WOLFGANG LENZEN

EPISTEMOLOGISCHE BETRACHTUNGEN ZU [S4, S5]

ZUSAMMENFASSUNG. Die zahlreichen modallogischen Systeme zwischen den Standardkalkülen S4 und S5 werden vom epistemologischen Standpunkt aus untersucht, indem 'Notwendigkeit' wahlweise als 'Wissen' bzw. als 'Überzeugt-sein' gedeutet wird. Dabei stellt sich heraus, daß – unter gewissen andernorts begründeten Voraussetzungen über epistemische Logik – S4.4 als Logik der wahren Überzeugungen aufgefaßt werden kann, während die Systeme S4.3.2 und S4.2 als Logiken für solche Leute erscheinen, die das Schema 'Wissen = wahre Überzeugung' nur eingeschränkt für ganz spezielle rein doxastische bzw. rein epistemische Sätze akzeptieren. S4.2 ist dabei allem Anschein nach *die* Logik des Wissens.

ABSTRACT. The numerous modal systems between S4 and S5 are investigated from an epistemological point of view by interpreting 'necessity' either as 'knowledge' or as '(strong) belief'. It is shown that – granted some assumptions about epistemic logic for which the author has argued elsewhere – the system S4.4 may be interpreted as the logic of true belief, while S4.3.2 and S4.2 may be taken to represent epistemic logic systems for individuals who accept the scheme 'knowledge = true belief' only for certain special instances. There is strong evidence in favor of the assumption that S4.2 is *the* logic of knowledge.

I

In den vergangenen zwei Jahrzehnten ist das Feld der modallogischen Systeme zwischen S4 und S5, kurz [S4, S5], sowohl vom syntaktischen als auch vom semantischen Gesichtspunkt aus in Ausführlichkeit untersucht worden.[1] Mehrere Kalküle wurden dabei sogar als "adäquat" nachgewiesen, d. h. als widerspruchsfrei und vollständig relativ zu einer von Fall zu Fall passend definierten Semantik. Eine *inhaltliche* Deutung der durch die jeweiligen Systeme charakterisierten Modalitäten steht jedoch noch weitgehend aus. Man weiß zwar z. B., daß der Priorsche Kalkül D (= S4.3.1) denjenigen Notwendigkeitsbegriff charakterisiert, demzufolge eine Aussage bzw. Proposition genau dann notwendigerweise wahr ist, wenn sie jetzt wahr ist und in Zukunft immer wahr sein wird – vorausgesetzt die Struktur der Zeit ist diskret (im Falle einer kontinuierlichen Zeit wäre das System S4.3 einschlägig); und verwandte Zeit-Deutungen haben Prior und Zeman in [19] bzw. [25] auch den Modalitäten von S5, S4, S4.2 und S4.4 beizulegen versucht. Von einer intuitiv befriedigenden Interpretation kann

Erkenntnis 14 (1979) 33–56. 0165–0106/79/0141–0033 $02.40

man in den drei letztgenannten Fällen jedoch kaum reden. S4.4 wird beispielsweise so als "logic of the end of the world" charakterisiert:

> One pictures an angel appearing, golden horn in hand, and announcing, "I am about to blow this horn, and when I do, the world will end; time will pass into eternity, and at that instant all eternal truths will be realized;..." The angel lifts the horn to his lips, and the instant just before he blows it is the instant for which S4.4 is expressive of the time sequence.

Das heißt:

> "α is necessary" (i.e. $L\alpha$) means "If the instant for which $L\alpha$ is being evaluated is the one instant in time then α is true at that instant and at every instant in eternity as well; if the instant for which $L\alpha$ is being evaluated is one of the instants of eternity, then α is true at every instant of eternity".[2]

So pittoresk diese Beschreibung auch ist, zu einem tieferen, intuitiven Verständnis des Kalküls S4.4 trägt sie wohl wenig bei. Deshalb ist es sicher angebracht, dem Kalkül S4.4 ebenso wie einigen anderen Systemen aus [S4, S5] eine neue inhaltliche Deutung zu verleihen. Als erster Schritt dazu sollen die *alethischen* Modalitäten *epistemisch*, genauer: 'Notwendigkeit' als 'Wissen' interpretiert werden. An die Stelle des sonst üblichen Notwendigkeitsoperators $\Box$ bzw. L soll deshalb der (ohne Personenindex versehene) Operator W treten, so daß 'Wp' den Sachverhalt symbolisiert, daß eine gewisse nicht näher festgelegte und im Folgenden stets konstant gehaltene Bezugsperson *a weiß, daß p*. Das Ausgangssystem S4 enthält dann – neben einer Standard-Axiomatisierung der Aussagenlogik – die nachstehenden Axiome(nschemata) und Regeln:

A5 $Wp \supset p$
A6 $W(p \supset q) \supset (Wp \supset Wq)$
A7 $Wp \supset WWp$
RN $p \vdash Wp$

A5 besagt bei der intendierten Deutung, daß nur Wahres gewußt werden kann, was trivial ist. **A6** entspricht einem Konjunktionsprinzip der Art, daß jemand, der sowohl weiß, daß p, als auch weiß, daß q, damit zugleich weiß, daß p und q. Auch dieses Prinzip dürfte intuitiv außer Frage stehen. Das Iterationsaxiom **A7**: Wer weiß, daß p, weiß auch, daß er dies weiß – ist dagegen in der einschlägigen Literatur ebenso heftig umstritten wie die (epistemisch gedeutete) "rule of Necessitation", **RN**, die der Bezugsperson a eine Art logischer Allwissenheit in der Form auferlegt, daß a von jedem tautologischen Sachverhalt (z. B., daß es jetzt regnet oder nicht regnet) wissen muß, daß er besteht. Die Übernahme von **A7** und vor allem von **RN** involviert eine Idealisierung des "normalen" Wissensbegriffs, über deren Rechtfertigung ich mich im Rahmen dieser Arbeit nicht näher auslassen kann. Ich habe andernorts (vgl. [16], Abschnitt 3.2) dafür argumentiert, daß eine solche Idealisierung unumgänglich ist, wenn man überhaupt so etwas wie epistemische Logik betreiben will. *Deshalb setze ich fürs Folgende mit Hintikka voraus, "daß die Logik des Wissens mindestens so stark ist wie Lewis' S4".*[3] Andererseits muß sie sicher schwächer sein als der Kalkül S5, der aus S4 durch Ersetzen von **A7** durch

A8 $\neg Wp \supset W\neg Wp$

entsteht. Dieses zweite Iterationsprinzip ist im Gegensatz zum ersteren nämlich unhaltbar: als z. B. Kolumbus die West-"indischen" Inseln erreichte, *wußte* er *nicht*, daß er in Indien gelandet war, denn *Indien* hatte er ja gar nicht erreicht. Angesichts seiner Überzeugung, er hätte Indien erreicht, darf man freilich nicht erwarten, er hätte gewußt, daß er nicht wußte, in Indien zu sein.

Die potentiellen Kalküle für eine epistemische Aussagenlogik sind also irgendwo zwischen S4 und S5[4] zu suchen – aber wo genau? Bis dato sind nicht weniger als ein Viertel Hundert verschiedener Systeme aus [S4, S5] bekannt, die aus S4 durch Hinzufügen eines oder mehrerer Axiome der nachstehenden Liste entstehen:

Γ1 $\neg W\neg Wp \supset (W\neg W\neg p \supset W\neg W\neg Wp)$

Ł1 $W(W(p \supset Wp) \supset p) \supset (W\neg W\neg Wp \supset p)$

N1 $W(W(p \supset Wp) \supset p) \supset (\neg W\neg Wp \supset p)$

L1 $p \supset (W\neg W\neg Wp \supset Wp)$

L1.2 $(Wp \supset Wq) \supset (W\neg W\neg W(Wp \supset Wq) \supset W(Wp \supset Wq))$

G1 $\neg W\neg Wp \supset W\neg W\neg p$

D2 $W(Wp \supset Wq) \vee W(q \supset Wp)$

F1 $W(Wp \supset q) \vee (\neg W\neg Wq \supset p)$

R1 $p \supset (\neg W\neg Wp \supset Wp)$

Z1 $W\neg W\neg p \supset (W\neg W\neg q \supset (\neg W\neg(p \wedge q) \supset W\neg W\neg(p \wedge q)))$

Angesichts der Komplexität der meisten Axiome läßt sich ohne weiteres wohl kaum entscheiden, welche davon als epistemologische Prinzipien akzeptierbar sind und welche nicht. **Γ1, L1, N1, L1.2,** und **Z1** sind dermaßen unübersichtlich, daß es schwerfällt, sie überhaupt in die Umgangssprache zu "übersetzen". Aber selbst die einfacheren Axiome **L1, G1, F1** und **R1** widersetzen sich einer direkten, nur vom "gesunden Menschenverstand" geleiteten Analyse, weil die Wahrheitsbedingungen für '$\neg W \neg Wp$' und für '$W \neg W \neg Wp$', also dafür, daß (*a* weiß, daß) *a* nicht weiß, daß *a* nicht weiß, daß *p*, mehr als vage erscheinen. Der folgende Exkurs soll unserer diesbezüglichen Intuition auf die Sprünge helfen.

II

Epistemische Logik wird im Allgemeinen als die Logik der *beiden* Begriffe 'wissen' und 'glauben' – 'episteme' und 'doxa' – aufgefaßt. Von daher liegt es nahe, neben den obigen Wissenslogiken auch Glaubenslogiken in Betracht zu ziehen. Da eine ausführliche Diskussion der Probleme doxastischer Logik den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, muß ich mich freilich mit den folgenden knappen Hinweisen begnügen, die ich in [14], [16] und [17] – vgl. auch die verwandte Darstellung in [13] – detailliert begründet habe:

Anders als im epistemischen Fall hat man es in der doxastischen Logik nicht nur mit *einem* Grundbegriff zu tun. Das weite Feld doxastischer Ausdrücke enthält u.a. die Terme 'glauben', 'für möglich halten', 'überzeugt sein' und 'für ausgeschlossen halten', zwischen denen offenkundig die folgenden Beziehungen bestehen: es für ausgeschlossen zu halten, daß *p*, bedeutet dasselbe wie davon überzeugt sein, daß nicht-*p*; es für möglich zu halten, daß *p*, bedeutet dasselbe wie es nicht für ausgeschlossen zu halten, daß *p*; wer davon überzeugt ist, daß *p*, der glaubt auch, daß *p*, aber man kann umgekehrt glauben, daß *p*, ohne davon überzeugt zu sein, daß *p*. Symbolisiert *Ap*, *Np*, *Mp*, *Gp* – in dieser Reihenfolge – den Sachverhalt, daß unsere Bezugsperson *a* es für ausgeschlossen hält, daß *p*, davon überzeugt ist, daß *p*, es für möglich hält, daß *p*, bzw. glaubt, daß *p*, so gilt also: $Ap \equiv N\neg p$, $Mp \equiv \neg N\neg p$ und $Np \supset Gp$, nicht aber $Gp \supset Np$. Obwohl die auch '*G*' und '*N*' erfaßten doxastischen Einstellungen durch subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriffe definiert werden können (vgl. dazu [13], [14] und [16]), so sind sie doch im Rahmen einer doxastischen Logik als irreduzible Grundbegriffe aufzufassen, für die auch jeweils verschiedene logische Gesetze gelten. Uns soll hier jedoch nur die N-Logik interessieren, die im folgenden Kalkül DS5° zusammengefaßt ist:

DA5° $Np \supset Mp$
DA6 $N(p \supset q) \supset (Np \supset Nq)$
DA7 $Np \supset NNp$
DA8 $Mp \supset NMp$
DRN $p \vdash Np$

Das doxastische Pendant zu **A5**, das "Unfehlbarkeitsprinzip"

DA5 $Np \supset p$

'Wenn jemand davon überzeugt ist, daß p, so gilt auch p', wird also zu dem unproblematischen Prinzip **DA5°** abgeschwächt, demzufolge niemand etwas zugleich für sicher und für ausgeschlossen halten kann. **DA6** entspricht wiederum einem Konjunktionsprinzip der Art, daß jemand, der sowohl von p als auch von q überzeugt ist, damit zugleich auch überzeugt ist, daß p und q.[5] Und in den Iterationsgesetzen **DA7** und **DA8** kommt schließlich zum Ausdruck, daß man sich seiner jeweiligen doxastischen Einstellung stets sicher ist, daß man also, wenn man etwas für möglich bzw. für sicher hält, zugleich davon überzeugt ist, daß man es für möglich bzw. für sicher hält. Diese Prinzipien scheinen intuitiv außer Frage zu stehen, während bezüglich der Regel **DRN** wiederum gilt, daß die dadurch erzielte Idealisierung des umgangssprachlich vorgegebenen Begriffs des Überzeugtseins unerläßlich ist, wenn man überhaupt so etwas wie doxastische Logik betreiben will. *Fürs Folgende setze ich jedenfalls voraus, daß* DS5° *der adäquate Kalkül für die Logik der Überzeugungen ist.*

Doxastische Logik kann unsere Probleme epistemischer Logik selbstverständlich erst dann lösen helfen, wenn geeignete "Brückenprinzipien" zwischen 'wissen' und 'überzeugt sein' zur Verfügung stehen. In der einschlägigen – zumeist angelsächsischen – Literatur wird z. B. die "entailment thesis" diskutiert, derzufolge aus 'wissen, daß p' folgt 'glauben, daß p'. In der Form $Wp \supset Gp$ hat sie zu einigen Mißverständnissen Anlaß gegeben (vgl. [16], Abschnitt 2.2), auf die ich hier jedoch nicht näher eingehen möchte, da bei näherer Betrachtung sich sogar die logisch stärkere Variante

B1 $Wp \supset Np$

als intuitiv unproblematisch erweist. In der Tat könnte doch ein Zeitgenosse, der uns weismachen wollte, er wüßte, daß p, sei sich aber nicht sicher, daß p, nur das gleiche mitleidige Kopfschütteln erwarten wie eine Frau, die behauptete, sie sei mit einem Junggesellen verheiratet. **B1** sollte wirklich außer Frage stehen, *so daß wir im Folgenden* EDS4.5° $:=$ S4 + DS5° + **B1** *als intuitiv unproblematisches Basissystem für eine gemischt epistemisch/doxastische Logik voraussetzen können.*

Die im *Theäthet* diskutierte (und zurückgewiesene) Bestimmung von 'episteme' als 'alethes doxa' gewinnt nun im Lichte von **B1** neues Interesse. Zwar wird man Sokrates darin Recht geben, daß ein x-beliebiger wahrer Glaube – z. B. daß es morgen schneien wird – noch längst kein Wissen darstellt, daß also $p \supset (Gp \supset Wp)$ inakzeptabel ist; aber die verschärfte Konzeption von Wissen als wahrer Überzeugung,

B2 $\quad p \supset (Np \supset Wp)$,

ist durchaus ernsthafterer Erwägung wert, ja in neuerer Zeit von verschiedenen Autoren akzeptiert worden. (Vgl. etwa [2] und [13].)

Es gibt allerdings mindestens zwei Gründe, die ernsthaft gegen **B2** sprechen. Zum einen zählt eine wahre Überzeugung im Allgemeinen dann nicht als Wissen, wenn sie "objektiv" nicht hinreichend begründet war: wer etwa davon überzeugt ist, am nächsten Samstag im Lotto zu gewinnen, weil eine Wahrsagerin ihm dies prophezeit hat, dem würden wir normalerweise selbst dann ein Wissen absprechen, wenn die Prophezeiung sich bewahrheiten sollte, denn eine Wahrsagung ist objektiv, d. h. statistisch gesehen kein verläßlicher Grund für das Wahrgesagte. Zum zweiten ist aber selbst eine begründete wahre Überzeugung nicht automatisch schon ein Wissen, wie E. Gettier in seinem berühmt gewordenen Aufsatz "Is Justified True Belief Knowledge?" nachdrücklich klargemacht hat.[6] Angesichts dieser Bedenken ist es vielleicht nicht unpassend, die Verfechter von **B2** *radikale Erkenntnistheoretiker* zu nennen. Im nächsten Abschnitt wollen wir untersuchen, welcher epistemische Kalkül für sie maßgeschneidert ist.

III

Ein radikaler Erkenntnistheoretiker – so wie er gerade getauft wurde – akzeptiert neben **B2** natürlich auch **B1** und **A5**, also die folgende *Definition*:

DEF. 1. $Wp := p \wedge Np.$

Seine epistemische Logik ergibt sich deshalb aus der doxastischen Logik in dem Sinne, daß er solche und nur solche epistemischen Prinzipien akzeptiert, die sich in DS5° mit Hilfe von Def. 1 ableiten lassen. "Übersetzt" man nun die weiter oben aufgelisteten 10 Erweiterungsaxiome von S4 in doxastische Prinzipien, so ergibt sich:

SATZ 1. In DS5° zusammen mit der Definition 1 sind die Axiome **Γ1, Ł1, N1, L1, L1.2, G1, D2, F1,** und **R1** beweisbar.

Beweis. Da das charakteristische Axiom von S4.4, **R1**, bekanntlich[7] jedes andere der in Satz 1 aufgeführten Axiome logisch impliziert, reicht es aus, die Herleitbarkeit von **R1** in DS5° + Def. 1 zu zeigen. Eliminiert man in **R1** sämtliche Vorkommnisse von '*W*' gemäß Def. 1, so ergibt sich die Formel $p \supset (\neg(\neg(p \wedge Np) \wedge N(\neg(p \wedge Np))) \supset p \wedge Np)$, die man nach einigen einfachen aussagenlogischen Umformungen als äquivalent mit $M(p \wedge Np) \supset Np$ erkennt. Nach **DA8** gilt aber $\neg Np \supset N\neg Np$, also $\neg N\neg Np \supset Np$, d.h. $MNp \supset Np$, und damit erst recht $M(p \wedge Np) \supset Np$. Ein radikaler Erkenntnistheoretiker wird somit einen Kalkül epistemischer Logik akzeptieren, der mindestens so stark ist wie S4.4.

Um nun darüber hinausgehend zu zeigen, daß S4.4 tatsächlich *die* Logik für radikale Erkenntnistheoretiker ist, muß noch nachgewiesen werden, daß sich aus DS5° mit Hilfe von Def. 1 tatsächlich *nur* solche epistemischen Prinzipien herleiten lassen, die zugleich Theoreme von S4.4 sind. Ein solcher Nachweis setzt freilich die "Definierbarkeit" von '*N*' durch '*W*' im Rahmen von DS5° voraus, d.h. genauer: die Existenz einer dort beweisbaren Äquivalenz von '*Np*' mit einem Ausdruck, der doxastische Terme nur in der Kombination '$q \wedge Nq$' (d.h. '*Wq*') enthält. Nun gibt es leider keine "logische Subtraktion", die es allgemein gestatten würde, eine logische Äquivalenz der Form $A \equiv B \wedge C$ wie eine arithmetische Gleichung nach einem der Konjunktionsglieder "aufzulösen"; speziell kann man Def. 1 nicht dazu benützen, Überzeugt-sein umgekehrt als Wissen "minus" Wahrheit zu definieren[8]. Es gilt jedoch, glücklicherweise:

SATZ 2. In DS5° ist *Np* beweisbar äquivalent mit $(p \wedge Np) \vee \neg N\neg (p \wedge Np)$, d.h. in DS5° + Def. 1 gilt $Np \equiv \neg W\neg Wp$.

Beweis. Aus der Tautologie $p \supset (Np \supset (p \wedge Np))$ gewinnt man mit **DRN** und **DA6** $Np \supset (NNp \supset N(p \wedge Np))$, also mit **DA7** auch $Np \supset N(p \wedge Np)$, und daraus mit **DA5°** $Np \supset M(p \wedge Np)$, (*); aus der

Tautologie $\neg Np \supset \neg(p \wedge Np)$ erhält man analog mit **DRN** und **DA6** $N\neg Np \supset N\neg(p \wedge Np)$, also aussagenlogisch $M(p \wedge Np) \supset MNp$, (**); aus **DA8** gewinnt man unmittelbar $MNp \supset Np$, zusammen mit (**) also $M(p \wedge Np) \supset Np$, mit (*) deshalb aussagenlogisch das gewünschte $Np \equiv (p \wedge Np) \vee M(p \wedge Np)$.

Definiert man nun (im Rahmen *epistemischer* Logik),

DEF. 2. $Np \coloneqq \neg W\neg Wp$[9]
so läßt sich zeigen:

SATZ 3. DS5° + Def. 1 ist deduktiv äquivalent mit S4.4 + Def. 2.

Beweis.[10] A) Aus Satz 1 und Satz 2 ergibt sich unmittelbar, daß das S4.4 Axiom **R1** sowie die Definition 2 in DS5° + Def. 1 beweisbar sind; die übrigen epistemischen Axiome **A5**, **A6** und **A7** erhält man sofort aus Def. 1, aus **DA6** und aus **DA7**. Also gilt DS5° + Def. 1 $\rightarrow$ S4.4 + Def. 2. B) Umgekehrt ergibt sich: i) Gemäß **A5** gilt $Wp \supset p$; ebenfalls aufgrund von **A5** gilt aber auch $Wp \supset \neg W\neg Wp$, also $Wp \supset p \wedge Np$; $p \wedge Np \supset Wp$ folgt unmittelbar aus **R1**. Also ist Def. 1 in S4.4 + Def. 2 herleitbar. ii) Aus **R1** folgt bekanntlich[11] das charakteristische Axiom von S4.2, **G1**: $\neg W\neg Wp \supset W\neg W\neg p$, also die Formel $Np \supset Mp$, d.h. das doxastische Axiom **DA5°**. iii) Nach **G1** gilt (*): $\neg W\neg W\neg Wp \supset W\neg W\neg\neg Wp$; aus **A7**, **A6** und **RN** ergibt sich $\neg W\neg\neg Wp \supset \neg Wp$, mit **RN** also $W(\neg W\neg\neg Wp \supset \neg Wp)$, und daraus mit **A6** (**): $W\neg W\neg\neg Wp \supset W\neg Wp$; aus (*) und (**) folgt aussagenlogisch $\neg W\neg Wp \supset W\neg W\neg Wp$, d.h. $Np \supset WNp$, also gemäß i) erst recht $Np \supset NNp$, d.h. **DA7**. iv) Aus **A7** folgt unmittelbar $W\neg W\neg p \supset WW\neg W\neg p$, also $Mp \supset WMp$, und daraus mit i) erst recht $Mp \supset NMp$, d.h. **DA8**. v) Aus **A6** folgt $Wp \wedge \neg Wq \supset \neg W(p \supset q)$, daraus mit **RN**, **A6** und **A7** $Wp \wedge W\neg Wq \supset W\neg W(p \supset q)$, also aussagenlogisch $\neg W\neg W(p \supset q) \supset (W\neg Wq \supset \neg Wp)$, und daraus mit **RN** und **A6** schließlich (+): $W\neg W\neg W(p \supset q) \supset (WW\neg Wq \supset W\neg Wp)$; nach iii) gilt allgemein $Np \supset WNp$, also insbesondere $N(p \supset q) \supset WN(p \supset q)$, d. h. $N(p \supset q) \supset W\neg W\neg W(p \supset q)$; zusammen mit (+) und **A7** folgt also $N(p \supset q) \supset (W\neg Wq \supset W\neg Wp)$ also aussagenlogisch $N(p \supset q) \supset (Np \supset Nq)$ d.h. **DA6**. vi) Die Gültigkeit der Regel **DRN** ergibt sich unmittelbar aus i) und **RN**. Also gilt S4.4 + Def. 2 $\rightarrow$ DS5° + Def. 1.

Die Bedeutung des hiermit bewiesenen Satzes[12] läßt sich knapp auch so ausdrücken: *wenn DS5° den adäquaten Kalkül für die Logik der Überzeugungen darstellt, so stellt S4.4 den adäquaten Kalkül für die Logik der wahren Überzeugungen dar.* Damit hat neben den "Zeit" logiken S4.3.1 und S4.3 zumindest schon einmal *ein* weiterer Kalkül aus [S4, S5] eine intuitiv befriedigende Deutung gefunden, und mit Satz 3 bestätigt sich zudem die von Hintikka in [11] geäußerte Vermutung: "the logic of true belief is not that of S4" (O.c., p. 83). Seine weitere Annahme: "the logic of 'real' knowledge...is, as far as I can see, exactly tantamount to S4" (ibid.) wird dagenen im nächsten Abschnitt widerlegt werden, wo zwei Kalküle schwächer als S4.4 aber jedenfalls stärker als S4 sich als Logiken für weniger radikale Erkenntnistheoretiker herausstellen werden, und wo einer offenbar den Kalkül für "'wirkliches' Wissen" darstellt.[13]

IV

Der Beweis dieser Behauptungen kann selbstverständlich nicht in der Weise erfolgen, daß die fraglichen Kalküle zusammen mit Def. 2 als äquivalent mit gewissen Abschwächungen von DS5° + Def. 1 nachgewiesen werden, denn die Definition 1 steht für weniger radikale So-und-so-Erkenntnistheoretiker ja gerade nicht mehr zur Verfügung. Diese müssen 'wissen' und 'überzeugt sein' zunächst anscheinend als nicht aufeinander reduzierbare Grundbegriffe hinnehmen, die lediglich mittels des Brückenprinzips **B1** miteinander verbunden sind. Doch wer – als Nicht-Radikaler – die Definition von 'Wissen' als 'wahre Überzeugung' ablehnt, braucht noch lange nicht die umgekehrte Definition von 'überzeugt sein' als 'nicht wissen, daß man nicht weiß' zurückzuweisen. Denn es wird sich weiter unten zeigen, daß letztere Definition aus gewissen epistemologischen Prinzipien ableitbar ist, die wesentlich schwächer sind als **B2** bzw. Def. 1, und die mir insgesamt für jeden noch so skrupulösen Erkenntnistheoretiker akzeptabel erscheinen.

Man beachte nun, daß gemäß Satz 3 der epistemische Kalkül S4.4 + Def. 2 nicht nur mit dem doxastischen System DS5° plus der kritischen Definition 1 deduktiv äquivalent ist, sondern auch mit der Erweiterung des in Abschnitt II eingeführten doxastisch/epistemischen Basissystems EDS4.5° um das – genau so kritische – Brückenprinzip **B2**:

$$\text{S4.4} + \text{Def. } 2 \rightleftarrows \text{EDS4.5}^\circ + \mathbf{B2}$$

Die gesuchte Charakterisierung gewisser Teilkalküle S4.x von S4.4 als Logiken für So-und-so-Erkenntnistheoretiker wird deshalb auf entsprechende Äquivalenzbeweise der Form S4.x + Def. 2 $\rightleftarrows$ EDS4.5° + **B2.x** hinauslaufen, wobei die **B2.x** Abschwächungen von **B2** darstellen, die genau die jeweilige So-und-so-Eigenschaft charakterisieren.

Hierfür kommen nun offensichtlich nur solche Kalküle S4.x in Frage, in denen tatsächlich 'N' definierbar ist, d.h. für die zusammen mit Def. 2 die Theoreme von EDS4.5° beweisbar werden. Dabei gilt:

SATZ 4. Der doxastische Operator N ist in einem epistemischen Kalkül S4.x genau dann "definierbar" in dem Sinn, daß S4.x + Def. 2 $\rightarrow$ EDS4.5°, wenn $x \geqslant 2$.[14]

Beweis. Eine Inspektion des Beweises von Satz 3 macht unmittelbar klar, daß das S4.4-Axiom, **R1**, nur dazu benötigt wurde, um Def. 1 herzuleiten, während die Ableitung der Theoreme von DS5° sowie von **B1** in den Teilen i) bis vi) des Beweises mit dem schwächeren S4.2-Axiom **G1** auskam. Also gilt für jedes System S4.x mit $x \geqslant 2$, daß S4.x + Def. 2 $\rightarrow$ EDS4.5°. Andererseits macht die Ableitung von **DA5°** in Teil ii) des erwähnten Beweises auch klar, daß man angesichts von Def. 2 ohne **G1** nicht auskommt, d.h. **G1** ist tatsächlich notwendig für die Herleitung von EDS4.5°.

Die Kalküle für So-und-so-Erkenntnistheoretiker werden also irgendwo in dem durch das nachstehende Diagramm illustrierten Bereich zwischen S4.2 und S4.4

$$\begin{tikzcd}
\text{S4.4} \arrow[r] \arrow[d] & \text{S4.3.1} \arrow[r] \arrow[d] & \text{S4.2.1} \arrow[d] \\
\text{S4.3.2} \arrow[r] & \text{S4.3} \arrow[r] & \text{S4.2}
\end{tikzcd}$$

zu suchen sein, wobei definiert ist: S4.2.1 $:=$ S4.2 + **N1**; S4.3 $:=$ S4 + **D2**; S4.3.1 $:=$ S4.3 + **N1** und S4.3.2 $:=$ S4 + **F1**. Um die durch diese Systeme bestimmten So-und-so-Eigenschaften handfest zu machen, betrachten wir zunächst einige besonders naheliegende Abschwächungen von **B2**.

So wie im Rahmen doxastischer Logik zwar nicht das widerintuitive "Unfehlbarkeitsprinzip" **DA5**, wohl aber dessen Abschwächung N(**DA5**), d.h. $N(Np \supset p)$ beweisbar ist[15], so wird man zunächst **B2** vielleicht durch

N(**B2**), d.h. durch $N(p \supset (Np \supset Wp))$ zu ersetzen geneigt sein. Dieses Prinzip ist doxastologisch äquivalent mit dem kürzeren Brückenprinzip:

B2.1 $Np \supset NWp$,

das besagt, daß jemand, der davon überzeugt ist, daß p, zugleich überzeugt ist, er wüßte, daß p. **B2.1** kann sicher eine gewisse intuitive Plausibilität für sich in Anspruch nehmen, wenngleich vom umgangssprachlichen Standpunkt aus das etwas schwächere

B2.2 $Np \supset GWp$,

'wenn jemand davon überzeugt ist, daß p, so glaubt er, daß er weiß, daß p', d.h. die Gleichsetzung von Überzeugt-sein mit Zu-wissen-glauben[16] noch naheliegender erscheinen könnte.[17] Wie immer man sich bezüglich **B2.1** und **B2.2** entscheiden mag, außer Frage steht jedenfalls das noch schwächere Prinzip, daß jemand, der davon überzeugt ist, daß p, nicht davon überzeugt sein kann, daß er *nicht* weiß, daß p,

B2.3 $Np \supset MWp$.

Aus diesem Grunde möchte ich jeden, der zumindest **B2.3** akzeptiert, einen *realistischen Erkenntnistheoretiker* nennen.

Von dieser "realistischen" Position unabhängig ist die im Folgenden näher erläuterte Position des "Vereinfachers", der zwar – als Nicht-"Radikaler" – die *generelle* Gültigkeit von **B2** bestreitet, dieses Prinzip jedoch für gewisse rein doxastische bzw. rein epistemische Sätze akzeptiert, für Sätze also, bei denen alle Satzkonstanten der zugrundeliegenden aussagenlogischen Sprache im Bereich eines epistemischen oder doxastischen Operators liegen. In einer ersten Form verschafft der "Vereinfacher" sich Reduktionsprinzipien für die Ausdrücke 'wissen, daß man überzeugt ist', 'wissen, daß man für möglich hält' und 'wissen, daß man nicht weiß' durch die nachstehenden 3 Substitutionsinstanzen von **B2**:

$$Np \supset (NNp \supset WNp)$$
$$Mp \supset (NMp \supset WMp)$$
$$\neg Wp \supset (N\neg Wp \supset W\neg Wp).$$

Die ersten beiden sind doxastologisch mit den Prinzipien

B2.4 $Np \supset WNp$ bzw.

B2.5 $Mp \supset WMp$

äquivalent, die in Verschärfung zu den Iterationsgesetzen **DA7** und **DA8** besagen, daß wir stets *Kenntnis* unserer eigenen doxastischen Einstellung haben, d.h. wenn wir etwas für möglich bzw. für sicher halten, dann auch immer wissen, daß wir es für möglich bzw. für sicher halten. Und das dritte aufgeführte Reduktionsgesetz ist unter der Voraussetzung von **B2.3** mit dem Prinzip

B2.6 $\quad N\neg Wp \supset W\neg Wp$

äquivalent, demzufolge jemand, der davon überzeugt ist, er wüßte nicht, daß p, auch wirklich weiß, daß er nicht weiß, daß p. Sowohl **B2.4** als auch **B2.5** als auch **B2.6** scheinen intuitiv wieder außer Frage zu stehen.

Verstehen wir deshalb unter einem *realistischen Vereinfacher* jemanden, der sowohl "Realist" als auch "Vereinfacher" im Sinne der obigen Festlegungen ist, so gilt:

SATZ 5. S4.2 ist die Logik für realistische Vereinfacher.

Beweis. Man beachte zunächst, daß die für "realistische Vereinfacher" charakteristischen Brückenprinzipien **B2.4**, **B2.5**, **B2.6** sowie entweder **B2.1** oder **B2.2** oder **B2.3** sich im Rahmen von EDS4.5° reduzieren lassen auf **B2.3** und zum Beispiel **B2.4**. Unter der Voraussetzung von **B2.3** folgen aus **B2.4** nämlich die beiden übrigen "Vereinfachungsgesetze" **B2.5** und **B2.6**, was man wie folgt einsieht:

(i) nach **DA8** gilt $Mp \supset NMp$, nach **B2.4** $NMp \supset WNMp$, also $Mp \supset WNMp$; ferner gewinnt man aus **DA8** und **DA5°** $NMp \supset Mp$, daraus mit **RN** und **A6** $WNMp \supset WMp$, also insgesamt $Mp \supset WMp$, d.h. **B2.5**.

(ii) Nach **B2.3** gilt $N\neg Wp \supset \neg Np$, gemäß **RN** und **A6** also $WN\neg Wp \supset W\neg Np$; außerdem gilt nach **B2.4** $N\neg Wp \supset WN\neg Wp$, also $N\neg Wp \supset W\neg Np$; ferner folgt aus **B1**, **RN** und **A6** $W\neg Np \supset W\neg Wp$, also insgesamt $N\neg Wp \supset W\neg Wp$, d.h. **B2.6**.

Andererseits sind nun unter der Voraussetzung etwa des Vereinfachungsprinzips **B2.5** die verschiedenen "Realismusprinzipien" **B2.3**, **B2.2** und **B2.1** im Rahmen von EDS4.5° miteinander äquivalent, denn **B2.3** impliziert **B2.1**: aus $\neg NWp$ folgt mit **B2.5** $W\neg NWp$, daraus mit **B1**, **RN** und **A6** $W\neg WWp$, mit **A7**, **RN** und **A6** also $W\neg Wp$, und daraus mit **B1** $N\neg Wp$; insgesamt haben wir somit $\neg NWp \supset N\neg Wp$, d.h. $MWp \supset NWp$, woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt.

Die gemischt epistemisch/doxastische Logik eines realistischen Vereinfachers ist demnach gleich EDS4.5° + **B2.3** + **B2.4**. Für den Nachweis von Satz 5 ist deshalb die Äquivalenz dieses Systems mit dem rein epistemischen Kalkül S4.2 zu zeigen. Nun enthält nach Satz 4 S4.2 + Def. 2 das Basissystem EDS4.5°; ferner gehen die Brückenprinzipien **B2.3** und **B2.4** mittels Def. 2 jeweils in das rein epistemische Gesetz **G2**: $\neg W \neg Wp \supset W \neg W \neg Wp$ über, das bekanntlich (vgl. etwa [4]) mit dem charakteristischen Axiom von S4.2, **G1**, äquivalent ist. Also gilt:

$$\text{S4.2} + \text{Def. 2} \to \text{EDS4.5}° + \mathbf{B2.3} + \mathbf{B2.4}.$$

Umgekehrt bleibt nur zu zeigen, daß sowohl Def. 2 als auch das Axiom **G1** in EDS4.5° + **B2.3** + **B2.4** herleitbar sind. Nun folgt aber aus **B2.3** unmittelbar $Np \supset \neg N \neg Wp$, mit **B1** also $Np \supset \neg W \neg Wp$, und aus **B2.4** ergibt sich $\neg Np \supset W \neg Np$, daraus mit **B1**, **RN** und **A6** auch $\neg Np \supset W \neg Wp$, d.h. $\neg W \neg Wp \supset Np$, also insgesamt $Np \equiv \neg W \neg Wp$, d.h. Def. 2. Mit Def. 2 ergibt sich die Herleitbarkeit von **G1**, $\neg W \neg Wp \supset W \neg W \neg p$, also von $Np \supset Mp$, trivialerweise aus **DA5°**, so daß Satz 5 vollständig bewiesen ist.

Da die den "realistischen Vereinfacher" auszeichnenden Prinzipien **B2.3** und **B2.4** intuitiv außer Frage stehen, kann man auf Grund von Satz 5 feststellen, daß die Logik des "wirklichen" Wissens nicht – wie Hintikka meint – genau gleich S4, sondern mindestens so stark sein muß wie S4.2. Ein weiteres Argument dafür, daß S4.2 tatsächlich *die* ("vernünftige") Logik des Wissens repräsentiert, folgt am Ende des nächsten Abschnitts.

V

Kommen wir nun zum Kalkül S4.3.2, der zwischen S4.4 und S4.2 angesiedelt ist. Aus seinem charakteristischen Axiom **F1**: $W(Wp \supset q) \vee (\neg W \neg Wq \supset p)$ läßt sich zunächst auch dann keine anschauliche, erkenntnistheoretische Position herauslesen, wenn man es mittels (der dort "zulässigen") Definition 2 in das gemischt epistemisch/doxastische Prinzip $W(Wp \supset q) \vee (Nq \supset p)$ überträgt. Was soll das schon heißen, daß wenn a davon überzeugt ist, daß q, und wenn p außerdem falsch ist, a dann wissen muß, daß q wahr ist oder daß er nicht weiß, daß p? Da die erkenntnistheoretische Relevanz dieses Prinzips alles andere als einsichtig ist, wollen wir uns lieber klar machen, was für inhaltlich wohlbestimmte Positionen zwischen dem "radikalen" und dem "realistisch vereinfachenden"

Epistemologen überhaupt eingenommen werden können. Da der erstere das Schema **B2** für *sämtliche* Sätze, der letztere dagegen nur für alle *atomaren rein epistemischen* bzw. *rein doxastischen* Sätze gelten läßt, bleiben theoretisch noch die folgenden sechs Positionen von Interesse:

P1	**B2** gilt für alle *molekularen* rein doxastischen Sätze;
P2	**B2** gilt für alle molekularen rein epistemischen Sätze;
P3	**B2** gilt für alle molekularen rein doxastischen und rein epistemischen Sätze;
P4	**B2** gilt für alle doxastischen Sätze;
P5	**B2** gilt für alle epistemischen Sätze;
P6	**B2** gilt sowohl für alle doxastische als auch für alle epistemische Sätze.

Diese Positionen sollen dabei als über **B2.3** und **B2.4** hinausgehende Zusatzforderungen verstanden werden, wie überhaupt die unproblematische Geltung der beiden letzteren Prinzipien während dieses ganzen Abschnitts vorausgesetzt wird.

Man erkennt nun leicht, daß gilt:

SATZ 6. Die Position P1 ist mit der Einstellung des realistischen Vereinfachers, die Positionen P4–P6 mit der des radikalen Erkenntnistheoretikers äquivalent.

Beweis. A) Mit P4 gilt insbesondere $(\neg p \supset Np) \supset (N(\neg p \supset Np) \supset W(\neg p \supset Np))$ und $(\neg p \supset \neg Np) \supset (N(\neg p \supset \neg Np) \supset W(\neg p \supset \neg Np))$; da aus p aussagenlogisch $(\neg p \supset Np) \wedge (\neg p \supset \neg Np)$ folgt, hätte man deshalb $Np \supset N(\neg p \supset Np) \wedge N(\neg p \supset \neg Np)$, also insgesamt $p \supset (Np \supset W(\neg p \supset Np))$ und $p \supset (Np \supset W(\neg p \supset \neg Np))$, woraus sich dann **B2**: $p \supset (Np \supset Wp)$ ergibt. B) Ähnlich kann man mit dem aus P5 folgenden Prinzip $(\neg p \supset Wp) \supset (N(\neg p \supset Wp) \supset W(\neg p \supset Wp))$ wegen der aussagenlogischen Gültigkeit von $p \supset (\neg p \supset Wp)$ folgern, daß **B2** dann ebenfalls gelten muß. C) Die Gültigkeit von **B2** unter der Voraussetzung von P6 ergibt sich aus A bzw. B trivialerweise. D) Ist α ein beliebig komplexer rein doxastischer Satz, so läßt er sich zunächst aussagenlogisch äquivalent in eine konjunktive Normalform α' der Gestalt $(\alpha_{11} \vee \cdots \vee \alpha_{1n_1}) \wedge (\alpha_{21} \vee \cdots \vee \alpha_{2n_2}) \wedge \cdots \wedge (\alpha_{m1} \vee \cdots \vee \alpha_{mn_m})$ mit $m \geqslant 1$, $n_j \geqslant 1$ für alle $j = 1, \ldots, m$ transformieren, bei der die α_{ij} nun sämtlich *atomare* rein doxastische Sätze der Gestalt $\alpha_{ij} = N\beta_{ij}$ oder

$\alpha_{ij} = M\gamma_{ij}$ sind. Gemäß den Reduktionsprinzipien für realistische Vereinfacher **B2.4** und **B2.5** gilt also für alle i, j: $\alpha_{ij} \supset W\alpha_{ij}$. Deshalb folgt aus $(\alpha_{i1} \vee \cdots \vee \alpha_{in_i})$ für alle $i = 1, \ldots, m$ $W\alpha_{i1} \vee \cdots \vee W\alpha_{in_i}$ und daraus epistemisch-logisch $W(\alpha_{i1} \vee \cdots \vee \alpha_{in_i})$. Also folgt aus α' entsprechend $W(\alpha_{11} \vee \cdots \vee \alpha_{1n_1}) \wedge \cdots \wedge W(\alpha_{m1} \vee \cdots \vee \alpha_{mn_m})$, und daraus wiederum epistemisch-logisch $W\alpha'$. Also gilt auch $\alpha \supset W\alpha$, d.h. die Gültigkeit von P1 ergibt sich schon aus den "realistischen" Prinzipien **B2.4** und **B2.5.**

Aus Teil D) des Beweises von Satz 6 folgt unmittelbar, daß die restlichen Positionen P3 und P2 zusammenfallen müssen. Es gilt jedoch *nicht*, daß P2 (=P3) ebenfalls zur Position des realistischen Vereinfachers oder des radikalen Erkenntnistheoretikers führt. So kann man aus den "realistischen" Prinzipien **B2.1–B2.6** beispielsweise nicht die Gültigkeit von **B2** für den rein epistemischen Satz $(Wp \supset Wq)$ herleiten, was man sich folgendermaßen klarmacht: mit $(Wp \supset Wq) \wedge N(Wp \supset Wq)$ hat man zunächst unmittelbar $(\neg Wp \vee Wq) \wedge (\neg NWp \vee NWq)$; obwohl nun aus $\neg N\alpha$ keineswegs allgemein $N\neg\alpha$ folgt, so gilt doch unter Voraussetzung von **B2.5**, wie beim Beweis von Satz 5 gezeigt wurde, $\neg NWp \supset N\neg Wp$; also hat man $(\neg Wp \vee Wq) \wedge (N\neg Wp \vee NWq)$ und damit $(\neg Wp \wedge N \neg Wp) \vee (Wq \wedge NWq) \vee (Wq \wedge N\neg Wp) \vee (\neg Wp \wedge NWq)$; im Fall des ersten Disjunktionsglieds folgt nach **B2.6** $W\neg Wp$; im zweiten und dritten Fall ergibt sich nach **A7** WWq; im letzten Fall: $(\neg Wp \wedge NWq)$ kann man jedoch mit den vorliegenden Prinzipien nicht auf die gewünschte Konklusion $W(\neg Wp \vee Wq)$ schließen. Wer das Prinzip **B2** für beliebige rein epistemische Sätze gelten lassen will, muß deshalb mindestens

$$\textbf{B2.7} \qquad (Wp \supset Wq) \supset (N(Wp \supset Wq) \supset W(Wp \supset Wq))$$

als zusätzliches Reduktionsprinzip akzeptieren. Tatsächlich gilt jedoch daß **B2.7** auch das einzige zusätzliche Prinzip ist, das man für die Position P2 (bzw. P3) benötigt:

SATZ 7. Die Gültigkeit von P2 (=P3) folgt aus den Prinzipien **B2.3**, **B2.4** und **B2.7**.

Beweis. Ist α ein beliebig komplexer rein epistemischer Satz, so kann man ihn zunächst wiederum in seine konjunktive Normalform α' der Gestalt $(\alpha_{11} \vee \cdots \vee \alpha_{1n_1}) \wedge (\alpha_{21} \vee \cdots \vee \alpha_{2n_2}) \wedge \cdots \wedge (\alpha_{m1} \vee \cdots \vee \alpha_{mn_m})$ überführen, bei der die α_{ij} nun atomare rein epistemische Sätze der

Form $W\beta_{ij}$ bzw. $\neg W\gamma_{ij}$ sind; betrachten wir nun ein beliebiges Konjunktionsglied der Normalform, $(\alpha_{i1} \vee \cdots \vee \alpha_{in_i})$: k dieser n_i "Atome" werden dabei "positive" Modalitäten der Form $W\beta_j$ sein ($j = 1, \ldots, k$; $0 \leqslant k \leqslant n_i$); die übrigen dagegen "negative" der Form $\neg W\gamma_i$ ($i = 1, \ldots, n_i - k$); man kann die Disjunktion $(\alpha_{i1} \vee \cdots \vee \alpha_{in_i})$ also äquivalent umordnen in $(W\beta_1 \vee \cdots \vee W\beta_k) \vee (\neg W\gamma_1 \vee \cdots \vee \neg W\gamma_{n_i-k})$; nun ist $(\neg W\gamma_1 \vee \cdots \vee \neg W\gamma_{n_i-k})$ aussagenlogisch äquivalent mit $\neg(W\gamma_1 \wedge \cdots \wedge W\gamma_{n_i-k})$, also epistemisch-logisch äquivalent mit $\neg W(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_{n_i-k}) = W\gamma$ für $\gamma \coloneqq \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_{n_i-k}$.

Gilt nun sowohl α als auch $N\alpha$, also insbesondere $(W\beta_1 \vee \cdots \vee W\beta_k) \vee \neg W\gamma$ und $N(W\beta_1 \vee \cdots \vee W\beta_k \vee \neg W\gamma)$, so auch $(W\beta_1 \vee \cdots \vee W\beta_k) \vee \neg W\gamma$ und $NW\beta_1 \vee \cdots \vee NW\beta_k \vee N\neg W\gamma$, da aus $\neg NW\beta_i$ gemäß **B2.5** wiederum $N\neg W\beta_i$ für alle $i = 1, \ldots, k$ folgt. Aus $W\beta_i$ folgt mit **A7** $WW\beta_i$, also erst recht $W(W\beta_1 \vee \cdots \vee W\beta_k \vee \neg W\gamma)$; im Falle $\neg W\gamma$ und $NW\beta_i$ ergibt sich diese Konklusion mit **B2.7**, im Falle $\neg W\gamma \wedge N\neg W\gamma$ dagegen mit **B2.6**. Insgesamt hat man also $(W\beta_1 \vee \cdots \vee W\beta_k \vee \neg W\gamma) \wedge N(W\beta_1 \vee \cdots \vee W\beta_k \vee \neg W\gamma) \supset W(W\beta_1 \vee \cdots \vee W\beta_k \vee \neg W\gamma)$. Da dies analog für alle übrigen Konjunktionsglieder der Normalform gilt, folgt somit $\alpha' \supset (N\alpha' \supset W\alpha')$, d. h. die Gültigkeit von P2.

Nennt man einen Vertreter von Position 2 bzw. 3 einen *starken Vereinfacher*, und beachtet man, daß – wie in [15] bewiesen wurde – das rein epistemisch geschriebene Prinzip **B2.7**, also

R1.2 $\quad (Wp \supset Wq) \supset (\neg W\neg W(Wp \supset Wq) \supset W(Wp \supset Wq))$

mit dem charakteristischen Axiom von S4.3.2, **F1**, äquivalent ist, so folgt aus den Sätzen 5–7 unmittelbar der

SATZ 8. Der Kalkül S4.3.2 ist die Logik für starke Vereinfacher.

Mit den Prinzipien **B2.1**–**B2.7** scheinen wir alle "naheliegenden", intuitiv einigermaßen anschaulichen Abschwächungen von **B2** schon erschöpft zu haben. Deshalb lassen sich die übrigen Kalküle aus dem weiter oben graphisch illustrierten Bereich zwischen S4.2 und S4.4, die theoretisch ebenfalls Logiken für So-und-so-Erkenntnistheoretiker hätten darstellen können, nicht näher inhaltlich charakterisieren. Zwar kann man z. B. sagen, daß die durch den (epistemisch betrachteten) Kalkül S4.3 ausgedrückte "Vereinfachungshaltung" stärker ist als die eines Realisten und schwächer als die des starken Vereinfachers, doch ist es offensichtlich nicht möglich, diese Position inhaltlich konkret zu bestimmen.

Dies gilt auch für die beiden restlichen Kalküle S4.3.1 und S4.2.1; das dort neu hinzukommende Axiom **N1**, bzw. dessen doxastisch/epistemische Lesart:

$$W(W(p \supset Wp) \supset p) \supset (Np \supset p),$$

drückt nämlich im Antezedens eine dermaßen undurchschaubare Bedingung aus, daß man auf ein intuitives Urteil über die hierin sich ausdrückende "epistemologische" Position wohl verzichten muß. Da die Systeme S4.3 und S4.3.1 jedoch die eingangs erwähnte alternative Deutung als "Zeit" logiken besitzen, ist dies kein weiterer Mangel. Vom epistemischen Standpunkt aus kann man lediglich feststellen: da S4.3.2 + **N1** bekanntlich den vollen Kalkül S4.4 ergibt (vgl. etwa [23]), ist **N1** als "Differenz" zwischen **B2** und **B2.7** einzig für radikale Erkenntnistheoretiker akzeptierbar.

Welchem Kalkül dürfen wir nun letztendlich das Attribut 'die Logik des Wissens' zuschreiben? Nach den Ausführungen in Abschnitt IV muß es sich um ein System zwischen S4.2 und S4.4 handeln; nach den Erkenntnissen in Abschnitt III fällt S4.4 als zu stark aus; nach dem gerade Ausgeführten kommen die Kalküle S4.2.1 und S4.3.1 ebenfalls nicht in Frage. Also bleiben nur S4.2 und S4.3.2 übrig. Nun zeigen aber die Überlegungen zu P2, daß das den starken Vereinfacher auszeichnende Prinzip **B2.7** lediglich dazu dient, den Schluß von $(\neg Wp \wedge NWq)$ auf $W(\neg Wp \vee Wq)$ zu rechtfertigen. Da wir separat weder von $\neg Wp$ auf $W\neg Wp$ noch von NWq auf WWq schließen können, scheint aber **B2.7** ein intuitiv wenig gerechtfertigtes Ad-hoc-Prinzip darzustellen, so daß insgesamt *die Vermutung, daß S4.2* (und nicht S4.3.2) *die Logik des Wissens darstellt, gut bestätigt ist.*

VI

Ich möchte nun abschließend noch einige Betrachtungen zu den restlichen Kalkülen aus [S4, S5] und dessen Umfeld anstellen. Als einzige echte Erweiterung von S4.4, die echt in S5 enthalten ist, haben wir den Kalkül S4.6 bzw. S4.9, also S4.4 + **Z1** bzw. S4.4 +

$$(W\neg W\neg q \supset \neg W\neg Wq) \vee (\neg W\neg Wp \supset Wp),$$

(vgl. dazu [26]). Vom epistemisch/doxastischen Standpunkt aus ist diese

Erweiterung intuitiv untragbar, denn die letztere Formel läßt sich angesichts der "Definierbarkeit" von 'N' in S4.4 in das doxastische Prinzip

$$(Mq \supset Nq) \vee (Np \supset p)$$

"übersetzen", das als Disjunktion des "Unfehlbarkeitsprinzips" **DA5** und des gleichermaßen unakzeptablen Prinzips der "Allüberzeugtheit", $(Nq \vee N\neg q)$, seinerseits unakzeptabel erscheinen muß. Die Inadäquatheit dieses Prinzips wird alternativ auch klar, wenn man das mit ihm äquivalente Axiom **Z1** zunächst in die gemischt epistemisch/doxastische Formel

$$Mp \wedge Mq \wedge \neg W\neg(p \wedge q) \supset M(p \wedge q),$$

und danach in das rein doxastische Gesetz transformiert:

$$p \wedge q \wedge Mp \wedge Mq \supset M(p \wedge q),$$

welches umgangssprachlich besagt: 'wenn jemand es sowohl für möglich hält, daß p, als auch für möglich hält, daß q, dann hält er es auch für möglich, daß p und q, vorausgesetzt, daß tatsächlich p und q'. Nun gilt für den Begriff des Für-möglich-haltens sicher kein allgemeines Konjunktionsgesetz der Form $Mp \wedge Mq \supset M(p \wedge q)$, was auf Grund der Tatsache evident ist, daß man es z. B. gleichzeitig für möglich halten kann, daß es am nächsten Tag regnen wird, als auch für möglich halten kann, daß das Gegenteil hiervon eintritt. Und das folgende Gegenbeispiel belegt, daß die obige Einschränkung dieses Konjunktionsprinzips immer noch intuitiv unhaltbar ist: Hans ist davon überzeugt, alle Schwäne seien weiß. Er erfährt, daß sein Freund Max sich einen Vogel als Haustier zugelegt hat. Er glaubt (und hält es deshalb a fortiori für möglich), daß es sich dabei um einen Raben handelt; da er Maxens ausgefallenen Geschmack kennt, hält er es aber auch für möglich, daß dieser einen Schwan gekauft hat. Mit $p :=$ 'Maxens Vogel ist schwarz' und $q :=$ 'Maxens Vogel ist ein Schwan' gilt dann insbesondere $Mp \wedge Mq \wedge \neg M(p \wedge q)$. Der Zufall (sprich: der Konstrukteur des Beispiels) hat es aber so eingerichtet, daß $p \wedge q$, d. h. daß Maxens Tier tatsächlich ein schwarzer Schwan ist. Also $p \wedge q \wedge Mp \wedge Mq \wedge \neg M(p \wedge q)$! Vom epistemischen Standpunkt aus muß das Axiom **Z1** – und damit neben dem gerade besprochenen System S4.6 = S4.9 = Z9 auch jeder weitere Kalkül Z1–Z8 der sogenannten $\mathscr{Z}$-Familie-zurückgewiesen werden.[18]

Ähnlich schaut es in der benachbarten $\mathscr{K}$-Familie (vgl. [20]) aus. Das schwächste K-System, K1, ist definiert als S4 plus, beispielsweise,

Kb $W\neg W\neg p \supset \neg W\neg Wp.$

Wenn p z. B. die Aussage symbolisiert, daß beim nächsten Wurf mit einer vorliegenden Münze "Kopf" auftreten wird, so gilt aber – mit dem Autor als Bezugsperson – sowohl $W\neg W\neg p$ als auch $W\neg Wp$: ich weiß nämlich, daß ich nicht weiß, ob "Kopf" oder ob "Zahl" kommt; da 'wissen, ob p' üblicherweise durch $W^o p := Wp \vee W\neg p$ formalisiert wird, gilt also mit $W\neg W^o p$ $W(\neg Wp \wedge \neg W\neg p)$, also $W\neg Wp \wedge W\neg W\neg p$. Unter der vorliegenden epistemischen Deutung ist das System K1 also ebenso abzulehnen wie die übrigen Kalküle der $\mathscr{K}$-Familie,[19] so daß nur noch jene Systeme aus [S4, S5] zu betrachten bleiben, die nicht gleichzeitig im Bereich zwischen S4.2 und S4.4 liegen.

Da haben wir zum Beispiel den Kalkül S4.04, der aus S4 durch Hinzufügen des Axioms

L1 $p \supset (W\neg W\neg Wp \supset Wp)$

entsteht. Die strukturelle Analogie zwischen den Axiomen **R1** und **L1** könnte die Vermutung nahelegen, daß das System S4.04 sich als Logik für jene "unorthodoxen" radikalen Erkenntnistheoretiker charakterisieren ließe, die sich auf die in Anm. 8 erwähnte Alternativdefinition von 'überzeugt sein' als 'wissen, daß man nicht weiß, daß man nicht weiß' stützen:

DEF. 2* $Np := W\neg W\neg Wp.$

Angesichts der in [15] bewiesenen Beziehungen wäre der Kalkül S4.03 := S4 + **L1.2** entsprechend die Logik für "unorthodoxe" starke Vereinfacher, während die "unorthodoxen" realistischen Vereinfacher lediglich S4 selber akzeptieren könnten. Doch diese Vermutungen sind nicht haltbar. Man kann sich zwar zunächst leicht klarmachen, daß in DS5° (unter der Voraussetzung von Definition 1) Def. 2* beweisbar ist, so daß – da S4.04 Teilkalkül von S4.4 ist – gilt: DS5° + Def. 1 $\rightarrow$ S4.04 + Def. 2*; und umgekehrt kann man mit **L1** und Def. 2* die Definition 1 sowie die Axiome **DA5°**, **DA6** und **DA7** herleiten. Für den Beweis von **DA8**, das nunmehr die Gestalt annimmt: $\neg W\neg W\neg Wp \supset W\neg W\neg W\neg W\neg W\neg Wp$, benötigt man jedoch das charakteristische Axiom von S4.2, **G1**. Da S4.04 plus **G1** aber schon S4.4 ergibt, zeigt sich hier noch einmal, daß auch bei alternativer

Definition von 'N' der Kalkül S4.4 die Logik für radikale Erkenntnistheoretiker bleibt. Auf Grund der Resultate von Zeman ([24], Abschnitt 3) kann man den Kalkül S4.04 höchstens *irreal* wie folgt charakterisieren: S4.04 *wäre* die Logik für radikale Erkenntnistheoretiker, wenn statt des zweiten doxastischen Iterationsprinzips **DA8** lediglich die Abschwächung **DA8***: $Mp \supset MNMp$ gelten würde. Da vom doxastologischen Standpunkt aus freilich keinerlei Veranlassung besteht, **DA8** derart einzuschränken, ist S4.04 samt seiner Erweiterung S4.1.2 $\coloneqq$ S4.04 + **N1** im Rahmen unserer Betrachtungen ohne Interesse. Dieses Urteil trifft schließlich auch auf die Kalküle S4.02 $\coloneqq$ S4 + **Ł1** und S4.01 $\coloneqq$ S4 + **Γ1** zu, die als Subsysteme von S4.1 $\coloneqq$ S4 + **N1** für epistemisch-logische Zwecke irrelevant sind.

Nach so vielen negativen Befunden seien zum Abschluß die positiven Hauptresultate unserer Untersuchung noch einmal graphisch durch das folgende Diagramm illustriert:

Epistemische Kalküle		Epistemisch/doxastische Kalküle		Doxastischer Kalkül
S4.4 + Def. 2	$\rightleftarrows$	EDS 4.5° + **B2**	$\rightleftarrows$	DS 5° + Def. 1
$\downarrow$				
S4.3.2 + Def. 2	$\rightleftarrows$	EDS 4.5° + **B2.3** + **B2.4** + **B2.7**		
$\downarrow$				
S4.2 + Def. 2	$\rightleftarrows$	EDS 4.5° + **B2.3** + **B2.4**		

Philosophisches Institut
Universität Regensburg

ANMERKUNGEN

[1] Die Literatur zu [S4, S5] hat sich im erwähnten Zeitraum so inflationär entwickelt, daß das Erstellen einer vollständigen Bibliographie wahrscheinlich den Umfang dieses Aufsatzes annehmen würde. Ich möchte deshalb nur die folgenden Arbeiten erwähnen, die semantische Untersuchungen zu Systemen aus [S4, S5] enthalten. Es liegen Semantiken vor für die Systeme S4.01 in [7], für S4.04 in [8] und [5], für S4.2 in [10], für S4.3.2 in [27], [8] und [5]. Definitionen der jeweiligen Kalküle werden im Laufe dieser Arbeit nachgereicht. Ich setze voraus, daß der Leser mit den Grundzügen der Modallogik vertraut ist.

[2] [25], S.342. Charakteristisch für den bedauerlichen Zustand, daß moderne possible-world-Semantiken normalerweise keine intuitive Deutung der zu "interpretierenden" Modalbegriffe liefern, ist auch die folgende Bemerkung A. Hazens, mit der er seine neugefundene S4.2-Semantik vorstellte: "I leave to more imaginative members of the philosophical community the task of finding an intuitive interpretation for this system". ([10], S.528) Ich werde dieser Aufforderung im Folgenden nachkommen.

[3] [11], S.83; in neuerer Zeit scheint Hintikka jedoch zu der Ansicht zu neigen, daß die epistemische Logik überhaupt nicht den Charakter einer Lewis-Modallogik hat, da die Regel **RN** ihm inakzeptabel erscheint. Vgl. dazu die Diskussion in [16], Abschnitt 3.2.

[4] Genauer müßte man hier sagen, daß der adäquate Kalkül epistemischer Logik eine Erweiterung von S4 sein muß, die jedenfalls schwächer ist als S5. Gegenüber den Systemen die echt zwischen S5 und S4 liegen, wären deshalb eigentlich auch die sogenannten $\mathscr{K}$-Systeme in Betracht zu ziehen, die nicht in S5 enthalten sind. Es wird sich weiter unten jedoch herausstellen, daß diese Kalküle unter der hier vorgenommenen epistemischen Deutung ohne Interesse sind.

[5] Dieses Konjunktionsgesetz gilt *nicht* für den "schwachen" Glaubensbegriff 'Gp'. Vgl. dazu [13], [14], [16] und [17].

[6] Siehe [6]; in [16], Abschnitt 2.3 wird eine Übersicht über die äußerst umfangreiche neuere Literatur zum Gettier-Problem gegeben. Vgl. auch F. v. Kutschera's Ausführungen in [13], Abschnitt 4.1, wo allerdings das durch Gettier's Beispiele verdeutlichte Scheitern der "klassischen" Definition des Wissens als Argument für eine "True Belief" Analyse gewertet wird.

[7] Dies ist ein Wissen, das sich erst nach und nach im Laufe der vergangenen 2 Jahrzehnte akkumuliert hat, und dessen Erwerb somit ausgedehntes Literaturstudium erfordert. Die wichtigsten Arbeiten dazu sind [12], [21], [24], und – für die neuesten Entwicklungen – [7] und [15].

[8] Ein ähnlicher Definitionsversuch findet sich in [1], S.189, wo sinngemäß gesetzt wird

$$Np := W(\nabla \vee p).$$

∇ sei dabei eine ausgezeichnete Satzkonstante, die intuitiv als 'a irrt sich' ('x *is mistaken*') zu deuten ist. Nach dieser Festlegung ist a also genau davon überzeugt, daß p, wenn a weiß, daß – wenn er sich nicht irrt – p der Fall ist. Bacon ergänzt diese Definition durch die umgekehrte Festlegung von 'a weiß, daß p' durch 'a ist davon überzeugt, daß p und a irrt sich nicht':

$$Wp := \neg\nabla \wedge Np.$$

Dies führt aber zu Ungereimtheiten. Erstens sind in den von Bacon zugrundegelegten epistemischen bzw. doxastischen Systemen die aus beiden Definitionen folgenden Äquivalenzen $Wp \equiv \neg\nabla \wedge W(\nabla \vee p)$ bzw. $Np \equiv \neg\nabla \wedge N(\nabla \vee p)$ nicht beweisbar. Zweitens folgt im Rahmen der hier betrachteten Kalküle S4 und DS5° (die Bacon als "idealistisch" abtut) aus der Beweisbarkeit von $N(p \vee \neg p)$ und $W(p \vee \neg p)$ die Beweisbarkeit von $\neg\nabla$, also auch die beweisbare Äquivalenz von Wp und Np! Aber auch unabhängig von der zweiten Definition bleibt die erste für sich genommen wenig plausibel. Bacons Erörterungen machen nämlich klar, daß die fragliche Konstante ∇ im Sinne von 'a irrt sich *nie*', d.h. im Sinne des "Unfehlbarkeitsprinzips" $Nq \supset q$, verstanden werden muß. Deshalb liegt inhaltlich (nicht formal) eine zirkuläre Definition, d.h. eben keine Definition vor.

[9] Man könnte alternativ auch setzen

DEF. 2*. $Np := W\neg W\neg Wp$.

Satz 2 und Satz 3 würden dann entsprechend gelten. Die Bedeutung dieses Ergebnisses für die Kalküle S4.04 und S4.03 wird weiter unten in Abschnitt VI diskutiert. Eine weitere Alternativdefinition von N ist:

DEF. 2**. $Np := W(p \supset Wp) \wedge \neg W\neg p$.

Auch hierfür würden Satz 2 und 3 entsprechend gelten; der weiter unten folgende Satz 4 wird für Def. 2** jedoch falsch.

[10] Satz 3 ist in einer ähnlichen, nicht epistemisierten Form schon in [24], SS.252–3, als Äquivalenz zwischen S4.4 und einem Kalkül bewiesen worden, der bei Zeman 'QS4.4' heißt und unserem DS5° entspricht.

[11] Dies ergibt sich z. B. unmittelbar aus der in [15] bewiesenen Äquivalenz zwischen **G1** und der Substitutionsinstanz **R1.1**: $\neg Wp \supset (\neg W\neg W\neg Wp \supset W\neg Wp)$ von **R1.**

[12] Auf Grund von Satz 3 kann man auch eine neue, einfache Semantik für S4.4 angeben, die sich unmittelbar aus der DS5° Semantik ergibt, die von Kutschera in [13] wie folgt konstruiert: DS5° ist vollständig und widerspruchsfrei relativ zur Menge aller Modell-Strukturen $\langle W, R, V\rangle$, bei denen R eine (weder reflexive, noch symmetrische, jedoch) transitive Relation auf W ist, für die zusätzlich gilt: $\bigwedge ijk(iRj \wedge iRk \supset jRk)$. Die S4.4 Modalität, die nun vorübergehend durch '$\Box$' symbolisiert sei, muß also interpretiert werden durch die Bedingung: $V_i(\Box\alpha) =$ gdw. $V_i(\alpha) = w$ und $V_j(\alpha) = w$ für alle j mit iRj. Diese Bestimmung ist wesentlich einfacher als jene von G. N. Georgacarakos, der in [5] die S4.4 Modell-Strukturen dadurch charakterisierte, daß R neben der Reflexivität und Transitivität die Bedingungen der "Konvergenz", $\bigwedge ijk(iRj \wedge iRk \supset Vl(jRl \wedge kRl))$, sowie der "fernen Symmetrie", $\bigwedge ijk(iRj \wedge jRk \supset (i = j \vee kRj))$ erfüllen muß.

[13] M. E. Byrd hat in [3] behauptet, daß – anders als Hintikka meint – wahrer Glaube und Wissen die gleiche "interne Logik" haben. Auch diese Behauptung wird natürlich im Folgenden widerlegt.

[14] In S4 gibt es bekanntlich (vgl. [12], S.48) genau 14 verschiedene, d. h. nicht äquivalente Modalitäten, nämlich p, $\neg p$, Wp, $W\neg p$, $W\neg W\neg Wp$, $W\neg W\neg W\neg p$, $\neg W\neg Wp$, $\neg W\neg W\neg p$, $W\neg W\neg p$, $W\neg Wp$, $\neg W\neg W\neg W\neg p$, $\neg W\neg W\neg Wp$, $\neg W\neg p$ und $\neg Wp$. Legt man nun in Verallgemeinerung zu Satz 4 fest, daß der doxastische Operator N im Rahmen eines epistemischen Kalküls S4.x "definierbar" ist, falls es eine Modalität Y gibt, so daß in S4.x plus der Definition $Np := Y$ alle Theoreme von EDS4.5° beweisbar werden, so gilt wiederum, daß $x \geqslant 2$ sein muß. Es ist allerdings denkbar, daß es komplexere epistemische Ausdrücke (wie z. B das Definiens von Def. 2** weiter oben) gibt, für die N in einem System schwächer als S4.2 "definierbar" würde. Eine systematische Untersuchung dieser Frage wird durch die Tatsache stark behindert, daß es in den Kalkülen unterhalb von S4.2 bekanntlich unendlich viele verschiedene Modalausdrücke (einer einzigen Satzkonstanten p) gibt. Vgl. dazu [18].

[15] Aus $\neg N(Np \supset p)$, d. h. $M(Np \wedge \neg p)$, folgt nämlich einerseits $M\neg p$, d. h $\neg Np$, andererseits aber auch MNp, also mit **DA8** Np, insgesamt also ein Widerspruch.

[16] Die Umkehrung von **B2.2** folgt mit dem zusätzlichen Prinzipien $Gp \supset \neg G\neg p$ und $Np \supset Gp$ wie folgt: mit GWp hat man GNp, also $\neg G\neg Np$, also auch $\neg N\neg Np$, d. h. MNp, aus dem Np mit **DA8** folgt.

[17] Wenn man von jemandem behauptet, er glaube zu wissen, daß p, so behauptet

man sicher, daß er davon überzeugt ist, daß p. Man benutzt diese Wendung freilich meistens in Situationen, wo man gleichzeitig zum Ausdruck bringen will, daß man selber weiß, daß der Betroffene *nicht weiß*, daß p, weil p eben nicht der Fall ist. 'Zu wissen glauben' ist also oft im Sinne von 'überzeugt sein, aber nicht wissen' zu verstehen.

[18] Für eine Definition der verschiedenen $\mathscr{Z}$-Systeme siehe [22]. Unsere Untersuchung hat streng genommen nur jene $\mathscr{Z}$-Systeme als inadäquat erwiesen, in denen N "definierbar" ist, also nur die Kalküle Z4–Z9, die S4.2 als Subkalkül enthalten, sowie die Erweiterungen V1 und V2 von Z9 (vgl. [21], Abschnitt 2.3). Auf Grund der Untersuchungen in [9] darf man jedoch die drei restlichen Systeme Z1–Z3 unter der vorliegenden epistemischen Deutung ebenfalls als unakzeptabel verwerfen.

[19] Man kann sich leicht klarmachen, daß z. B. das stärkste $\mathscr{K}$-System K4 $\succeq$ S4.4 + **Kb** im Sinne von Satz 3 äquivalent mit jenem doxastischen Kalkül ist, der über DS5° hinausgehend noch das Axiom der "Allüberzeugtheit": $Np \vee N\neg p$, enthält. Dies erhellt noch einmal die doxastisch/epistemische Inadäquatheit der $\mathscr{K}$-Systeme.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Bacon, J. 'Belief as relative knowledge', in *The Logical Enterprise*, hrg.v. A. R. Anderson, R. M. Marcus and R. M. Martin, Yale University Press, 1975, SS. 189–210.

[2] Blau, U. *Glauben und Wissen*, Dissertation, München, 1969.

[3] Byrd, M. E. 'Knowledge and true belief in Hintikka's epistemic logic', *Journal of Philosophical Logic* **2** (1973), SS. 181–192.

[4] Dummett, M. A. and E. J. Lemmon 'Modal Logics between S4 and S5', *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* **3** (1959), SS. 250–264.

[5] Georgacarakos, G. N. 'Semantics for S4.04, S4.4 and S4.3.2', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **17** (1976), SS. 297–302.

[6] Gettier, E. 'Is justified true belief knowledge?', *Analysis* **23** (1963), SS. 121–123.

[7] Goldblatt, R. I. 'A new extension of S4', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **14** (1973), SS. 567–574.

[8] Goldblatt, R. I. 'Concerning the proper axiom for S4.04 and some related systems', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **14** (1973), SS. 392–396.

[9] Goldblatt, R. I. 'A study of $\mathscr{Z}$ modal systems', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **15** (1974), SS. 289–294.

[10] Hazen, A. 'Semantics for S4.2', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **13** (1972), SS. 527–528.

[11] Hintikka, J. 'The modes of modality', *Acta Philosophica Fennica* **16** (1963), SS. 65–82; abgedr. in J. Hintikka *Models for Modalities*, Dordrecht-Holland: D. Reidel, 1969, SS. 71–86. Die Seitenangaben beziehen sich auf die letztere Fassung.

[12] Hughes, G. E. and M. J. Cresswell *An Introduction to Modal Logic*, London: Methuen & Co., 1968.

[13] Kutschera, F. *Einführung in die intensionale Semantik*, Berlin: de Gruyter, 1976.

[14] Lenzen, W. 'Probabilistic interpretations of epistemic concepts', *5th International Congress of LMPS*, London, Ontario, Canada, 1975, Contributed Papers, SS. IV 19–20.

[15] Lenzen, W. 'On some substitution instances of **R1** and **L1**', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **19** (1978), SS. 159–164.
[16] Lenzen, W. 'Recent work in epistemic logic', *Acta Philosophica Fennica* **30**, Issue 1 (1978).
[17] Lenzen, W. *Glauben, Wissen und Wahrscheinlichkeit*, erscheint voraussichtlich 1979, Wien: Springer Verlag.
[18] Makinson, D. C. 'There are infinitely many Diodorean modal functions', *Journal of Symbolic Logic* **31** (1966), SS. 406–408.
[19] Prior, A. N. *Past, Present and Future*, Oxford University Press, 1967.
[20] Sobociński, B. 'Family $\mathscr{K}$ of the non-Lewis modal systems', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **5** (1964), SS. 313–318.
[21] Sobociński, B. 'Certain extensions of modal system S4', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **11** (1970), SS. 347–368.
[22] Sobociński, B. 'A new class of modal systems', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **12** (1971), SS. 381–384.
[23] Zeman, J. J. 'The propositional calculus **MC** and its modal analog', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **9** (1968), SS. 294–298.
[24] Zeman, J. J. 'Modal systems in which necessity is "factorable"', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **10** (1969), SS. 247–256.
[25] Zeman, J. J. 'A study of some systems in the neighborhood of S4.4', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **12** (1971), SS. 341–357.
[26] Zeman, J. J. 'S4.6 is S4.9', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **13** (1972), S.118.
[27] Zeman, J. J. 'Semantics for S4.3.2', *Notre Dame Journal of Formal Logic* **13** (1972), SS. 454–460.

Manuscript submitted 19 March 1977
Final version received 20 February 1978