Sur la résolution exacte et approchée d'un problème hyperbolique non linéaire de T. Carleman

R. TEMAM

Mémoire présenté par J. L. LIONS

Introduction

Nous nous intéressons ici à un problème hyperbolique non linéaire proposé par T. CARLEMAN comme un modèle mathématique pour l'étude de l'équation intégro-différentielle de Boltzman (cf. (1.1) – (1.9)). Une particularité de ce problème est la suivante: les fonctions u et v cherchées doivent être positives ou nulles et il est probable que le problème considéré serait mal posé (au sens de J. HADAMARD) si ces conditions n'étaient pas imposées.

Un résultat d'existence de solutions faibles de ce problème est démontré par KOLODNER [3] qui utilise pour cela un théorème de point fixe. Utilisant ici la méthode des pas fractionnaires (cf. [4, 5, 6, 7]) nous démontrons l'existence et l'unicité de solutions plus régulières que celles considérées par KOLODNER, et nous obtenons par la même occasion un procédé d'approximation de ces solutions. Comme la méthode de Galerkin, qui n'était à l'origine qu'une méthode d'approximation, la méthode des pas fractionnaires classique en Analyse Numérique, est utilisée ici pour l'obtention d'un résultat d'existence. Sans être peut-être le seul moyen de parvenir au résultat, la méthode des pas fractionnaires facilite ici la construction d'une solution approchée et l'obtention d'estimations à priori. Signalons que DEMIDOV et MARCHOUK [2] ont également démontré à l'aide de la méthode des pas fractionnaires des résultats d'existence pour certains problèmes aux limites.

Le plan est le suivant:

1. Enoncé du théorème d'existence et d'unicité

Soit $\Omega =]a, b[\times]c, d[$ un pavé borné de $\boldsymbol{R}^2$ dont nous notons $\boldsymbol{x}=\{x, y\}$ le point courant. Nous appelons $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev

$$\left\{u \,|\, u\in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\in L^2(\Omega)\right\},$$

qui est de Hilbert pour le produit scalaire

$$((u, v))=(u, v)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

où

$$(u, v)=\int_\Omega u(\boldsymbol{x})\,v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$$

désigne le produit scalaire de $L^2(\Omega)$.

Nous avons principalement en vue de démontrer le

Théorème 1. *Etant donné* $\boldsymbol{u}_0=\{u_0, v_0\}$ *tel que*

$$u_0, v_0\in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega), \tag{1.1}$$

$$u_0\geqq 0 \quad p.p., \qquad v_0\geqq 0 \quad p.p., \tag{1.2}$$

$$u_0(a, y)=v_0(x, c)=0, \tag{1.3}$$

alors il existe une fonction $\boldsymbol{u}=\{u, v\}$ *unique qui vérifie*

$$u, v\in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))\cap L^\infty(Q), \tag{1.4}$$

$$u\geqq 0 \quad p.p., \qquad v\geqq 0 \quad p.p., \tag{1.5}$$

$$u(a, y, t)=v(x, c, t)=0, \tag{1.6}$$

$$u(\boldsymbol{x}, 0)=u_0(\boldsymbol{x}), \qquad v(\boldsymbol{x}, 0)=v_0(\boldsymbol{x}), \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+u^2-v^2=0, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial y}+v^2-u^2=0. \tag{1.9}$$

Remarque 1.1. En modifiant convenablement (1.3) et (1.6) on peut étendre le Théorème 1 au cas où Ω est un polyèdre de $\boldsymbol{R}^2$ de côtés parallèles aux axes. On peut aussi considérer le cas où Ω n'est pas borné en imposant des conditions de décroissance à l'infini des fonctions.

Pour des résultats en dimension d'espace supérieure à 2 se reporter au §8.

2. Démonstration de l'unicité dans le Théorème 1

Soient $\boldsymbol{u}_1=\{u_1, v_1\}$ et $\boldsymbol{u}_2=\{u_2, v_2\}$, deux solutions du problème vérifiant (1.4)–(1.9) et soit $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2=\{u, v\}$. On a:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+u_1^2-u_2^2=v_1^2-v_2^2, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}+v_1^2-v_2^2=u_1^2-u_2^2. \tag{2.2}$$

Si l'on multiplie (2.1) par u et que l'on intègre en x, on obtient

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}, u\right)+2\int_\Omega (u_1^2-u_2^2)(u_1-u_2)\,dx=2\int_\Omega (v_1^2-v_2^2)(u_1-u_2)\,dx, \tag{2.3}$$

où $\|\cdot\|=\sqrt{(\cdot,\cdot)}$ désigne la norme dans $L^2(\Omega)$.

Grâce à (1.6), on voit que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, u\right)\geqq 0, \tag{2.4}$$

et, en raison de (1.5)

$$(u_1^2-u_2^2)(u_1-u_2)=(u_1+u_2)(u_1-u_2)^2\geqq 0,$$

en sorte que

$$\int_\Omega (u_1^2-u_2^2)(u_1-u_2)\,dx\geqq 0. \tag{2.5}$$

Soit μ un nombre qui majore les normes dans $L^\infty(Q)$ de u_1, u_2, v_1 et v_2. On a $(v_1^2-v_2^2)(u_1-u_2)|=|(v_1+v_2)(v_1-v_2)(u_1-u_2)|\leqq 2\mu|v_1-v_2|\,|u_1-u_2|=2\mu|v|\,|u|$ et donc

$$\int_\Omega (v_1^2-v_2^2)(u_1-u_2)\,dx\leqq 2\mu\|u\|\,\|v\|.$$

L'égalité (2.3) donne alors

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2\leqq 4\mu\|u\|\,\|v\|. \tag{2.6}$$

On obtient de même à partir de (2.2):

$$\frac{d}{dt}\|v\|^2\leqq 4\mu\|u\|\,\|v\|. \tag{2.7}$$

Ajoutant (2.6) et (2.7), on trouve

$$\frac{d}{dt}\{\|u\|^2+\|v\|^2\}\leqq 8\mu\|u\|\,\|v\|\leqq 4\mu\{\|u\|^2+\|v\|^2\}.$$

Puisque $\|u(0)\|=\|v(0)\|=0$, on en conclut avec le lemme de Gronwall que

$$\|u(t)\|^2+\|v(t)\|^2=0,\quad 0\leqq t\leqq T,$$

c'est-à-dire

$$u_1-u_2=v_1-v_2=0\quad \text{p.p.}$$

3. La solution approchée

En vue de démontrer l'existence d'une solution de (1.4)−(1.9) nous allons construire avec la méthode des pas fractionnaires, une solution approchée de ce problème.

Soit N un entier et $k=T/N$. Nous allons définir ci-après deux familles d'éléments positifs de $L^\infty(\Omega)$, $u^{n+i/2}$, $v^{n+i/2}$, $0\leqq n\leqq N-1$, $1\leqq i\leqq 2$. Nous posons, pour commencer,

$$u^0=u_0, \quad v^0=v_0, \tag{3.1}$$

qui appartiennent à $L^\infty(\Omega)$ et sont positifs par hypothèse. Lorsque $\{u^n, v^n\}$ sont connus (appartenant à $L^\infty(\Omega)$ et positifs), on définit $\{u^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+\frac{1}{2}}\}$ et $\{u^{n+1}, v^{n+1}\}$ comme suit:

a) Définition de $\{u^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+\frac{1}{2}}\}$; $u^{n+\frac{1}{2}}$, $v^{n+\frac{1}{2}}$ sont définis comme suit:

$$u^{n+\frac{1}{2}}(x)-u^n(x)+k\big(u^{n+\frac{1}{2}}(x)\big)^2=k\big(v^{n+\frac{1}{2}}(x)\big)^2, \tag{3.2}$$

$$v^{n+\frac{1}{2}}(x)-v^n(x)+k\big(v^{n+\frac{1}{2}}(x)\big)=k\big(u^{n+\frac{1}{2}}(x)\big)^2. \tag{3.3}$$

Puisque par hypothèse,

$$\sigma^n(x)=u^n(x)+v^n(x)\geqq 0, \tag{3.4}$$

un calcul explicite montre que les équations (3.3) et (3.4) définissent $u^{n+\frac{1}{2}}(x)$ et $v^{n+\frac{1}{2}}(x)$ de manière unique:

$$u^{n+\frac{1}{2}}(x)=\frac{u^n(x)+k\big(\sigma^n(x)\big)^2}{1+2k\sigma^n(x)}, \tag{3.5}$$

$$v^{n+\frac{1}{2}}(x)=\frac{v^n(x)+k\big(\sigma^n(x)\big)^2}{1+2k\sigma^n(x)}. \tag{3.6}$$

D'après ces expressions, et puisque $u^n(x)\geqq 0$ p.p., $v^n(x)\geqq 0$ p.p., on a

$$u^{n+\frac{1}{2}}(x)\geqq 0 \quad \text{p.p.}, \qquad v^{n+\frac{1}{2}}(x)\geqq 0 \quad \text{p.p.} \tag{3.7}$$

Par ailleurs, puisque $u^n\in L^\infty(\Omega)$, $v^n\in L^\infty(\Omega)$, on a bien

$$u^{n+\frac{1}{2}}\in L^\infty(\Omega), \qquad v^{n+\frac{1}{2}}\in L^\infty(\Omega). \tag{3.8}$$

b) Définition de $\{u^{n+1}, v^{n+1}\}$; u^{n+1} et v^{n+1} sont ensuite définis comme suit:

$$u^{n+1}-u^{n+\frac{1}{2}}+k\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}=0, \qquad u^{n+1}(a,y)=0, \tag{3.9}$$

$$v^{n+1}-v^{n+\frac{1}{2}}+k\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x}=0, \qquad v^{n+1}(x,c)=0. \tag{3.10}$$

Un calcul explicite montre que la solution de (3.9) (3.10) (qui est unique) s'écrit

$$u^{n+1}(x)=\frac{1}{k}\int_a^x u^{n+\frac{1}{2}}(\xi,y)\exp\left(\frac{\xi-x}{k}\right)d\xi, \tag{3.11}$$

$$v^{n+1}(x)=\frac{1}{k}\int_c^y v^{n+\frac{1}{2}}(x,\eta)\exp\left(\frac{\eta-y}{k}\right)d\eta. \tag{3.12}$$

Il en résulte facilement avec (3.7) et (3.8) que

$$u^{n+1} \geqq 0 \quad \text{p.p.}, \qquad v^{n+1} \geqq 0 \quad \text{p.p.}, \tag{3.13}$$

et que

$$u^{n+1} \in L^\infty(\Omega), \qquad v^{n+1} \in L^\infty(\Omega). \tag{3.14}$$

Le processus de construction des $\{u^{n+i/2}, v^{n+i/2}\}$ peut donc être poursuivi.

4. Estimations à priori (I)

Lemme 4.1.

$$\|u^{n+\frac{i}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v^{n+\frac{i}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)} \leqq c_0, \tag{4.1}$$

$0 \leqq n \leqq N-1$, $i=1, 2$, *où*

$$c_0 = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{4.2}$$

Démonstration. Posons

$$\lambda^{n+\frac{i}{2}} = \|u^{n+\frac{i}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad \mu^{n+\frac{i}{2}} = \|v^{n+\frac{i}{2}}\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{4.3}$$

Nous allons démontrer les inégalités suivantes qui impliquent (4.1):

$$\lambda^{n+\frac{1}{2}} + \mu^{n+\frac{1}{2}} \leqq \lambda^n + \mu^n, \tag{4.4}$$

$$\lambda^{n+1} \leqq \lambda^{n+\frac{1}{2}}, \qquad \mu^{n+1} \leqq \mu^{n+\frac{1}{2}} \qquad (0 \leqq n \leqq N-1). \tag{4.5}$$

D'après (3.5) et (3.6) on a,

$$\sigma^n(x) \leqq \lambda^n + \mu^n \quad \text{p.p.},$$

et

$$u^{n+\frac{1}{2}}(x) \leqq \frac{u^n(x) + k(\lambda^n + \mu^n)^2}{1 + 2k(\lambda^n + \mu^n)}$$

$$v^{n+\frac{1}{2}}(x) \leqq \frac{v^n(x) + k(\lambda^n + \mu^n)^2}{1 + 2k(\lambda^n + \mu^n)} \; {}^{1}.$$

D'où

$$\lambda^{n+\frac{1}{2}} \leqq \frac{\lambda^n + k(\lambda^n + \mu^n)^2}{1 + 2k(\lambda^n + \mu^n)},$$

$$\mu^{n+\frac{1}{2}} \leqq \frac{\mu^n + k(\lambda^n + \mu^n)^2}{1 + 2k(\lambda^n + \mu^n)}.$$

[1] On utilise le fait que la fonction $s \mapsto \dfrac{a + ks^2}{1 + 2ks}$ est croissante pour $s \geqq a \geqq 0$.

On obtient aisément (4.4) en ajoutant ces deux dernières inégalités. Pour (4.5) on a simplement avec (3.11) et (3.12):

$$u^{n+1}(x) \leqq \lambda^{n+\frac{1}{2}} \int_a^x \frac{1}{k} \exp\left(\frac{\xi - x}{k}\right) d\xi \leqq \lambda^{n+\frac{1}{2}},$$

$$v^{n+1}(x) \leqq \mu^{n+\frac{1}{2}} \int_c^y \frac{1}{k} \exp\left(\frac{\eta - y}{k}\right) d\eta \leqq \mu^{n+\frac{1}{2}}.$$

5. Estimations à priori (II)

Nous allons donner ici des estimations à priori sur les dérivées des $u^{n+i/2}$, $v^{n+i/2}$.

Lemme 5.1. *Soit $f \in L^2(\Omega)$ et soit $\varphi \in L^2(\Omega)$ la solution de*

$$\varphi + k\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f, \tag{5.1}$$

$$\varphi(a, y) = 0. \tag{5.2}$$

Si $f \in H^1(\Omega)$, alors $\varphi \in H^1(\Omega)$ et l'on a

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| \leqq \left\| \frac{\partial f}{\partial y} \right\|, \tag{5.3}$$

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\|^2 \leqq \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|^2 + \frac{\lambda^2}{k} \tag{5.4}$$

où

$$\lambda^2 = \int_c^d (f(a, y))^2 \, dy. \tag{5.5}$$

Démonstration. Il est clair que le problème (5.1) (5.2) admet une solution unique dans $L^2(\Omega)$. Prenant le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ de (5.1) avec φ et utilisant (5.2) on trouve

$$\|\varphi\|^2 \leqq \|f\|^2. \tag{5.6}$$

Si $f \in H^1(\Omega)$, alors $\partial \varphi / \partial y$ est solution du même problème (5.1) (5.2) avec f remplacé par $\partial f / \partial y$; l'inégalité (5.6) appliquée à ce problème donne précisément (5.3).

Pour obtenir (5.4), on dérive (5.1) par rapport à x, on multiplie par $\partial \varphi / \partial y$ et l'on intègre sur Ω

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\|^2 \leqq \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{k}{2} \int_c^d \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, y) \right)^2 dy.$$

D'après (5.1) et (5.2),

$$k\frac{\partial \varphi}{dx}(a, y) = f(a, y),$$

et le résultat suit.

Lemme 5.2. *Si k est assez petit* $\left(k<\dfrac{1}{4c_0}\right)$, *alors*

$$\left\|\frac{\partial u^{n+\frac{i}{2}}}{\partial x}\right\|,\ \left\|\frac{\partial u^{n+\frac{i}{2}}}{\partial y}\right\|,\ \left\|\frac{\partial v^{n+\frac{i}{2}}}{\partial x}\right\|,\ \left\|\frac{\partial v^{n+\frac{i}{2}}}{\partial y}\right\|$$

sont majorés par une constante c_1 indépendante de k et n.

Démonstration. *a*) D'après (3.2), on a

$$D u^{n+\frac{1}{2}}=D u^n-2k\,u^{n+\frac{1}{2}}\,D u^{n+\frac{1}{2}}+2k\,v^{n+\frac{1}{2}}\,D v^{n+\frac{1}{2}},$$

où D est l'un des opérateurs $\partial/\partial x$ ou $\partial/\partial y$; c_0 désignant la constante définie en (4.2), on en déduit

$$\|D u^{n+\frac{1}{2}}\|\leqq 2k\,c_0\|D u^{n+\frac{1}{2}}\|+2k\,c_0\|D v^{n+\frac{1}{2}}\|+\|D u^n\|.$$

On a, de même,

$$\|D v^{n+\frac{1}{2}}\|\leqq 2k\,c_0\|D u^{n+\frac{1}{2}}\|+2k\,c_0\|D v^{n+\frac{1}{2}}\|+\|D v^n\|.$$

Après, un calcul élémentaire, ces inégalités donnent

$$\{\|D u^{n+\frac{1}{2}}\|^2+\|D v^{n+\frac{1}{2}}\|^2\}\leqq\frac{1+2k\,c_0}{1-4k\,c_0}\{\|D u^n\|^2+\|D v^n\|^2\}. \tag{5.7}$$

b) D'après (3.2) et le Lemme 5.1, on a

$$\left\|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial y}\right\|\leqq\left\|\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x}\right\|. \tag{5.8}$$

De manière analogue

$$\left\|\frac{\partial v^{n+1}}{\partial x}\right\|\leqq\left\|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial y}\right\|. \tag{5.9}$$

c) Avec (3.9) et (3.10) et le Lemme 5.1, on voit que

$$\left\|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\right\|^2\leqq\left\|\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x}\right\|^2+\frac{1}{k}\int_c^d[u^{n+\frac{1}{2}}(a,y)]^2\,dy. \tag{5.10}$$

D'après (3.5) et puisque

$$u^n(a,y)=0,$$

on a

$$u^{n+\frac{1}{2}}(a,y)=\frac{k[v^n(a,y)]^2}{1+2k\,v^n(a,y)},\qquad u^{n+\frac{1}{2}}(a,y)\leqq k\,c_0^2,$$

$$\frac{1}{k}\int_c^d[u^{n+\frac{1}{2}}(a,y)]^2\,dy\leqq k(d-c)\,c_0^4.$$

Dans ces conditions, (5.10) donne

$$\left\|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\right\|^2\leqq\left\|\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x}\right\|^2+k(d-c)\,c_0^4.$$

On démontrerait de même que

$$\left\| \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} \right\|^2 \leqq \left\| \frac{\partial v^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} \right\|^2 + k(b-a)\, c_0^4,$$

et il résultate de ces deux dernières inégalités que

$$\left\{ \left\| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial v^{n+1}}{d y} \right\|^2 \right\} \leqq k(b+d-a-c)\, c_0^4 + \left\{ \left\| \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial v^{n+\frac{1}{2}}}{d y} \right\|^2 \right\}. \tag{5.11}$$

Avec (5.7), (5.8), (5.9) et le lemme de GRONWALL discret, on conclut aisément que les normes

$$\left\| \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} \right\|, \quad \left\| \frac{\partial v^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} \right\|, \quad \left\| \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right\|, \quad \left\| \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} \right\|$$

sont majorées indépendamment de k et n et le lemme est démontré.

6. Estimations à priori (III)

Considérons les fonctions u_{ik}, v_{ik}, définies sur $[0, T[$, à valeurs dans $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, et telles que

$$u_{ik}(t) = u^{n+\frac{i}{2}}, \quad v_{ik}(t) = v^{n+\frac{i}{2}}, \tag{6.1}$$

pour $t \in [nk, (n+1)k[$, $0 \leqq n \leqq N-1$, $i = 1, 2$.

Soit aussi $\tilde{u}_k$, $\tilde{v}_k$, les applications de $[0, t] \mapsto H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, linéaires sur chaque intervalle $]nk, (n+1)k[$, et telles que

$$u_k(n\,k) = u^n, \quad v_k(n\,k) = v^n, \quad 0 \leqq n \leqq N. \tag{6.2}$$

D'après les Lemmes 4.1 et 5.1 on a

Lemme 6.1. *Les fonctions u_{ik}, v_{ik} $(i=1, 2)$, $\tilde{u}_k$, $\tilde{v}_k$ demeurent dans des ensembles bornés de $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ et de $L^\infty(Q)$.*

Nous allons établir d'autres estimations à priori pour ces fonctions. L'égalité (3.9) s'écrit

$$u_{2k}(x, t) - u_{1k}(x, t) + k \frac{\partial u_{2k}(x, t)}{\partial x} = 0,$$

et d'après le Lemme 5.2 on a donc

$$\|u_{2k} - u_{1k}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leqq k\, c_2, \tag{6.3}$$

où c_2 est une constante indépendante de k. De même

$$\|v_{2k} - v_{1k}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leqq k\, c_2. \tag{6.4}$$

Ajoutant les égalités (3.2) et (3.9), on trouve

$$u^{n+1} - u^n + k \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + k(u^{n+\frac{1}{2}})^2 - k(v^{n+\frac{1}{2}})^2 = 0 \tag{6.5}$$

ce qui s'écrit

$$\frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial t}+\frac{\partial u_{2k}}{\partial x}+(u_{1k})^2-(v_{1k})^2=0. \tag{6.6}$$

On a de même

$$v^{n+1}-v^n+k\frac{\partial v^{n+1}}{\partial y}+k(v^{n+\frac{1}{2}})^2-k(u^{n+\frac{1}{2}})^2=0, \tag{6.7}$$

ce qui signifie

$$\frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t}+\frac{\partial v_{2k}}{\partial y}+(v_{1k})^2-(u_{1k})^2=0. \tag{6.8}$$

Il résulte de (6.6), (6.8) et du Lemme 6.1 que

(6.9) $\dfrac{d\tilde{u}_k}{dt}, \dfrac{d\tilde{v}_k}{dt}$ demeurent, lorsque $k\to 0$, dans des ensembles bornés de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.

Par définition des fonctions $\tilde{u}_k$ et u_{2k}, $\tilde{v}_k$ et v_{2k}, on vérifie que

$$\|\tilde{u}_k-u_{2k}\|_{L^\infty(0,T;\,L^2(\Omega))}\leqq \operatorname*{Sup}_{0\leqq n\leqq N-1}\|u^{n+1}-u^n\|$$

et avec (6.5) et le Lemme 6.1, on en conclut que

$$\|\tilde{u}_k-u_{2k}\|_{L^\infty(0,T;\,L^2(\Omega))}\leqq c_3\,k, \tag{6.10}$$

où c_3 est indépendant de k; et de même

$$\|\tilde{v}_k-v_{2k}\|_{L^\infty(0,T;\,L^2(\Omega))}\leqq c_3\,k. \tag{6.11}$$

7. Passage à la limite et théorème d'approximation

D'après le Lemme 6.1, on peut extraire de la suite k, une sous suite (encore notée k pour simplifier) telle que

$$u_{ik}\to u_i,\qquad v_{ik}\to v_i,\qquad i=1,2, \tag{7.1}$$

dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ faible-étoile et dans $L^\infty(Q)$ faible-étoile. D'après (6.3) et (6.4), on a nécessairement

$$u_1=u_2\,(\text{noté } u),\qquad v_1=v_2\,(\text{noté } v). \tag{7.2}$$

D'après le Lemme 6.1 et (6.3), la famille $\tilde{u}_k$(resp. $\tilde{v}_k$) est une famille bornée équicontinue dans $\mathscr{C}([0,T];L^2(\Omega))$ et on peut donc choisir la suite extraite de manière que la suite $\tilde{u}_k$(resp. $\tilde{v}_k$) soit convergente dans $\mathscr{C}([0,T];L^2(\Omega))$. D'après (6.10) (resp. (6.11)), (7.1) et (7.2) la limite de cette suite ne peut être que u (resp. v) et donc

$$\tilde{u}_k\to u,\ \tilde{v}_k\to v \text{ dans } \mathscr{C}([0,T];\ L^2(\Omega)). \tag{7.3}$$

Grâce à (7.1), (7.2) et (7.3) on peut passer à la limite. Les égalités (6.6) et (6.7) donnent à la limite (1.8) et (1.9); les conditions (1.4)–(1.7) sont par ailleurs aisément vérifiées et on a donc montré que $\boldsymbol{u}=\{u, v\}$ vérifie (1.4) (1.9). L'existence, dans le Théorème 1 est démontrée.

Notons que, puisque la solution de (1.4) (1.9) est unique, c'est la suite k toute entière et non une suite extraite qui donne lieu aux convergences (7.1) et (7.3).

Outre le Théorème 1, nous avons donc démontré le

Théorème 2. *Les fonctions* u_{1k}, u_{2k}, $\tilde{u}_k$ *(resp.* v_{1k}, v_{2k}, $\tilde{v}_k$*) défines par* (3.2), (3.3), (3.9), (3.10), (6.1), *et* (6.2) *convergent lorsque* $k\to 0$ *vers la fonction* u *(resp.* v*) définie par le Théorème* 1, *dans* $\mathscr{C}([0, T]; L^2(\Omega))$ *fort, dans* $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ *et* $L^\infty(Q)$ *faible-étoile.*

8. Remarques diverses

Les méthodes employées aux paragraphes précédents s'appliquent à l'étude d'un problème analogue en dimension d'espace l quelconque. Précisons cela pour $l=3$.

Soit $\Omega=]a, b[\times]c, d[\times]e, f[$ un pavé borné de R^3, et soit $\boldsymbol{x}=\{x, y, z\}$ le point courant de R^3.

Théorème 3. *Etant donné* $\boldsymbol{u}_0=\{u_0, v_0, w_0\}$ *tel que*

$$u_0, v_0, w_0 \in H^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega), \tag{8.1}$$

$$u_0, v_0, w_0 \geqq 0 \quad p.p., \tag{8.2}$$

$$u_0(a, y, z)=v_0(x, c, z)=w_0(x, y, e)=0, \tag{8.3}$$

alors il existe une fonction $\boldsymbol{u}=\{u, v, w\}$ *unique telle que*

$$u, v, w \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))\cap L^\infty(Q), \tag{8.4}$$

$$u, v, w \geqq 0 \; p.p., \tag{8.5}$$

$$u(a, y, z, t)=v(x, c, z, t)=w(x, y, e, t)=0, \tag{8.6}$$

$$u(\boldsymbol{x}, 0)=u_0(\boldsymbol{x}), \quad v(\boldsymbol{x}, 0)=v_0(\boldsymbol{x}), \quad w(\boldsymbol{x}, 0)=w_0(\boldsymbol{x}), \tag{8.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+2u^2-v^2-w^2=0, \tag{8.8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial y}+2v^2-u^2-w^2=0, \tag{8.9}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}+2w^2-u^2-v^2=0. \tag{8.10}$$

Le schéma de pas fractionnaires qui permet de construire une solution approchée du problème et de démontrer le résultat d'existence est le suivant: on construit des $u^{n+i/4}$, $v^{n+i/4}$, $w^{n+i/4}$, $0\leqq n\leqq N-1$, $1\leqq i\leqq 4$.

On part de

$$u^0 = u_0, \quad v^0 = v_0, \quad w^0 = w_0.$$

Lorsque u^n, v^n, w^n sont connus, on procède comme suit

a) *Définition de* $\{u^{n+\frac{1}{4}}, v^{n+\frac{1}{4}}, w^{n+\frac{1}{4}}\}$:

$$u^{n+\frac{1}{4}} - u^n + k(u^{n+\frac{1}{4}})^2 - k(v^{n+\frac{1}{4}})^2 = 0$$

$$v^{n+\frac{1}{4}} - v^n + k(v^{n+\frac{1}{4}})^2 - k(u^{n+\frac{1}{4}})^2 = 0$$

$$w^{n+\frac{1}{4}} - w^n = 0.$$

b) *Définition de* $\{u^{n+\frac{1}{2}}, v^{n+\frac{1}{2}}, w^{n+\frac{1}{2}}\}$:

$$u^{n+\frac{1}{2}} - u^{n+\frac{1}{4}} + k(u^{n+\frac{1}{2}})^2 - k(w^{n+\frac{1}{2}})^2 = 0$$

$$v^{n+\frac{1}{2}} - v^{n+\frac{1}{4}} = 0$$

$$w^{n+\frac{1}{2}} - w^{n+\frac{1}{4}} + k(w^{n+\frac{1}{2}})^2 - k(u^{n+\frac{1}{2}})^2 = 0.$$

c) *Définition de* $\{u^{n+\frac{3}{4}}, v^{n+\frac{3}{4}}, w^{n+\frac{3}{4}}\}$:

$$u^{n+\frac{3}{4}} - u^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

$$v^{n+\frac{3}{4}} - v^{n+\frac{1}{2}} + k(v^{n+\frac{3}{4}})^2 - k(w^{n+\frac{3}{4}})^2 = 0$$

$$w^{n+\frac{3}{4}} - w^{n+\frac{1}{2}} + k(w^{n+\frac{3}{4}})^2 - k(v^{n+\frac{3}{4}})^2 = 0.$$

d) *Définition de* $\{u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}\}$:

$$u^{n+1} - u^{n+\frac{3}{4}} + k\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} = 0, \qquad u^{n+1}(a, y, z) = 0$$

$$v^{n+1} - v^{n+\frac{3}{4}} + k\frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} = 0, \qquad v^{n+1}(x, c, z) = 0$$

$$w^{n+1} - w^{n+\frac{3}{4}} + k\frac{\partial w^{n+1}}{\partial z} = 0, \qquad w^{n+1}(x, y, e) = 0.$$

On a des résultats de convergence du type de ceux démontrés au §7.

Remarque 8.1. On peut démontrer par des méthodes analogues, des résultats d'existence et d'approximation pour des problèmes paraboliques non lineaires «coercifs dans des ensembles» i.e. bien posés quand on astreint la fonction inconnue à satisfaire des conditions autres que les conditions initiales et aux limites usuelles (par exemple ici $u \geqq 0$, $v \geqq 0$).

Bibliographie

1. Carleman, T., Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz. Publications scientifiques de l'Institut Mittag-Leffler, Uppsala (1957), p. 104—106.
2. Demidov, G.V., & G.I. Marchouk, An existence theorem for the problem of short term weather forecast. Soviet Math. Dokl. 7, No. 5, 1310—1312 (1966).

3. KOLODNER, I.I., On Carleman's Model for the Boltzman Equation. Non Linear Problems, p. 285—287. The University of Wisconsin Press 1963.
4. MARCHOUK, G.I., Méthodes Numériques en météorologie. Novosibirsk (1965) [en russe] et Armand Colin, Paris (1969) (traduction française).
5. SAMARSKI, A.A., Additivity principle for the construction of efficient difference schemes. Soviet Math. Dokl. **165**, No. 6, 1601—1605 (1965).
6. TEMAM, R., Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionaires. Annali di Mathematica pura ed applicata (IV) **79**, 191—380.
7. YANENKO, N.N., Méthode des pas fractionnaires. Novosibirsk (1966) [en russe] et Armand Colin, Paris (1968) (traduction française).

9 B^d Malleret Joinville
92 Chatillon-s-Bagneux
France

(Reçu le Mai 13, 1969)