une formule approchée de la forme:

$$F(u_{11}, \ldots, u_{kl}+t, \ldots, u_{NN}) = F(\{u_{kl}\}) + R_{kl}$$

où $F(\{u_{kl}\})$ est la valeur de la fonctionnelle au centre de la mire $M_{lk,\rho}$ et R_{kl} est le reste exact ou approché; ce qui permet de calculer $F(\{u_{ij}\})$ de proche en proche pour tous les points du réseau $\mathscr{R}_h$ (cf. M. SIBONY [9]).

1ère Expérience Numérique. On pose dans (11), $Au = -\Delta u, f = c^{te} = 5$.

Pour un pas de discrétisation $h = 1/10$ la méthode de la mire se stabilise quand le rayon d'une mire de type II est $\rho = 9{,}7 \cdot 10^{-5}$. La solution $u_{h,\rho}$ ne varie plus si on poursit les itérations. Le Tableau n° 1 donne la répartition de $|\operatorname{grad} u_{h,\rho}|$ aux points (i, j) du réseau $\mathscr{R}_h$ associé à l'ouvert Ω.

Tableau n° 1. $Au = -\Delta u$; $f = c^{te} = 5$; $h = 10^{-1}$. *Ici* . *signifie que* $|\operatorname{grad} u_{h,\rho}| < 1$ *au point* (i, j), *et* 1 *signifie que* $|\operatorname{grad} u_{h,\rho}| = 1$ *au point* (i, j)

.	.	1	1	1	1	1	1	1	.	.
.	.	.	1	1	1	1	1	.	.	.
1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1
1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1
1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1
1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1
1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1
.	.	.	1	1	1	1	1	.	.	.
.	.	1	1	1	1	1	1	1	.	.

2ème Expérience Numérique. $Au = -\Delta u$; $f = c^{te} = 10$; $h = 10^{-1}$.

Le Tableau n° 2 donne la répartition des contraintes $|\operatorname{grad} u_{h,\rho}|$ aux points (i, j). Quand $\rho = 3{,}1 \cdot 10^{-3}$ on obtient la stabilisation des résultats. Le temps d'exécution des calculs en C.D.C. 3600 est de 1 mn.

Tableau n° 2. $Au = -\Delta u$; $f = c^{te} = 10$; $h = 10^{-1}$

.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.
1	.	1	1	1	1	1	1	1	.	1
1	1	.	1	1	1	1	1	.	1	1
1	1	1	.	1	1	1	.	1	1	1
1	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1
1	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1
1	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1
1	1	1	.	1	1	1	.	1	1	1
1	1	.	1	1	1	1	1	.	1	1
1	.	1	1	1	1	1	1	1	.	1
.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.

3ème Expérience. $Au = -\Delta u + \lambda u$; $f = e^{3(x+y)}$, $\lambda = 15$, $h = 10^{-1}$.

Le Tableau n° 3 donne la répartition des contraintes $|\mathrm{grad}\, u_{h,\rho}|$ aux points (i,j), $i,j = 1, \ldots, N$. On obtient la stabilisation des résultats à partir de $\rho = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$. Le temps d'exécution des calculs en C.D.C. 3600 est de 105 s.

Tableau n° 3. $Au = -\Delta u + \lambda u$; $\lambda = 15$; $f = e^{3(x+y)}$; $h = 10^{-1}$

.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.
1	.	1	1	1	1	1	1	1	.	1
1	1	.	1	1	1	1	1	.	1	1
1	1	1	.	1	1	1	.	1	1	1
1	1	1	1	.	1	.	1	1	1	1
1	1	1	1	1	.	1	1	1	1	1
1	1	1	1	.	1	.	1	1	1	1
1	1	1	.	1	1	1	.	1	1	1
1	1	.	1	1	1	1	1	.	1	1
1	.	1	1	1	1	1	1	1	.	1
.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.

Nous savons que sous certaines hypothèses le problème (11) est équivalent au problème

$$
\begin{aligned}
&(Au, v-u) \geqq (f, v-u) \qquad \forall\ v \in K_1 \\
(15) \qquad &Au = -\Delta u + \lambda I \\
&K_1 = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid |\mathrm{grad}\, u| \leqq 1 \cdot \text{p.p.}\}.
\end{aligned}
$$

La méthode de la mire permet aussi de résoudre directement ce problème. Mais pour atteindre une précision analogue à celle que nous avons obtenue pour la formulation (11), nous avons besoin d'un temps d'exécution prohibitif. Sur ce point au moins la formulation (11) semble nettement supérieure.

II.2. Résolution du Problème (11) *à l'Aide d'une Méthode Itérative*

Nous avons la proposition ci-après (cf. M. Sibony [10]).

Proposition 2. *La suite définie pour les itérations*

$$(16) \qquad u_{n+1} = P_{K_2}\big(u_n - \rho_n (A u_n - f)\big)$$

avec $u_0 = 0$ *et*

$$\rho_n = \frac{(A v_n, v_n)}{\|A v_n\|^2} \qquad (v_n = u_n - u_{n-1})$$

converge fortement dans $H_0^1(\Omega)$ *quand* $n \to \infty$, *vers* u *solution de* (11).

Pratiquement nous opérons de la manière suivante: Soit $h > 0$ un paramètre de discrétisation, destiné à tendre vers 0. Au problème (11) nous associons le problème discrétisé

$$(12) \qquad (A_h u_h, v_h - u_h)_h \geqq (f_h, v_h - u_h)_h \qquad \forall\ v_h \in K_{2h}$$

avec

$$(A_h u_h, v_h) = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_i u_h, \nabla_i v_h) + \lambda (u_h, v_h)_h \qquad \forall\; v_h \in V_h$$

$$K_{2h} = \{v_h \in V_h \,|\, |u_h(x)| < \delta_h(x) \;\text{ p.p.}\}.$$

Nous résolvons (12) à l'aide des itérations

$$(17) \qquad u_h^{n+1} = P_{K_{2h}}(u_h^n - \rho_h^n (A_h u_h^n - f_h)) \qquad \text{avec } u_h^0 = 0$$

et*

$$\rho_h^n = \rho_h^0 = \frac{2+\lambda}{(8/h^2+\lambda)^2} \quad \text{pour } n < n_0,\; n_0 \text{ étant un nombre d'itérations fixe dépendant de l'expérience.}$$

$$\rho_h^n = \frac{(A_h v_h^n, v_h^n)}{\|A_h v_h^n\|^2} \quad \text{où } v_h^n = u_h^n - u_h^{n-1} \quad \text{pour} \quad n > n_0.$$

D'après le Propositions 3 et 4 nous avons alors $u_h^n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_h$ dans V_h fort, u_h étant la solution de (12), et $p_h u_h \xrightarrow[h\to 0]{} u$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort, u étant la solution de (11).

Résultats Numériques pour la Deuxième Méthode

Pour $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ on pose $h_1 = h_2 = h^{(0)} = 1/10$ (ce qui correspond à un réseau de 121 points). On calcule $\lim\limits_{n\to\infty} u_{h^{(0)}}^n = u_{h^{(0)}}$ à l'aide de (17), en itérant jusqu'à stabilisation des résultats.

Ensuite on fait $h^{(1)} = h^{(0)}/2 = 1/20$ (ce qui correspond à un réseau de 441 points). On pose alors $u_{h^{(1)}}^0 = \tilde{u}_{h^{(0)}}$ dans (17) où $\tilde{u}_{h^{(0)}}$ est le résultat d'une interpolation linéaire pour un réseau double de $\lim\limits_{n\to\infty} u_{h^{(0)}}^n = u_{h^{(0)}}$.

Puis on recommence le procédé pour $h^{(2)} = h^{(1)}/2 = 1/40$ (ce qui correspond à un réseau de 1681 points); ce qui conduit à la solution finale

$$u_{h^{(2)}} = \lim_{n\to\infty} u_{h^{(2)}}^n = \lim_{h\to 0} \big(\lim_{n\to\infty} u_{h^{(0)}}^n\big).$$

Cet tableau ci-dessous résume les expériences faites pour $f = c^{te}$.

	Nombre d'itérations pour $h^{(0)} = 1/10$	Nombre d'itérations pour $h^{(1)} = 1/20$	Nombre d'itérations pour $h^{(2)} = 1/40$
$f=5$	70	150	530
$f=10$	30	70	210
$f=15$	10	50	110

Le temps d'exécution des itérations (17) est beaucoup plus avantageux que pour la méthode de la mire.

* On vérifie (cf. M. Sibony [10]) que si $(A_h u_h, u_h)_h \geqq k\|u_h\|^2$ et $(A_h u_h, v_h) \leqq C\|u_h\|\,\|v_h\|$ alors les itérations (17) convergent pour $\rho = \rho^0 = k/C^2$.

Pour les pas $h^{(0)}=1/10$, $h^{(1)}=1/20$ et $h^{(2)}=1/40$ avec interpolation l'exécution du programme est de l'ordre de 1 mn en C.D.C. 3600. La deuxième méthode itérative est donc nettement plus opérationnelle que la méthode de la mire quand le pas de discrétisation devient petit ($h=1/40$).

1ère Expérience Numérique. Pour $\lambda=0$, $f=C^{te}=10$ les Tableaux n° 4, 5, 6 donnent les répartitions des contraintes. Quand $u_h(x)=\delta(x)$ nous avons marqué (1) et quand $u_h(x)<\delta(x)$ nous avons marqué (.).

2ème Expérience Numérique. Pour $\lambda=1$, $f=C^{te}=10$, le Tableau n° 7 donne la répartition des contraintes $|u_h(x)|\leqq\delta(x)$ pour un pas de discrétisation $h^{(1)}=1/20$. Ce tableau est identique au tableau des contraintes $|\operatorname{grad} u_h|\leqq 1$.

3ème Expérience Numérique. Pour $\lambda=0$, $f=C^{te}=500$ et un pas de discrétisation $h^{(1)}=1/20$ on constate que l'on a partout $u(x)=\delta(x)$ et $|\operatorname{grad} u|=1$.

Tableau n° 4. $h=1/10, f=c^{te}=10$, $Au=-\Delta u$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	.	1	1	1	1	1	1	1	.	1
1	1	.	1	1	1	1	1	.	1	1
1	1	1	.	1	1	1	.	1	1	1
1	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1
1	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1
1	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1
1	1	1	.	1	1	1	.	1	1	1
1	1	.	1	1	1	1	1	.	1	1
1	.	1	1	1	1	1	1	1	.	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tableau n° 5. $h=1/20, f=c^{te}=10$, $Au=-\Delta u$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	1
1	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	1
1	1	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	1	1
1	1	1	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	1	1	1
1	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1
1	1	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	1	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1	1
1	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	1	1	1	1
1	1	1	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	1	1	1
1	1	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	1	1
1	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	1
1	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

En examinant les divers tableaux on remarque que:

1) L'ensemble $\{x\in\Omega;\, u(x)=\delta(x)\}$ coïncide avec l'ensemble

$$\{x\in\Omega,\, |\operatorname{grad} u(x)|=1\}.$$

2) Si $x\in\Omega$ est un point tel que $u(x)=\delta(x)$, alors $u(y)=\delta(y)$ pour tout y appartenant au segment joignant x à la projection de x sur Γ.

3) La région plastique $\{x\in\Omega;\, u(x)=\delta(x)\}$ croît avec la fonction f (λ fixé).

Nous retrouvons donc numériquement des résultats démontrés théoriquement (cf. [2], [7], [11]).

Tableau n° 6. $h=1/40, f=c^{te}=10, Au=-\Delta u$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	1
1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1
1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	1
1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1
1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1
1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1
1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1
1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1
1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1
1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1
1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1
1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1
1	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	1
1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1
1	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tableau n° 7. $h=1/40, f=c^{te}=15, Au=-\Delta u$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	1
1	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	1
1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1
1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1
1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1
1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1
1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1
1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1
1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1	1
1	1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1	1
1	.	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	1
1	.	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	1
1	.	.	.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Recherche subventionnée en partie par la National Science Foundation Grant NSF-CP-11600 au Courant Institute de la New York University.

Références

1. AUBIN, J. P., Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels. (Thèse 1966), Faculté des Sciences de Paris, Bulletin Société Math. France, mémoire **12**, 139 (1967).
2. BREZIS, H., Problèmes unilateraux. J. Math. Pure Appl. (à paraître).
3. BREZIS, H., & M. SIBONY, Méthodes d'approximation et d'itération pour les opérateurs monotones. Arch. Rational Mech. Anal. **28**, 59—82 (1968).
4. BREZIS, H., & G. STAMPACCHIA, Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. Bull. Soc. Math. France **96**, 153—180 (1968).

5. Duvant, G., & H. Lanchon, Sur la solution du problème de la torsion elasto-plastique d'une barre cylindrique de section quelconque. C. R. Acad. Sc. Paris **264**, Série A, 520—523 (1967).
6. Hartman, P., & G. Stampacchia, On some non linear elliptic differential functional equations. Acta Math. **115**, 271—330 (1966).
7. Lanchon, H., Solution du problème de torsion élasto-plastique d'une barre cylindrique de section quelconque. C. R. Acad. Sc. Paris **269**, 791—794 (1969).
8. Lions, J. L., & G. Stampacchia, Variational inequalities. Comm. Pure Appl. Math. **20**, 493—519 (1967).
9. Sibony, M., Sur l'approximation d'équations et inéquations aux dérivées partielles non linéaires de type monotone (à paraître dans J. Math. Analysis Appl.).
10. Sibony, M., Méthodes itératives pour les équations et inéquations aux dérivées partielles non linéaires de type monotone (à paraître dans Calcolo).
11. Ting, T. W., Elastic plastic torsion problems. Arch. Rational Mech. Anal. **25**, 342—366 (1967).

Institut de Mathématique
Faculté des Sciences
Paris 5e

et

Faculté des Sciences de Tours
Laboratoire de Mathématique
Parc Grandmont
37-Tours

(Reçu le 24 Novembre, 1970)