Rudolf Carnap
Wien

Bericht über Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik[1])

I. Grunddisziplin

Die „allgemeine Axiomatik" ist die Theorie der ASe (Axiomensysteme) beliebiger Form.

Jede axiomatische Untersuchung, auch schon das Ziehen von Folgerungen aus einem einzelnen AS, setzt eine „Grunddisziplin" voraus: Logik, Arithmetik und Mengenlehre (diese als „absolute" Theorien, im Unterschied zu einer axiomatischen Arithmetik und axiomatischen Mengenlehre).

Die sog. „Grundbegriffe" eines AS (z. B. in der Geometrie die Klassen der Punkte, der Geraden, der Ebenen, die Relationen Inzidenz, Zwischen, Kongruenz) sind nicht bestimmte Begriffe, sondern Variable, für die bei der Anwendung des AS in verschiedenen Fällen verschiedene Begriffe eingesetzt werden. Ein Axiom und ebenso auch ein ganzes AS (als Konjunktion seiner Axiome) ist somit nicht ein Satz, sondern eine Satzfunktion. Ein AS mit den Grundrelationen P, Q, R können wir daher bezeichnen mit $f(P, Q, R)$, abgekürzt: $f\mathfrak{R}$ oder f. Außer den Variabeln kommen in einem AS nur logische Konstanten (d. h. solche der Grunddisziplin) vor, z. B. logische Zeichen im engeren Sinne und Zahlen.

II. Modelle und Folgerungen

Wird $f\mathfrak{R}$ durch die Konstante $\mathfrak{R}_1$ befriedigt, wobei $\mathfrak{R}_1$ Abkürzung für ein System von Relationen P_1, Q_1, .. ist, so heißt $\mathfrak{R}_1$ „Modell" von f. Ein Modell ist ein System von Begriffen der Grunddisziplin, meist ein System von Zahlen (Zahlklassen, Relationen u. dergl.).

[1]) Da die Untersuchungen an anderer Stelle in ausführlicher Darstellung veröffentlicht werden sollen, seien hier nur die wichtigsten Definitionen und Ergebnisse ohne Angabe der Beweise zusammengestellt.

g heißt „Folgerung" von f, wenn f g generell impliziert: $(\mathfrak{R})\,(f\mathfrak{R} \rightarrow g\mathfrak{R})$, abgekürzt: $f \rightarrow g$. Die Folgerung ist also, ebenso wie das AS, kein Satz, sondern eine Satzfunktion; nur die zugehörige Implikation $f \rightarrow g$ ist ein Satz, und zwar ein rein logischer, also eine Tautologie, da keine nichtlogischen Konstanten vorkommen.

Gilt $f \rightarrow g$ und $g \rightarrow f$, so heißen f und g „äquivalent" ($f \sim g$); f und g besitzen dann die gleichen Folgerungen, sie sind nur verschiedene Formulierungen desselben AS.

f heißt „erfüllt", wenn es ein Modell hat; andernfalls „leer".

Die Konjunktion einer Satzfunktion und ihres Negates (z. B. h & $\bar{h}$) heißt „kontradiktorisch". Ein AS heißt „widerspruchsvoll", wenn es eine kontradiktorische Folgerung besitzt; andernfalls „widerspruchsfrei".

Lehrsätze. 1. Widerspruchsvoll $\sim$ leer (d. h.: jedes widerspruchsvolle AS ist leer, und umgekehrt).

2. Widerspruchsfrei $\sim$ erfüllt.

III. Unabhängigkeit

f und g heißen „verträglich", wenn ihre Konjunktion (f & g) erfüllt ist; andernfalls „unverträglich".

g heißt „abhängig" von f, wenn g oder $\bar{g}$ Folgerung von f; andernfalls „unabhängig".

Ein AS erfüllt die „Unabhängigkeitsforderung", wenn jedes Axiom des AS unabhängig ist von der Konjunktion der übrigen Axiome. Diese Forderung kann nach zwei verschiedenen Richtungen hin verschärft werden.

1. f und g heißen „inhaltsfremd", wenn sie keine gemeinsamen nicht-tautologischen Folgerungen haben. f erfüllt die „Forderung der Inhaltsfremdheit", wenn jedes Axiom inhaltsfremd ist zur Konjunktion der übrigen Axiome. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung: je zwei Axiome sind inhaltsfremd.

2. f und g heißen „vollständig unabhängig" voneinander, wenn f & g, f & $\bar{g}$, $\bar{f}$ & g, $\bar{f}$ & $\bar{g}$ erfüllt sind. f erfüllt die „Forderung der vollständigen Unabhängigkeit" (Moore), wenn jede Konjunktion irgendwelcher Axiome von f verträglich ist mit dem Negat der Konjunktion der übrigen Axiome.

Lehrsätze. 1. Daß g unabhängig von f ist, ist äquivalent damit (d. h.: gleichbedeutend damit; notwendige und hinreichende Bedingung dafür), daß f sowohl mit g wie mit $\bar{g}$ verträglich ist.

2. Daß f und g inhaltsfremd sind, ist äquivalent damit, daß $\bar{f}$ und $\bar{g}$ unverträglich sind.

3. Die Forderungen der Inhaltsfremdheit und der vollständigen Unabhängigkeit sind unvereinbar (d. h. können nicht zugleich erfüllt werden).

IV. Isomorphie der Modelle

Der Begriff der „mehrstufigen Isomorphie" zwischen Modellen wird aufgestellt. Die Definition kann hier nicht angegeben werden; die Bildung des Begriffes erfolgt mit Benutzung verschiedener Hilfsbegriffe: „Individuen von K inbezug auf die q-te Stufe", „Individuenkorrelator", „induzierte Korrelation", „q-stufiger Korrelator", „q-stufig isomorph". Zwei bekannte Begriffe ergeben sich als Spezialfälle der mehrstufigen Isomorphie: die Isomorphie (oder Ähnlichkeit) im üblichen (z. B. Russellschen) Sinne, die nur für homogene Relationen definiert ist, ergibt sich als gleichbedeutend mit der einstufigen Isomorphie; die Gleichmächtigkeit zwischen Klassen ist gleichbedeutend mit der einstufigen Isomorphie für einstellige Relationen. Die mehrstufige Isomorphie ist der grundlegende Begriff für die weiteren Untersuchungen.

Gilt $\bar{f}\mathfrak{A}$, so heißt $\mathfrak{A}$ „Nichtmodell" von f. Die Modelle und Nichtmodelle von f (also alle zulässigen, d. h. typenmäßig passenden Werte der Modellvariabeln $\mathfrak{R}$ in $f\mathfrak{R}$) heißen „zulässige Modelle" von f. f heißt „formal", wenn jedes zulässige Modell von f, das mit einem Modell von f isomorph (genauer: „q-stufig isomorph", so auch stets im folgenden) ist, auch Modell von f ist; andernfalls „material". Die in der Mathematik gewöhnlich vorkommenden ASe sind formal.

Wir sagen von zwei isomorphen Modellen: sie haben dieselbe (q-stufige) „Struktur". Die Struktur Γ „gehört zu" f, wenn f ein Modell mit der Struktur Γ besitzt; Γ „gehört vollständig zu" f, wenn Γ zu f gehört und jedes zulässige Modell von f, das die Struktur Γ hat, Modell von f ist; Γ „gehört unvollständig zu" f, wenn Γ zu f gehört, aber nicht vollständig.

Lehrsatz. Ist f formal, so gehört jede zu ihm gehörende Struktur vollständig zu ihm; und umgekehrt.

V. Monomorphie und Gabelbarkeit

Der Begriff der Vollständigkeit eines AS (wohl zu unterscheiden von der Vollständigkeit des im AS genannten Elementesystems, von der z. B. das Hilbertsche Vollständigkeitsaxiom handelt) kann auf dreierlei Weise definiert werden; wir verwenden die drei Termini „monomorph", „nichtgabelbar", „entscheidungsdefinit".

Die „Strukturzahl" eines AS ist die Anzahl der zu ihm gehörenden Strukturen. f heißt „monomorph", wenn seine Strukturzahl gleich 1; „polymorph", wenn sie größer als 1 ist.

f heißt „gabelbar an" g, wenn f mit g und mit $\bar{g}$ verträglich ist und g formal ist. f heißt „gabelbar", wenn es ein g gibt derart, daß f an g gabelbar ist. f heißt „nichtgabelbar", wenn f erfüllt und nicht gabelbar ist.

Lehrsätze. 1. Gabelbarkeitssatz. Polymorph $\sim$ gabelbar. 2. Monomorph $\sim$ nichtgabelbar.

Andeutung des Beweises für den Gabelbarkeitssatz. a) f sei polymorph. Dann hat f zwei nicht-isomorphe Modelle, etwa $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Wir bezeichnen die Funktion „$\mathfrak{R}$ ist isomorph mit $\mathfrak{A}$" mit $g\,\mathfrak{R}$. Dann ist g formal. $\mathfrak{A}$ ist Modell für $f\,\&\,g$, $\mathfrak{B}$ für $f\,\&\,\bar{g}$. Also ist f an g gabelbar.

b) f sei gabelbar. Dann gibt es ein formales Axiom g derart, daß $f\,\&\,g$ erfüllt ist, etwa durch $\mathfrak{A}$, und $f\,\&\,\bar{g}$ erfüllt ist, etwa durch $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ können nun nicht isomorph sein, da sonst, weil g formal, aus $g\,\mathfrak{A}$ folgen würde: $g\,\mathfrak{B}$; es gibt aber $\bar{g}\,\mathfrak{B}$. f besitzt somit zwei nicht-isomorphe Modelle, ist also polymorph.

Anwendung auf bekannte ASe. 1. Das (z. B. Hilbertsche) AS der euklidischen Geometrie ist monomorph; also nichtgabelbar.

2. Das Peanosche AS der natürlichen Zahlen (in der von Russell vereinfachten Form mit éiner Grundrelation) ist, wie Russell gezeigt hat, monomorph; also nichtgabelbar. Eine Gabelung der Arithmetik etwa am Fermatschen oder am Goldbachschen Satz (analog der Gabelung der Geometrie am Parallelenaxiom) ist also nicht möglich.

f heißt „entscheidungsdefinit", wenn f erfüllt ist und wenn für jedes formale g (mit derselben Variabeln) entweder g oder $\bar{g}$ Folgerung von f ist.

Lehrsatz. Entscheidungsdefinit $\sim$ nichtgabelbar.

f heiße „k-entscheidungsdefinit" (d. h. im konstruktivistischen Sinne), wenn ein Modell von f aufgewiesen werden und ein Verfahren angegeben werden kann, nach dem bei jedem vorgelegten formalen g (mit derselben Variabeln) entweder der Beweis für $f \rightarrow g$ oder der Beweis für $f \rightarrow \bar{g}$ geführt werden kann. Für die Beurteilung dieses Begriffes sind zwei Stadien der Entwicklung der Logik zu unterscheiden:

1. Wenn das allgemeine Entscheidungsproblem der Logik einmal gelöst sein wird (es ist umstritten, ob das jemals geschehen kann), so wird jedes monomorphe AS k-entscheidungsdefinit. (Das Umgekehrte gilt auch jetzt schon).

2. Solange das Entscheidungsproblem der Logik noch nicht gelöst ist, gibt es kein k-entscheidungsdefinites AS. Wir haben also nicht für jedes AS ein eigenes Entscheidungsproblem, sondern nur das éine der Logik.

Es ist allgemein eine Konsequenz unserer Grundauffassung von den ASen, daß durch die einzelnen ASe nicht einzelne Gebiete abgetrennt werden, sondern jede Frage in bezug auf irgend ein AS zu dem éinen Gesamtgebiet der Logik gehört; denn jeder Satz von der Form $f \rightarrow g$ ist ein Satz der reinen Logik, eine Tautologie.

VI. Maximal- und Minimalaxiome

Man hat in solchen Axiomen, wie dem Hilbertschen „Vollständigkeitsaxiom" und dem Fraenkelschen „Beschränktheitsaxiom" besondere Schwierigkeiten gefunden, weil diese Axiome sich scheinbar nicht, wie die übrigen, auf die Grundbegriffe des AS beziehen, sondern auf die übrigen Axiome. Diese Schwierigkeiten verschwinden jedoch bei geeigneter Formulierung der Axiome.

Wir unterscheiden: „Maximalmodell-Axiom in bezug auf f" (Beispiel: Hilberts Vollständigkeitsaxiom); „Maximalstruktur-Axiom" (Beispiel: Peanos Induktionsaxiom); „Minimalmodell-Axiom" (Beispiel: Fraenkels Beschränktheitsaxiom); „Minimalstruktur-Axiom". Die Definitionen können hier nicht gegeben werden.

Mit Hilfe gewisser Einteilungen der Strukturen eines AS („teilige", „unteilige" Strukturen; „isolierte", „Anfangs-", „End-" Strukturen des AS) werden jedem AS 4 charakteristische Zahlen zugeschrieben. Aus den vier Zahlwerten für das AS f ist zu ersehen, ob f leer, monomorph oder polymorph ist und welcher der folgenden drei möglichen Fälle bei Hinzufügung irgendeines der vier genannten Axiome zu f eintritt: 1) die Hinzufügung ist nicht widerspruchsfrei möglich, 2) f wird durch Hinzufügung des Axioms monomorph, 3) f bleibt auch nach Hinzufügung polymorph.