Esistenza e Regolarità delle Ipersuperfici di Curvatura Media Assegnata in R^n

UMBERTO MASSARI

Memoria presentata da J. SERRIN

Introduzione

In questo lavoro, si estendono i risultati di esistenza e regolarità, ottenuti da E. DE GIORGI in [4] per le frontiere orientate di misura minima, al caso di frontiere di insiemi che minimizzano un tipo di funzionale più generale di quello dell'area. Questo nuovo funzionale, oltre al termine riguardante l'area, ne contiene anche un altro che coinvolge la curvatura media.

Con più precisione, il problema considerato è il seguente. Sia K un compatto di R^n $(n \geqq 2)$, $A(x)$ una funzione integrabile su K ed M un insieme di perimetro localmente finito in R^n (vedi [7], paragrafo 3). Indicata con φ_E la funzione caratteristica dell'insieme E e, per un insieme di perimetro localmente finito F, con $|D\varphi_F|$ la variazione totale della misura vettoriale avente per componenti le derivate misure $D_i\varphi_F$ della funzione caratteristica di F, noi ci proponiamo di minimizzare il funzionale

$$\mathscr{I}_A(F) = \int_K |D\varphi_F| + \int_K \varphi_F(x) A(x)\, dx$$

nella classe degli insiemi di perimetro localemente finito che, fuori di K, sono uguali ad M.

Per comprendere meglio la natura del funzionale $\mathscr{I}_A(F)$ ed il modo con cui, in esso, interviene la «curvatura media», è utile considerare il seguente caso particolare. Sia $K = \bar{\Omega} \times [-r, r]$, dove Ω è un aperto limitato di R^{n-1} con frontiera lipschitziana ed r è una costante positiva, $A(x)$ una funzione continua su K ed M il semispazio $\{x \in R^n;\ x_n < 0\}$. Suppongo che l'insieme E minimizzi il funzionale $\mathscr{I}_A(F)$ e che esista una funzione f, definita in Ω e di classe C^2, tale che, posto $y = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, sia

$$-r < f(y) < r \qquad \text{per ogni } y \in \Omega$$

e

$$E \cap K = \{x \in R^n;\ y \in \Omega,\ -r \leqq x_n \leqq f(y)\}.$$

Allora il funzionale assume la seguente forma:

$$\mathscr{I}_A(F) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Df(y)|^2}\, dy + \int_\Omega dy \int_{-r}^{f(y)} A(y, x_n)\, dx_n + \int_{\partial\Omega} |f|\, dH_{n-1}$$

Ora, f minimizza il funzionale costituito dai primi due integrali dell'espressione precedente nella classe delle funzioni regolari che sulla frontiera di Ω coincidono con f, allora f verifica in Ω l'equazione di Eulero associata a tale funzionale

$$\sum_{i=1}^{n-1} D_i\left(\frac{D_i f(y)}{\sqrt{1+|Df(y)|^2}}\right)=A(y,f(y)).$$

che è proprio l'equazione delle superfici con curvatura media assegnata. Più in generale, se E minimizza $\mathscr{I}_A(F)$, con $A(x)$ continua e se la frontiera di E all'interno di K è una ipersuperficie di classe C^2, allora la curvatura media in senso classico di tale frontiera coincide con $A(x)$.

Nella prima parte di questo lavoro (paragrafo 1) dimostrerò un teorema di esistenza; nella seconda (paragrafi 2, 3, 4, e 5), con lo stesso metodo usato da DE GIORGI per gli insiemi di frontiera minima, studierò la regolarità della frontiera di una soluzione del problema, nel caso particolare in cui sia $|A(x)|\leqq$costante.

I teoremi fondamentali sono nei paragrafi 4 e 5, nei quali dimostro che, se E realizza il minimo per il funzionale considerato in un aperto Ω, allora esiste un aperto Ω_0 contenuto in Ω, tale che la parte della frontiera di E in Ω_0 è una ipersuperficie di classe $C^{1,\alpha}$, per un opportuno α: $0<\alpha<1$, e l'eventuale insieme dei punti singolari ha H_s misura nulla per ogni $s>n-8$ (dove H_s è la misura di Hausdorff s-dimensionale).

W. K. ALLARD in [1], considera il problema della regolarità di «varifolds», le quali verificano una ipotesi relativa alla curvatura media. I risultati di [1] sono tuttavia difficilmente confrontabili con quelli della presente nota.

1. Teorema di Esistenza

Riconsideriamo il problema formulato nell'introduzione. Sia $M\subset R^n$ $(n\geqq 2)$ un dato insieme di perimetro localmente finito, K un compatto di R^n, ed $A(x)$ una assegnata funzione, definita e sommabile su K. Presa la seguente classe di insiemi

$$\mathscr{F}=\{F\subset R^n \text{ di perimetro localmente finito con } F-K=M-K\},$$

su di essa considero il funzionale

$$\mathscr{I}_A(F)=\int_K |D\varphi_F|+\int_K \varphi_F(x)\,A(x)\,dx$$

Teorema 1.1. *Nella classe $\mathscr{F}$ esiste un insieme E tale che*

$$\mathscr{I}_A(E)=m=\inf\{\mathscr{I}_A(F);\, F\in\mathscr{F}\}. \tag{1.1}$$

Dimostrazione. Questo teorema si prova con metodo diretto, sfruttando il teorema di compattezza per gli insiemi di perimetro localmente finito e la semicontinuità del funzionale $\mathscr{I}_A(F)$. Osservo prima di tutto che

$$-\infty<m<+\infty. \tag{1.2}$$

Infatti, l'insieme M sta in $\mathscr{F}$, allora:

$$m\leqq\mathscr{I}_A(M)\leqq\int_K |D\varphi_M|+\int_K |A(x)|\,dx<+\infty.$$

D'altra parte, per ogni $F\in\mathscr{F}$, risulta $\mathscr{I}_A(F)\geqq-\int_K |A(x)|\,dx$ e quindi $m>-\infty$.

Sia allora $\{F_h\}$ una successione minimizzante, cioé una successione di elementi di $\mathscr{F}$ tale che

$$m = \lim_{h\to\infty} \mathscr{I}_A(F_h). \tag{1.3}$$

Esisterà ora una costante C tale che $|\mathscr{I}_A(F_h)| \leqq C$ e quindi, se Ω è un aperto limitato contenente K, si ha

$$\int_\Omega |D\varphi_{F_h}| = \int_K |D\varphi_{F_h}| + \int_{\Omega-K} |D\varphi_M| \leqq C + \int_K |A(x)|\,dx + \int_{\Omega-K} |D\varphi_M| = C'(\Omega). \tag{1.4}$$

Ne segue che alla successione F_h posso applicare il teorema di compattezza per gli insiemi di perimetro localmente finito (vedi Teorema 1.6 di [7]), allora esiste una sottosuccessione della successione data, che io indico ancora con F_h, tale che

$$\varphi_{F_h} \to \varphi_E \quad \text{in } L^1_{\mathrm{loc}}(R^n), \tag{1.5}$$

dove E è un insieme di perimetro localmente finito. Siccome E risulta uguale ad M fuori di K, E sta nella classe $\mathscr{F}$.

Se vale (1.5) si ha, per ogni aperto limitato Ω di R^n,

$$\int_\Omega |D\varphi_E| \leqq \min\lim_{h\to\infty} \int_\Omega |D\varphi_{F_h}|, \tag{1.6}$$

e quindi, se $K \subset \Omega$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_K |D\varphi_E| &= \int_\Omega |D\varphi_E| - \int_{\Omega-K} |D\varphi_E| \\ &\leqq \min\lim_{h\to\infty} \Big(\int_\Omega |D\varphi_{F_h}| - \int_{\Omega-K} |D\varphi_{F_h}|\Big) = \min\lim_{h\to\infty} \int_K |D\varphi_{F_h}|.\end{aligned} \tag{1.7}$$

D'altra parte, il secondo termine del nostro funzionale è continuo rispetto alla convergenza in $L^1_{\mathrm{loc}}(R^n)$, cioé vale la relazione

$$\int_K \varphi_E(x)\,A(x)\,dx = \lim_{h\to\infty} \int_K \varphi_{F_h}(x)\,A(x)\,dx. \tag{1.8}$$

Allora da (1.7) e (1.8), ottengo

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_A(E) &\leqq \min\lim_{h\to\infty} \int_K |D\varphi_{F_h}| + \lim_{h\to\infty} \int_K \varphi_{F_h}(x)\,A(x)\,dx \\ &= \min\lim_{h\to\infty} \mathscr{I}_A(F_h) = m.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Da quest'ultima relazione e dal fatto che $E \in \mathscr{F}$, ne segue che deve valere $\mathscr{I}_A(E) = m$. Il teorema resta così dimostrato.

Osservazione. Nella formulazione del problema di Plateau da noi data, non a caso l'insieme K è stato scelto chiuso, infatti se, per esempio, si prendesse un insieme K aperto, allora non avrebbe senso considerare il problema al contorno, perché in questo caso il primo membro del funzionale non terrebbe conto della massa concentrata sulla frontiera di K.

Qualora $A(x)$ sia identicamente zero, il funzionale considerato si riduce a quello dell'area. In questo caso sono noti risultati di regolarità per la frontiera di E. In particolare De Giorgi in [4] ha dimostrato che, se E ha frontiera orientata di misura minima in un aperto A di R^n, allora esiste un sottinsieme aperto della frontiera di E in A, che è una ipersuperficie analitica $(n-1)$-dimensionale. H. FEDERER ha poi studiato l'insieme degli eventuali punti singolari, dimostrando in [6] che tale insieme ha H_s misura nulla, per ogni numero reale s maggiore di $n-8$. Quindi, se $n \leqq 7$, non esistono punti singolari. Si proverà qui un risultato analogo nel caso in cui E minimizza il funzionale $\mathscr{F}_A(F)$, dove la funzione $A(x)$ si suppone limitata.

In primo luogo, dimostrerò nel paragrafo 2 alcune diseguaglianze utili per ottenere i lemmi del paragrafo 3, che sono i risultati che mi permetteranno di effettuare la regolarizzazione della frontiera di E.

2. Alcune Diseguaglianze

Indicherò con $B_\rho(x)=\{y \in R^n;\ |y-x|<\rho\}$, con $B_\rho=B_\rho(0)$ e con ω_n la misura della sfera unità n-dimensionale. Ancora, dato un insieme E, indicherò con $\bar{E}$ la sua chiusura, con ∂E la sua «frontiera essenziale», cioé l'insieme di quei punti di R^n tali che ogni loro intorno interseca sia E che il complementare di E in insiemi di misura n-dimensionale positiva, e, se E ha perimetro localmente finito, con $\partial^* E$ la sua «frontiera ridotta», cioé l'insieme dei punti di ∂E, per i quali esiste il limite

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\int_{B_\rho(x)} D\varphi_E}{\int_{B_\rho(x)} |D\varphi_E|} = \nu(x) \qquad \text{e } |\nu(x)|=1.$$

Osservo che, per il teorema di Lebesgue-Vitali, il limite considerato esiste e il suo modulo vale 1 quasi ovunque rispetto alla misura $|D\varphi_E|$.

Se E è un insieme di perimetro localmente finito e C è un compatto di R^n, poniamo

$$\Theta(E, C)=\inf\Big\{\int_C |D\varphi_F|;\ F-C=E-C\Big\}, \tag{2.1}$$

$$\Psi(E, C)=\int_C |D\varphi_E|-\Theta(E, C). \tag{2.2}$$

Per brevità scriveremo $\Theta(E, \rho)=\Theta(E, \bar{B}_\rho(0))$ e $\Psi(E, \rho)=\Psi(E, \bar{B}_\rho(0))$. In seguito ci saranno utili le seguenti diseguaglianze:

Teorema 2.1. *Se E e L sono due insiemi di perimetro localmente finito, $x \in R^n$, $n \geqq 2$, $r>0$, $\rho>0$, $\rho<r$; allora*

$$|\Theta(E, \bar{B}_\rho(x))-\Theta(L, \bar{B}_\rho(x))| \leqq \int_{|y-x|=\rho} |\varphi_E(y)-\varphi_L(y)|\, dH_{n-1} \tag{2.3}$$

$$\cdot \Big[\int_{|y-x|=1} \varphi_E(x+r(y-x))-\varphi_E(x+\rho(y-x))|\, dH_{n-1}\Big]^2$$

$$\leqq 2 \int_{\rho<|y-x| \leqq r} |y-x|^{1-n} |D\varphi_E| \cdot \Big(r^{1-n} \int_{\bar{B}_r(x)} |D\varphi_E| - \rho^{1-n} \int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\varphi_E| \tag{2.4}$$

$$+(n-1)\int_\rho^r t^{-n}\, \Psi(E, \bar{B}_t(x))\, dt\Big).$$

Per la dimostrazione di questo teorema, vedere [9], Teoremi 2.3 e 2.5.

Definizione 2.1. Dirò che un insieme E minimizza il funzionale $\mathscr{I}_A(F)$ in un aperto Ω di R^n, se E minimizza $\mathscr{I}_A(F)$ nel senso del Teorema 1.1 su ogni compatto K contenuto in Ω.

Lemma 2.1. *Sia E un insieme che minimizza il funzionale $\mathscr{I}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n \geqq 2$, e sia $|A(x)| \leqq A$. Se $x \in R^n$ e, per $\rho > 0$, $\bar{B}_\rho(x) \subset \Omega$, allora valgono le relazioni*

$$(2.5) \qquad \int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\varphi_E| \leqq \frac{n\omega_n}{2} \rho^{n-1} + A\omega_n \rho^n$$

e

$$(2.6) \qquad \Psi(E, \bar{B}_\rho(x)) \leqq A\omega_n \rho^n.$$

Dimostrazione. Indico con E_ρ un insieme tale che

$$(2.7) \qquad \int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\varphi_{E_\rho}| = \Theta(E, \bar{B}_\rho(x))$$

(con un ragionamento simile a quello tenuto nel Teorema 1.1, si può dimostrare che un tale insieme esiste). Allora posso scrivere

$$(2.8) \qquad \int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\varphi_E| + \int_{B_\rho(x)} \varphi_E(y) A(y)\, dy \leqq \int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\varphi_{E_\rho}| + \int_{B_\rho(x)} \varphi_{E_\rho}(y) A(y)\, dy.$$

D'altra parte, per l'insieme E_ρ vale la seguente maggiorazione:

$$(2.9) \qquad \int_{\bar{B}_\rho(x)} |D\varphi_{E_\rho}| \leqq \frac{n\omega_n}{2} \rho^{n-1}$$

come si vede confrontando E_ρ con gli insiemi $E_\rho \cup \bar{B}_\rho(x)$ e $E_\rho - \bar{B}_\rho(x)$ (Teorema VII, paragrafo 2 di [4]). Da (2.8) e (2.9), si ottengono subito le (2.5) e (2.6).

Lemma 2.2. *Sia E un insieme che minimizza il funzionale $\mathscr{I}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n \geqq 2$, con $|A(x)| \leqq A$. Se $x \in R^n$, e, per $r > 0$, $B_r(x) \subset \Omega$, allora se $0 < \rho_1 < \rho_2 < r$ ottengo*

$$(2.10) \qquad \rho_2^{1-n} \int_{B_{\rho_2}(x)} |D\varphi_E| - \rho_1^{1-n} \int_{B_{\rho_1}(x)} |D\varphi_E| + (n-1) A\omega_n (\rho_2 - \rho_1) \geqq 0.$$

Dimostrazione. Da (2.4), deriva che

$$(2.11) \qquad \rho_2^{1-n} \int_{\bar{B}_{\rho_2}(x)} |D\varphi_E| - \rho_1^{1-n} \int_{\bar{B}_{\rho_1}(x)} |D\varphi_E| + (n-1) \int_{\rho_1}^{\rho_2} t^{-n} \Psi(E, \bar{B}_t(x))\, dt \geqq 0.$$

D'altra parte, tenendo presente (2.6), ottengo

$$(2.12) \qquad \int_{\rho_1}^{\rho_2} t^{-n} \Psi(E, \bar{B}_t(x))\, dt \leqq A\omega_n (\rho_2 - \rho_1).$$

Questa, assieme alla (2.11), mi fornisce la relazione iniziale per la sfere chiuse. Per completare la dimostrazione, basta osservare che, per ogni $\varepsilon: 0 < \varepsilon < \rho_2 - \rho_1$, risulta

$$\begin{aligned}\rho_2^{1-n}\int_{B_{\rho_2}(x)}|D\varphi_E| &\geqq \rho_2^{1-n}\int_{\bar{B}_{\rho_2-\varepsilon}(x)}|D\varphi_E|\\ &\geqq \rho_2^{1-n}\Big[(\rho_2-\varepsilon)^{n-1}\rho_1^{1-n}\int_{B_{\rho_1}(x)}|D\varphi_E|\\ &\quad -(\rho_2-\varepsilon)^{n-1}(n-1)A\omega_n(\rho_2-\varepsilon-\rho_1)\Big]\end{aligned}$$

e quindi, per l'arbitrarietà di ε, si ottiene la relazione cercata.

Lemma 2.3. *Sia E un insieme che minimizza il funzionale $\mathscr{F}_A(F)$ si di un aperto Ω di R^n, $n\geqq 2$, con $|A(x)|\leqq A$. Se $x\in\partial E$ e se, per $\rho>0$, $\bar{B}_\rho(x)\subset\Omega$; allora vale la relazione*

$$\rho^{1-n}\int_{B_\rho(x)}|D\varphi_E|+(n+1)A\omega_n\rho\geqq\omega_{n-1}. \tag{2,13}$$

Dimostrazione. Suppongo dapprima che $x\in\partial^* E$. Allora, per una proprietà nota della frontiera ridotta di un insieme (vedi Teorema III di [3]), risulta

$$\lim_{\rho\to 0^+}\rho^{1-n}\int_{B_\rho(x)}|D\varphi_E|=\omega_{n-1}. \tag{2.14}$$

Quindi, dalla relazione (2.10), scritta per $0<\rho_1<\rho$, facendo tendere ρ_1 a zero, si ottiene la relazione cercata. D'altra parte, se $x\in\partial E$, basta osservare che vale questa semplice uguaglianza

$$\partial E=\overline{\partial^* E} \tag{2.15}$$

(vedi anche [11], Teorema XIV).

Quindi, per ogni $\varepsilon>0$, esiste $y\in\partial^* E$ con $|y-x|<\varepsilon$, allora

$$\begin{aligned}\rho^{1-n}\int_{B_\rho(x)}|D\varphi_E| &\geqq \rho^{1-n}\int_{B_{\rho-\varepsilon}(y)}|D\varphi_E|\\ &\geqq \rho^{1-n}\big((\rho-\varepsilon)^{n-1}\omega_{n-1}-(n-1)A\omega_n(\rho-\varepsilon)^n\big).\end{aligned}$$

Questa relazione, data l'arbitrarietà di ε, mi assicura la validità della (2.13).

Lemma 2.4. *Sia E un insieme che minimizza il funzionale $\mathscr{F}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n\geqq 2$, con $|A(x)|\leqq A$. Se $x\in R^n$ e se, per $r>0$, $B_r(x)\subset\Omega$, allora se $0<\rho_1<\rho_2<r$ ottengo*

$$\begin{aligned}&\Big|\rho_2^{1-n}\int_{\bar{B}_{\rho_2}(x)}D\varphi_E-\rho_1^{1-n}\int_{\bar{B}_{\rho_1}(x)}D\varphi_E\Big|^2\leqq n\,\omega_n\left(1+2A\rho_2+(n-1)\log\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\\ &\quad\cdot\Big(\rho_2^{1-n}\int_{\bar{B}_{\rho_2}(x)}|D\varphi_E|-\rho_1^{1-n}\int_{\bar{B}_{\rho_1}(x)}|D\varphi_E|+(n-1)A\omega_n\rho_2\Big).\end{aligned} \tag{2.16}$$

Dimostrazione. Osservo che per $t>0$, vale la relazione

$$\int_{\bar{B}_t(x)}D\varphi_E=\int_{|y-x|=t}\varphi_E(y)\frac{y-x}{|y-x|}\,dH_{n-1}. \tag{2.17}$$

Ovvero

$$t^{1-n}\int_{\bar{B}_t(x)}D\varphi_E=\int_{|y-x|=1}\varphi_E\big(x+t(y-x)\big)\,\frac{y-x}{|y-x|}\,dH_{n-1}, \tag{2.18}$$

e quindi

$$(2.19)\qquad |\rho_2^{1-n}\int_{\bar{B}_{\rho_2}(x)} D\varphi_E-\rho_1^{1-n}\int_{\bar{B}_{\rho_1}(x)} D\varphi_E|\leqq \int_{|y-x|=1} |\varphi_E(x+\rho_2(y-x)) - \varphi_E(x+\rho_1(y-x))|\,dH_{n-1}.$$

Ricordando ora (2.4) e (2.12), resta da provare che l'integrale

$$2\int_{\rho_1<|y-x|\leqq\rho_2} |y-x|^{1-n}|D\varphi_E|$$

si può maggiorare col primo fattore a secondo membro di (2.16). Comincio coll'osservare che

$$(2.20)\qquad \int_{\rho_1<|y-x|\leqq\rho_2} |y-x|^{1-n}|D\varphi_E|=\rho_2^{1-n}\int_{\bar{B}_{\rho_2}(x)}|D\varphi_E|-\rho_1^{1-n}\int_{\bar{B}_{\rho_1}(x)}|D\varphi_E| +(n-1)\int_{\rho_1}^{\rho_2} t^{-n}\Big(\int_{\bar{B}_t(x)}|D\varphi_E|\Big)\,dt.$$

Per una funzione regolare f, questa relazione si ottiene con una integrazione per parti, infatti:

$$(2.21)\qquad \begin{aligned}\int_{\rho_1<|y-x|\leqq\rho_2} |y-x|^{1-n}|Df(y)|\,dy&=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\Big(t^{1-n}\int_{|y-x|=t}|Df(y)|\,dH_{n-1}\Big)\,dt\\ &=\Big[t^{1-n}\int_{|y-x|\leqq t}|Df(y)|\,dy\Big]_{\rho_1}^{\rho_2}+(n-1)\int_{\rho_1}^{\rho_2}\Big(t^{-n}\int_{|y-x|\leqq t}|Df(y)|\,dy\Big)dt.\end{aligned}$$

Per φ_E, (2.21) si ottiene con un opportuno processo di approssimazione (vedi parte finale del Teorema 2.5 di [9]). Dalle (2.5) e (2.20), ottengo

$$(2.22)\qquad \begin{aligned}\int_{\rho_1<|y-x|\leqq\rho_2} |y-x|^{1-n}|D\varphi_E|&\leqq\rho_2^{1-n}\int_{\bar{B}_{\rho_2}(x)}|D\varphi_E| +(n-1)\int_{\rho_1}^{\rho_2} t^{-1}\left(\frac{n\omega_n}{2}+A\omega_n t\right)dt\\ &\leqq\frac{n\omega_n}{2}\left(1+2A\rho_2+(n-1)\log\frac{\rho_2}{\rho_1}\right).\end{aligned}$$

3. Due Lemmi Fondamentali nello Studio della Regolarizzazione

Lemma 3.1. *Per ogni numero naturale n, $n\geqq 2$, e per ogni costante positiva A, esistono un numero $\delta_A(n)>0$ ed una funzione reale $\lambda_A(\varepsilon)$, definita in $(0,\delta_A(n))$ ed infinitesima nello zero, tali che, se E minimizza il funzionale $\mathscr{F}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, con $|A(x)|\leqq A$, se $\bar{B}_1\subset\Omega$, e se*

$$(3.1)\qquad \int_{\bar{B}_1}|D\varphi_E|-\int_{\bar{B}_1}D_n\varphi_E\leqq\varepsilon \quad \textit{per}\ 0<\varepsilon<\delta_A(n),$$

allora, posto

$$(3.2)\qquad f(x)=\frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n}\int_{|t|\leqq 1} e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}\varphi_E(t)\,dt,$$

risulta

$$\inf\left\{\frac{D_n f(x)}{|Df(x)|};\ |x|\leqq 1-2\varepsilon^{\frac{1}{2(n-1)}},\ \varepsilon^2<f(x)<1-\varepsilon^2\right\}\geqq 1-\lambda_A(\varepsilon). \tag{3.3}$$

Dimostrazione. In primo luogo, proverò l'esistenza di una costante positiva $\delta_A(n)$, tale che, se $0<\varepsilon<\delta_A(n)$ e se x verifica le condizioni richieste in (3.3), allora $D_n f(x)>0$. Per far questo, comincio coll'osservare che, se pongo $E_1=E\cap\bar{B}_1$, allora

$$D_n f(x)=\frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n}\int e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}D_n\varphi_{E_1}(t) \tag{3.4}$$

e

$$|Df(x)|\leqq\frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n}\int e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}|D\varphi_{E_1}|(t). \tag{3.5}$$

Da (3.4) si ha la seguente maggiorazione, per $0<\sigma<1$,

$$\begin{aligned}\Bigg|D_n f(x)+\frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n}\int_{|t|\leqq 1-\sigma}e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}(|D\varphi_E|(t)-D_n\varphi_E(t))\\ -\frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n}\int e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}|D\varphi_{E_1}|(t)\Bigg|\leqq\frac{2\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n}\int_{|t|>1-\sigma}e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}|D\varphi_{E_1}|(t).\end{aligned} \tag{3.6}$$

Da (3.6) si ricava subito che

$$\begin{aligned}D_n f(x)\geqq\frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n}\Big[\int e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}|D\varphi_{E_1}|(t)-2\int_{|t|>1-\sigma}e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}|D\varphi_{E_1}|(t)\\ -\int_{|t|\leqq 1-\sigma}e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}(|D\varphi_E|(t)-D_n\varphi_E(t))\Big].\end{aligned} \tag{3.7}$$

Studiamo ora il secondo membro di (3.7).

Fissato $\varepsilon: 0<\varepsilon<1$, considero σ tale che $\varepsilon^4<\sigma<1$. *E'* possible allora determinare un numero finito di punti y_i di $\partial E\cap\{x\in R^n;\ |x|\leqq 1-\sigma\}$, con le seguenti proprietà:

$$\partial E\cap\{x\in R^n;\ |x|\leqq 1-\sigma\}\subset\bigcup_i B_{\varepsilon^4}(y_i), \tag{3.8}$$

$$B_{\varepsilon^4/3}(y_i)\cap B_{\varepsilon^4/3}(y_j)=\emptyset\qquad\text{per } i\neq j. \tag{3.9}$$

Per la scelta da noi fatta di ε e σ, le sfere $B_{\varepsilon^4/3}(y_i)$ sono tutte contenute nella sfera unità e quindi, ricordando anche la (2.13), ottengo

$$\begin{aligned}\int e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}|D\varphi_{E_1}|(t)&\geqq\sum_i\int_{|t-y_i|<\varepsilon^4/3}e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}|D\varphi_E|(t)\\ &\geqq\sum e^{-|x-y_i|\varepsilon^{-4}-1/3}\,3^{-n}\varepsilon^{4(n-1)}(3\omega_{n-1}-(n-1)A\omega_n\varepsilon^4).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Se suppongo ora di aver fissato ε in partenza in modo che

$$\varepsilon<\delta_A^{\mathrm{I}}(n)=\left(\frac{2\omega_{n-1}}{(n-1)A\omega_n}\right)^{1/4},$$

ottengo da (3.10)

$$\sum_i e^{-|x-y_i|\varepsilon^{-4}}\leqq\frac{e^{1/3}\,3^n\varepsilon^{4(1-n)}}{\omega_{n-1}}\int e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}|D\varphi_{E_1}|(t). \tag{3.11}$$

D'altra parte, per (3.8), posso scrivere

$$
\begin{aligned}
&\int_{|t|\leqq 1-\sigma} e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}\big(|D\varphi_E|(t)-D_n\varphi_E(t)\big)\\
\text{(3.12)}\qquad &\leqq \sum_i \int_{|t-y_i|<\varepsilon^4} e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}\big(|D\varphi_E|(t)-D_n\varphi_E(t)\big)\\
&\leqq \sum_i e^{-|x-y_i|\varepsilon^{-4}+1}\Big(\int_{B_{\varepsilon^4}(y_i)} |D\varphi_E| - \int_{B_{\varepsilon^4}(y_i)} D_n\varphi_E\Big).
\end{aligned}
$$

Poiché $\varepsilon^4<\sigma$, dalla (2.10), ho

$$
\begin{aligned}
&\int_{\bar B_{\varepsilon^4}(y_i)} |D\varphi_E| - \int_{\bar B_{\varepsilon^4}(y_i)} D_n\varphi_E \leqq \varepsilon^{4(n-1)}\Big[\sigma^{1-n}\int_{\bar B_\sigma(y_i)} |D\varphi_E| - \sigma^{1-n}\int_{\bar B_\sigma(y_i)} D_n\varphi_E\\
\text{(3.13)}\qquad &+\sigma^{1-n}\int_{\bar B_\sigma(y_i)} D_n\varphi_E - \varepsilon^{4(1-n)}\int_{\bar B_{\varepsilon^4}(y_i)} D_n\varphi_E + (n-1)A\omega_n\sigma\Big].
\end{aligned}
$$

Dalla ipotesi (3.1) del lemma, tenendo presente che la misura $|D\varphi_E|-D_n\varphi_E$ è non negativa e quindi monotona rispetto alla inclusione insiemistica, ottengo

$$
\text{(3.14)}\qquad \sigma^{1-n}\int_{\bar B_\sigma(y_i)} |D\varphi_E| - \sigma^{1-n}\int_{\bar B_\sigma(y_i)} D_n\varphi_E \leqq \varepsilon\sigma^{1-n}.
$$

Mentre dalla relazione (2.16), risulta

$$
\begin{aligned}
&\sigma^{1-n}\int_{\bar B_\sigma(y_i)} D_n\varphi_E - \varepsilon^{4(1-n)}\int_{\bar B_{\varepsilon^4}(y_i)} D_n\varphi_E\\
\text{(3.15)}\qquad &\leqq \sqrt{n\omega_n}\,(1+2A\sigma+(n-1)\log\varepsilon^{-4}\sigma)^{1/2}\Big(\sigma^{1-n}\int_{\bar B_\sigma(y_i)} |D\varphi_E|\\
&-\varepsilon^{4(1-n)}\int_{\bar B_{\varepsilon^4}(y_i)} |D\varphi_E| + (n-1)A\omega_n\sigma\Big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Da (2.18) si ottiene

$$
\text{(3.16)}\qquad \sigma^{1-n}\int_{\bar B_\sigma(y_i)} D_n\varphi_E \leqq \omega_{n-1}
$$

e da questa, da (2.13) e (3.14), si ha

$$
\begin{aligned}
&\sigma^{1-n}\int_{\bar B_\sigma(y_i)} |D\varphi_E| - \varepsilon^{4(1-n)}\int_{\bar B_{\varepsilon^4}(y_i)} |D\varphi_E|\\
\text{(3.17)}\qquad &\leqq \sigma^{1-n}\int_{\bar B_\sigma(y_i)} |D\varphi_E| - \sigma^{1-n}\int_{\bar B_\sigma(y_i)} D_n\varphi_E + (n-1)A\omega_n\varepsilon^4\\
&\leqq \varepsilon\sigma^{1-n} + (n-1)A\omega_n\varepsilon^4.
\end{aligned}
$$

Infine dalle (3.12), (3.11), (3.13), (3.14), (3.15), e (3.17), ottengo per $0<\varepsilon<\delta_A^{\mathrm{I}}(n)$

$$
\begin{aligned}
&\int_{|t|\leqq 1-\sigma} e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}\big(|D\varphi_E|(t)-D_n\varphi_E(t)\big)\\
\text{(3.18)}\qquad &\leqq \frac{e^{4/3}\,3^n}{\omega_{n-1}}\Big[\varepsilon\sigma^{1-n} + \sqrt{n\omega_n}\,(1+2A\sigma+(n-1)\log\varepsilon^{-4}\sigma)^{1/2}\\
&\cdot\big((n-1)A\omega_n(\sigma+\varepsilon^4)+\varepsilon\sigma^{1-n}\big)^{1/2} + (n-1)A\omega_n\sigma\Big]\int e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}|D\varphi_{E_1}|(t).
\end{aligned}
$$

Dalla (2.5) e dal Teorema 2.6 di [7], relativo alle tracce sulle superfici sferiche delle funzioni aventi derivate misure, ottengo la seguente maggiorazione:

$$\int_{|t|>1-\sigma} |D\varphi_{E_1}|(t) \leqq \int_{B_1} |D\varphi_E| + \int_{|t|=1} |\varphi_E|\, dH_{n-1} \leqq \frac{3n\omega_n}{2} + A\omega_n. \tag{3.19}$$

Dalla quale, supposto $|x| \leqq 1-2\sigma$, si ricava

$$\int_{|t|>1-\sigma} e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}} |D\varphi_{E_1}|(t) \leqq \frac{\omega_n}{2} e^{-\sigma\varepsilon^{-4}} (3n+2A). \tag{3.20}$$

D'altra parte, è facile verificare la validità del seguente enunciato:

Per ogni intero n, esiste una costante positiva $\varepsilon(n)$ tale che, se E è un sottinsieme misurabile di R^n, $x \in R^n$, e vale la relazione

$$\varepsilon^2 < \frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n} \int e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}} \varphi_E(t)\, dt < 1-\varepsilon^2$$

con $0<\varepsilon<\varepsilon(n)$, allora

$$\partial E \cap \{y \in R^n;\ |y-x| < \varepsilon^2\} \neq \emptyset.$$

Quindi, nel nostro caso, se ε in partenza è scelto in modo che $0<\varepsilon<\varepsilon(n)$, se $x \in R^n$ è tale che $\varepsilon^2 < f(x) < 1-\varepsilon^2$, allora esiste un $y \in \partial E$ con $|y-x| < \varepsilon^2$, perciò ottengo, supponendo anche $|x| \leqq 1-2\sigma$,

$$\begin{aligned} \int e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}} |D\varphi_{E_1}|(t) &\geqq \int_{|t-y|<\varepsilon^2} e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}} |D\varphi_E|(t) \\ &\geqq e^{-2\varepsilon^{-2}} \varepsilon^{2(n-1)} (\omega_{n-1} - (n-1) A\omega_n \varepsilon^2), \end{aligned} \tag{3.21}$$

e se

$$0 < \varepsilon < \delta_A^{\mathrm{II}}(n) = \min\left\{\varepsilon(n), \left(\frac{\omega_{n-1}}{2(n-1)A\omega_n}\right)^{1/2}\right\},$$

allora

$$\int e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}} |D\varphi_{E_1}|(t) \geqq \frac{\omega_{n-1}}{2} e^{-2\varepsilon^{-2}} \cdot \varepsilon^{2(n-1)}. \tag{3.22}$$

Ora osservo che σ fissato all'inizio può essere preso in questo modo $\sigma = \varepsilon^{\frac{1}{2(n-1)}}$. Con tale scelta, l'espressione tra parentesi quadre a secondo membro di (3.18), diventa

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} + \sqrt{n\omega_n} \left(1 + 2A\varepsilon^{\frac{1}{2(n-1)}} + (n-1)\log \varepsilon^{\frac{1}{2(n-1)}-4}\right)^{1/2} \\ \cdot \left(\varepsilon^{1/2} + (n-1)A\omega_n \left(\varepsilon^4 + \varepsilon^{\frac{1}{2(n-1)}}\right)\right)^{1/2} + (n-1)A\omega_n \varepsilon^{\frac{1}{2(n-1)}}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

La funzione φ è infinitesima nell'origine, allora esiste una costante positiva $\delta_A^{\mathrm{III}}(n)$ tale che, se $0<\varepsilon<\delta_A^{\mathrm{III}}(n)$, allora $\dfrac{e^{4/3}\, 3^n}{\omega_{n-1}} \varphi(\varepsilon) < 1/2$. Quindi, per $0 < \varepsilon < \min\{\delta_A^{\mathrm{I}}(n), \delta_A^{\mathrm{II}}(n), \delta_A^{\mathrm{III}}(n)\}$, $|x| \leqq 1 - 2\varepsilon^{\frac{1}{2(n-1)}}$, e $\varepsilon^2 < f(x) < 1-\varepsilon^2$, ottengo da (3.7), (3.18), (3.22) e (3.20),

$$
\begin{aligned}
D_n f(x) &\geqq \frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n}\left[\frac{1}{2}\int e^{-x|x-t|\varepsilon^{-4}}|D\varphi_{E_1}|(t)-2\int_{|t|>1-\sigma} e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}|D\varphi_{E_1}|(t)\right] \\
&\geqq \frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n}\left[\frac{\omega_{n-1}}{4}-\omega_n(3n+2A)\frac{e^{-\varepsilon^{-4+\frac{1}{2(n-1)}}}}{e^{-2\varepsilon^{-2}}\varepsilon^{2(n-1)}}\right] e^{-2\varepsilon^{-2}}\varepsilon^{2(n-1)}.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Indico ora con $\Psi(\varepsilon)$ il secondo termine in parentesi di (3.24). Siccome

$$4-\frac{1}{2(n-1)}>2,$$

$\Psi(\varepsilon)$ è una funzione infinitesima nello zero, quindi riesco a trovare una costante positiva $\delta_A^{\mathrm{IV}}(n)$, tale che se $0<\varepsilon<\delta_A^{\mathrm{IV}}(n)$, allora $\Psi(\varepsilon)<\frac{\omega_{n-1}}{8}$.

Finalmente, posto $\delta_A(n)=\min\{\delta_A^{\mathrm{I}}(n), \delta_A^{\mathrm{II}}(n), \delta_A^{\mathrm{III}}(n), \delta_A^{\mathrm{IV}}(n)\}$, per $0<\varepsilon<\delta_A(n)$, ottengo

$$D_n f(x)\geqq \frac{\omega_{n-1}\,\varepsilon^{-4n}}{8n!\,\omega_n}\, e^{-2\varepsilon^{-2}}\varepsilon^{2(n-1)}>0. \tag{3.25}$$

Infine, sempre per $0<\varepsilon<\delta_A(n)$, $|x|\leqq 1-2\varepsilon^{\frac{1}{2(n-1)}}$, $\varepsilon^2<f(x)<1-\varepsilon^2$, ricordando (3.4), (3.5), (3.18), (3.20) e (3.22), ottengo

$$
\begin{aligned}
1-\frac{D_n f(x)}{|Df(x)|} &\leqq \frac{\int e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}\big(|D\varphi_{E_1}|(t)-D_n\varphi_{E_1}(t)\big)}{\int e^{-|x-t|\varepsilon^{-4}}|D\varphi_{E_1}|(t)} \\
&\leqq \frac{e^{4/3}\,3^n}{\omega_{n-1}}\,\varphi(\varepsilon)+\frac{2}{\omega_{n-1}}\,\Psi(\varepsilon)=\lambda_A(\varepsilon),
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

e da questa, si ottiene la (3.3).

Lemma 3.2. *Sia $\{E_h\}$ una successione di sottinsiemi di R^n, $n\geqq 2$, verificante le seguenti proprietà:*

a) *E_h minimizza il funzionale $\mathscr{F}_{A_h}(F)$ su di un aperto Ω_h contemente la sfera unità chiusa, con $|A_h(x)|\leqq A$;*

b) *valgono le relazioni*

$$\int_{B_1}|D\varphi_{E_h}|-\int_{B_1}D_n\varphi_{E_h}\leqq\varepsilon_h;\qquad \varepsilon_h>0;\qquad \sum_{h=1}^{\infty}\varepsilon_h<+\infty; \tag{3.27}$$

e

$$\lim_{h\to\infty}\varepsilon_h^{-1}\,\Psi(E_h,1)=0. \tag{3.28}$$

Allora, per ogni numero reale α, $0<\alpha<1$, esiste un insieme N_α, contenuto in (0.1) *di misura lineare nulla, tale che, se $t\in(0.1)-N_\alpha$, è possibile trovare una successione di insiemi $\{L_h\}$, per cui*

$$\lim_{h\to\infty}\varepsilon_h^{-1}\,\Psi(L_h,t)=0 \tag{3.29}$$

(3.30) $$\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-1}\Big(\int_{\bar B_t} |D\varphi_{L_h}| - \int_{\bar B_t} |D\varphi_{E_h}|\Big)=0$$

(3.31) $$\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-1}\Big|\int_{\bar B_t} D\varphi_{L_h} - \int_{\bar B_t} D\varphi_{E_h}\Big|=0$$

(3.32) $$\max\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-1}\Big(\int_{\bar B_{\alpha t}} |D\varphi_{E_h}| - \Big|\int_{\bar B_{\alpha t}} D\varphi_{E_h}\Big|\Big) \leqq \max\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-1}\Big(\int_{\bar B_{\alpha t}} |D\varphi_{L_h}| - \Big|\int_{\bar B_{\alpha t}} D\varphi_{L_h}\Big|\Big)$$

(3.33) *per ogni intero h la funzione di x*

$$v_{L_h}(x) = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\int_{B_\rho(x)} D\varphi_{L_h}}{\int_{B_\rho(x)} |D\varphi_{L_h}|}$$

è continua su $\partial L_h \cap B_t$ e vale la relazione

$$\lim_{h\to+\infty} \inf\{v_{L_h}(x);\ |x|<t,\ x\in\partial L_h\}=1.$$

Dimostrazione. Pongo

(3.34) $$f_h(x) = \frac{\varepsilon_h^{-4n}}{n!\,\omega_n} \int_{|t|\leqq 1} e^{-|x-t|\varepsilon_h^{-4}} \varphi_{E_h}(t)\,dt$$

e indico con $E'_h = E_h \cap \bar B_1$, allora posso scrivere

(3.35) $$\int_{\bar B_1} |f_h(x) - \varphi_{E_h}(x)|\,dx \leqq \frac{\varepsilon_h^{-4n}}{n!\,\omega_n} \int e^{-|y|\varepsilon_h^{-4}} \Big(\int_{\bar B_1} |\varphi_{E'_h}(x-y) - \varphi_{E'_h}(x)|\,dx\Big)\,dy.$$

D'altra parte, si vede facilmente che

(3.36) $$\int_{\bar B_1} |\varphi_{E'_h}(x-y) - \varphi_{E'_h}(x)|\,dx \leqq n\,|y| \int_{R^n} |D\varphi_{E'_h}|$$

e quindi, da (3.35), ottengo

(3.37) $$\int_{\bar B_1} |f_h(x) - \varphi_{E'_h}(x)|\,dx \leqq \frac{2}{n!} \int_{|y|>\varepsilon_h^{-1}} e^{-|y|}\,dy + n\varepsilon_h^3 \int_{R^n} |D\varphi_{E'_h}|.$$

Ora da (2.5) e dall'ipotesi a), risulta

(3.38) $$\int_{R^n} |D\varphi_{E'_h}| = \int_{B_1} |D\varphi_{E_h}| + \int_{|x|=1} |\varphi_{E_h}|\,dH_{n-1} \leqq \omega_n\Big(\frac{3n}{2}+A\Big),$$

e quindi

(3.39) $$\max\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-3}\Big(\int_{\bar B_1} |f_h(x) - \varphi_{E_h}(x)|\,dx\Big) < +\infty.$$

Essendo $\sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h < +\infty$, per il teorema di B. LEVI sulla integrazione delle serie a termini positivi, esiste un insieme $N_1 \subset (0,1)$ di misura lineare nulla, tale che

(3.40) $$\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-2} \int_{|x|=t} |\varphi_{E_h} - f_h|\,dH_{n-1} = 0 \qquad \text{per } t\in(0,1)-N_1.$$

Se indico con μ la misura $\mu = \sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon_h |D\varphi_{E'_h}|$, per la derivabilità delle funzioni monotone, esiste un insieme $N_2 \subset (0,1)$, pure di misura lineare nulla, tale che

(3.41) $$\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-3} \int_{t<|x|\leqq t+\varepsilon_h^3} d\mu < +\infty \qquad \text{per } t\in(0,1)-N_2,$$

e allora

$$\max \lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-2} \int_{t<|x|\leq t+\varepsilon_h^3} |D\varphi_{E_h'}| < +\infty \quad \text{per } t\in(0,1)-N_2. \tag{3.42}$$

Da (3.5), integrando su $\bar{B}_t$ si ottiene

$$\int_{\bar{B}_t} |Df_h(x)|\,dx \leq \int |D\varphi_{E_h'}|(y) \left(\frac{\varepsilon^{-4n}}{n!\,\omega_n} \int_{\bar{B}_t} e^{-|x-y|\varepsilon_h^{-4}}\,dx\right) \tag{3.43}$$

(gli integrali a secondo membro si possono invertire grazie alla continuità di $\int e^{-|x-y|\varepsilon_h^{-4}} |D\varphi_{E_h'}|(y)$). Scomponendo ora il primo integrale a secondo membro di (3.43), nella somma dell'integrale su $\bar{B}_{t+\varepsilon_h^3}$, dove si suppone che $t+\varepsilon_h^3<1$, e di quello sul complementare, ho, ricordando la (3.38),

$$\int_{\bar{B}_t} |Df_h(x)|\,dx \leq \int_{\bar{B}_{t+\varepsilon_h^3}} |D\varphi_{E_h}| + \frac{3n+2A}{2n!} \int_{|y|>\varepsilon_h^{-1}} e^{-|y|}\,dy. \tag{3.44}$$

Quindi, da (3.42) e (3.44), ottengo

$$\max \lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-1} \Big(\int_{\bar{B}_t} |Df_h(x)|\,dx - \int_{\bar{B}_t} |D\varphi_{E_h}|\Big) \leq 0, \qquad t\in(0,1)-N_2. \tag{3.45}$$

Ora pongo $N_0=N_1\cup N_2$ e considero l'insieme $N_\alpha'=\{t\in(0,1);\ \alpha t\in N_0\}$, siccome $\operatorname{mis}(N_0)=0$, allora anche $\operatorname{mis}(N_\alpha')=0$, e quindi, se indico con $N_\alpha=N_0\cup N_\alpha'$, ottengo un insieme di misura lineare nulla. L'insieme N_α è quello richiesto dal lemma. Sia, infatti, $t\in(0,1)-N_\alpha$ e sia $t<1$; indico con

$$S_h(\lambda)=\{x\in R^n;\ f_h(x)\geq\lambda\}. \tag{3.46}$$

In primo luogo, osservo che risulta

$$\int_{|x|=t} |\varphi_{E_h}-f_h|\,dH_{n-1} = \int_0^1 d\lambda \int_{|x|=t} |\varphi_{E_h}-\varphi_{S_h(\lambda)}|\,dH_{n-1}, \tag{3.47}$$

e quindi, da (3.40), si ricavano

$$\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-2} \int_0^1 d\lambda \int_{|x|=t} |\varphi_{E_h}-\varphi_{S_h(\lambda)}|\,dH_{n-1}=0, \tag{3.48}$$

$$\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-2} \int_0^1 d\lambda \int_{|x|=\alpha t} |\varphi_{E_h}-\varphi_{S_h(\lambda)}|\,dH_{n-1}=0. \tag{3.49}$$

Allora, per il già ricordato teorema di B. Levi, esistono due insiemi M_1, M_2 contenuti in (0.1) di misura lineare nulla, tali che

$$\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-1} \int_{|x|=t} |\varphi_{E_h}-\varphi_{S_h(\lambda)}|\,dH_{n-1}=0 \quad \text{per } \lambda\in(0,1)-M_1, \tag{3.50}$$

$$\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-1} \int_{|x|=\alpha t} |\varphi_{E_h}-\varphi_{S_h(\lambda)}|\,dH_{n-1}=0 \quad \text{per } \lambda\in(0,1)-M_2. \tag{3.51}$$

Sia ora $M=M_1\cup M_2$, allora $\operatorname{mis}(M)=0$ e per $\lambda\in(0,1)-M$, valgono entrambe le relazioni precedenti. D'altra parte, per il Teorema 1.6 di [9], ottengo

$$\int_{\bar{B}_t} |Df_h(x)|\,dx = \int_0^1 d\lambda \int_{\bar{B}_t} |D\varphi_{S_h(\lambda)}|; \tag{3.52}$$

da cui si ha

$$\int_{\varepsilon_h^2}^{1-\varepsilon_h^2}\Big(\int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{S_h(\lambda)}|\Big)d\lambda \leqq \int_{\bar{B}_t}|Df_h(x)|\,dx \tag{3.53}$$

Allora, esiste un $\lambda_h \in (\varepsilon_h^2, 1-\varepsilon_h^2)-M$, tale che

$$(1-2\varepsilon_h^2)\int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{S_h(\lambda_h)}| \leqq \int_{\bar{B}_t}|Df_h(x)|\,dx. \tag{3.54}$$

Ora pongo $L_h = S_h(\lambda_h)$, allora (3.50) e (3.51) si possono riscrivere

$$\lim_{h\to\infty}\varepsilon_h^{-1}\int_{|x|=t}|\varphi_{E_h}-\varphi_{L_h}|\,dH_{n-1}=0, \tag{3.55}$$

$$\lim_{h\to\infty}\varepsilon_h^{-1}\int_{|x|=\alpha t}|\varphi_{E_h}-\varphi_{L_h}|\,dH_{n-1}=0. \tag{3.56}$$

Dalla (3.54), supponendo h sufficientemente grande in modo che sia $1-2\varepsilon_h^2>0$, ottengo

$$\begin{aligned}\varepsilon_h^{-1}\Big(\int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{L_h}|-\int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{E_h}|\Big) &\leqq \varepsilon_h^{-1}\Big(\int_{\bar{B}_t}|Df_h(x)|\,dx-\int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{E_h}|\Big)\\ &\quad+\frac{2\varepsilon_h}{1-2\varepsilon_h^2}\int_{\bar{B}_t}|Df_h(x)|\,dx.\end{aligned} \tag{3.57}$$

Da (3.43) e (3.38), risulta che l'ultimo integrale di (3.57) è limitato indipendentemente da h, quindi, ricordando (3.45), ottengo

$$\max\lim_{h\to\infty}\varepsilon_h^{-1}\Big(\int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{L_h}|-\int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{E_h}|\Big)\leqq 0. \tag{3.58}$$

Ora da (2.3), ottengo la maggiorazione

$$\int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{E_h}|-\int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{L_h}|\leqq \Psi(E_h,t)+\int_{|x|=t}|\varphi_{E_h}-\varphi_{L_h}|\,dH_{n-1}, \tag{3.59}$$

e quindi, ricordando (3.55), l'ipotesi (3.28) e il fatto che la funzione $\Psi(E,t)$ è monotona rispetto alla variabile t, ottengo

$$\max\lim_{h\to\infty}\varepsilon_h^{-1}\Big(\int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{E_h}|-\int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{L_h}|\Big)\leqq 0 \tag{3.60}$$

che, assieme alla (3.58), mi dà la (3.30).

D'altra parte, da (2.17), ho

$$\Big|\int_{\bar{B}_t}D\varphi_{L_h}-\int_{\bar{B}_t}D\varphi_{E_h}\Big|\leqq\int_{|x|=t}|\varphi_{L_h}-\varphi_{E_h}|\,dH_{n-1}, \tag{3.61}$$

$$\Big|\int_{\bar{B}_{\alpha t}}D\varphi_{L_h}-\int_{\bar{B}_{\alpha t}}D\varphi_{E_h}\Big|\leqq\int_{|x|=\alpha t}|\varphi_{L_h}-\varphi_{E_h}|\,dH_{n-1}, \tag{3.62}$$

e quindi, da (3.55) e (3.61), ricavo la (3.31). D'altra parte, per la (2.3), ho

$$|\Psi(L_h,t)-\Psi(E_h,t)|\leqq\Big|\int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{L_h}|-\int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{E_h}|\Big|+\int_{|x|=t}|\varphi_{L_h}-\varphi_{E_h}|\,dH_{n-1} \tag{3.63}$$

dalla quale si recava subito la (3.29).

Infinite da (3.59), scritta per $\bar{B}_{\alpha t}$, da (3.28), (3.56) e (3.62), ottengo

$$\max_{h\to\infty} \lim \varepsilon_h^{-1}\Big(\int_{\bar{B}_{\alpha t}} |D\varphi_{E_h}| - \Big|\int_{\bar{B}_{\alpha t}} D\varphi_{E_h}\Big| - \int_{\bar{B}_{\alpha t}} |D\varphi_{L_h}| + \Big|\int_{\bar{B}_{\alpha t}} D\varphi_{L_h}\Big|\Big) \leqq 0. \tag{3.64}$$

Da cui si ha la (3.32).

Suppongo ora che $x\in\partial L_h \cap B_t$, allora sarà $|x|<t<1$ e $f_h(x)=\lambda_h$. Per la scelta di λ_h, si ha $\varepsilon_h^2<f_h(x)<1-\varepsilon_h^2$; d'altra parte, siccome la successione ε_h tende a zero, esiste un indice $h_0\in N$, tale che per $h>h_0$ risulta $t<1-2\varepsilon_h^{\frac{1}{2(n-1)}}$ e $\varepsilon_h<\delta_A(n)$, dove la costante $\delta_A(n)$ è quella che compare nel Lemma 3.1; quindi posso concludere che

$$\inf\left\{\frac{D_n f_h(x)}{|Df_h(x)|};\ |x|\leqq 1-2\varepsilon_h^{\frac{1}{2(n-1)}},\ x\in\partial L_h\right\}\geqq 1-\lambda_A(\varepsilon_h). \tag{3.65}$$

Essendo $D_n f_h(x)>0$ e ricordando che $L_h=\{x\in R^n; f_h(x)\geqq\lambda_h\}$, si ottiene

$$\nu_{L_h}(x)=\frac{Df_h(x)}{|Df_h(x)|}$$

(vedi Lemma 5.4 di [9] e osservazione 5.7 di [7]). Quindi, per $h>h_0$, la funzione $\nu_{L_h}(x)$ risulta continua su $\partial L_h\cap B_t$. Da (3.65), si ottiene la relazione finale di (3.33).

4. Lemma di De Giorgi e Regolarità

De Giorgi in [4] dimostra, per gli insiemi di frontiera minima, un Lemma che gli sarà poi utile nello studio della regolarizzazione, noi ora proveremo un risultato analogo.

Per un insieme di perimetro localmente finito E e un Borel-limitato $B\subset R^n$, pongo

$$\Gamma(E,B)=\int_B |D\varphi_E| - \Big|\int_B D\varphi_E\Big|. \tag{4.1}$$

Per brevità scriveremo poi $\Gamma(E,\rho)=\Gamma(E,\bar{B}_\rho)$. Allora vale il seguente lemma:

Lemma 4.1. (De Giorgi). *Per ogni intero n, $n\geqq 2$, per ogni numero reale $A>0$ e per ogni α, $0<\alpha<1$, esiste una costante reale positiva $\sigma_A(n,\alpha)$, tale che, se E minimizza il funzionale $\mathscr{F}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n con $|A(x)|\leqq A$, se $x\in R^n$, $\rho>0$, $\bar{B}_\rho(x)\subset\Omega$ e se*

$$\Gamma(E,\bar{B}_\rho(x))\leqq\varepsilon\rho^{n-1}\leqq\sigma_A(n,\alpha)\,\rho^{n-1}\qquad\text{per } \rho\leqq\varepsilon^2, \tag{4.2}$$

allora

$$\Gamma(E,\bar{B}_{\alpha\rho}(x))\leqq\sqrt{\alpha}\,\varepsilon(\alpha\rho)^{n-1}. \tag{4.3}$$

Dimostrazione. Ragiono per assurdo e suppongo che esistano $n\in N$, $n\geqq 2$, una costante reale $A>0$ e un α, $0<\alpha<1$, per i quali non esiste la costante $\sigma_A(n,\alpha)$.

Allora, è possibile trovare una successione di insiemi E_h, di aperti Ω_h, di sfere $B_{\rho_h}(x_h)$, di numeri ε_h, con $\varepsilon_h>0$ e $\sum_{h=1}^{\infty}\varepsilon_h<+\infty$, e di funzioni $A_h(x)$, con $|A_h(x)|\leqq A$, tali che E_h minimizza il funzionale $\mathscr{I}_{A_h}(F)$ su Ω_h, $\bar{B}_{\rho_h}(x_h)\subset\Omega_h$, e

$$\Gamma(E_h, \bar{B}_{\rho_h}(x)_h)\leqq\varepsilon_h\,\rho_h^{\,n-1} \quad \text{per } \rho_h\leqq\varepsilon_h^2 \tag{4.4}$$

$$\Gamma(E_h, \bar{B}_{\alpha\rho_h}(x_h))>\sqrt{\alpha}\,\varepsilon_h(\alpha\rho_h)^{n-1}. \tag{4.5}$$

Considero ora in R^n una traslazione che porti x_h nell'origine, una rotazione che porti il vettore $\int\limits_{B_{\rho_h}(x_h)} D\varphi_{E_h}$ nella direzione dell'asse x_n ed una omotetia di rapporto ρ_h. Indico con $\tilde{F}$ l'insieme che si ottiene da F mediante tali operazioni e con $\tau_h(x)$ il trasformato del punto x mediante le prime due. Allora valgono le relazioni

$$\int\limits_{B_h}|D\varphi_{E_h}|=\rho_h^{n-1}\int\limits_{\tilde{B}_h}|D\varphi_{\tilde{E}_h}|, \tag{4.6}$$

$$\int\limits_{B_h}D\varphi_{E_h}=\rho_h^{n-1}\int\limits_{\tilde{B}_h}D\varphi_{\tilde{E}_h}, \tag{4.7}$$

$$\int\limits_{B_h}\varphi_{E_h}(x)\,A_h(x)\,dx=\rho_h^n\int\limits_{\tilde{B}_h}\varphi_{\tilde{E}_h}(x)\,A_h\big(\tau_h^{-1}(\rho_h x)\big)\,dx, \tag{4.8}$$

dove B_h è un Borel-limitato contenuto in Ω_h e τ_h^{-1} è l'inversa dell'applicazione τ_h. Da (4.6) e (4.7), ricordando le ipotesi (4.4) e (4.5), si ottiene

$$\Gamma(\tilde{E}_h, 1)=\int\limits_{\bar{B}_1}|D\varphi_{\tilde{E}_h}|-\int\limits_{\bar{B}_1}D_n\varphi_{\tilde{E}_h}\leqq\varepsilon_h, \tag{4.9}$$

$$\Gamma(\tilde{E}_h, \alpha)>\varepsilon_h\,\alpha^{n-1/2}. \tag{4.10}$$

Ancora da (4.6) e (4.8), risulta che l'insieme $\tilde{E}_h$ minimizza il funzionale $\mathscr{I}_{\tilde{A}_h}(F)$ su $\tilde{\Omega}_h$, dove con $\tilde{A}_h$ ho indicato la funzione $\tilde{A}_h(x)=\rho_h\,A_h(\tau_h^{-1}(\rho_h x))$. Ora, siccome $\bar{B}_1\subset\tilde{\Omega}_h$, ricordando la (2.6) e la seconda di (4.4), ottengo

$$\Psi(\tilde{E}_h, 1)\leqq\rho_h\,\omega_n\,A\leqq\varepsilon_h^2\,\omega_n\,A, \tag{4.11}$$

da cui si ha

$$\lim_{h\to\infty}\varepsilon_h^{-1}\,\Psi(\tilde{E}, 1)=0. \tag{4.12}$$

Quindi la successione $\tilde{E}_h$, minimizzando $\mathscr{I}_{\tilde{A}_h}(F)$ su $\tilde{\Omega}_h$, con $|\tilde{A}_h(x)|\leqq\rho_h A$, verificando (4.9) e (4.12), soddisfa alle ipotesi del Lemma 3.2. Ne applichiamo i risultati con

$$\beta=\alpha^\gamma \quad \text{dove } \frac{n-1/2}{n+1}<\gamma<1. \tag{4.13}$$

Siccome $\alpha<\beta$, posso trovare $t\in(0,1)-N_\beta$, tale che $\alpha\leqq t\beta$. Per β, t così prefissati, mi costruisco la successione $\{L_h\}$ con le proprietà elencate nel Lemma 3.2.

D'altra parte, confrontando le superfici approssimanti frontiere orientate di misura minima con le funzioni armoniche, si ottiene il seguente risultato (vedi Teorema 4.4 di [9] e Teorema III, paragrafo 3 di [4]):

Sia $\{N_h\}$ una successione di insiemi misurabili di R^n, $n\geqq 2$, e ε_h una successione di numeri reali positivi. Per $t>0$, valgano le relazioni

$$\max\lim_{h\to\infty}\varepsilon_h^{-1}\,\Gamma(N_h, t)\leqq 1, \tag{4.14}$$

(4.15) $$\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-1}\, \Psi(N_h, t)=0,$$

(4.16) per ogni $h\in N$, $v_{N_h}(x)$ sia una funzione continua su $\partial N_h \cap \{x\in R^n, |x|<t\}$ e valga

$$\lim_{h\to+\infty} \inf\{v_{N_h}(x);\ |x|<t,\ x\in\partial N_h\}=1.$$

Allora per ogni α, $0<\alpha<1$, vale che

(4.17) $$\max\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-1}\, \Gamma(N_h, \alpha t)\leqq \alpha^{n+1}.$$

Per le (3.29) e (3.33), basta provare che vale (4.14). Questo si vede dalla relazione

(4.18) $$\Gamma(L_h, t)=\int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{L_h}|-\int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{\tilde{E}_h}|+\int_{\bar{B}_t}|D\varphi_{\tilde{E}_h}|-\int_{\bar{B}_t}D_n\varphi_{\tilde{E}_h}+\int_{\bar{B}_t}D_n\varphi_{\tilde{E}_h}-\Big|\int_{\bar{B}_t}D\varphi_{L_h}\Big|.$$

e da (3.30), (4.9) e (3.31).

Quindi, nel mio caso, ricordando anche la (3.32), ottengo

(4.19) $$\max\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-1}\big(\Gamma(\tilde{E}_h, \beta t)\big)\leqq \beta^{n+1}.$$

D'altra parte, la funzione di insieme $\int_A |D\varphi_E|-|\int_A D\varphi_E|$ è monotona rispetto alla inclusione insiemistica e quindi, ricordando che $\alpha\leqq\beta t$, da (4.19) e (4.10), ottengo

(4.20) $$\alpha^{n-1/2}\leqq\max\lim_{h\to\infty} \varepsilon_h^{-1}\big(\Gamma(\tilde{E}_h, \alpha)\big)\leqq \beta^{n+1}.$$

Mentre per la nostra scelta di β è

(4.21) $$\beta^{n+1}<\alpha^{n-1/2}$$

Questa contraddizione mi assicura la validità del lemma di De Giorgi.

Osservazione. Il lemma di De Giorgi si può applicare ripetutamente. Cioé, se tutte le ipotesi del lemma sono verificate da $\Gamma(E, \bar{B}_\rho(x))\leqq\varepsilon\rho^{n-1}$, $\rho\leqq\varepsilon^2$, si ricava che $\Gamma(E, \bar{B}_{\alpha\rho}(x))\leqq\sqrt{\alpha}\,\varepsilon(\alpha\rho)^{n-1}$. Ora osservo che $\alpha\rho\leqq(\sqrt{\alpha}\varepsilon)^2$ e $\sqrt{\alpha}\varepsilon\leqq\sigma_A(n,\alpha)$, e quindi il lemma si può applicare di nuovo, allora ottengo

$$\Gamma(E, \bar{B}_{\alpha^2\rho}(x))\leqq\alpha\varepsilon(\alpha^2\rho)^{n-1}$$

e ancora $\alpha^2\rho\leqq(\alpha\varepsilon)^2$ e $\alpha\varepsilon\leqq\varepsilon\leqq\sigma_A(n,\alpha)$. Quindi, il lemma si può riapplicare.

Si vede facilmente che, dopo h passi si ottiene la relazione

(4.22) $$\Gamma(E, \bar{B}_{\alpha^h\rho}(x))\leqq\alpha^{h/2}\,\varepsilon(\alpha^h\rho)^{n-1}.$$

Il Lemma 4.1 ci fornisce uno strumento di notevole utilità nello studio della regolarità della frontiera di E.

Un primo passo è lo studio delle proprietà della funzione $v(x)$. Comincio col dimostrare la seguente maggiorazione:

Se $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(R^n)$ e φ ha derivate misure, allora se A e B sono due Borel-limitati con $A \subset B$, allora vale

$$\left| \frac{\int_A D\varphi}{\int_A |D\varphi|} - \frac{\int_B D\varphi}{\int_B |D\varphi|} \right| \leqq 2 \left(\frac{\int_B |D\varphi|}{\int_A |D\varphi|} \cdot \frac{\int_B |D\varphi| - \left|\int_B D\varphi\right|}{\int_B |D\varphi|} \right)^{1/2}. \tag{4.23}$$

Infatti siano u e v i due vettori che compaino nel primo membro della relazione precedente, allora $|u| \leqq 1$ e $|v| \leqq 1$ e quindi

$$|u-v|^2 \leqq 2 - 2uv = 2(1-uv). \tag{4.24}$$

D'altra parte,

$$\int_A |D\varphi| \cdot (1-uv) = \int_A |D\varphi| - \frac{\int_A D\varphi \cdot \int_B D\varphi}{\int_B |D\varphi|}. \tag{4.25}$$

La misura a secondo membro di (4.25), dove suppongo B fissato, è non negativa e quindi monotona rispetto alla inclusione insiemistica, allora

$$\int_A |D\varphi| - \frac{\int_A D\varphi \cdot \int_B D\varphi}{\int_B |D\varphi|} \leqq \int_B |D\varphi| - \frac{\left|\int_B D\varphi\right|^2}{\int_B |D\varphi|}, \tag{4.26}$$

da cui, ricordando (4.24), (4.25) e il fatto che $\left|\int_B D\varphi\right| \leqq \int_B |D\varphi|$, si ricava (4.23).

Dimostriamo ora il seguente lemma:

Lemma 4.2. *Sia E un insieme che minimizza il funzionale $\mathscr{I}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n \geqq 2$, con $|A(x)| \leqq A$. Se $x \in \partial E \cap \Omega$ e se esistono $\rho, \varepsilon > 0$ e α, $0 < \alpha < 1$ tali che $\bar{B}_\rho(x) \subset \Omega$ e*

$$\Gamma(E, \bar{B}_\rho(x)) \leqq \varepsilon \rho^{n-1} \leqq \sigma_A(n, \alpha) \rho^{n-1}, \qquad \rho \leqq \varepsilon^2, \tag{4.27}$$

allora $x \in \partial^* E \cap \Omega$.

Dimostrazione. Osservo, prima di tutto, che posso supporre

$$\rho < \frac{1}{2(n-1) A \omega_n}. \tag{4.28}$$

Infatti, se così non fosse, basta considerare $h \in N$, tale che $\rho_1 = \alpha^h \rho < \dfrac{1}{2(n-1) A \omega_n}$. Allora per il lemma di DE GIORGI risulta

$$\Gamma(E, \bar{B}_{\rho_1}(x)) \leqq \alpha^{h/2} \varepsilon \rho_1^{n-1} \leqq \varepsilon \rho_1^{n-1} \leqq \sigma(n, \alpha) \rho_1^{n-1} \quad \text{e } \rho_1 \leqq \rho \leqq \varepsilon^2;$$

cioé ρ_1 verifica tutte le ipotesi fatte su ρ e, in più, verifica (4.28).

Devo dunque provare che esiste il vettore $v(x)$ e che $|v(x)| = 1$. Dimostro in primo luogo che la successione

$$v_h(x) = \frac{\int_{B_{\rho\alpha^h}(x)} D\varphi_E}{\int_{B_{\rho\alpha^h}(x)} |D\varphi_E|} \tag{4.29}$$

è una successione di Cauchy. Infatti, tenendo presente la (4.23), posso scrivere la seguente maggiorazione:

$$\begin{aligned} |v_{h+k}(x)-v_h(x)| &\leqq \sum_{j=0}^{k-1} |v_{h+k-j-1}(x)-v_{h+k-j}(x)| \\ &\leqq \sum_{j=0}^{k-1} 2\left(\frac{\Gamma(E, B_{\rho\alpha^{h+k-j-1}}(x))}{\int\limits_{B_{\rho\alpha^{h+k-j}}(x)} |D\varphi_E|}\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Ora, ricordando (4.22), (2.13) e (4.28), ottengo

$$|v_{h+k}(x)-v_h(x)| \leqq 2\left(\frac{2\varepsilon\alpha^{-n+1/2}}{\omega_{n-1}}\right)^{1/2} \frac{\alpha^{1/4}}{1-\alpha^{1/4}}\alpha^{h/4} = C(n,\varepsilon,\alpha)\,\alpha^{h/4}. \tag{4.31}$$

Quindi la successione (4.29) convergerà ad un certo limite, che io chiamo $\nu(x)$. Proviamo ora che $|\nu(x)|=1$. Sempre da (4.22) e (2.13), ho

$$\frac{\Gamma(E, B_{\rho\alpha^h}(x))}{\int\limits_{B_{\rho\alpha^h}(x)} |D\varphi_E|} \leqq \frac{2\varepsilon}{\omega_{n-1}}\alpha^{h/2}, \tag{4.32}$$

dalla quale si ottiene subito che $|\nu(x)|=1$.

Per concludere la dimostrazione, basta provare che, qualunque sia la successione ρ_h tendente a zero, si ha che

$$\lim_{h\to\infty} \frac{\int\limits_{B_{\rho_h}(x)} D\varphi_E}{\int\limits_{B_{\rho_h}(x)} |D\varphi_E|} = \nu(x). \tag{4.33}$$

Posso supporre $\rho_h \leqq \rho$ per ogni $h\in N$, quindi posso trovare una successione di naturali n_h con $\lim\limits_{h\to\infty} n_h = +\infty$, tali che

$$\rho\alpha^{n_h+1} \leqq \rho_h \leqq \rho\alpha^{n_h}. \tag{4.34}$$

Da (4.23), (2.5), (2.13) e (4.32), si ottiene

$$\left|\frac{\int\limits_{B_{\rho_h}(x)} D\varphi_E}{\int\limits_{B_{\rho_h}(x)} |D\varphi_E|} - v_{n_h}(x)\right| \leqq 2\left(\frac{n\omega_n + 2A\omega_n\rho}{\omega_{n-1}\alpha^{n-1}}\right)^{1/2} \left(\frac{2\varepsilon\alpha^{n_h/2}}{\omega_{n-1}}\right)^{1/2}, \tag{4.35}$$

relazione che prova la (4.33).

Infine, dalla (4.31), passando al limite per $k\to+\infty$, si ottiene la seguente interessante maggiorazione:

$$|\nu(x)-v_h(x)| \leqq C(n,\varepsilon,\alpha)\,\alpha^{h/4}, \quad \text{per ogni } h\in N. \tag{4.36}$$

Teorema 4.1. *Sia E un insieme che minimizza il funzionale $\mathscr{F}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n\geqq 2$, con $|A(x)|\leqq A$. Suppongo che $x\in\partial E$ e che esistano $\rho, \varepsilon>0$ e α, $0<\alpha<1$, tali che $\bar{B}_\rho(x)\subset\Omega$ e valga la relazione*

$$\Gamma(E, \bar{B}_\rho(x)) \leqq \varepsilon\rho^{n-1} \leqq \sigma_A(n,\alpha)\,\rho^{n-1}, \quad \rho\leqq\varepsilon^2, \tag{4.37}$$

Allora esiste un $\delta>0$, per cui risulta

$$\partial E\cap B_\delta(x)=\partial^* E\cap B_\delta(x)$$

poi $v(x)$ è holderiana in $\partial E\cap B_\delta(x)$.

Dimostrazione. In primo luogo, vediamo che è possibile determinare un $\delta>0$ con la seguente proprietà: per ogni $y\in\partial E\cap B_\delta(x)$ esiste ρ_y, $0<\rho_y\leqq\varepsilon^2$, tale che

$$\bar{B}_{\rho_y}(y)\subset\Omega \quad \text{e} \quad \Gamma(E,\bar{B}_{\rho_y}(y))\leqq\varepsilon\rho_y^{n-1}\leqq\sigma_A(n,\alpha)\,\rho_y^{n-1}. \tag{4.38}$$

Infatti sia $0<\delta<t$, tenendo presente che la funzione $\Gamma(E,K)$ è monotona rispetto alla inclusione insiemistica, posso scrivere $\Gamma(E,B_{t-\delta}(y))\leqq\Gamma(E,B_t(x))$, se $y\in\partial E$ e $|x-y|<\delta$. Se prendiamo

$$t=\rho\alpha^{2n-2},\quad \delta=(1-\alpha)\,\rho\alpha^{2n-2} \quad \text{e} \quad \rho_y=t-\delta=\rho\alpha^{2n-1}, \tag{4.39}$$

allora, ricordando (4.22), otteniamo le (4.38). Quindi, per il Lemma 4.2, si ha che $y\in\partial^* E\cap B_\delta(x)$.

Siano ora $y,z\in\partial E\cap B_{(1-\alpha)\rho\alpha^{2n-2}}(x)$ e sia $k\in N$, allora posso scrivere la seguente maggiorazione:

$$|v(y)-v(z)|\leqq|v(y)-v_h(y)|+|v_h(y)-v_{h+k}(z)|+|v_{h+k}(z)-v(z)|. \tag{4.40}$$

Ora suppongo che $B_{\rho\alpha^{h+k}}(z)\subset B_{\rho\alpha^h}(y)$, questo implica che

$$|y-z|\leqq\rho\alpha^h(1-\alpha^k). \tag{4.41}$$

E quindi, ricordando (4.23), (4.32), (4.36) e supponendo valida la (4.28), ottengo

$$|v(y)-v(z)|\leqq C_k'(n,\varepsilon,\alpha,\rho,A)\,\alpha^{h/4}. \tag{4.42}$$

D'altra parte il $k\in N$, fissato in partenza, può essere scelto in modo che valgano le relazioni

$$2\rho\alpha^{2n-2}(1-\alpha)<\rho\alpha(1-\alpha^k), \tag{4.43}$$

$$\rho\alpha^{h+1}<\rho\alpha^h(1-\alpha^k). \tag{4.44}$$

Ne deriva che se $y,z\in\partial E\cap B_{(1-\alpha)\rho\alpha^{2n-2}}(x)$ e se $y\neq z$, allora posso trovare un $h\in N$, tale che

$$\rho\alpha^{h+2}<|y-z|\leqq\rho\alpha^h(1-\alpha^k). \tag{4.45}$$

Infine da (4.42) e (4.45), dove ormai k è da pensarsi come una costante dipendente da n e da α, ottengo

$$|v(y)-v(z)|\leqq C''(n,\varepsilon,\alpha,\rho,A)\,|y-z|^{1/4}. \tag{4.46}$$

Quindi, se $x\in\partial E$ verifica le ipotesi del Teorema 4.1, allora possiamo dire che esiste una sfera $B_\delta(x)$, tale che la funzione $v(x)$ è holderiana in $\partial E\cap B_\delta(x)$ e quindi, per il Teorema 5.8 di [7], $\partial E\cap B_\delta(x)$ è una ipersuperficie di classe C^1, cioé $\partial E\cap B_\delta(x)$ ammette una rappresentazione cartesiana mediante una funzione f di classe C^1; per di più, da (4.46), deriva che le derivate di f sono holderiane.

Osservazione. Tutti i punti $x \in \partial^* E \cap \Omega$ sono punti regolari della frontiera di E, infatti essi verificano le ipotesi del Teorema 4.1, in quanto per essi risulta

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\Gamma(E, B_\rho(x))}{\int_{B_\rho(x)} |D\varphi_E|} = 0. \tag{4.47}$$

Gli eventuali punti singolari sono dunque contenuti nell'insieme $(\partial E - \partial^* E) \cap \Omega$, e quindi, per il Teorema di Lebesgue-Vitali, ho

$$\int_{(\partial E - \partial^* E) \cap \Omega} |D\varphi_E| = 0. \tag{4.48}$$

5. Studio delle Singolarità della Frontiera di E

Come conseguenza dei risultati ottenuti da SIMONS in [10], possiamo enunciare il primo seguente teorema:

Teorema 5.1. *Sia E un insieme che minimizza il funzionale $\mathscr{F}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n \geqq 2$, con $|A(x)| \leqq A$. Se $n \leqq 7$, allora tutti i punti di $\partial E \cap \Omega$ sono regolari.*

Dimostrazione. Suppongo che esista un punto singolare $x \in \partial E \cap \Omega$. A meno di operare una traslazione, posso supporre che $x=0$. Per il Teorema 4.1, dovrà essere per ogni α, $0<\alpha<1$, se $\rho \leqq \sigma_A^2(n, \alpha)$ e $\bar{B}_\rho \subset \Omega$,

$$\Gamma(E, \rho) > \sigma_A(n, \alpha)\, \rho^{n-1}. \tag{5.1}$$

Considero ora una successione ρ_h, con $0<\rho_h<d=\operatorname{dist}(0, \partial\Omega)$ e tendente a zero decrescendo. Indico con $E_h = \{x \in R^n, \rho_h x \in E\}$. Come si è già visto nella dimostrazione del lemma di DE GIORGI, gli insiemi E_h minimizzano il funzionale $\mathscr{F}_{A_h}(F)$ sull'aperto $\Omega_h = \{x \in R^n, \rho_h x \subset \Omega\}$, con $A_h(x) = \rho_h A(\rho_h x)$.

Ora, fissato $\rho>0$, ottengo da (4.6) e (2.5), per $\rho\rho_h<d$,

$$\int_{B_\rho} |D\varphi_{E_h}| = \rho_h^{1-n} \int_{B_{\rho\rho_h}} |D\varphi_E| \leqq \rho^{n-1} \left(\frac{n\omega_n}{2} + A\omega_n \rho\rho_h\right) \leqq C(n, \rho, A). \tag{5.2}$$

Allora, per il teorema di compattezza, esiste una sottosuccessione della successione data: E_h', tale che

$$\varphi_{E_h'} \to \varphi_M \quad \text{in } L^1_{\text{loc}}(R^n), \tag{5.3}$$

con M insieme di perimetro localmente finito (vedi anche [12]). D'altra parte, per (5.3), esiste una sottosuccessione di E_h', che indico ancora con E_h', tale che

$$\lim_{h \to \infty} \int_{|x|=\rho} |\varphi_{E_h'} - \varphi_M|\, dH_{n-1} = 0 \tag{5.4}$$

per quasi tutti i $\rho>0$. Ancora, per la proprietà di minimo di E_h', se $\bar{B}_\rho \subset \Omega_h$, ottengo

$$\begin{aligned} &\int_{\bar{B}_\rho} |D\varphi_{E_h'}| + \int_{\bar{B}_\rho} \rho_h \varphi_{E_h'}(x) A(\rho_h x)\, dx \\ &\quad \leqq \int_{\bar{B}_\rho} |D\varphi_M| + \int_{\bar{B}_\rho} \rho_h \varphi_M(x) A(\rho_h x)\, dx + \int_{|x|=\rho} |\varphi_M - \varphi_{E_h'}|\, dH_{n-1}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

e quindi, da (5.4), ho per quasi tutti i $\rho>0$,

$$\max \lim_{h\to\infty} \int_{\bar{B}_\rho} |D\varphi_{E'_h}| \leqq \int_{\bar{B}_\rho} |D\varphi_M|. \tag{5.6}$$

Ora, detto N il sottinisieme di R^+ di misura lineare nulla tale che, per ogni $\rho\in R^+ - N$, valga la (5.4), la relazione

$$\int_{\partial B_\rho} |D\varphi_M| = 0, \tag{5.7}$$

e ricordando (1.6), (5.6), (5.7); allora ottengo

$$\int_{\bar{B}_\rho} |D\varphi_M| = \lim_{h\to\infty} \int_{\bar{B}_\rho} |D\varphi_{E'_h}| \qquad \text{per ogni } \rho\in R^+ - N. \tag{5.8}$$

Vediamo ora che l'insieme M ha frontiera minima in $\bar{B}_\rho$, per ogni $\rho\in R^+ - N$.

Sia infatti L un insieme tale che $L=M$ in $R^n - \bar{B}_\rho$, allora

$$\begin{aligned} &\int_{\bar{B}_\rho} |D\varphi_{E'_h}| + \int_{\bar{B}_\rho} \rho_h \varphi_{E'_h}(x) A(\rho_h x)\,dx \\ &\leqq \int_{\bar{B}_\rho} |D\varphi_L| + \int_{\bar{B}_\rho} \rho_h \varphi_L(x) A(\rho_h x)\,dx + \int_{|x|=\rho} |\varphi_M - \varphi_{E'_h}|\,dH_{n-1} \end{aligned} \tag{5.9}$$

se h è sufficientemente grande in modo che $\bar{B}_\rho \subset \Omega_h$. Da (5.9) e (5.8), per $h\to+\infty$, supposto $\rho\in R^+ - N$, ottengo

$$\int_{\bar{B}_\rho} |D\varphi_M| \leqq \int_{\bar{B}_\rho} |D\varphi_L|. \tag{5.10}$$

Quindi M ha frontiera di misura minima in R^n. D'altra parte M è un cono col vertice nell'origine. Infatti da (2.4) e dal fatto che M ha fontiera minima, ottengo, se $0<\rho_1<\rho_2$,

$$\begin{aligned} &\Big[\int_{|x|=1} |\varphi_M(\rho_2 x) - \varphi_M(\rho_1 x)|\,dH_{n-1}\Big]^2 \\ &\leqq 2\Big[\int_{\rho_1<|x|\leqq\rho_2} |x|^{1-n} |D\varphi_M|\Big]\cdot\Big[\rho^{1-n}\int_{\bar{B}_{\rho_2}} |D\varphi_M| - \rho_1^{1-n}\int_{\bar{B}_{\rho_1}} |D\varphi_M|\Big]. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Ora, per $\rho\in R^+ - N$, posso scrivere

$$\rho^{1-n}\int_{\bar{B}_\rho} |D\varphi_M| = \lim_{h\to\infty} \rho^{1-n}\int_{\bar{B}_\rho} |D\varphi_{E'_h}| = \lim_{h\to\infty} (\rho\rho_h)^{1-n}\int_{\bar{B}_{\rho\rho_h}} |D\varphi_E|. \tag{5.12}$$

Per la (2.10), la funzione $g(\rho)=\rho^{1-n}\int_{\bar{B}_\rho}|D\varphi_E| + (n-1)A\omega_n\rho$ è monotona non decrescente in ρ, e quindi ha limite per $\rho\to 0$. Allora esiste anche il limite

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^{1-n}\int_{\bar{B}_\rho} |D\varphi_E| = b. \tag{5.13}$$

Per di più, dalle (2.13) e (2.5), ho che

$$0<\omega_{n-1}\leqq b\leqq \frac{n\omega_n}{2}<+\infty. \tag{5.14}$$

Quindi da (5.12), ottengo

$$\int_{\bar{B}_\rho} |D\varphi_M| = b\rho^{n-1} \qquad \text{per ogni } \rho\in R^+ - N. \tag{5.15}$$

E da questa relazione, ricordando la (5.11), si ottiene che M è equivalente ad un cono col vertice nell'origine.

Dalla (5.14), si ricava pure che $0 \in \partial M$. Infine da (5.4), (5.8) e (5.1), ottengo, per $\rho \in R^+ - N$ e $0<\alpha<1$,

$$(5.16) \qquad \rho^{1-n} \Gamma(M, \rho) = \rho^{1-n} \lim_{h\to\infty} \Gamma(E'_h, \rho) = \lim (\rho\rho_h)^{1-n} \Gamma(E, \rho\rho_h) \geqq \sigma_A(n, \alpha).$$

Infatti, se h è sufficientemente grande, $\rho\rho_h \leqq \sigma_A^2(n, \alpha)$. Ne deriva che lo zero è un punto singolare della frontiera di M e quindi M non è un iperpiano. Questo è in contrasto con il risultato ottenuto da SIMONS in [10], secondo il quale in dimensioni minori o uguali a 7 non possono esistere coni di frontiera minima che non siano dei semispazi. Questo prova il teorema.

Osservazione. Per $n \geqq 8$, il discorso non si può ripetere, perché, per $n=8$, E. BOMBIERI, DE GIORGI e E. GIUSTI in [2] hanno provato l'esistenza di un cono di frontiera minima in R^8, il quale però non si riduce ad un semispazio.

Se n è qualunque, si possono estendere a questo caso, i risultati ottenuti da H. FEDERER in [6], per gli insiemi di frontiera minima. Il risultato finale è contenuto nel Teorema 5.2; per dimostrarlo premettiamo i seguenti lemmi:

Lemma 5.1. *Sia $\{E_h\}$ una successione di insiemi minimizzanti il funzinale $\mathscr{I}_{A_h}(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n \geqq 2$, con $|A_h(x)| \leqq A_h$. Suppongo inoltre che*

$$(5.17) \qquad \varphi_{E_h} \to \varphi_E \quad \textit{in } L^1_{\mathrm{loc}}(R^n) \quad \textit{e } A_h \to 0 \quad \text{per } h \to +\infty.$$

Allora, posto per $X \subset R^n$ e $0 \leqq k \in R$,

$$(5.18) \qquad \varphi^k_\infty(X) = \inf\{\sum_{B\in G} \omega_k 2^{-k} (\operatorname{diam} B)^k\}$$

(inf *fatto rispetto a tutti i ricoprimenti aperti numerabili G di X*), *risulta, per ogni compatto K contenuto in Ω,*

$$(5.19) \qquad \varphi^k_\infty((\partial E - \partial^* E) \cap K \geqq \max \lim_{h\to\infty} \varphi^k_\infty((\partial E_h - \partial^* E_h) \cap K).$$

Dimostrazione. Basta provare che se V è un aperto contente $(\partial E - \partial^* E) \cap K$, allora $(\partial E_h - \partial^* E_h) \cap K \subset V$ per h abbastanza grande. Se questo non fosse, riuscirei a trovare una sottosuccessione E'_h di E_h e una successione di punti x_h, tali che $x_h \in (\partial E'_h - \partial^* E'_h) \cap K$ e convergente ad un punto $x \in K - V$.

Sia ora $d = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > 0$ e siano $0<s<r<d$, allora

$$(5.20) \qquad B_s(x_h) \subset B_r(x) \qquad \text{se } h \text{ è sufficientemente grande.}$$

Poiché $x_h \in (\partial E'_h - \partial^* E'_h) \cap K$, allora per ogni $0<\alpha<1$, se $s \leqq \sigma_A^2(n, \alpha)$ $0<s<d$, deve essere

$$(5.21) \qquad \Gamma(E'_h, \bar{B}_s(x_h)) > \sigma_A(n, \alpha) s^{n-1}.$$

D'altra parte, per quasi tutti gli r,

$$(5.22) \qquad \Gamma(E, \bar{B}_r(x)) = \lim_{h\to\infty} \Gamma(E'_h, \bar{B}_r(x)),$$

e quindi, per $0<r\leqq\sigma_A^2(n,\alpha)$ e $0<s<r$, ottengo da (5.22), (5.21) e (5.20),

$$\Gamma(E,\bar{B}_r(x))\geqq\max\lim_{h\to\infty}\Gamma(E_h',\bar{B}_s(x_h))\geqq\sigma_A(n,\alpha)s^{n-1}. \tag{5.23}$$

Siccome (5.23) vale per ogni $s<r$, allora posso scrivere

$$\Gamma(E,\bar{B}_r(x))\geqq\sigma_A(n,\alpha)r^{n-1}\quad \text{per ogni } 0<r\leqq\sigma_A^2(n,\alpha). \tag{5.24}$$

Ne deriva che $x\in(\partial E-\partial^*E)\cap(K-V)$, mentre dalle ipotesi fatte tale insieme è vuoto.

Lemma 5.2. *Sia E un insieme che minimizza il funzionale $\mathscr{I}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n\geqq2$, con $|A(x)|\leqq A$. Se $x\in\partial E\cap\Omega$ e se*

$$\Theta^{*k}(\varphi_\infty^k \llcorner(\partial E-\partial^*E),x)=\max\lim_{\rho\to0}\frac{\varphi_\infty^k((\partial E-\partial^*E)\cap\bar{B}_\rho(x))}{\omega_K\rho^k}>0, \tag{5.25}$$

allora esiste un cono M, tangente ad E in x, tale che

$$H_k(\partial M-\partial^*M)>0. \tag{5.26}$$

Dimostrazione. Posso supporre $x=0$. Per (5.25), riesco a trovare una successione $\rho_h>0$, tendente a zero decrescendo e tale che

$$\varphi_\infty^k((\partial E-\partial^*E)\cap\bar{B}_{\rho_h}(x))>C\omega_k\rho_h^k, \tag{5.27}$$

dove C è una costante positiva.

Considero ora in R^n, una omotetia di rapporto ρ_h, si ottiene allora una successione di insiemi E_h che minimizzano il funzionale $\mathscr{I}_{A_h}(F)$ su di un aperto Ω_h, che si può supporre contenga la sfera B_2, qualunque sia h. Inoltre possiamo pure supporre che la successione φ_{E_h} converga in $L^1_{\text{loc}}(R^n)$ alla funzione caratteristica di un cono M. Ora da (5.18) e (5.27), si ha

$$\varphi_\infty^k((\partial E_h-\partial^*E_h)\cap\bar{B}_1)=\rho_h^{-k}\varphi_\infty^k((\partial E-\partial^*E)\cap\bar{B}_{\rho_h})\geqq C\omega_k. \tag{5.28}$$

Ora da (2-10-2) di [5] si ricava la seguente relazione generale, valida per un qualunque Borel-limitato A,

$$\varphi_\infty^k(A)=0\quad\text{se e solo se } H_k(A)=0. \tag{5.29}$$

La quale, assieme alla (5.19), completa la dimonstrazione del lemma.

Teorema 5.2. *Sia E un insieme che minimizza il funzionale $\mathscr{I}_A(F)$ su di un aperto Ω di R^n, $n\geqq8$, con $|A(x)|\leqq A$. Allora esiste un aperto W contenuto in Ω, tale che $\partial E\cap W$ è una varietà $(n-1)$-dimensionale di classe $C^{2,\alpha}$ per un opportuno α, $0<\alpha<1$, e*

$$H_k(\Omega-W)=0\quad \textit{per e ogni } k\in R,\quad k>n-8. \tag{5.30}$$

Dimostrazione. In vista del Teorema 4.1, è sufficiente provare che

$$H_k((\partial E-\partial^*E)\cap\Omega)=0\quad\text{per ogni } k\in R,\ k>n-8. \tag{5.31}$$

Suppongo dunque che sia possibile scegliere $k>n-8$, per cui non sia valida la relazione (5.31). Da (2-10-19, (2)) di [5] si ricava che

$$\Theta^{*k}(\varphi_\infty^k \llcorner A, x) \geqq 2^{-k} \qquad H_k\text{-quasi ovunque su } A. \tag{5.32}$$

Allora posso trovare $a \in (\partial E - \partial^* E) \cap \Omega$ tale che

$$\Theta^{*k}(\varphi_\infty^k \llcorner (\partial E - \partial^* E), a) > 0. \tag{5.33}$$

Dal Lemma 5.2 posso trovare un cono tangente M ad E in a, confrontiera orientata di misura minima in R^n, tale che $H_k(\partial M - \partial^* M) > 0$. Siccome $H_k(\{a\}) = 0$, allora posso scegliere $b \in \partial M - \partial^* M$, $b \neq a$, in modo tale che

$$\Theta^{*k}(\varphi_\infty^k \llcorner (\partial M - \partial^* M), b) > 0. \tag{5.34}$$

Ripetendo il ragionamento precedente, posso costruire un cono tangente D ad M in b di frontiera minima in R^n e tale che $H_k(\partial D - \partial^* D) > 0$. In questo caso però D risulta un cilindro con generatrici parallele a $b-a$ (vedi [12], Teorema XI). Possiamo supporre che le generatrici siano parallele all'asse x_n, poiché ci si può sempre ricondurre a questo caso con una rotazione. Sia Q l'intersezione di D con l'iperpiano $x_n = 0$.

L'insieme Q è un insieme che ha frontiera orientata di misura minima in R^{n-1}. Infatti se ciò non fosse vero, troverei un insieme $Q' \subset R^{n-1}$ ed una sfera B_t $(n-1)$-dimensionale, tali che

$$\begin{gathered} Q \Delta Q' = (Q - Q') \cup (Q' - Q) \Subset B_t, \\ \int_{B_t} |D\varphi_{Q'}| < \int_{B_t} |D\varphi_Q|. \end{gathered} \tag{5.35}$$

Sia ora a un numero reale con

$$\Big(\int_{B_t} |D\varphi_Q| - \int_{B_t} |D\varphi_{Q'}|\Big) a > \operatorname{mis}_{n-1}(Q \Delta Q'). \tag{5.36}$$

Ora pongo $F = Q' \times [-a, a] \cup (D - B_t \times [-a, a])$. Se $0 < a < b$, risulta che

$$F \Delta D \Subset B_t x(-b, b). \tag{5.37}$$

D'altra parte, ricordando la relazione (3.13) di [8], si ottiene

$$\int_{B_t x(-b,b)} |D\varphi_D| = \int_{-b}^{b} \Big(\int_{B_t} |D\varphi_Q|\Big) d\lambda = 2b \int_{B_t} |D\varphi_Q| \tag{5.38}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{B_t x(-b,b)} |D\varphi_F| &= \int_{-a}^{a} \Big(\int_{B_t} |D\varphi_{Q'}|\Big) d\lambda + 2 \int_{a}^{b} \Big(\int_{B_t} |D\varphi_Q|\Big) d\lambda + 2 \operatorname{mis}_{n-1}(Q' \Delta Q) \\ &= 2a \int_{B_t} |D\varphi_{Q'}| + 2(b-a) \int_{B_t} |D\varphi_Q| + 2 \operatorname{mis}_{n-1}(Q' \Delta Q). \end{aligned} \tag{5.39}$$

Infine da (5.38), (5.39) e (5.36), ottengo

$$\int_{B_t x(-b,b)} |D\varphi_F| < \int_{B_t x(-b,b)} |D\varphi_D|, \tag{5.40}$$

e quest'ultima relazione va contro la minimalità di D. Ora concludiamo la dimostrazione per induzione su n.

Se $n=8$, allora dal Teorema 5.1 risulta che ∂Q è una varietà 6-dimensionale di classe $C^{1,\alpha}$ su R^7.

Se $n \geqq 9$, noi possiamo trovare, per ipotesi induttiva, un aperto W di R^{n-1} tale che $\partial Q \cap W$ è una varietà $(n-2)$-dimensionale di classe $C^{1,\alpha}$ in R^{n-1} e

$$H_{k-1}(R^{n-1}-W)=0 \quad \text{per ogni } k>n-8. \tag{5.41}$$

Se quindi, per $n=8$, pongo $W=R^7$, allora, in entrambi i casi, $(W\times R)\cap\partial D$ è una varietà $(n-1)$-dimensionale di classe $C^{1,\alpha}$ di R^n e ricordando la (2-10-45) di [5], ottengo

$$H_k\big(R^n-(W\times R)\big)=H_k\big((R^{n-1}-W)\times R\big)=0. \tag{5.42}$$

Ora siccome in $W\times R$ la frontiera di D è regolare, si ha che

$$\partial D-\partial^* D\subset R^n-(W\times R) \tag{5.43}$$

e quindi $H_k(\partial D-\partial^* D)=0$. Questo è in contrasto col fatto che fosse

$$H_k(\partial D-\partial^* D)>0.$$

Ringrazio il Prof. M. MIRANDA, che mi ha guidato in questa ricerca.

Bibliografia

1. ALLARD, W. K., On the first variation of a varifold. Ann. of Math. Vol. **95**, (1972).
2. BOMBIERI, E., E. DE GIORGI, & E. GIUSTI, Minimal cones and Bernstein problem. Inv. Math. (1969).
3. DE GIORGI, E., Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni. Ric. di Mat. Napoli (1955).
4. DE GIORGI, E., Frontiere orientate di misura minima. Sem. Math. Sc. Nor. Sup. Pisa (1960–61).
5. FEDERER, H., Geometric Measure Theory. Springer-Verlag 1969.
6. FEDERER, H., The singular sets of area minimizing rectifiable currents with codimension one and of area minimizing flat chains modulo two with arbitrary codimension. Bull. A. M. S. (1970).
7. MIRANDA, M. Distribuzioni aventi derivate misura ed insiemi di perimetro localmente finito. Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa (1964).
8. MIRANDA, M. Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localemente finito sui prodotti cartesiani. Ann. Sc. Nor. Sup Pisa (1964).
9. MIRANDA, M., Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione. Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa (1965).
10. SIMONS, J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. Ann. of Math. (1968).
11. TRISCARI, D. Sulle singolarità delle frontiere orientate di misura minima. Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa (1963).
12. TRISCARI, D. Sull'esistenza di cilindri con frontiera di misura minima. Ann. Sc. Nor. Sup. Pisa (1963).

Istituto Matematico
Università degli Studi di Ferrara
Ferrara, Italy

(Pervenuto alla redazione li 2 gennaio, 1974)