

Das Spektrum von Operatorscharen mit verallgemeinerten Rayleighquotienten

BODO WERNER

Vorgelegt von L. COLLATZ

Einleitung

Ein Spektrum kann ganz allgemein für Scharen T von linearen Operatoren $T(\lambda)$ definiert werden; so heißt z. B. λ ein Eigenwert von T , falls ein $x \neq \theta$ mit $T(\lambda)x = \theta$ existiert. Die Frage nach Eigenwerten bei nichtlinear auftretendem Parameter λ stellt sich bei einigen physikalisch-technischen Problemen (s. [1], [7], [12]), z. B. führt die Bestimmung der Kipplast eines Stabes (s. [7]) auf die quadratische Eigenwertaufgabe

$$(1) \quad -y'' = (\lambda^2 a x^2 + \lambda b x + c)y, \quad y(1) = y'(0) = 0.$$

In dieser Arbeit werden Untersuchungen für eine von ROGERS [9] eingeführte Klasse von Scharen beschränkter, symmetrischer Operatoren durchgeführt, die einen verallgemeinerten Rayleighquotienten – ein Rayleighfunktional $p(x)$ – besitzen. Dieses ist im wesentlichen durch

$$(T(p(x))x, x) = 0$$

charakterisiert (weitere Bedingungen s. § 1). Neben der linearen Schar

$$(2) \quad T(\lambda) = \lambda E - A, \quad A \text{ symmetrisch und beschränkt,}$$

gehören ihr die nichtlinearen Scharen in [2], [3], [5], [9], [10], [12] und [13] an.

Sind die $T(\lambda)$ in einem endlich-dimensionalen Hilbertraum definiert, so besteht eine fast vollständige Analogie zwischen dem Spektrum einer *Rogersschen Schar* und dem Spektrum einer hermiteschen Matrix ([2], [9]).

Eine ähnliche Analogie zwischen linearer und nichtlinearer Theorie wird in dieser Arbeit bei unendlicher Raumdimension aufgezeigt. Das Hauptergebnis ist die Charakterisierung eines Teilintervalls G_0 des Wertebereichs $W(T)$ des Rayleighfunktionals der Art, daß sich das Spektrum $\sigma(T)$ außerhalb G_0 wie das von Null verschiedene Spektrum eines symmetrischen, vollstetigen Operators verhält: $\sigma(T) - G_0$ besteht nämlich aus abzählbar vielen Eigenwerten endlicher Vielfachheit, die sich durch ein verallgemeinertes *Ritzsches Maximum-Minimum-Prinzip* kennzeichnen lassen und deren endliche Häufungspunkte in G_0 liegen und zu $\sigma(T)$ gehören (§ 4).

Im linearen Fall (2) enthält G_0 alle Zahlen zwischen dem kleinsten und größten Häufungspunkt von $\sigma(A)$ (für vollstetiges A ist $G_0 = \{0\}$); Die max-min-Darstellung der Eigenwerte von A außerhalb G_0 ist bekannt und wird neben neuen Beziehungen zwischen den sup-min-Werten des Rayleighquotienten von A und dem Spektrum von A (Satz 3.7) ganz wesentlich zum Beweis der nichtlinearen Theorie verwendet.

Ergebnisse der Arbeiten [5], [6], [12] und [13] über das Spektrum spezieller Polynombüschel ordnen sich unseren Ergebnissen unter (§6), ebenfalls die von [3] und [10], in denen eine Vollstetigkeitsbedingung gestellt wird: die $T(\lambda)$ sollen sich nur um ein Vielfaches $v(\lambda)$ des Einheitsoperators E von vollstetigen Operatoren unterscheiden. In Analogie zu (2) bei vollstetigem A (dort ist $v(\lambda) = \lambda$) zeigen wir, daß G_0 gerade die Menge N_0 der im Inneren von $W(T)$ liegenden Nullstellen von $v(\lambda)$ ist. Daraus ergibt sich, daß N_0 zusammenhängend sein muß, wenn die Schar $T(\lambda)$ Rogerssch ist. In der Regel enthält G_0 höchstens eine Zahl, z. B., wenn $v(\lambda)$ analytisch ist.

1. Operatorenscharen mit Rayleighfunktionalen

H sei ein Hilbertraum über dem Körper C der komplexen Zahlen, $\mathfrak{S}(H)$ der Banachraum aller linearen, symmetrischen und beschränkten Operatoren von H in sich. Für $B \subset C$ sei durch

$$T: B \rightarrow \mathfrak{S}(H)$$

eine Schar symmetrischer Operatoren $T(\lambda)$ gegeben. Analog zur linearen Schar

$$(1.1) \quad T_1(\lambda) = \lambda E - A, \quad A \in \mathfrak{S}(H), \quad E \text{ Einheitsoperator,}$$

nennt man $\lambda \in B$ *regulär*, falls $T(\lambda)^{-1}$ existiert und beschränkt ist. Das Komplement $\sigma(T)$ dieser regulären Zahlen in B heißt *Spektrum* von T . Es setzt sich aus dem *Punktspektrum* $\sigma_p(T)$ — den *Eigenwerten* von T — und dem *kontinuierlichen Spektrum* $\sigma_c(T)$ zusammen. Dabei gehört λ zu $\sigma_p(T)$, falls $T(\lambda)^{-1}$ nicht existiert, und zu $\sigma_c(T)$, falls $T(\lambda)^{-1}$ existiert, aber nicht beschränkt ist.* Für die lineare Schar (1.1) gilt dann

$$\sigma(T_1) = \sigma(A) \quad \text{und} \quad \sigma_p(T_1) = \sigma_p(A).$$

Es besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Spektrum einer Schar T und dem Spektrum der linearen Operatoren $T(\lambda)$:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \lambda \in \sigma(T) &\Leftrightarrow 0 \in \sigma(T(\lambda)) \\ \lambda \in \sigma_p(T) &\Leftrightarrow 0 \in \sigma_p(T(\lambda)). \end{aligned}$$

In dieser Arbeit wird das Spektrum einer speziellen, von ROGERS [9] eingeführten Klasse nichtlinearer Operatorenscharen untersucht:

Definition. Es sei I_1 ein reelles, offenes Intervall und

$$T: I_1 \rightarrow \mathfrak{S}(H)$$

* Das Residuenspektrum eines symmetrischen, beschränkten Operators ist leer.

eine bezüglich der Operatornorm in $\mathfrak{S}(H)$ stetig-differenzierbare Abbildung, deren Ableitung mit $T'(\lambda)$ bezeichnet werde. Es gebe ein reelles, stetiges Funktional

$$p: H^0 \rightarrow I_1$$

mit folgenden Eigenschaften ($H^0 = H - \{\theta\}$):

$$(R1) \quad \overline{p(H^0)} \subset I_1$$

$$(R2) \quad p(cx) = p(x) \quad \text{für } c \in \mathbb{C} \text{ und } cx \neq \theta,$$

$$(R3) \quad \left. \begin{array}{l} (T(p(x))x, x) = 0 \\ (T'(p(x))x, x) > 0 \end{array} \right\} \quad \text{für alle } x \in H^0.$$

$$(R4)$$

Dann werde die Operatorschar $T(\lambda)$ *Rogerssch* und das zugehörige Funktional $p(x)$ *Rayleighfunktional* genannt. Der Wertebereich von p werde mit $W(T)$ bezeichnet und auch *Wertebereich* von T genannt.

Das Rayleighfunktional kann als verallgemeinerter Rayleighquotient aufgefaßt werden, da die lineare Schar (1.1) mit $(Ax, x)/(x, x)$ als Rayleighfunktional Rogerssch ist. Der Wertebereich $W(T)$ tritt an die Stelle des numerischen Wertebereichs $W(A)$.

Aus (R3) und (R4) folgt, daß die Gleichung

$$(1.3) \quad (T(\lambda)x, x) = 0$$

in $\lambda = p(x)$ eine einfache Nullstelle besitzt. Nach folgendem Lemma ist diese sogar die einzige Lösung von (1.3) in ganz $W(T)$:

Lemma 1.1 (ROGERS [9]). *Sei $\lambda \in W(T)$ und $x \neq \theta$. Dann gilt*

$$(1.4) \quad \lambda > p(x) \Leftrightarrow (T(\lambda)x, x) > 0$$

$$(1.5) \quad \lambda = p(x) \Leftrightarrow (T(\lambda)x, x) = 0$$

$$(1.6) \quad \lambda < p(x) \Leftrightarrow (T(\lambda)x, x) < 0.$$

2. Supremum-Minimum-Werte des Rayleighfunktionals

Im folgenden werde stets

$$(2.1) \quad \dim H = \infty$$

vorausgesetzt, auch wenn viele Sätze für endlich-dimensionales H gelten.

Ist $A \in \mathfrak{S}(H)$ vollstetig, so lassen sich die (abzählbar vielen) positiven und negativen Eigenwerte von A durch Extremalprinzipien von RAYLEIGH, RITZ-POINCARÉ und COURANT darstellen, insbesondere ist nach RITZ

$$(2.2) \quad \mu_j = \max_{\dim M=j} \min_{x \in M^0} (Ax, x)/(x, x)$$

der j -te positive Eigenwert von A (mit $M^0 = M - \{\theta\}$).

Da wir ähnliche Aussagen auch von dem Spektrum einer Rogersschen Schar machen wollen, gehen wir von den *supmin-Werten* des Rayleighfunktionals $p(x)$

aus:

$$(2.3) \quad \lambda_j = \sup_{\dim M=j} \min_{x \in M^0} p(x), \quad j=1, 2, \dots$$

Die λ_j entsprechen den μ_j in (2.2) und sind wegen (2.1) für alle $j=1, 2, \dots$ definiert. ($\lambda_j = \infty$ werde nicht ausgeschlossen.)

Lemma 1.1 läßt sich auf die supmin-Werte λ_j und

$$(2.4) \quad \mu_j(\lambda) = \sup_{\dim M=j} \min_{x \in M \cap S} (-T(\lambda)x, x)$$

übertragen: (S sei die Einheitskugel von H .)

Lemma 2.1.

$$(2.5) \quad \lambda_j < \infty \Rightarrow \mu_j(\lambda_j) = 0.$$

Ist $\lambda \in W(T)$, so gilt

$$(2.6) \quad \mu_j(\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda_j > \lambda$$

$$(2.7) \quad \mu_j(\lambda) < 0 \Rightarrow \lambda_j < \lambda.$$

Lemma 2.1 und das nachfolgende Lemma 2.2 sind die wichtigsten Hilfssätze für die Hauptresultate in §4, da in ihnen die supmin-Werte des *Rayleighfunktionals* durch supmin-Werte von *Rayleighquotienten* erfaßt werden können. Da zwischen den $\mu_j(\lambda)$ und $\sigma(T(\lambda))$ ein Zusammenhang besteht (§3), sind auf Grund dieser Lemmata und (1.2) Rückschlüsse auf die Beziehung der λ_j zu $\sigma(T)$ möglich.

Beweis von Lemma 2.1. 1. Zeige (2.5): Nach (2.3) gibt es zu jedem j -dimensionalen Teilraum M ein $x_M \in M \cap S$ mit

$$\lambda_j \geq p(x_M).$$

Aus Lemma 1.1 und $\lambda_j \in W(T)$ folgt

$$(-T(\lambda_j)x_M, x_M) \leq 0.$$

Nach (2.4) ist daher

$$\mu_j = \mu_j(\lambda_j) \leq 0,$$

und zu jedem M existiert ein $y_M \in M \cap S$ mit

$$(2.8) \quad (-T(\lambda_j)y_M, y_M) \leq \mu_j \leq 0.$$

Es ist $\lambda_j \in W(T)$ oder $\lambda_j = \sup W(T)$. In beiden Fällen folgt aus (2.8) und Lemma 1.1

$$\lambda_j \geq p(y_M).$$

Definition (2.3) zufolge ist dann

$$(2.9) \quad \lambda_j = \sup_{\dim M=j} p(y_M).$$

Man erhält aus (R3) und der Schwarzschen Ungleichung

$$(-T(\lambda_j)y_M, y_M) = ([T(p(y_M)) - T(\lambda_j)]y_M, y_M) \geq -\|T(p(y_M)) - T(\lambda_j)\|,$$

aus (2.8), (2.9) und der Stetigkeit von $T(\lambda)$ in $\overline{W(T)}$ folgt

$$\mu_j = 0.$$

2. Zeige (2.6): Es ist $\mu_j(\lambda) > 0$ genau dann, wenn es ein M gibt mit $(T(\lambda)x, x) < 0$ für alle $x \in M \cap S$. Nach Lemma 1.1 ($\lambda \in W(T)$!) ist dies genau dann der Fall, wenn $\lambda < p(x)$ für alle $x \in M \cap S$, bzw. wenn $\lambda < \lambda_j$.

3. (2.7) folgt aus (2.5) und (2.6).

Aus $\mu_j(\lambda) = 0$ folgt $\lambda = \lambda_j$, wenn *max* statt *sup* stehen darf: (In diesem Fall nennen wir den betreffenden Wert einen *maxmin-Wert*.)

Lemma 2.2. *Wenn λ_j ein maxmin-Wert ist, dann ist $\mu_j(\lambda_j)$ ein maxmin-Wert, und es ist $\mu_j(\lambda_j) = 0$. Wenn $\mu_j(\lambda)$ für ein $\lambda \in W(T)$ ein maxmin-Wert ist und wenn $\mu_j(\lambda) = 0$ ist, dann ist λ_j ein maxmin-Wert und $\lambda = \lambda_j$.*

Der Beweis folgt sofort aus den Definitionen (2.3) und (2.4) sowie aus Lemma 1.1.

3. Supremum-Minimum-Werte von Rayleighquotienten

Lemma 2.1 und 2.2 legen es nahe, für symmetrische, beschränkte Operatoren A eines Hilbertraumes H in sich die Beziehung der *supmin-Werte*

$$(3.1) \quad \mu_j = \sup_{\dim M = j} \min_{x \in M \cap S} (Ax, x)$$

zum Spektrum $\sigma(A)$ zu untersuchen. Ist A vollstetig, so gibt das maxmin-Prinzip von RITZ (s. (2.2)) eine umfassende Antwort. Für (nicht notwendig vollstetige) selbstadjungierte Operatoren A hat STENGER [11] gezeigt, daß μ_j mit *max* statt *sup* der j -te Eigenwert von A ist, falls $\{\lambda \mid \lambda \in \sigma(A), \lambda \geq \mu_j\}$ aus lauter Eigenwerten endlicher Vielfachheit besteht. In diesem Fall ist μ_j also größer als der größte Häufungspunkt τ des Spektrums $\sigma(A)$. (Per Definition gehört ein *Häufungspunkt* von $\sigma(A)$ zu $\sigma_c(A)$ oder ist ein Häufungspunkt von Eigenwerten oder ist ein Eigenwert unendlicher Vielfachheit.)

Wir benötigen Aussagen über die μ_j in (3.1), ohne daß wie in [11] etwas über $\sigma(A)$ bekannt ist.

Ist $\sigma_h(A)$ die Menge aller Häufungspunkte von $\sigma(A)$, so gilt

Lemma 3.1. *Sei A symmetrisch und beschränkt und μ_j wie in (3.1) definiert. Dann gilt*

$$\mu_j \geq \tau = \max \sigma_h(A) \quad \text{für } j = 1, 2, \dots$$

Beweis. Man gehe von der zu A gehörenden Spektralschar E_λ und der Beziehung

$$(3.2) \quad (Ax, x) = \int_{r-}^R \lambda(dE_\lambda x, x)$$

aus (s. [8], S. 260). r und R sind hierbei reelle Zahlen, für die

$$r \leq (Ax, x) \leq R \quad \text{für alle } x \in S$$

gilt. Da $\tau \in \sigma_h(A)$, ist nach einem Satz in [8], S. 347, für jedes $\varepsilon > 0$

$$\dim E(\varepsilon)H = \infty \quad \text{mit} \quad E(\varepsilon) = E_{\tau+\varepsilon} - E_{\tau-\varepsilon}.$$

Daher ist $E(\varepsilon)$ eine Projektion auf einen unendlich-dimensionalen Unterraum H_ε . Es ist

$$E_{\tau+\varepsilon}x = x \quad \text{und} \quad E_{\tau-\varepsilon}x = \theta \quad \text{für alle } x \in H_\varepsilon,$$

und aus der Definition des Stieltjes-Integrals folgt für alle $x \in H_\varepsilon$:

$$(Ax, x) = \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \lambda(dE_\lambda x, x) \geq (\tau-\varepsilon) \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} (dE_\lambda x, x) = (\tau-\varepsilon)(x, x).$$

Also gilt

$$(3.3) \quad (Ax, x) \geq \tau - \varepsilon \quad \text{für alle } x \in H_\varepsilon \cap S.$$

Da $\dim H_\varepsilon = \infty$, gibt es zu jedem j einen j -dimensionalen Teilraum M von H_ε , und aus (3.1) und (3.3) folgt

$$\mu_j \geq \tau - \varepsilon \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Unser Ziel ist es u. a. $\mu_j \in \sigma(A)$ zu zeigen. Bekannt ist

Satz 3.2 (s. [4]). *Es ist $\mu_1 \in \sigma(A)$. μ_1 ist Eigenwert von A genau dann, wenn*

$$\mu_1 = \max_{x \in S} (Ax, x).$$

Hieraus folgt

Korollar 3.3. *Ist μ_1 kein max-Wert, so ist $\tau = \mu_1$.*

Angenommen, μ_1 ist ein max-Wert und somit ein Eigenwert von A . Ist x_1 ein zugehöriger Eigenvektor und H_1 das orthogonale Komplement von x_1 in H , so gilt

Lemma 3.4. *Es ist*

$$\mu_{j+1} = \hat{\mu}_j = \sup_{\substack{\dim M = j \\ M \subset H_1}} \min_{x \in M \cap S} (Ax, x).$$

μ_{j+1} ist genau dann ein maxmin-Wert, wenn $\hat{\mu}_j$ einer ist.

Beweis. a) Sei $\dim M = j+1$ und $\hat{M} = M \cap H_1$. Dann ist $\dim \hat{M} \geq j$ und

$$\min_{x \in \hat{M} \cap S} (Ax, x) \geq \min_{x \in M \cap S} (Ax, x).$$

Es folgt

$$\hat{\mu}_j \geq \mu_{j+1}.$$

b) Sei $\hat{M} \subset H_1$ und $\dim \hat{M} = j$. Sei M der von \hat{M} und x_1 aufgespannte $(j+1)$ -dimensionale Teilraum von H . Dann ist

$$\min_{x \in \hat{M} \cap S} (Ax, x) = \min_{x \in M \cap S} (Ax, x),$$

da x_1 Eigenvektor zum größten Eigenwert von A ist. Es folgt

$$\hat{\mu}_j \leq \mu_{j+1}.$$

c) Zusammen ergeben a) und b)

$$\hat{\mu}_j = \mu_{j+1}.$$

Ist einer der beiden Werte ein maxmin-Wert, so liefert a) oder b) denjenigen Teilraum, für den der andere Wert sein Supremum annimmt.

$\hat{\mu}_j$ sind die supmin-Werte von

$$A_1 \cdot = \text{Res } A: H_1 \rightarrow H_1.$$

H/H_1

Es existiert genau dann

$$\hat{\mu}_1 = \max_{x \in H_1 \cap S} (A_1 x, x),$$

wenn μ_2 ein maxmin-Wert ist (Lemma 3.4). Nach Satz 3.2 ist dies gleichwertig damit, daß $\mu_2 = \hat{\mu}_1$ Eigenwert von A_1 , also auch von A ist. Ist $x_2 \in H_1$ ein zugehöriger Eigenvektor, so kann man Lemma 3.4 auf A_1 statt auf A anwenden. Hierbei muß man H_1 durch das orthogonale Komplement H_2 von x_1 und x_2 in H ersetzen. Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man das

Lemma 3.5. Sind $\mu_k, k=1, \dots, m$, maxmin-Werte, so sind sie Eigenwerte von A . Ist H_m das orthogonale Komplement von zugehörigen Eigenvektoren x_1, \dots, x_m und

$$A_m \cdot = \text{Res } A: H_m \rightarrow H_m,$$

H/H_m

so gilt

$$\mu_{j+m} = \hat{\mu}_j = \sup_{\substack{\dim M=j \\ M \subset H_m}} \min_{x \in M \cap S} (A_m x, x),$$

insbesondere ($j=1$)

$$\mu_{m+1} = \sup_{x \in H_m \cap S} (A_m x, x).$$

$\hat{\mu}_j$ ist genau dann ein maxmin-Wert, wenn μ_{j+m} einer ist.

Eine Verallgemeinerung von Korollar 3.3 ist das hieraus folgende

Lemma 3.6. Für ein $j \in N$ sei μ_j kein maxmin-Wert. Dann gilt

$$\tau = \mu_k \quad \text{für } k \geq j.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei j der kleinste Index, für den μ_j kein maxmin-Wert ist. Aus Lemma 3.5 folgt

$$\mu_j = \sup_{x \in H_{j-1} \cap S} (A_{j-1} x, x),$$

wobei *sup* nicht durch *max* ersetzt werden kann. (Wenn $j=1$, dann setze $A_0 \cdot = A$ und $H_0 \cdot = H$.) Korollar 3.3, angewendet auf A_{j-1} , liefert

$$\mu_j \in \sigma_h(A_{j-1}) \subset \sigma_h(A).$$

Es folgt

$$\tau \geq \mu_j.$$

Wegen $\mu_j \geq \mu_k$ für $k \geq j$ folgt aus Lemma 3.1 dann die Behauptung.

Jetzt erhält man sofort den umfassenden

Satz 3.7. Sei A symmetrisch und beschränkt, $\tau = \max \sigma_h(A)$ und μ_j wie in (3.1) definiert. Dann gilt

- a) Ist μ_j ein maxmin-Wert, so auch μ_1, \dots, μ_{j-1} , und μ_1, \dots, μ_j sind Eigenwerte von A . Ist μ_j kein maxmin-Wert, so ist $\mu_j \in \sigma_h(A)$ und $\mu_k = \tau$ für $k \geq j$.
- b) Ist $\tau < \mu_j$, so ist μ_j Eigenwert von A und maxmin-Wert.
- c) Es gilt $\tau = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j$.
- d) Ist $\mu > \tau$ aus $\sigma(A)$, so ist $\mu = \mu_j$ für ein j .

Beweis. Es muß nur noch c) und d) gezeigt werden:

c) Da μ_j für alle j zum Spektrum von A gehört, ist $\tau_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j$ ein Häufungspunkt des Spektrums von A . Aus $\tau \leq \mu_j$ (Lemma 3.1) folgt daher $\tau = \tau_1$.

d) Wegen $\mu > \tau$ ist μ Eigenwert endlicher Vielfachheit von A . Wegen c) gibt es ein j mit

$$\mu_{j+1} \leq \mu \leq \mu_j.$$

Angenommen, es ist

$$\mu_{j+1} < \mu < \mu_j.$$

Dann ist nach b) μ_j ein maxmin-Wert und nach Lemma 3.5

$$(3.4) \quad \mu_{j+1} = \sup_{x \in H_j \cap S} (Ax, x).$$

Ist $y \in S$ ein zu μ gehörender Eigenvektor, so ist $y \in H_j \cap S$ und $(Ay, y) = \mu$ im Widerspruch zu (3.4) und $\mu_{j+1} < \mu$.

Die Häufungspunkte von $\sigma(A)$ sind nach WEYL (s. [8], S. 348) durch folgende Eigenschaft charakterisiert:

Lemma 3.8. Es ist $\mu \in \sigma_h(A)$ genau dann, wenn es eine schwache Nullfolge x_n aus S gibt ($x_n \rightarrow \theta$) mit $(A - \mu E)x_n \rightarrow \theta$.

Von Nutzen sein wird das folgende

Lemma 3.9. x_n sei eine schwache Nullfolge aus S und

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n, x_n).$$

Dann ist

$$\mu \leq \tau \leq \mu_j \quad \text{für } j = 1, 2, \dots$$

Beweis. Nach Satz 3.7 genügt es, $\mu \leq \mu_{j+1}$ zu zeigen, wenn μ_j ein maxmin-Wert ist. Nach Lemma 3.5 ist

$$(3.5) \quad \mu_{j+1} = \sup_{x \in H_j \cap S} (Ax, x).$$

Sei P die orthogonale Projektion auf H_j und $Q = E - P$. Dann ist

$$x_n = Px_n + Qx_n.$$

Aus $x_n \rightarrow \theta$ folgt $Px_n \rightarrow \theta$ und $Qx_n \rightarrow \theta$. Da $Q(H)$ endlich-dimensional ist, konvergiert Qx_n stark gegen θ . Daher gilt

$$\|Px_n\| = \|x_n - Qx_n\| \rightarrow 1, \quad (APx_n, Px_n) \rightarrow \mu.$$

$Px_n \in H_j$ und (3.5) liefern dann $\mu \leq \mu_{j+1}$.

Alle Sätze und Lemmata enthalten eine duale Aussage, wenn man *sup* durch *inf*, *min* durch *max* und τ durch $\tau' = \min \sigma_h(A)$ ersetzt. Ist A vollstetig, so ist $\tau = \tau' = 0$, und Satz 3.7 ist bekannt.

4. Das Spektrum von Operatorscharen mit Rayleighfunktionalen

Jetzt liege wieder eine Rogerssche Schar $T(\lambda)$ vor. Die λ_j seien durch (2.3), die $\mu_j(\lambda)$ durch (2.4) definiert. Als erstes Ergebnis erhält man sofort:

Satz 4.1. *Ist $\lambda_j < \infty$, so ist $\lambda_j \in \sigma(T)$. Ist λ_j ein maxmin-Wert, so ist λ_j Eigenwert von T .*

Beweis. (2.5) zufolge ist

$$\mu_j(\lambda_j) = 0.$$

Satz 3.7 a liefert

$$0 \in \sigma(-T(\lambda_j)) = -\sigma(T(\lambda_j)).$$

$\lambda_j \in \sigma(T)$ folgt dann aus (1.2).

Ist λ_j ein maxmin-Wert, so ist $\mu_j(\lambda_j)$ ein maxmin-Wert (Lemma 2.2) und nach Satz 3.7 a

$$0 \in \sigma_p(T(\lambda_j))$$

und somit $\lambda_j \in \sigma_p(T)$.

In §3 haben wir gesehen, daß sich das Spektrum eines symmetrischen Operators A außerhalb $I_0 = [\tau', \tau]$ wie das Spektrum eines vollstetigen Operators verhält. Lemma 3.9 legt es nahe, im nichtlinearen Fall an die Stelle von I_0 die Menge

$$(4.1) \quad G = \{ \lambda \mid \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n) \text{ für eine schwache Nullfolge } x_n \in S \}$$

zu setzen. Hierbei werde

$$+\infty \in G \quad \text{und} \quad -\infty \in G$$

nicht ausgeschlossen. Es wird sich zeigen, daß sich $\sigma(T)$ in

$$(4.2) \quad G_p = \{ \lambda \mid \lambda \in \overline{W(T)}, \lambda > \sup G \}, \quad G_n = \{ \lambda \mid \lambda \in \overline{W(T)}, \lambda < \inf G \}$$

wie $\sigma(A)$ in $\{ \mu \mid \mu > \tau \}$ und $\{ \mu \mid \mu < \tau' \}$ verhält. ($\overline{W(T)}$ sei der Abschluß von $W(T)$ in der gewöhnlichen Topologie der reellen Zahlen.)

Einen in G_p , bzw. in G_n liegenden Eigenwert von T nennen wir einen *P-Eigenwert*, bzw. einen *N-Eigenwert*. P und N sollen auf die Begriffe *positiv* und *negativ* Bezug haben, da im linearen Fall (1.1) für vollstetiges A $G = \{0\}$ ist und G_p aus dem *positiven* und G_n aus dem *negativen* Teil des Wertebereichs von A besteht.

Setzt man

$$G_0 = G - \{ +\infty, -\infty \},$$

so zeigt das nachfolgende Lemma:

$$\overline{W(T)} = G_n \cup G_0 \cup G_p.$$

Lemma 4.2. *G ist nichtleer, konvex und in $R \cup \{+\infty, -\infty\}$ abgeschlossen.*

Beweis. 1. Da es in H wegen $\dim H = \infty$ stets eine schwache Nullfolge aus S gibt, ist $G \neq \emptyset$.

2. Seien x_n und y_n schwache Nullfolgen aus S und

$$p(x_n) < c < p(y_n) \quad \text{für alle } n.$$

Zu zeigen ist $c \in G$. Aus der Stetigkeit von p folgt die Existenz von $a_n, b_n \in R$, so daß

$$z_n = a_n x_n + b_n y_n \in S \quad \text{und} \quad p(z_n) = c.$$

Da man wegen der schwachen Null-Konvergenz $(x_n, y_n) \rightarrow 0$ annehmen kann, sind die a_n und b_n beschränkt, und es gilt

$$z_n \rightarrow \theta \quad \text{und} \quad c \in G.$$

3. Sei g_n eine Folge aus G , die gegen ein $g \in [-\infty, +\infty]$ konvergiert. Zu zeigen ist: $g \in G$. Nach Definition von G gibt es Folgen (x_k^n) aus S mit

$$x_k^n \rightarrow \theta \quad \text{und} \quad p(x_k^n) \rightarrow g_n \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Wegen der schwachen Null-Konvergenz gibt es zu jedem n ein $k(n)$, so daß für die Folge

$$(4.3) \quad y_n = x_{k(n)}^n$$

$$(4.4) \quad |(y_n, y_m)| \leq 1/n \quad \text{für } m = 1, \dots, n-1$$

gilt. Wegen der schwachen Kompaktheit von S kann

$$y_n \rightarrow y$$

angenommen werden. Aus (4.4) folgt $y = \theta$ und aus (4.3) $g \in G$.

Mit Hilfe von

$$\tau(\lambda) = \max \sigma_h(-T(\lambda))$$

kann G_p charakterisiert werden:

Lemma 4.3. *Sei $\lambda < \lambda_1$. Dann gilt*

$$\lambda \in G_p \Leftrightarrow \tau(\lambda) < 0.$$

Beweis. 1. Sei $\tau(\lambda) < 0$. Falls $\lambda \notin G_p$, gibt es eine schwache Nullfolge x_n aus S mit

$$(4.5) \quad p(x_n) \rightarrow g, \quad g \geq \lambda.$$

Indem man zu einer geeigneten Teilfolge von x_n übergeht, sichert man die Existenz von

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} (-T(\lambda) x_n, x_n).$$

Aus (4.5) und Lemma 1.1 folgt $a \geq 0$ im Widerspruch zu $\tau(\lambda) < 0$ und Lemma 3.9.

2. Sei $\lambda \in G_p$. Nach Lemma 3.8 gibt es eine schwache Nullfolge x_n aus S mit

$$(4.6) \quad (-T(\lambda)x_n, x_n) \rightarrow \tau(\lambda).$$

a) Angenommen, es ist $\tau(\lambda) > 0$. Dann schließt man aus (4.6) und Lemma 1.1 $\lambda < p(x_n)$ für hinreichend große n . Geht man zu einer Teilfolge von x_n über, so daß $p(x_n)$ konvergiert, so erhält man einen Widerspruch zu $\lambda \in G_p$.

b) Sei $\tau(\lambda) = 0$. Wegen $\lambda < \lambda_1$ ist nach Lemma 2.1

$$\mu_1(\lambda) > 0 = \tau(\lambda),$$

und nach Satz 3.7b gibt es ein $y \neq \theta$ mit

$$-T(\lambda)y = \mu_1(\lambda)y.$$

$\mu_1(\lambda) > 0$ und (4.6) sichern die Existenz einer reellen Folge ε_n mit

$$\varepsilon_n \rightarrow 0, \quad (-T(\lambda)[x_n + \varepsilon_n y], x_n + \varepsilon_n y) > 0.$$

Lemma 1.1 liefert $\lambda < p(z_n)$ für die schwache Nullfolge $z_n = x_n + \varepsilon_n y$ im Widerspruch zu $\lambda \in G_p$.

Die sup-min-Werte des Rayleighquotienten eines vollstetigen Operators sind bei unendlicher Raumdimension stets nichtnegativ. Entsprechend gilt

Lemma 4.4. $\lambda_j \notin G_n$ für $j = 1, 2, \dots$

Beweis. Da es zu jedem j -dimensionalen Teilraum M von H ein $x_M \in M \cap S$ mit $p(x_M) \leq \lambda_j$ gibt und H abzählbar unendlich viele zueinander orthogonale j -dimensionale Teilräume enthält, existiert ein Orthonormalsystem x_n mit $p(x_n) \leq \lambda_j$. x_n ist eine schwache Nullfolge, folglich ist $\lambda_j \geq \inf G$, und die Behauptung ist bewiesen.

Ist $0 = \mu_j(\lambda_j)$ ein maxmin-Wert, so ist zwar λ_j Eigenwert von T , da nach Satz 3.7 $\mu = 0$ Eigenwert von $T(\lambda_j)$ ist, aber nicht notwendig ist λ_j selbst ein maxmin-Wert. Hinreichend und notwendig wäre nach Lemma 2.2, daß λ_j zu $W(T)$ gehört. Wir zeigen:

Satz 4.5. Ist $G_p \neq \emptyset$, so ist $W(T)$ nach oben beschränkt und abgeschlossen (d.h. $\lambda_j < \infty$ und $\lambda_j \in W(T)$ für $j = 1, 2, \dots$).

Beweis. Es genügt, $\lambda_1 \in W(T)$ zu zeigen. Es gibt eine Folge y_n aus S mit

$$(4.7) \quad p(y_n) \rightarrow \lambda_1.$$

Da S schwach kompakt ist, kann man

$$(4.8) \quad y_n \rightharpoonup y$$

für ein $y \in H$ annehmen. Wegen $G_p \neq \emptyset$ ist $\lambda_1 \in G_p$ und daher $y \neq \theta$. Folglich ist $\alpha = p(y)$ definiert. Wenn y_n stark gegen y konvergiert, ist $\alpha = \lambda_1$, und wir sind fertig. Bleibt der Fall

$$\alpha < \lambda_1, \quad z_n = (y_n - y) / \|y_n - y\| \rightharpoonup \theta$$

zu untersuchen. Da G_p nichtleer und offen ist, gibt es ein $\lambda \in G_p$ mit

$$\alpha < \lambda < \lambda_1.$$

Dann folgt aus (4.7) und (4.8) mit Hilfe von Lemma 1.1

$$(-T(\lambda)[y_n - y], y_n - y) = (-T(\lambda)y_n, y_n) - (T(\lambda)y, y) + 2\operatorname{Re}(T(\lambda)y, y_n) > 0$$

für hinreichend große n .

Folglich ist $\underline{\lim} (-T(\lambda)z_n, z_n) \geq 0$. Nach Lemma 3.9 ist daher $\tau(\lambda) \geq 0$ im Widerspruch zu $\lambda \in G_p$ und $\lambda < \lambda_1$ (Lemma 4.3).

Analog zu Lemma 3.6 gilt

Lemma 4.6. *Wenn λ_j kein maxmin-Wert ist, gehört λ_j zu G .*

Beweis. Wenn $\lambda_j \notin G_p$, so ist $\lambda_j \in G$, da G_n nach Lemma 4.4 nicht in Frage kommt. Sei also $\lambda_j \in G_p$. Nach Satz 4.5 liegt λ_j in $W(T)$, und nach Lemma 2.2 ist $0 = \mu_j(\lambda_j)$ kein maxmin-Wert. Lemma 3.6 ergibt $\tau(\lambda_j) = 0$ und Lemma 4.3 $\lambda_j = \lambda_1$.

Ohne Einschränkung seien $\lambda_1 = \lambda_k$, $k = 1, \dots, j-1$, maxmin-Werte. Somit ist λ_1 $(j-1)$ -facher Eigenwert von T (Satz 4.1). Sei H_j das orthogonale Komplement des Eigenraums. Zu jedem j -dimensionalen Teilraum M von H gibt es ein $y_M \in M \cap H_j \cap S$ mit

$$\lambda_j \geq p(y_M) \geq \min_{x \in M \cap S} p(x).$$

Nach Definition von λ_j gibt es daher eine Folge $y_n \in H_j$ mit

$$(4.9) \quad p(y_n) \rightarrow \lambda_j.$$

Man kann wegen der schwachen Kompaktheit von $S \cap H_j$

$$(4.10) \quad y_n \rightharpoonup y \quad \text{für ein } y \in H_j$$

annehmen. Im Beweis von Satz 4.5 haben wir gesehen, daß aus (4.7) und (4.8) $p(y) = \lambda_1$ folgt. Genauso folgt aus (4.9) und (4.10)

$$p(y) = \lambda_j = \lambda_1.$$

Da $y \in H_j$, gibt es nach Lemma 1.1 einen j -dimensionalen Teilraum M mit

$$(-T(\lambda_j)x, x) = 0 \quad \text{für alle } x \in M$$

im Widerspruch dazu, daß $\mu_j(\lambda_j)$ kein maxmin-Wert ist.

Jetzt können wir beweisen, daß sich das Spektrum von T außerhalb G (und innerhalb $W(T)$) wie das Spektrum eines vollstetigen Operators verhält:

Hauptsatz. *$T(\lambda)$ sei Rogerssch mit dem Rayleighfunktional $p(x)$ und dem Wertebereich $W(T)$. Die Mengen G , G_p und G_n seien durch (4.1) und (4.2) und die supmin-Werte λ_j durch (2.3) definiert. Dann gilt:*

- Wenn $\lambda_j \in G_p$, dann ist λ_j Eigenwert von T und maxmin-Wert.
- $\sigma(T) \cap G_p$ besteht aus höchstens abzählbar unendlich vielen P -Eigenwerten.
- Alle P -Eigenwerte haben endlich-dimensionale Eigenräume.
- Die P -Eigenwerte lassen sich zu $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots$ anordnen, und es gilt das verallgemeinerte Ritzsche Extremalprinzip:

$$(4.11) \quad \alpha_j = \lambda_j = \max_{\dim M = j} \min_{x \in M^0} p(x), \quad j = 1, 2, \dots$$

e) Es gelten die zu a)–d) dualen Aussagen, wenn man G_p durch G_n ersetzt und max und min vertauscht.

f) Ist a ein (nicht notwendig endlicher) Häufungspunkt von Eigenwerten von T in $W(T)$, so liegt a in G . Ist $|a| < \infty$, so ist $a \in \sigma(T)$.

Beweis. a) Sei $\lambda_j \in G_p$. Nach Lemma 4.6 ist λ_j maxmin-Wert und nach Satz 4.1 Eigenwert.

b) Sei $\lambda \in \sigma(T) \cap G_p$. Wegen a) genügt es, $\lambda = \lambda_j$ für ein j zu zeigen. Ohne Einschränkung sei $\lambda < \lambda_1$. Nach Lemma 4.3 ist $\tau(\lambda) < 0$. Da $0 \in \sigma(-T(\lambda))$, gibt es daher nach Satz 3.7 ein j mit $0 = \mu_j(\lambda)$, und $\mu_j(\lambda)$ ist ein maxmin-Wert. Da $\lambda \in G_p$, ist G_p nichtleer, und nach Satz 4.5 ist $\lambda \in W(T)$. Aus Lemma 2.2 folgt dann $\lambda = \lambda_j$.

c) Sei

$$T(\lambda)x = \theta \quad \text{für } x \in M, \quad \dim M = \infty.$$

Nach Lemma 1.1 ist dann $\lambda = p(x)$ für alle $x \in M^0$. Da M unendlich-dimensional ist, enthält $M \cap S$ eine schwache Nullfolge x_n . Für sie gilt

$$\lambda = p(x_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Dann ist $\lambda \in G$.

d) Aus dem Beweis von b) folgt: Jeder P -Eigenwert ist gleich einem λ_j . Aus a) folgt dann d).

e) ist klar.

f) Sei $a = \infty$, ohne Einschränkung sei $a = +\infty$. Nach Satz 4.5 ist G_p leer. Da G stets nichtleer ist (Lemma 4.2), gilt $a \in G$.

Sei $|a| < \infty$ und

$$T(\alpha_n)x_n = \theta, \quad x_n \in S, \quad \alpha_n \rightarrow a.$$

Dann folgt

$$\|T(a)x_n\| \leq \|(T(a) - T(\alpha_n))x_n\| + \|T(\alpha_n)x_n\| \leq \|T(a) - T(\alpha_n)\| \rightarrow 0.$$

Danach gehört Null zu $\sigma(T(a))$ und nach (1.2) ist $a \in \sigma(T)$. Angenommen, es ist $a \notin G$. Ohne Einschränkung gelte $a \in G_p$; dann ist $a = \lambda_j$ für ein j , und es gibt ein k mit $\lambda_k < \lambda_j = a$. Dann kann a aber kein Häufungspunkt von Eigenwerten sein.

Natürlich sind die Aussagen des Hauptsatzes um so weitreichender, je kleiner das Intervall G ist. Das Günstigste wäre

$$G = \{a\} \quad \text{für ein } a \in [-\infty, +\infty],$$

wie z. B. im linearen Fall

$$(4.12) \quad T(\lambda) = \lambda E - A, \quad A \text{ vollstetig.}$$

(Dort ist $G = \{0\}$.)

5. Eine Vollstetigkeitsbedingung

Eine natürliche Verallgemeinerung der Vollstetigkeit von A in (4.12) ist:

(V) Zu jedem $\lambda \in \overline{W(T)}$ gibt es eine reelle Zahl $v(\lambda)$, so daß $V(\lambda) = v(\lambda)E - T(\lambda)$ vollstetig ist.

Mit $v(\lambda) = \lambda$ ist die Vollstetigkeitsbedingung (V) für (4.12) erfüllt. Ist (V) für eine Operatorenschar $T(\lambda)$ erfüllt, so ist offensichtlich $v(\lambda)$ der einzige Häufungspunkt des Spektrums von $T(\lambda)$ und daher

$$\tau(\lambda) = -v(\lambda).$$

Aus Lemma 4.3 folgt sofort

Satz 5.1. Die Rogerssche Schar $T(\lambda)$ erfülle die Vollstetigkeitsbedingung (V). Sei λ ein innerer Punkt von $W(T)$. Dann gilt:

$$\lambda \in G_p \Leftrightarrow v(\lambda) > 0$$

$$\lambda \in G_0 \Leftrightarrow v(\lambda) = 0$$

$$\lambda \in G_n \Leftrightarrow v(\lambda) < 0.$$

Ferner gilt:

$$\lambda \in \text{Rd } W(T) \cap G_0 \Rightarrow v(\lambda) = 0.$$

Beweis. Wegen Lemma 4.3 genügt es,

$$\lambda \in G_0 \Rightarrow v(\lambda) = 0$$

zu zeigen. Zu $\lambda \in G_0$ gibt es eine schwache Nullfolge x_n aus S mit

$$p(x_n) \rightarrow \lambda.$$

Aus Lemma 1.1 folgt

$$(T(\lambda)x_n, x_n) \rightarrow 0,$$

und aus (V) und $V(\lambda)x_n \rightarrow \theta$

$$v(\lambda) = 0.$$

Das wichtigste Ergebnis von Satz 5.1 ist, daß die für den Hauptsatz wichtigen Bereiche G_p , $G_0 = G - \{-\infty, +\infty\}$ und G_n durch $v(\lambda)$ bestimmt sind.

Aus Satz 5.1 ergibt sich weiterhin, daß $v(\lambda)$ eine charakteristische Gestalt haben muß, wenn $T(\lambda)$ Rogerssch ist: Im Intervall G_0 verschwindet $v(\lambda)$, rechts von G_0 ist $v(\lambda)$ positiv, links von G_0 negativ – mit eventueller Ausnahme der Randpunkte von $W(T)$. G_0 wird in der Regel aus höchstens einer Zahl bestehen, z. B., wenn $v(\lambda)$ analytisch ist.

Ist $v(\lambda) > 0$ für alle $\lambda \in \overline{W(T)}$, so schließt man sofort aus Satz 5.1: G_n und G_0 sind leer, während $G_p = \overline{W(T)}$ ist. Nach Satz 4.5 ist $W(T)$ nach oben beschränkt, dagegen kann $W(T)$ nicht nach unten beschränkt sein, da wegen $G \neq \emptyset$ (Lemma 4.2) $G = \{-\infty\}$ sein muß. Der Hauptsatz sagt dann u. a. aus, daß es abzählbar unendlich viele Eigenwerte (4.11) gibt, die sich bei $-\infty$ häufen. Die Ergebnisse von [10] für $v(\lambda) \equiv 1$ ordnen sich damit den Aussagen des Hauptsatzes unter.

In [3] sind ebenfalls Rogerssche Scharen, die (V) erfüllen, unter allerdings etwas stärkeren Voraussetzungen als in dieser Arbeit untersucht worden. Dort sind auch Extremalprinzipien für Eigenwerte angegeben worden, doch ohne eine Satz 5.1 entsprechende Charakterisierung von Bereichen G_p und G_n , in denen die Extremalprinzipien gelten.

6. Anwendungen

Die Ergebnisse der Arbeiten [5], [6], [12] und [13] über quadratische Scharen und Polynombüschel lassen sich zum großen Teil aus dem Hauptsatz ableiten:

1. In [12] wird das Spektrum der Schar

$$(6.1) \quad T(\lambda) = \lambda^2 B - \lambda E - A$$

A, B symmetrisch, positiv-definit und vollstetig

untersucht. $T(\lambda)$, bzw. $\hat{T}(\lambda) = -T(\lambda)$ sind Rogerssch mit der positiven Wurzel $p_+(x)$, bzw. der negativen Wurzel $p_-(x)$ von $(T(\lambda)x, x) = 0$ als Rayleighfunktional. Im ersten Fall ist $W(T) \subset (0, \infty)$, (V) ist erfüllt mit $v(\lambda) = -\lambda$ und daher nach Satz 5.1

$$G_0 = \emptyset, \quad G_p = \emptyset, \quad G_n = W(T) \quad \text{und} \quad G = \{+\infty\}.$$

Im zweiten Fall ist $W(T) \subset (-\infty, 0)$, $v(\lambda) = \lambda$ und deshalb

$$G = G_0 = \{0\}, \quad G_p = \emptyset \quad \text{und} \quad G_n = W(T).$$

2. In [5] wird das Spektrum der Schar

$$(6.2) \quad T(\lambda) = \lambda^2 E + \lambda B + C$$

B, C symmetrisch, positiv-definit, C vollstetig

$$(Bx, x)^2 > 4(x, x)(Cx, x) \quad \text{für} \quad x \neq \theta$$

untersucht. Das Rayleighfunktional $p(x)$ ist die größere der beiden Wurzeln von $(T(\lambda)x, x) = 0$. Es ist $W(T) \subset (-\infty, 0)$, jedoch ist (V) nicht erfüllt. Dennoch läßt sich leicht berechnen:

$$G = G_0 = \{0\}, \quad G_p = \emptyset \quad \text{und} \quad G_n = W(T).$$

3. Sei

$$(6.3) \quad T(\lambda) = Q(\lambda) - A$$

$A, Q(\lambda)$ symmetrisch, A vollstetig und positiv-definit

$$(Q(\lambda)x, x) \geq k\lambda \quad \text{für eine Konstante } k > 0, \text{ alle } x \in S \text{ und } \lambda \geq 0.$$

Dann ist $T(\lambda)$ Rogerssch mit der eindeutig bestimmten positiven Lösung $p(x)$ von $(T(\lambda)x, x) = 0$ als Rayleighfunktional. (Das Polynombüschel in [13] gehört zur Klasse (6.3).) Sei x_n eine schwache Nullfolge aus S . Dann gilt

$$(Ax_n, x_n) \rightarrow 0$$

$$(-T(\lambda)x_n, x_n) \leq -k\lambda + (Ax_n, x_n).$$

Es folgt aus Lemma 3.9:

$$\tau(\lambda) \leq -k\lambda < 0 \quad \text{für } \lambda > 0$$

und aus Lemma 4.3 und $G \neq \emptyset$:

$$G_p = W(T) \quad \text{und} \quad G = G_0 = \{0\}.$$

Für die Scharen (6.1)–(6.3) ergeben sich also die Aussagen a)–f) des Hauptsatzes. In allen Fällen ist $G = \{a\}$ für ein $a \in [-\infty, +\infty]$.

7. Schlußbemerkungen

Anwendungen des Hauptsatzes auf Randeigenwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen mit nichtlinear auftretendem Eigenwertparameter (wie z. B. die Randeigenwertaufgabe (1)), die sich in eine Aufgabe $T(\lambda)x = \theta$ mit einer Rogersschen Schar $T(\lambda)$ überführen lassen, sind möglich und sollen nebst numerischer Durchführung im einzelnen an anderer Stelle erfolgen.

Literatur

1. COLLATZ, L., Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Leipzig 1949.
2. HADELER, K.P., Mehrparametrische und nichtlineare Eigenwertaufgaben. Arch. Rational Mech. Anal. **27**, 306–328 (1967).
3. HADELER, K.P., Variationsprinzipien bei nichtlinearen Eigenwertaufgaben. Arch. Rational Mech. Anal. **30**, 297–307 (1968).
4. HILDEBRANDT, S., Über den numerischen Wertebereich eines Operators. Math. Ann. **163**, 230–247 (1966).
5. LANGER, H., Spektraltheorie linearer Operatoren in J -Räumen und einige Anwendungen auf die Schar $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$. Habilitationsschrift, Techn. Univ. Dresden 1965.
6. LANGER, H., Über stark gedämpfte Scharen in Hilberträumen. J. of Math. Mech. **17**, 685–705 (1968).
7. MÜLLER, P.H., & H. KUMMER, Zur praktischen Bestimmung nichtlinear auftretender Eigenwerte, ZAMM **40**, 136–143 (1960).
8. RIESZ, F., & B. NAGY, Vorlesungen über Funktionalanalysis. Berlin: Deutscher Verl. d. Wiss. 1968.
9. ROGERS, E.H., A minimax theory for overdamped systems. Arch. Rational Mech. Anal. **16**, 89–96 (1964).
10. ROGERS, E.H., Variational Properties of nonlinear spectra. J. of Math. Mech. **18**, 479–490 (1968).
11. STENGER, W., On the variation principles for eigenvalues for a class of unbounded operators. J. of Math. Mech. **17**, 641–648 (1968).
12. TURNER, R.E.L., Some variational principles for a nonlinear eigenvalue problem. J. Math. Anal. and Appl. **17**, 151–160 (1967).
13. TURNER, R.E.L., A class of nonlinear eigenvalue problems. J. of Funct. Anal. **7**, 297–322 (1968).

Institut für Angewandte Mathematik
2000 Hamburg 13
Rothenbaumchaussee 41

(Eingegangen am 19. Januar 1971)