PETER KLOPSCH

ALGEBRAISCHE KENNZEICHNUNG ANGEORDNETER BACHMANN-RÄUME

Gegenstand dieser Untersuchung sind die metrischen Räume der n-dimensionalen absoluten Geometrie im Sinne von F. Bachmann [1]. Diese Räume werden als Bachmann–Räume bezeichnet. Ein Bachmann-Raum heißt angeordnet, wenn für seine Punktmenge eine Zwischenrelation erklärt ist, welche die Hilbertschen Anordnungsaxiome erfüllt. Von W. Pejas wurden in [6] alle angeordneten Bachmann–Ebenen mit nichteuklidischer Metrik algebraisch beschrieben. Ergebnisse und Beweise werden besonders durchsichtig, wenn man sich auf Hilbert–Ebenen, d.h. auf angeordnete Bachmann–Ebenen mit freier Beweglichkeit beschränkt (Pejas [5], Hessenberg und Diller [4], Bachmann [1]). Ziel dieser Abhandlung ist es zu zeigen, daß sich die Pejasschen Darstellungssätze für Hilbert-Ebenen in natürlicher Weise auf beliebige n-dimensionale angeordnete Bachmann–Räume verallgemeinern lassen, sofern die zugrunde liegende Metrik definit ist. Das Hauptergebnis der Arbeit steht in §3, Satz 3.

1. Grundlagen

1.1. *Projektiv metrisierter affiner Raum*

Im folgenden sei K stets ein kommutativer Körper von Charakteristik $\neq 2$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$), f eine anisotrope symmetrische Bilinearform auf V und $k \in K$ eine 'metrische Konstante'. Den Formwert eines Vektors $x \in V$ bezeichnen wir zur Abkürzung mit $\bar{x} := f(x, x)$. Da f anisotrop ist, gilt $\bar{x} \neq 0$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$. Für jedes $a \in V$ sei $\pi_a : V \to aK$ die Orthogonalprojektion von V auf aK, also die Abbildung $x \mapsto f(x, a)\bar{a}^{-1} a$, falls $a \neq 0$, und die Nullabbildung $x \mapsto 0$, falls $a = 0$.

Es sei $\mathscr{A} = \mathscr{A}(V, f, k)$ der gewöhnliche affine Raum über V, versehen mit einer Orthogonalitätsrelation für Geraden, welche auf folgende Weise festgelegt ist: Für alle $a, b, x, y \in V$ mit $x, y \neq 0$ sei $a + xK$ *orthogonal* zu $b + yK$, in Zeichen $a + xK \perp b + yK$, wenn

$$f(x, y) + \begin{vmatrix} f(a, b) & f(a, y) \\ f(x, b) & f(x, y) \end{vmatrix} k = 0.$$

$\mathscr{A}$ ist eine affine Spezialisierung eines n-dimensionalen projektivmetrischen Raumes und werde der *projektiv metrisierte* affine Raum über V, f, k genannt.

Zwei Punkte $a, b \in V$ sind genau dann zueinander *polar*, wenn $1 + f(a, b)k = 0$

Geometriae Dedicata **18** (1985), 249–259. 0046–5755/85.15

ist. Zu sich selbst polare Punkte werden *selbstpolar* genannt. Genau dann, wenn $k=0$ ist, ist $\mathscr{A}$ ein euklidischer Raum (im Sinne von [1]).

1.2. *Thales-Punkte*

Sei $\mathscr{A}$ der projektiv metrisierte affine Raum über V, f, k. Seien $a, b \in V$. Dann heißt ein Punkt $c \in V$ ein *Thales-Punkt* von a, b, wenn gilt (Abbildung 1):

$$c \in \{a, b\} \quad \text{oder} \quad (c \notin \{a, b\} \quad \text{und} \quad a + (a-c)K \perp b + (b-c)K).$$

Mit $T(a,b)$ bezeichnen wir die Menge aller Thales-Punkte von a, b.

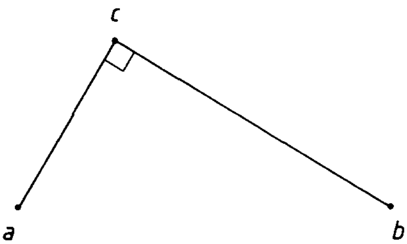

Abb. 1

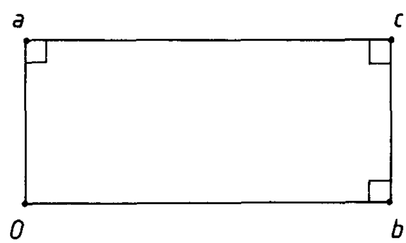

Abb. 2

Spezielle Thales-Punkte liefert

LEMMA 1. *Seien* $a, b \in V$ *mit* $1 + f(a,b)k \neq 0$ *und* $f(a,b) + \bar{a}\bar{b}k = 0$. *Dann ist der Punkt*

$$c := \frac{1 + \bar{b}k}{1 + f(a,b)k} a + \frac{1 + \bar{a}k}{1 + f(a,b)k} b$$

ein Thales-Punkt von a, b. *Ferner gelten die Gleichungen* $f(a,c) = \bar{a}$, $f(b,c) = \bar{b}$ *und* $(1 + \bar{c}k)(1 + f(a,b)k) = (1 + \bar{a}k)(1 + \bar{b}k)$.

Man beweist Lemma 1 durch einfaches Nachrechnen (vgl. Abbildung 2). Wir benötigen später ferner

LEMMA 2. *Sei* $T \subseteq V$ *mit* $0 \in T$ *und* $1 + f(a,b)k \neq 0$ *für alle* $a, b \in T$. *Dann sind die folgenden zwei Aussagen äquivalent:*

TE *Für alle* $a, b \in T$ *gilt* $T(a,b) \subseteq T$;

TE′ (1) *Für alle* $a \in T$ *und* $x \in V$ *gilt* $a\pi_x \in T$ *und*

(2) *Für alle* $a, b \in T$ *mit* $f(a,b) + \bar{a}\bar{b}k = 0$ *gilt*

$$c := \frac{1 + \bar{b}k}{1 + f(a,b)k} a + \frac{1 + \bar{a}k}{1 + f(a,b)k} b \in T.$$

Beweis. TE$\Rightarrow$TE': Es gelte TE. Zu (1): Sei $a\in T$ und $x\in V$. Dann gilt $a\pi_x\in T(0,a)\subseteq T$. Zu (2): Seien $a,b\in T$ mit $f(a,b)+\bar{a}\bar{b}k=0$. Nach Lemma 1 gilt dann $c\in T(a,b)$, also $c\in T$.

TE'$\Rightarrow$TE: Es gelte TE'. Seien $a_1,b_1\in T$, und sei $c\in T(a_1,b_1)\setminus\{a_1,b_1\}$. Zu zeigen ist $c\in T$. Man betrachte die Vektoren $a:=a_1-a_1\pi_{c-a_1}$, $y:=(1+\bar{c}k)\cdot a_1-(1+f(a_1,c)k)c$ und $b:=b_1\pi_y$ (siehe Abbildung 3). Wegen TE', (1) gilt $a=a_1\pi_a\in T$ und $b\in T$. Ferner gilt $f(a,b)+\bar{a}\bar{b}k=0$ und

$$c=\frac{1+\bar{b}k}{1+f(a,b)k}a+\frac{1+\bar{a}k}{1+f(a,b)k}b,$$

was sich durch elementare Rechnungen bestätigen läßt. Wegen TE', (2) ist dann $c\in T$.

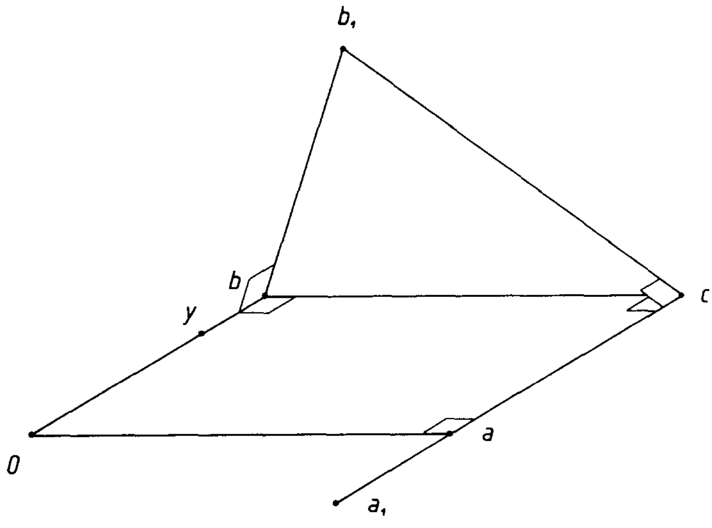

Abb. 3

1.3. *Vierter Spiegelungspunkt*

Sei $\mathscr{A}$ der projektiv metrisierte affine Raum über V,f,k. Seien $a,b,c\in V$ drei kollineare, nicht selbstpolare Punkte von $\mathscr{A}$. Nach dem Dreispiegelungssatz gibt es im projektivmetrischen Abschluß $\bar{\mathscr{A}}$ von $\mathscr{A}$ genau einen nicht selbstpolaren Punkt $v=v(a,b,c)$, den sog. *vierten Spiegelungspunkt* von a,b,c, mit der Eigenschaft, daß das Produkt der Punktspiegelungen an a,b und c (in $\bar{\mathscr{A}}$) gleich der Punktspiegelung an v ist. Wir setzen zur Abkürzung:

$$\varepsilon(a,b,c):=1+(f(b,c)-f(a,c)+f(a,b))k,$$
$$w(a,b,c):=(1+f(b,c)k)a-(1+f(a,c)k)b+(1+f(a,b)k)c.$$

Stets gilt $(1+\bar{a}k)(1+\bar{b}k)(1+\bar{c}k)=\varepsilon(a,b,c)^2+\overline{w(a,b,c)}\,k$. Der vierte Spiegelungspunkt $v(a,b,c)$ ist genau dann ein Punkt von $\mathscr{A}$, wenn $\varepsilon(a,b,c)\neq 0$ ist. Ist dies der Fall, so gilt $v(a,b,c)=\varepsilon(a,b,c)^{-1}w(a,b,c)$.

1.4. *Anordnungskonvexe metrische Teilräume*

Sei $\mathscr{A}=\mathscr{A}(V,f,k)$ der projektiv metrisierte affine Raum über V,f,k.

DEFINITION. Eine Teilmenge $T\subseteq V$ von Punkten von $\mathscr{A}$ (eigentlich zusammen mit allen Geraden, Ebenen, ..., Hyperebenen von $\mathscr{A}$, welche mit wenigstens einem Punkt aus T inzidieren) heiße ein *metrischer Teilraum* von $\mathscr{A}$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- T0 T enthält den Nullpunkt (Nullvektor) und mindestens einen weiteren Punkt;
- T1 T enthält keine zueinander polaren Punkte;
- T2 T enthält mit zwei Punkten stets alle zugehörigen Thales-Punkte;
- T3 T enthält mit drei kollinearen (nicht selbstpolaren) Punkten stets deren vierten Spiegelungspunkt.

Auf Grund von Lemma 2 ist eine Teilmenge $T\subseteq V$ genau dann ein metrischer Teilraum von $\mathscr{A}(V,f,k)$, wenn für jeden 2-dimensionalen Teilraum U von V die Punktmenge $T\cap U$ eine metrische Teilebene der Ebene $\mathscr{A}(U,f|U\times U,k)$ ist.

Nach dem Hauptsatz der absoluten Geometrie ([1, Section 20]) *sind die metrischen Teilräume projektiv metrisierter affiner Räume bis auf Isomorphie genau die nichtelliptischen Bachmann-Räume.*

Ein metrischer Teilraum T von $\mathscr{A}$ heißt *anordnungskonvex*, wenn der zugrunde liegende Körper K eine Anordnung besitzt, bezüglich der T konvex in V ist. Der Hauptsatz der absoluten Geometrie ergibt: *Die anordnungskonvexen metrischen Teilräume projektiv metrisierter affiner Räume sind bis auf Isomorphie genau die angeordneten (nichtelliptischen) Bachmann-Räume.*

2. Darstellung metrischer Teilräume durch Formwerte

Seien K,V,f,k wie in §1 gegeben, und sei $\mathscr{A}=\mathscr{A}(V,f,k)$ der zugehörige projektiv metrisierte affine Raum.

BEMERKUNG. *Zu jedem metrischen Teilraum T von $\mathscr{A}$ gibt es eine Teilmenge M von K mit $T=\{x\in V|\bar{x}\in M\}$.*

Beweis. Sei T ein metrischer Teilraum von $\mathscr{A}$. Wir behaupten: Für $M:=\{\bar{a}|a\in T\}$ gilt $T=\{x\in V|\bar{x}\in M\}$. $\subseteq$: Trivial. $\supseteq$: Seien $x\in V$, $a\in T$ mit $\bar{x}=\bar{a}$. Dann gilt $b:=a\pi_{a+x}\in T$ und folglich $x=v(b,a,b)\in T$.

Metrische Teilräume lassen sich also grundsätzlich durch gewisse Teilmengen des zugrunde liegenden Körpers beschreiben. Wir wollen auf diese Weise im nächsten Paragraphen für jede Anordnung von K, für die f definit ist, alle konvexen metrischen Teilräume von $\mathscr{A}(V,f,k)$ bestimmen. Die dafür benötigten Teilmengen des Körpers sind mit den 'Abszissenmengen' von Hilbert–Ebenen eng verwandt und lassen sich, ähnlich wie diese, auf die im folgenden Satz 1 angegebenen zwei Weisen charakterisieren. (Man vergleiche [1, Section 20.13, Satz 13.2] oder [4, Sätze 67.3 und 67.4].)

Es sei $\leqslant$ eine Anordnung von K, $|\ \ |$ der zugehörige Absolutbetrag, B der Bewertungsring der bezüglich $\leqslant$ ganzzahlig-einschließbaren Elemente von K und I das maximale Ideal von B.

SATZ 1 (vgl. [4]). *Eine Teilmenge M von K erfüllt die Bedingungen*

(i) $0\in M$ *und* $-M\subseteq M$;
(ii) M *ist konvex*;
(iii) *für alle* $\lambda\in M$: $|\lambda k|<1$ *und* $4\lambda/(1-|\lambda|k)^2\in M$

genau dann, wenn eine der folgenden beiden Aussagen gilt:

(a) M *ist ein* B*-Untermodul von* K *mit* $Mk\subseteq I$;
(b) $k<0$ *und es gibt ein Primideal* J $(\neq B)$ *von* B *mit* $M=\{\lambda\in K\,|\,|\lambda k|<1+J\}$.

Beweis. (A) Sei M eine Teilmenge von K, welche die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllt. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: M ist eine Untergruppe von $(K,+)$. Dann ist M wegen (ii) ein B-Untermodul von K. Ferner gilt $Mk\subseteq I$; denn für alle $\lambda\in M$ und alle $m\in\mathbb{N}$ $(\subseteq K)$ gilt $m\lambda\in M$, also wegen (iii) $|\lambda k|<m^{-1}$.

2. Fall: M ist keine Untergruppe von $(K,+)$. Wir behaupten: Dann ist $k<0$ und $J:=\{\iota\in K\,|\,\forall\lambda\in M\colon\ |\iota|<1+|\lambda|k\}$ ein Primideal von B mit der gewünschten Eigenschaft. Wir beweisen der Reihe nach die folgenden sechs Aussagen:

(1) Für alle $\rho\in\mathbb{Q}$ mit $\rho>1$ ist $\rho M\not\subseteq M$;
(2) $\forall m\in\mathbb{N}\ \exists\lambda\in M\colon 1+|\lambda|k<m^{-1}$;
(3) $k<0$;
(4) $\forall\iota\in K\colon \iota^2\in J\Rightarrow\iota\in J$;
(5) J ist ein Primideal von B;
(6) $M=\{\lambda\in K\,|\,|\lambda k|<1+J\}$.

Ad (1): Klar wegen (ii).

Ad (2): Angenommen, es gebe ein $m\in\mathbb{N}$ mit $1+|\lambda|k\geqslant m^{-1}$ für alle $\lambda\in M$. Dann gilt für alle $\lambda\in M$ auch $1<\rho:=2m(2m-1)^{-1}\leqslant 2(1-|\lambda|k)^{-1}$ und

$\rho^2|\lambda| \leqslant 4|\lambda|(1-|\lambda|k)^{-2} \in M$, folglich $\rho^2\lambda \in M$. Dies steht im Widerspruch zu (1).

Ad (3): Nach (2) gibt es ein $\lambda \in M$ mit $1+|\lambda|k<1$.

Ad (4): Sei $\iota \in K$ mit $\iota^2 \in J$. Dann gilt wegen (iii) und (3) für alle $\lambda \in M$: $\iota^2 < 1+4|\lambda|k(1-|\lambda|k)^{-2} = (1+|\lambda|k)^2(1-|\lambda|k)^{-2} \leqslant (1+|\lambda|k)^2$, also $|\iota| < 1+|\lambda|k$.

Ad (5): Wegen (2) gilt $J \subseteq I$. Ferner gilt $0 \in J$, $-J \subseteq J$, J ist konvex. Hieraus ergibt sich, zusammen mit (4), daß J ein Primideal von B ist (vgl. [4, Satz 62.6]).

Ad (6): $\subseteq$: Seien $\lambda \in M$ und $\iota \in J$. Dann gilt $|\iota| < 1+|\lambda|k$, wegen (3) also $|\lambda k| = -|\lambda|k < 1-|\iota| \leqslant 1+\iota$. $\supseteq$: Sei $\lambda \in K$ mit $|\lambda k| < 1+J$. Dann gilt $0 < 1-|\lambda k| \notin J$. Also existiert ein $\mu \in M$ mit $1-|\lambda k| \geqslant 1+|\mu|k$. Wegen (3) folgt daraus $|\lambda| \leqslant |\mu|$, also $\lambda \in M$.

(B) Sei nun M eine Teilmenge von K, die (a) oder (b) erfüllt. Ist M ein B-Untermodul von K mit $Mk \subseteq I$, so besitzt M offensichtlich die Eigenschaften (i), (ii) und (iii). Es sei nun $k<0$ und J ein Primideal von B mit $M = \{\lambda \in K \,|\, |\lambda k| < 1+J\}$. Klar ist, daß M die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. Ad (iii): Sei $\lambda \in K$ mit $|\lambda k| < 1+J$. Dann gilt insbesondere $|\lambda k| < 1$. Zu zeigen bleibt $\mu := 4\lambda(1-|\lambda|k)^{-2} \in M$. Offensichtlich gilt $1-|\lambda k| \in B \backslash J$ und $1+|\lambda k| \in B \backslash I$. Wegen $1-|\mu k| = (1-|\lambda k|)^2\,(1+|\lambda k|)^{-2}$ gilt dann $1-|\mu k| \notin J$ und $1-|\mu k| \geqslant 0$. Das ergibt $|\mu k| < 1+J$, d.h. $\mu \in M$. Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Wir bemerken, daß die Eigenschaften (a) und (b) in Satz 1 sich gegenseitig ausschließen. Für später zeigen wir noch:

LEMMA 3. *Erfüllt eine Teilmenge M von K mit $0 \in M$ und $0 \leqslant M$ die Bedingung* (iii), *so erfüllt der konvexe Abschluß von $M \cup -M$ (in K) alle drei Bedingungen* (i), (ii), (iii).

Beweis. Sei M eine Teilmenge von K mit $0 \in M$, $0 \leqslant M$ und (iii). Sei M' der konvexe Abschluß von $M \cup -M$. Klar ist, daß M' die Bedingungen (i) und (ii) und den ersten Teil von (iii) erfüllt. Ad (iii), 2. Teil: Sei $\lambda' \in M'$. Dann existiert ein $\lambda \in M$ mit $|\lambda'| \leqslant \lambda$. Man setze zur Abkürzung $\mu := 4\lambda(1-|\lambda|k)^{-2}$ und $\mu' := 4\lambda'(1-|\lambda'|k)^{-2}$. Wegen $\mu \in M$ und $|\mu|-|\mu'| = 4(\lambda-|\lambda'|)\cdot(1-|\lambda k|\cdot|\lambda' k|)(1-|\lambda|k)^{-2}(1-|\lambda'|k)^{-2} \geqslant 0$ gilt $\mu' \in M'$.

3. Algebraische Beschreibung anordnungskonvexer metrischer Teilräume

Seien K, V, f, k wie in Section 1 gegeben, und sei $\mathscr{A} = \mathscr{A}(V, f, k)$ der zugehörige projektiv metrisierte affine Raum. Wir setzen zusätzlich voraus, daß K

eine Anordnung $\leqslant$ besitzt und daß f bezüglich dieser Anordnung definit ist. Die zu $\leqslant$ gehörigen Gebilde: Absolutbetrag, Bewertungsring und maximales Ideal werden, wie in Section 2, mit $|\ \ |$, B und I bezeichnet. B^* sei die Einheitengruppe von B. Unser Ziel ist, alle metrischen Teilräume von $\mathscr{A}(V,f,k)$ zu beschreiben, welche bezüglich der gegebenen Anordnung $\leqslant$ in V konvex sind. Da die metrischen Teilräume von $\mathscr{A}(V,f,k)$ mit denen von $\mathscr{A}(V,-f,-k)$ übereinstimmen, machen wir keine wesentliche Einschränkung, wenn wir zunächst f als *positiv* definit voraussetzen.

SATZ 2. *Sei K durch $\leqslant$ angeordnet, und sei f bezüglich dieser Anordnung positiv definit. Dann gilt: Für jede Teilmenge M von K, welche die Bedingungen*

(i) $0 \in M$ *und* $-M \subseteq M$;
(ii) M *ist konvex*;
(iii) *für alle* $\lambda \in M$ *gilt*: $|\lambda k| < 1$ *und* $4\lambda/(1-|\lambda|k)^2 \in M$

erfüllt und mindestens zwei Elemente enthält, ist $T_M := \{x \in V \mid \bar{x} \in M\}$ ein konvexer metrischer Teilraum von $\mathscr{A}$. Jeder konvexe metrische Teilraum von $\mathscr{A}$ läßt sich auf diese Weise darstellen.

Beweis (für die 1. Aussage von Satz 2). Sei M eine Teilmenge von K mit den Eigenschaften (i), (ii), (iii) und $|M| \geqslant 2$. Zu zeigen ist, daß $T_M := \{x \in V \mid \bar{x} \in M\}$ die Teilraum-Bedingungen T0, T1, T2, T3 erfüllt und konvex ist. Da f positiv definit ist, gelten für alle $x, y \in V$ die Schwarzschen Ungleichungen $f(x,y)^2 \leqslant \bar{x}\bar{y}$ und $|f(x,y)| \leqslant \max(\bar{x},\bar{y})$. Man erhält damit

(*) Für alle $a \in T_M$ und $x \in V$: $a\pi_x \in T_M$

(**) Für alle $a, b \in T_M$: $f(a,b) \in M$ und $0 < 1 + f(a,b)k < 2$.

T_M erfüllt T0: Wegen $0 \in M$ gilt $0 \in T_M$. Wegen $|M| \geqslant 2$ gibt es ein $\lambda \in M$ mit $\lambda \neq 0$. Man wähle ein $x \in V \backslash \{0\}$. Setzt man $y := \lambda \bar{x}^{-1} x$, so gilt $\bar{x}\bar{y} = \lambda^2$, also $\bar{x} \leqslant |\lambda|$ oder $\bar{y} \leqslant |\lambda|$. Das ergibt $x \in T_M$ oder $y \in T_M$.

T_M erfüllt T1: Klar wegen (**).

T_M erfüllt T2: Nach Lemma 2 ist wegen (*) nur noch zu zeigen, daß T_M die Bedingung (2) in Lemma 2 erfüllt. Seien $a, b \in T_M$ mit $f(a,b) + \bar{a}\bar{b}k = 0$, und sei $c := (1+\bar{b}k)\,(1+f(a,b)k)^{-1}a + (1+\bar{a}k)\,(1+f(a,b)k)^{-1}b$. Zu zeigen ist: $c \in T_M$. Nach Satz 1 ist M vom Typ (a) oder vom Typ (b). Sei M zunächst vom Typ (a), also ein B-Untermodul von K mit $Mk \subseteq I$. Wegen (**) gilt $\bar{a}, \bar{b}$, $f(a,b) \in M$ und folglich $1+\bar{a}k$, $1+\bar{b}k$, $1+f(a,b)\,k \in 1+I \subseteq B^*$. Das ergibt $\bar{c} \in M$, also $c \in T_M$. Sei nun M vom Typ (b). Dann ist $k < 0$, und es gibt ein Primideal J von B mit $M = \{\lambda \in K \mid |\lambda k| < 1 + J\} = \{\lambda \in K \mid J < 1 + |\lambda| k\}$. Nach Lemma 1 gilt $(1+\bar{c}k)(1+f(a,b)k) = (1+\bar{a}k)\,(1+\bar{b}k)$. Nach (**) sind die Faktoren $1+f(a,b)k$, $1+\bar{a}k$, $1+\bar{b}k$ aus B und positiv. Also ist auch

$(1+\bar{c}k)>0$. Ferner gilt $1+\bar{a}k$, $1+\bar{b}k \notin J$. Da J ein Primideal ist, erhalten wir $1+\bar{c}k \notin J$. Also gilt $\bar{c} \in M$, d.h. $c \in T_M$.

T_M erfüllt T3: Seien $a, b, c \in T_M$ kollineare Punkte. Mit den Bezeichnungen von Section 1.3 setzen wir $\varepsilon := \varepsilon(a,b,c)$, $w := w(a,b,c)$ und $v := v(a,b,c)$. Ist M vom Typ (a), so gilt wieder $f(a,b)$, $f(a,c)$, $f(b,c) \in M$ und $1+f(a,b)k$, $1+f(a,c)k$, $1+f(b,c)k$, $\varepsilon \in B^*$. Das ergibt $\varepsilon \neq 0$ und $\bar{v} \in M$, also $v \in T_M$. Sei nun M vom Typ (b). Dann ist $k<0$ und $M=\{\lambda \in K \mid J < 1+|\lambda|k\}$ für ein geeignetes Primideal J von B. Nach Section 1.3 gilt $(1+\bar{a}k)(1+\bar{b}k)(1+\bar{c}k) = \varepsilon^2 + \bar{w}k$. Nach (**) sind die Elemente $1+\bar{a}k$, $1+\bar{b}k$, $1+\bar{c}k, \varepsilon$ aus B und die ersten drei positiv. Wegen $\bar{w}k \leqslant 0$ ist $\varepsilon \neq 0$. Nach Section 1.3 gilt dann $v = \varepsilon^{-1}w$ und daher $(1+\bar{a}k)$ $(1+\bar{b}k)$ $(1+\bar{c}k) = \varepsilon^2(1+\bar{v}k)$. Die linke Seite dieser Gleichung ist positiv; folglich ist auch $1+\bar{v}k$ positiv. Ferner gilt $1+\bar{a}k$, $1+\bar{b}k$, $1+\bar{c}k \notin J$. Da J ein Primideal ist, erhalten wir $1+\bar{v}k \notin J$. Also gilt $\bar{v} \in M$, d.h. $v \in T_M$.

T_M ist konvex: Seien $a, b \in T_M$, und sei $x \in V$ ein Punkt zwischen a und b. Dann gibt es $\lambda, \mu \in K$ mit $0 \leqslant \lambda, \mu$, $\lambda + \mu = 1$ und $x = \lambda a + \mu b$. Es gilt $\bar{x} = \lambda^2\bar{a} + 2\lambda\mu f(a,b) + \mu^2\bar{b} \leqslant (\lambda+\mu)^2 \ \max(\bar{z}, \bar{b}) = \max(\bar{a}, \bar{b}) \in M$. Also gilt auch $\bar{x} \in M$, d.h. $x \in T_M$.

Für einen Beweis der 2. Aussage von Satz 2 benötigen wir

LEMMA 4 (Hellwig [3]). *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt. Dann gilt für jeden konvexen metrischen Teilraum T von $\mathscr{A}$: $T = \{x \in V \mid \exists a \in T$: $\bar{x} \leqq \bar{a}\}$.*

Beweis. $\subseteq$: Trivial. $\supseteq$: Seien $a \in T$ und $x \in V$ mit $\bar{x} \leqslant \bar{a}$. Zu zeigen ist $x \in T$. Wegen $0 \in T$ und $-a = v(0,a,0) \in T$ dürfen wir o.B.d.A. voraussetzen: $f(a,x) \geqslant 0$, $x \neq 0$, $x \neq -a$. Es gilt der Reihe nach (siehe Abbildung 4): $b :=$

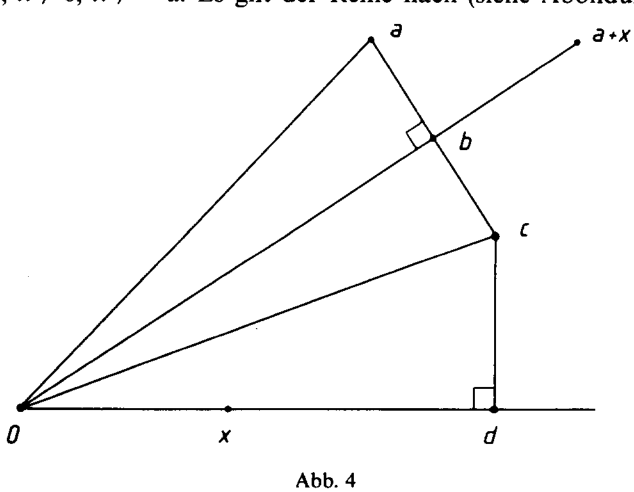

Abb. 4

$a\pi_{a+x} \in T$, $c := v(b,a,b) \in T$, $d := c\pi_x \in T$. Eine einfache Rechnung ergibt $d = (1+\lambda)x$ mit $\lambda := (\bar{a}-\bar{x})\ (f(a,x)+\bar{x})\ (\overline{a+x})^{-1}\bar{x}^{-1}$. Offensichtlich gilt $\lambda \geqslant 0$. Also liegt x zwischen 0 und d, und es gilt $x \in T$.

Beweis (für die 2. Aussage von Satz 2). Sei T ein konvexer metrischer Teilraum von $\mathscr{A}$. Man betrachte $M := \{\bar{a} | a \in T\}$. Offensichtlich gilt $0 \in M$ und $0 \leqslant M$. Ferner erfüllt M die Bedingung (iii). Denn sei $a \in T$. Angenommen, es wäre $|\bar{a}k| \geqslant 1$. Da T konvex ist, gälte $b := -(\bar{a}k)^{-1}a \in T$. Dies würde wegen $1 + f(a,b)k = 0$ der Teilraum-Eigenschaft T1 widersprechen. Es gilt also $|\bar{a}k| < 1$. Nun betrachte man den Punkt $c := 2(1-\bar{a}k)^{-1}a = v(a,0,a) \in T$. Wir erhalten $4\bar{a}(1-|\bar{a}|k)^{-2} = \bar{c} \in M$. – Sei M' der konvexe Abschluß von $M \cup -M$. Nach Lemma 3 erfüllt M' die Bedingungen (i), (ii) und (iii). Nach Lemma 4 gilt $T = \{x \in V | \bar{x} \in M'\}$.

Die Sätze 1 und 2 lassen sich zusammenfassen. Man erhält dann die folgende Verallgemeinerung der Pejasschen Darstellungssätze für Hilbert–Ebenen ([5, Theoreme 1 bis 4]):

SATZ 3. *Sei K durch $\leqslant$ angeordnet, und sei f bezüglich dieser Anordnung definit. Dann gilt:*

(I) *Für jeden B-Untermodul M von K mit $M \neq \{0\}$ und $Mk \subseteq I$ ist $\{x \in V | \bar{x} \in M\}$ ein konvexer metrischer Teilraum von $\mathscr{A}$.*

(II) *Ist $kf < 0$ (d.h. $\bar{x}k < 0$ für alle $x \in V \backslash \{0\}$), so ist für jedes Primideal $J(\neq B)$ von B die Punktmenge $\{x \in V | |\bar{x}k| < 1 + J\}$ ein konvexer metrischer Teilraum von A.*

(III) *Jeder konvexe metrische Teilraum von $\mathscr{A}$ läßt sich gemäß* (I) *oder* (II) *darstellen.*

Die konvexen metrischen Teilräume vom Typ I sind verallgemeinerte DEHNsche Modelle, die vom Typ II verallgemeinerte KLEINsche Modelle.

4. KONVEXE METRISCHE TEILRÄUME FÜR ARCHIMEDISCHE ANORDNUNGEN

Mit Hilfe von Satz 3 lassen sich sehr einfach alle archimedisch angeordneten Bachmann–Räume bestimmen. Seien K, V, f, k wie in Section 1 gegeben, und sei $\mathscr{A}$ der projektiv metrisierte affine Raum über V, f, k.

SATZ 4. *Sei K durch $\leqslant$ archimedisch angeordnet. Eine Teilmenge T von V ist genau dann ein konvexer metrischer Teilraum von $\mathscr{A}$, wenn eine der folgenden beiden Aussagen gilt:*

(α) *$k = 0$ und $T = V$;*

(β) $kf<0$ *und* $T=\{x\in V\,|\,|\bar{x}k|<1\}$.

T ist im Falle (α) ein voller euklidischer Raum, im Falle (β) ein KLEINsches Modell. Satz 4 lehrt: Jeder archimedisch angeordnete Bachmann–Raum ist ein euklidischer, hyperbolischer oder halbelliptischer Raum.

Beweis (für Satz 4). Ist f definit, so braucht man nur Satz 3 anzuwenden. Sei nun f indefinit. Ist $k=0$, so ist natürlich V ein konvexer metrischer Teilraum von $\mathscr{A}$. Es sei nun T ein konvexer metrischer Teilraum von $\mathscr{A}$. Zu zeigen ist: $k=0$ und $V\subseteq T$.

Angenommen, es sei $k\neq 0$. Dann lassen sich $a,b\in T$ mit den Eigenschaften $f(a,b)=0$, $\bar{a}k<0$, $\bar{b}k>0$ finden. Wählt man $n\in\mathbb{N}$ hinreichend groß, so gilt $0<-(\bar{a}k)^{-1}\leqslant(1+\bar{b}k)^n$. Für alle $x\in T\cap aK$ gilt $(1+\bar{b}k)x\in T$ (siehe Abbildung 5). Also gilt $(1+\bar{b}k)^n a\in T$ und wegen der Konvexität von T auch $a^*:=-(\bar{a}k)^{-1}a\in T$. Ferner gilt $1+f(a,a^*)k=0$. Dies widerspricht der Teilraum-Eigenschaft T1. Also ist $k=0$.

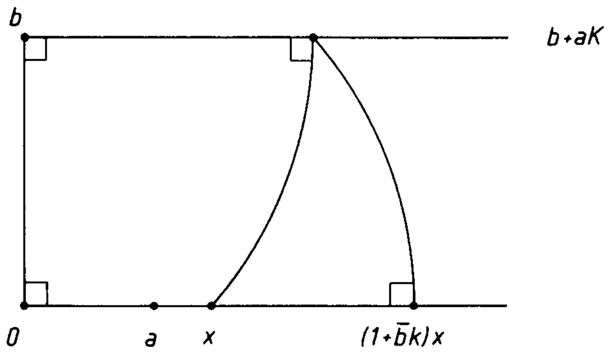

Abb. 5

Sei $x\in V$. Man wähle ein $a\in T$ mit $x\in aK$. Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt $2^n a=v(2^{n-1}a,0,2^{n-1}a)$ und folglich $2^n a\in T$. Da K archimedisch angeordnet und T konvex ist, gilt $aK\subseteq T$, also $x\in T$.

LITERATUR

1. Bachmann, F., *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, 2. erg. Aufl., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.
2. Diller, J. und Grenzdörffer, J., 'G-Hüllen metrischer Teilräume', *Math. Ann.* **200** (1973), 151–164.
3. Hellwig, G., *Anordnungskonvexe Eigentlichkeitsbereiche affin-metrischer Räume*, Diplomarbeit, Kiel, 1983.
4. Hessenberg, G. und Diller, J., *Grundlagen der Geometrie*, de Gruyter, Berlin, 1967.
5. Pejas, W., 'Die Modelle des Hilbertschen Axiomensystems der absoluten Geometrie', *Math. Ann.* **143** (1961), 212–235.

6. Pejas, W., 'Eine algebraische Beschreibung der angeordneten Ebenen mit nichteuklidischer Metrik, *Math. Zeit.* **83** (1964), 434–457.

Anschrift des Verfassers:

Peter Klopsch,
Mathematisches Seminar der
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel,
Olshausenstraße 40,
2300 Kiel,
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 30. Juli, 1984; in verbesserter Form eingegangen am 24. Oktober, 1984)