

Die Denkgesetze der scholastischen Mentalität widersprechen also der modernen Logik durch Verletzung der Typenlehre, der Lehre von den Relationsurteilen, weil alle Urteile als prädikativ angesehen werden und der Lehre von den Existentialurteilen, weil die Existenz als eine Eigenschaft behandelt wird. Außerdem führen diese Denkgesetze zu einer Menge von Antinomien, von Scheinproblemen und Widersprüchen mit der Erfahrung.

Zusammenfassung: Die scholastische Denkweise konstruiert also Begriffe, die nicht von Protokollätzen ausgehend konstituiert werden können. Diese Begriffe kombiniert sie nach einer grammatischen Syntax, die sehr verschieden von der logischen Syntax der wissenschaftlichen Sprache ist . . ., die Metaphysik des Aristoteles ist weit davon entfernt, eine *perennis philosophia* zu sein, sie ist nur die naturgewachsene Metaphysik der griechischen Sprache. Jede Sprachgruppe führt entsprechend ihrer grammatischen Syntax zu einer besonderen Metaphysik. Da, wo man eine Philosophie für alle Ewigkeit finden wollte, kann man mit Hilfe der modernen Logik feststellen, daß es sich nur um einen sprachlichen Zwischenfall handelt, der nur durch seine Verwendung im Dienste der Religion eine besondere Bedeutung gewonnen hat.

Philipp Frank.

Jan Lukasiewicz (Warschau), Zur Geschichte der Ausfagenlogik:

Die moderne Logistik hat uns gelehrt, innerhalb der formalen Logik zwei Grunddisziplinen zu unterscheiden, die voneinander nicht weniger verschieden sind, als die Arithmetik von der Geometrie: die *Ausfagenlogik* und die *Namenlogik*. Der Unterschied zwischen den beiden besteht darin, daß in der Ausfagenlogik außer logischen Konstanten nur Ausfagenvariable auftreten, während in der Namenlogik Namenvariable vorkommen.

Das einfachste Beispiel, an dem dieser Unterschied erläutert werden kann, ist der stoische und der peripatetische Satz der Identität. Um Mißverständnissen vorzubeugen, möchte ich hier sogleich bemerken, daß soweit unsere Quellennachweise reichen, die beiden Identitätsätze von den Alten nur beiläufig aufgestellt worden sind, und keineswegs zu den Grundätzen der einen oder der anderen Logik gehören. Der *stoische* Satz der Identität lautet: „wenn das Erste, so das Erste“, und kommt als Prämisse in einem von Sextus Empiricus zitierten Schlußschema vor¹⁾. Der *peripatetische* Satz der Identität lautet: „*a* kommt allem *a* zu“, und wird von Aristoteles nicht erwähnt, kann aber aus einer Stelle des von Alexander verfaßten Kommentars zur ersten Analytik erschlossen werden²⁾. Den stoischen Identitätsatz können wir mit Hilfe einer Buchstabenvariablen in der Form „wenn *p*, so *p*“ darstellen, den peripatetischen Identitätsatz können wir in den Ausdruck „alles *a* ist *a*“ äquivalent umformen. Im ersten Satz ist „wenn — so“ eine

logische Konstante und „ p “ eine Ausfagenvariable, d. h. für „ p “ darf nur eine *Ausfage* sinnvoll eingesetzt werden, z. B. „es ist Tag“. Nach der Einsetzung bekommen wir einen speziellen Fall des stoischen Identitätsatzes: „Wenn es Tag ist, so ist es Tag“. Im zweiten Satz ist „alles — ist“ eine logische Konstante und „ a “ eine Namenvariable, d. h. für „ a “ darf nur ein *Name* sinnvoll eingesetzt werden, und zwar im Einklang mit einer stillschweigend angenommenen Voraussetzung der Aristotelischen Logik, nur ein *allgemeiner* Name, z. B. „Mensch“. Nach der Einsetzung bekommen wir einen speziellen Fall des peripatetischen Identitätsatzes: „Alle Mensch ist Mensch“. Der stoische Satz der Identität ist eine These der *Ausfagenlogik*, der peripatetische dagegen eine These der *Namenlogik*.

Allen älteren Autoren, die über Geschichte der Logik geschrieben haben, war dieser grundsätzliche Unterschied zwischen der Ausfagenlogik und der Namenlogik unbekannt. Daher gibt es bis zum heutigen Tag keine Geschichte der Ausfagenlogik, und infolgedessen auch keine korrekte Darstellung der Geschichte der formalen Logik überhaupt. So unentbehrlich noch heute das Werk P r a n t l s³⁾ als Sammlung von Quellen und Materialien ist, so hat es doch als historische Darstellung logischer Probleme und Lehren kaum einen Wert. Die Geschichte der Logik muß neu geschrieben werden, und zwar von einem Historiker, der die Logistik gründlich beherrscht. In diesem kurzen Aufsatz will ich nur folgende drei Hauptpunkte aus der Geschichte der Ausfagenlogik berühren: Erstens, möchte ich den Nachweis führen, daß die stoische Dialektik im Gegensatz zur Aristotelischen Syllogistik die *antike* Form der Ausfagenlogik ist, womit zugleich diese bisher gänzlich mißverständene und ungerecht beurteilte Leistung der Stoiker wieder zu Ehren gebracht werden soll. Zweitens, will ich versuchen an einigen Beispielen klarzulegen, daß die stoische Ausfagenlogik im *Mittelalter* insbesondere in der Lehre von den „Konsequenzen“ fortlebt und sich weiter entwickelt. Drittens, lege ich Wert darauf festzustellen, was selbst in Deutschland nicht allgemein bekannt zu sein scheint, daß der Begründer der *modernen* Ausfagenlogik Gottlob F r e g e ist.

Daß die stoische Dialektik eine Ausfagenlogik ist, dafür zeugt schon der oben angeführte stoische Identitätsatz, der zur Ausfagenlogik gehört. Ein beiläufig ausgesprochener Satz beweist jedoch nichts. Wir wollen daher die bekannte Schlußformel in Betracht ziehen, die von den Stoikern als der erste „unbeweisbare“ Syllogismus an die Spitze ihrer Dialektik gestellt wird:

Wenn das Erste, fo das Zweite;
 nun aber das Erste;
 also das Zweite ⁴).

In diefer Formel find die Wörter „das Erste“ und „das Zweite“ *Variable*, denn die Stoiker bezeichnen die Variablen nicht mit Buchstaben, sondern mit Ordnungszahlen ⁵). Es ist klar, daß auch hier für diese Variablen nur *Ausfagen* sinnvoll eingesetzt werden dürfen, z. B. „es ist Tag“ und „es ist hell“. Wird diese Einsetzung vollzogen, so bekommen wir den als Schulbeispiel in stoischen Texten immer wiederkehrenden Schluß: „Wenn es Tag ist, so ist es hell; nun aber ist es Tag; also ist es hell.“ Daß in der Tat in der obigen Formel *Ausfagen* und nicht etwa *Namen* für die Variablen einzusetzen sind, erhellt nicht nur aus dem Sinn der Formel, sondern ergibt sich auch ganz besonders deutlich aus dem folgenden Beispiel: „Wenn Platon lebt, so atmet Platon; nun aber das Erste; also das Zweite“. Hier bezieht sich offenbar „das Erste“ auf die *Ausfage* „Platon lebt“ und „das Zweite“ auf die *Ausfage* „Platon atmet“ ⁶).

Der grundsätzliche Unterschied zwischen der stoischen und der Aristotelischen Logik besteht nicht darin, daß in der stoischen Dialektik hypothetische und disjunktive Ausfagen vorkommen, während in der Aristotelischen Syllogistik nur kategorische Ausfagen auftreten. Streng genommen, findet man auch in der Aristotelischen Syllogistik hypothetische Ausfagen vor, denn jeder echte Aristotelische Syllogismus ist eine *Implikation*, also eine hypothetische Ausfage, z. B.: „Wenn *a* allem *b* zukommt und *c* allem *a* zukommt, so kommt *c* allem *b* zu“ ⁷). Der prinzipielle Unterschied zwischen diesen beiden antiken Systemen der Logik beruht vielmehr darauf, daß in den stoischen Syllogismen die Variablen *Ausfagenvariable* und in den Aristotelischen *Namenvvariable* sind. Dieser prinzipielle Unterschied wird aber völlig verwischt, wenn man mit P r a n t l (I S. 473) den oben genannten stoischen Syllogismus auf folgende Weise überfetzt:

Wenn das Erste ist, ist das Zweite
 Das Erste aber ja ist

Also ist das Zweite.

Dadurch, daß P r a n t l zu den Variablen überall das Wörtchen „ist“ hinzufügt, das in den antiken Texten *nirgends* vorhanden ist, verfälscht er, ohne es zu wissen und zu wollen, die stoische Ausfagenlogik zu einer Namenlogik. Denn im P r a n t l'schen Schema können nicht mehr für „das Erste“ und „das Zweite“ Ausfagen, sondern nur

Namen sinnvoll eingesetzt werden. Soweit wir angeichts des trümmerhaften Zustandes der auf uns gekommenen stoischen Dialektik ertessen können, enthalten *alle* stoischen Schlußformeln außer logischen Konstanten nur Ausagenvariable. Die stoische Dialektik ist somit eine Ausagenlogik⁸⁾.

Es gibt noch einen zweiten wichtigen Unterschied, der zwischen den Aristotelischen und den stoischen Syllogismen besteht. Aristotelische Syllogismen sind logische Thesen, und *logische These* ist eine Aussage, in der außer logischen Konstanten nur Ausagen- oder Namenvariable vorkommen, und die für alle Werte der in ihr vorkommenden Variablen wahr ist. Stoische Syllogismen sind Schlußformeln, die den Sinn von Schlußregeln haben, und *Schlußregel* ist eine Vorschrift, die den Schließenden ermächtigt, auf Grund von anerkannten Ausagen neue Ausagen abzuleiten. Wir wollen diesen Unterschied etwas näher betrachten.

Der oben angeführte Aristotelische Syllogismus, den wir auch so ausdrücken können: „wenn alles b a ist und alles a c ist, so ist alles b c “, ist eine Implikation vom Typus „wenn α und β , so γ “, deren Vorderatz eine Konjunktion der Prämissen α und β ist, und deren Nachatz die Konklusion γ bildet. Als Implikation ist dieser Syllogismus eine *Ausage*, die Aristoteles als wahr anerkennt, und zwar gilt diese Aussage für alle Werte der in ihr vorkommenden Variablen „ a “, „ b “ und „ c “. Werden daher für diese Variablen konstante Werte eingesetzt, so bekommt man wahre *Ausagen*. Da in dem betrachteten Syllogismus außer den Variablen nur noch logische Konstante vorkommen, nämlich „wenn-fo“, „und“ sowie „alles-ist“, so ist dieser Syllogismus, sowie jeder andere Aristotelische Syllogismus, eine logische These.

Anders ist es in der stoischen Logik. Der oben angegebene stoische Syllogismus, den wir mit Hilfe von Buchstabenvariablen auch so ausdrücken können: „wenn p , so q ; nun aber p ; also q “, besteht ebenso, wie der Aristotelische Syllogismus, aus zwei Prämissen und einer Konklusion, jedoch sind die Prämissen mit der Konklusion zu einer einheitlichen Aussage *nicht* verbunden. Das ersieht man schon aus dem Wörtchen „also“, das die Konklusion einleitet. Der betrachtete Syllogismus ist demnach *keine* Aussage. Da er keine Aussage ist, so kann er auch weder wahr noch falsch sein, denn Wahrheit und Falschheit kommen anerkanntermaßen nur Ausagen zu. Der betrachtete stoische Syllogismus ist demnach *keine* logische These: Werden in diesem Syllogismus für die Variablen konstante Werte ein-

gesetzt, fo bekommt man keine Ausfage, fondern einen *Schluß*. Der oben angeführte ftoifche Syllogismus ift daher eine Schlußformel und hat den Sinn einer *Schlußregel*, die genauer in folgender Weife ausgedrückt werden kann: Wer die Implikation „wenn p , fo q “ und den Vorderfatz diefer Implikation „ p “ als wahr anerkennt, der hat das Recht, auch den Nachfatz diefer Implikation „ q “ als wahr anzuerkennen, alfo „ q “ von „ p “ abzutrennen. Diefe Schlußregel ift unter dem Namen „Abtrennungsregel“ in der modernen Logiftik geradezu klaffifch geworden.

Alle ftoifchen Syllogismen find als *Schlußregeln* formuliert. Damit unterfcheidet fich die ftoifche Dialektik nicht nur von der Aristotelifchen Syllogiftik, fondern auch von der modernen Ausfagenlogik, die ein System von *logifchen Thesen* ift.

Nun aber kennen die Stoiker eine klare und einfache Vorfchrift, die alle ihre Schlußregeln in Thesen zu verwandeln gestattet. Sie unterfcheiden nämlich bündige und nichtbündige Schlüffe. Einen Schluß mit den Prämissen α und β und der Konklufion γ nennen fie *bündig*, wenn die *Implikation* richtig ift, deren Vorderfatz aus der Konjunktion der beiden Prämissen α und β gebildet ift und deren Nachfatz aus der Konklufion γ befteht. Bündig ift z. B. der Schluß: „wenn es Tag ift, fo ift es hell; nun aber ift es Tag; alfo ift es hell“, denn richtig ift die Implikation: „wenn es Tag ift und wenn es Tag ift, fo ift es hell, fo ift es hell“⁹⁾.

Diefe richtige Bemerkung ermöglicht die Verwandlung der Schlüffe in Ausfagen. Wird fie auf die Schlußregel „wenn p , fo q ; nun aber p ; alfo q “ angewendet, fo erhält man die Implikation „wenn p und wenn p , fo q , fo q “, die eine These der Ausfagenlogik ift, da in ihr außer den Ausfagenvariablen nur noch logifche Konftante „wenn-fo“ fowie „und“ vorkommen.

Es ift mir nicht möglich, an diefer Stelle in alle Einzelheiten der ftoifchen Logik einzugehen. Ich will nur ganz kurz die wichtigften Punkte befprechen. Die ftoifche Ausfagenlogik ift eine *zweiwertige* Logik. Es gilt in ihr der Grundfatz, daß jede Ausfage *entweder wahr oder falſch* ift, oder, wie wir heute fagen, einen von nur *zwei* möglichen „Wahrheitswerten“ annehmen kann, „das Wahre“ oder „das Falſche“¹⁰⁾. Das erwähnte Prinzip ift im bewußten Gegenfatz zu der Anficht aufgefellt, daß es Ausfagen gibt, die *weder wahr noch falſch* find, nämlich folche, die zukünftige zufällige Ereigniffe betreffen. Diefe Anficht, die vornehmlich unter den Epikuräern verbreitet war, fchrieben die Stoiker auch dem *A r i ſ t o t e l e s* zu¹¹⁾.

In der stoischen Ausfagenlogik treten folgende Funktionen auf: die Negation, die Implikation, die Konjunktion und die Disjunktion. Die ersten drei Funktionen werden, wie man sich heutzutage auszudrücken pflegt, als „Wahrheitsfunktionen“ definiert. Unter einer *Wahrheitsfunktion* versteht man eine Funktion, deren Argumente Ausfagen sind, und deren Wahrheitswert nur von dem Wahrheitswert der Argumente abhängt.

Man erhält, den Stoikern gemäß, die *Negation*, also das kontraktorische Gegenteil einer Ausfage, indem man ihr das Zeichen der Ausfagennegation *voranstellt* ¹²⁾. Diese theoretisch richtige und praktisch wertvolle Vorschrift wirkt noch im Mittelalter fort ¹³⁾. In der heutigen Logistik ist sie allgemein anerkannt.

Über den Sinn der Implikation „wenn p , so q “ gab es im Altertum mannigfache Streitigkeiten ¹⁴⁾. Den Streit scheint *Philon* der Megariker hervorgerufen zu haben, der als erster die Implikation in ganz derselben Weise, wie es heute geschieht, als Wahrheitsfunktion definierte. Nach *Philon* nämlich ist die Implikation dann und nur dann wahr, wenn sie nicht mit dem Wahren beginnt und mit dem Falschen endigt. In drei Fällen ist somit die Implikation wahr: erstens, wenn sowohl ihr Vorderatz als ihr Nachatz wahr sind, zweitens, wenn sowohl ihr Vorderatz als ihr Nachatz falsch sind, und drittens, wenn ihr Vorderatz falsch und ihr Nachatz wahr ist; und nur in *einem* Falle ist die Implikation falsch, nämlich dann, wenn ihr Vorderatz wahr und ihr Nachatz falsch ist ¹⁵⁾. Ein anderer Megariker, *Diodoros Kronos*, behauptete dagegen, die Implikation sei dann und nur dann wahr, wenn es weder *möglich war* noch *möglich ist*, daß sie mit dem Wahren beginnt und mit dem Falschen endigt ¹⁶⁾. Dieser antike Streit um den Begriff der Implikation, den *Kallimachos* in einem Epigramm verewigte („es krähen schon die Raben auf den Dächern, welche Implikationen richtig sind“ ¹⁷⁾), erinnert an die Polemik, die ein moderner Anhänger des *Diodoros*, *C. I. Lewis*, gegen die übrigen Vertreter der Logistik führt ¹⁸⁾. In der stoischen Schule wurde die *Philonische* Definition rezipiert. *Sextus* wenigstens schreibt diesen Begriff auch direkt den Stoikern zu ¹⁹⁾.

Die *Konjunktion* „ p und q “ wird von den Stoikern als Wahrheitsfunktion definiert. Sie ist dann und nur dann wahr, wenn ihre beiden Glieder wahr sind; sonst ist sie falsch ²⁰⁾.

Eine analoge Definition der *Disjunktion* „ p oder q “ findet sich in den auf uns gekommenen Fragmenten der stoischen Logik nicht vor.

Aus den Schlußregeln, die Chryſippos für die Disjunktion aufstellt, entnehmen wir, daß er die Disjunktion als eine ausschließende „Entweder-oder-Verknüpfung“ betrachtete. Nach Chryſippos also können in einer wahren Disjunktion die beiden Disjunktionsglieder nicht zugleich wahr sein. Das scheint sich später geändert zu haben. Es kommt die Überzeugung auf, daß der Ausdruck „ p oder q “ mit der Implikation „wenn nicht- p , so q “ gleichbedeutend ist²¹⁾. Dann hätten wir aber nicht mehr mit der ausschließenden Disjunktion zu tun, sondern mit der nichtausschließenden *Alternative*. Im Mittelalter, wie wir weiter unten sehen werden, tritt schon der nichtausschließende Charakter der Disjunktion ganz klar zutage.

Alle oben aufgezählten logischen Funktionen kommen in den Schlußformeln der stoischen Dialektik vor. Von den Schlußformeln werden die einen als „unbeweisbar“ betrachtet, also sozusagen *axiomatisch* als richtig angenommen, die anderen werden auf die unbeweisbaren zurückgeführt.

Die unbeweisbaren Schlußformeln oder Syllogismen soll Chryſippos aufgestellt haben. Es sind dies die folgenden fünf (die Variablen bezeichne ich nicht mit Ordnungszahlen, sondern mit Buchstaben):

- I. Wenn p , so q ; nun aber p ; also q .
- II. Wenn p , so q ; nun aber nicht- q ; also nicht- p .
- III. Nicht zugleich p und q ; nun aber p ; also nicht- q .
- IV. Entweder p oder q ; nun aber p ; also nicht- q .
- V. Entweder p oder q ; nun aber nicht- q ; also p ²²⁾.

Aus dem vierten Syllogismus ersieht man, daß die Disjunktion als ausschließende „Entweder-oder-Verknüpfung“ aufgefaßt wird. Für die nichtausschließende Alternative ist dieser Syllogismus nicht gültig²³⁾.

Die Zurückführung abgeleiteter Schlußformeln auf die unbeweisbaren ist ein Musterstück logischen Scharffinns. Darüber berichtet Sextus, der die dialektische Technologie der Stoiker gründlich versteht und zu den besten Quellen der stoischen Logik gerechnet werden muß. Mit einer Klarheit, die nichts zu wünschen übrigläßt, berichtet er z. B., wie die Stoiker die Schlußformel: „wenn p und q , so r ; nun aber nicht- r , jedoch p ; also nicht- q “, auf den zweiten und dritten unbeweisbaren Syllogismus reduzierten: Aus den Prämissen „wenn p und q , so r “ sowie „nicht- r “ bekommt man auf Grund des zweiten Syllogismus die Konklusion „nicht zugleich p und q “. Aus

dieser Konklusion und der übriggebliebenen Prämisse „ p “ ergibt sich aber nach dem dritten Syllogismus „nicht- q “²⁴).

Unverständlich blieb für P r a n t l ein anderes von S e x t u s angeführtes Beispiel, in welchem zweimal der erste Syllogismus angewendet wird. Das Beispiel lautet in allgemeiner Fassung: „wenn p , so wenn p , so q ; nun aber p ; also q “. Die Zurückführung geht in folgender Weise vor sich: Aus den Prämissen „wenn p , so wenn p , so q “ und „ p “ bekommt man zunächst auf Grund des ersten Syllogismus die Konklusion „wenn p , so q “. Aus dieser Konklusion und der Prämisse „ p “ ergibt sich wieder nach dem ersten Syllogismus „ q “²⁵). Die hier behandelte Schlußformel ist höchst interessant; sie entspricht nämlich einer These des Ausfagenkalküls, die unlängst von H i l b e r t und B e r n a y s zum Rang eines Axioms erhoben wurde²⁶).

Die Anzahl der abgeleiteten Schlußformeln soll sehr groß gewesen sein²⁷). Von den auf uns gekommenen Schlußformeln verdient unsere Aufmerksamkeit noch der folgende Syllogismus, den O r i g e n e s anführt: „Wenn p , so q ; wenn p , so nicht- q ; also nicht- p “. Auch das Beispiel, das hierzu gegeben wird, ist sehr interessant: „Wenn du weißt, daß du tot bist, so bist du tot (denn man kann nicht etwas Falsches wissen); wenn du weißt, daß du tot bist, so bist du nicht tot (denn der Tote weiß nichts); also weißt du nicht, daß du tot bist“²⁸). Die obige Stelle aus O r i g e n e s ist überdies auch deshalb wichtig, weil sie uns Aufschluß gibt über die Bedeutung eines bisher irrträglich gedeuteten Ausdrucks der stoischen Dialektik²⁹).

Im Zusammenhang mit der stoischen Ausfagenlogik möchte ich noch einige Fragen allgemeiner Natur berühren. Es wird immer wieder den Stoikern vorgeworfen, daß in ihrer Logik sowohl der allertriviale Empirismus als auch der leerste Formalismus zum Vorschein kommt. So sagt z. B. P r a n t l (I, S. 457), indem er die von den Stoikern gegebenen Beispiele für die Implikation anführt, es seien dies „Beispiele, aus welchen doch hinreichend ersichtlich ist, daß sowohl das plumpeste empirische Kriterium vorliegt als auch an jedem Verständnisse des Kausalnexus zwischen Wesen und Inhärenzien es gänzlich gebricht“. Das abfällige Urteil P r a n t l s ist nicht begründet. Werden für logische Formeln Beispiele aus der Empirie gegeben, so muß doch für solche Beispiele das Wahrheitskriterium irgendwie empirisch sein. Die Beispiele gehören jedoch nicht zur Logik, und in der Logik selbst findet man bei den Stoikern auch nicht die geringste Spur von Empirismus. Wenn es heißt, daß es den

Stoikern an Verständnis für den Kaufalnexus gebracht, so läßt sich daraus nur das Eine entnehmen, daß Prantl den von der Stoa rezipierten Philonischen Begriff der Implikation gar nicht versteht. In der zweiwertigen Logik kann es keinen anderen Begriff der Implikation geben, als den Philonischen. Das hat weder mit dem Empirismus noch mit dem Kaufalnexus etwas zu tun, denn der Ausdruck „wenn p , so q “ bedeutet nicht daselbe, wie „aus p folgt q “.

Der Vorwurf des Formalismus, der bereits im Altertum öfters erhoben wurde³⁰⁾, ist zwar berechtigt, nur daß er in unseren Augen gar kein Vorwurf ist. Der Formalismus, oder besser gesagt, die *Formalisation*, bedeutet die ideale Exaktheit, die jedes deduktive System zu erreichen strebt. Wir sagen nämlich, daß ein deduktives, axiomatisch aufgebautes System *formalisiert* ist, wenn die Richtigkeit der Ableitungen im System nachgeprüft werden kann, ohne daß man auf die *Bedeutungen* der in den Ableitungen benützten Ausdrücke und Symbole zurückzugehen braucht, sofern man nur die Schlußregeln versteht. In diesem Sinne haben die Stoiker den Formalismus angebahnt, und das kann ihnen nicht hoch genug angerechnet werden. Sie hielten sich streng an *Worte*, und nicht an deren *Bedeutungen*, was die Hauptbedingung der Formalisation ist, und zwar taten sie das im bewußten Gegensatz zu den Peripatetikern. Alexander äußert sich gelegentlich, daß das Wesen des Syllogismus nicht in Worten liegt, sondern darin, was die Worte bedeuten³¹⁾. Die Stoiker würden gewiß das Entgegengesetzte behaupten. Denn trotzdem sie z. B. annahmen, daß die Ausdrücke „wenn p , so q “ und „aus p folgt q “ gleichbedeutend sind, was übrigens nicht richtig ist, so bezeichneten sie doch die Schlußformel: „aus p folgt q ; nun aber p ; also q “ nicht als einen Syllogismus, wenn auch die nach ihrer Ansicht gleichbedeutende Formel: „wenn p , so q ; nun aber p ; also q “ ein Syllogismus ist³²⁾.

Im Anschluß an diesen Gegensatz zwischen der stoischen und der peripatetischen Schule drängt sich uns schließlich die Frage auf, ob die Stoiker von der prinzipiellen Bedeutung ihrer Ausfagenlogik etwas gewußt haben, und insbesondere, ob sie sich bewußt waren, ein von dem Aristotelischen verschiedenes System der Logik geschaffen zu haben. Den ersten Teil dieser Frage glaubt Scholz verneinen zu müssen³³⁾. Über den zweiten Teil der Frage stehen uns zwei bisher wenig beachtete Nachrichten zur Verfügung.

Im Kommentar zur Aristotelischen Topik zählt Alexander unter dem Stichwort „synkritische Probleme“ einige im Altertum

diskutierte Streitfragen auf, wie z. B. ob der Mond größer sei als die Erde, oder ob das chirurgische Heilverfahren dem Verfahren durch Arzneimittel vorzuziehen sei. Dabei erwähnt er auch folgende vergleichende Probleme aus der Logik: „ob die Induktion überzeugender sei als der Syllogismus, und welcher Syllogismus der erste sei, der kategorische oder der hypothetische, und welche Schlußfigur die erste oder die bessere sei“⁸⁴).

Es interessiert uns hier die *zweite* Frage, welcher Syllogismus der erste sei, der kategorische oder der hypothetische. Nun ist der kategorische Syllogismus der Aristotelische, der hypothetische dagegen der stoische. Unsere Streitfrage betrifft daher das Verhältnis der Aristotelischen Logik zur stoischen, und geht darauf hinaus, festzustellen, welches von diesen Systemen das *erste*, d. h. nach meinem Urteil, das *logisch frühere* ist.

Eine Antwort auf diese Frage finden wir in der höchst interessanten von Galenus verfaßten Einleitung in die Logik. Galenus berichtet, daß Boethos, nach Ammonius der elfte seit Aristoteles Vorsteher der peripatetischen Schule, der zu den scharfsinnigsten Logikern seiner Zeit gezählt wurde, obwohl selbst ein Peripatetiker, die hypothetischen, nicht aber die kategorischen Syllogismen als die ersten betrachtete. Demgegenüber erhebt Galenus den Einwurf, daß die kategorischen Prämissen als einfache Aussagen logisch frühere sind, als die aus ihnen zusammengesetzten hypothetischen. Er scheint jedoch diesem Argument sowie der ganzen Streitfrage keine größere Bedeutung beizulegen, denn er meint, es sei bei diesen Streitigkeiten weder viel zu finden noch viel zu verlieren. Man müsse eben sowohl die einen Syllogismen kennenlernen, als auch die anderen; aber in welcher Reihenfolge das geschehen soll oder welche von ihnen als die ersten bezeichnet werden sollen, das möge jeder nach seinem Belieben entscheiden⁸⁵).

Aus diesen beiden Fragmenten dürfen wir m. E. den Schluß ziehen, daß den Stoikern nicht nur die Verschiedenheit ihres eigenen logischen Systems von dem Aristotelischen bewußt war, sondern daß sie auch das Verhältnis der beiden Systeme zueinander richtig beurteilten. Wir wissen heute, daß die Ausagenlogik ein logisch früheres System ist, als die Namenlogik. Analysiert man die Beweise, die Aristoteles in der Analytik führt, um die Syllogismen der zweiten und der dritten Figur auf die Syllogismen der ersten Figur zurückzuführen, so sieht man deutlich, daß überall Thesen aus der Ausagenlogik zu Hilfe genommen werden müssen. Der Syl-

logismus, der später den Namen „Baroco“ erhielt, läßt sich auf „Barbara“ ohne die ausfagenlogische These „wenn (wenn p und q , so r), so (wenn p und nicht- r , so nicht- q)“ nicht formal zurückführen. Nun entspricht dieser These eine Schlußformel, welche, wie wir oben gesehen haben, den Stoikern gut bekannt war. Es ist im höchsten Grade wahrscheinlich, daß die Anwendung dieser Schlußformel auf die Aristotelischen Syllogismen den Stoikern nicht entgangen ist. Wir wissen auch, daß der Ausfagenlogik eine bei weitem größere Bedeutung zukommt, als jenem dürftigen Fragment der Namenlogik, das in der Syllogistik des Aristoteles verkörpert ist. Die Ausfagenlogik ist das Fundament aller logischen und mathematischen Systeme. Wir müssen den Stoikern dankbar sein, daß sie die Grundlagen zu dieser herrlichen Theorie gelegt haben.

Daß stoische Einflüsse im Mittelalter fortwirken, davon weiß Prantl viel zu erzählen; daß aber die von den Stoikern geschaffene *Ausfagenlogik* im Mittelalter eine weitere Entwicklung erfährt, davon scheint bisher niemand gewußt zu haben. Es ist mir wieder nicht möglich, in alle Einzelheiten einzugehen, zumal die Quellen für die mittelalterliche Logik schwer zugänglich sind. Im folgenden will ich nur davon kurz Rechenschaft geben, was in den *Summulae logicales* des Petrus Hispanus, diesem klassischen Handbuch der mittelalterlichen Logik, samt dem Kommentar des Verforius dazu, sowie in den Schriften des subtilen Duns Scotus über die Ausfagenlogik zu finden ist. Das schon im Altertum umstrittene Philonische Kriterium der wahren Implikation scheint dem Petrus Hispanus nicht bekannt zu sein. Dafür tritt bei ihm unter dem Namen der *Disjunktion* an Stelle der Chryppischen „Entweder-oder-Verknüpfung“ die nichtausschließende *Alternative* auf, und diese wird als Wahrheitsfunktion definiert³⁶). Wir erfahren nämlich, daß die Disjunktion, d. i. die Verknüpfung zweier Ausfagen mittels des Bindeworts „vel“, dann und nur dann falsch ist, wenn ihre beiden Glieder falsch sind. Sonst ist sie wahr, selbst dann, wenn ihre *beiden* Glieder wahr sind, was jedoch mit einem gewissen Widerstreben anerkannt wird³⁷).

Im Kommentar werden folgende zwei Schlußregeln für die Disjunktion aufgestellt: Es kann erstens aus der Disjunktion und der Negation des einen Gliedes das andere Glied erschlossen werden, z. B.: „Der Mensch ist ein Lebewesen oder das Pferd ist ein Stein; nun aber ist das Pferd kein Stein; also ist der Mensch ein Lebewesen.“ Das ist eben der fünfte unbeweisbare Syllogismus der

Stoiker; der vierte fehlt natürlich, da er nur für die ausschließende Disjunktion gültig ist. Zweitens, aus der Wahrheit des einen Gliedes kann die Wahrheit der Disjunktion erschlossen werden, z. B.: „Der Mensch läuft, also ist der Mensch ein Esel oder der Mensch läuft“³⁸). Die Beispiele sind grotesk, nichtsdestoweniger sind sie klar genug. Die zweite Regel ist neu. In stoischen Texten kommt sie nicht vor. Übrigens ist sie nur unter *der* Bedingung richtig, daß man die Disjunktion als nichtausschließende Alternative auffaßt.

Die Konjunktion, die hier den Namen der *kopulativen* Aussage führt, wird von Petrus Hispanus in ebenderfelben Weise als Wahrheitsfunktion definiert, wie von den Stoikern. Neu scheint nur die Schlußregel zu sein, die im Kommentar hinzugefügt wird: Aus der Konjunktion kann jedes ihrer Glieder erschlossen werden, z. B.: „Der Mensch ist ein Lebewesen und Gott ist, also ist der Mensch ein Lebewesen“³⁹).

Im Zusammenhang damit findet man im Kommentar zu Petrus Hispanus die folgende schöne Bemerkung: Eine Konjunktion, heißt es, und eine Disjunktion mit einander widersprechenden Gliedern widersprechen einander⁴⁰). Damit soll gesagt werden, daß folgende Aussagen zueinander im Widerspruch stehen: „*p* und *q*“ sowie „nicht-*p* oder nicht-*q*“, ebenso „*p* oder *q*“ sowie „nicht-*p* und nicht-*q*“. Mit anderen Worten, „*p* und *q*“ ist der Negation von „nicht-*p* oder nicht-*q*“ äquivalent, ebenso wie „*p* oder *q*“ der Negation von „nicht-*p* und nicht-*q*“. Daraus ergibt sich, daß die sogenannten De Morgan'schen Gesetze lange vor De Morgan bekannt waren.

Zuletzt lesen wir im Kommentar an ebenderfelben Stelle, daß das kontradiktorische Gegenteil einer Aussage nicht „wahrer“ gebildet werden kann, als daß man der Aussage das Negationszeichen *voranstellt* ⁴¹). Hier tritt der stoische Einfluß, wie wir schon oben erwähnt haben, besonders deutlich hervor. Alle obigen Schlußregeln, sowie die zuletzt angeführte Bemerkung findet man auch bei Duns Scotus. Es scheint also, daß sie im Mittelalter allgemein anerkannt waren.

Die stoische Aussagenlogik lebt im Mittelalter insbesondere in der Lehre von den „Konsequenzen“ fort. Unter einer *Konsequenz* verstehen die mittelalterlichen Logiker sowohl eine Implikation, als auch eine Schlußformel vom Typus „*p*, also *q*“, wobei „*p*“ und „*q*“ Aussagen sind. In der Regel jedoch werden die Konsequenzen als *Schlußformeln* dargestellt⁴²). Die Konsequenzen werden in formale

und materiale eingeteilt. *Formal* ist die Konfequenz, wenn sie für alle Terme gilt bei der gleichen Anordnung und Form dieser Terme; im entgegengesetzten Falle heißt sie *material*. Formale Konfequenzen sind als logische Gesetze immer richtig. Eine materiale Konfequenz ist nur dann richtig oder „gut“ („bona“), wenn sie durch Hinzunahme einer wahren Aussage als Prämisse zu einer formalen Konfequenz reduziert werden kann. Ist die Aussage, die hinzugenommen werden soll, notwendig wahr, so heißt die Konfequenz „bona simpliciter“, ist sie nur kontingent wahr, so heißt die Konfequenz „bona ut nunc“. Der letztere Unterschied scheint mir keine größere Bedeutung zu haben⁴³).

In späteren mittelalterlichen Handbüchern der Logik werden nun im Kapitel „de consequentiis“ unter verschiedenen anderen formalen Konfequenzen auch solche angeführt, die zur Ausfagenlogik gehören. Einige von diesen Konfequenzen haben wir schon oben kennengelernt. Es wäre wünschenswert, daß jemand sich die Mühe nimmt, *alle* zusammenzustellen; dann hätten wir ein *volles* Bild von der Ausfagenlogik des Mittelalters.

Die Lehre von den Konfequenzen verdient aber noch aus einem anderen Grunde die größte Beachtung. Aus dem hier aufgestellten Begriff der materialen Konfequenz kann ganz folgerichtig und auf eine völlig unerwartete Weise der im Mittelalter vergessene *Philosophische* Begriff der Implikation wiederabgeleitet werden. Es lohnt sich, auf diese Ableitung näher einzugehen.

Der Schlußformel „*p*, also *q*“ entspricht die Implikation „wenn *p*, so *q*“; beide Formen werden sogar in gleicher Weise als Konfequenzen bezeichnet. Einer guten Konfequenz entspricht somit eine wahre Implikation, und umgekehrt. Eine materiale Konfequenz ist gut, wenn sie durch Hinzunahme einer wahren Prämisse in eine formale Konfequenz verwandelt werden kann. Daraus ergibt sich zuerst, daß jede Implikation, deren Nachsatz wahr ist, wahr sein muß. Ist nämlich „*q*“ wahr, so ist die materiale Konfequenz „*p*, also *q*“ für beliebiges *p* gut; denn wird die laut Voraussetzung wahre Aussage „*q*“ als Prämisse hinzugenommen, so erhält man die Schlußformel „*p* und *q*, also *q*“, und diese Schlußformel ist eine *formale* Konfequenz, wie wir schon oben gesehen haben. Es ergibt sich zweitens, daß jede Implikation, deren Vorderatz falsch ist, auch wahr sein muß. Ist nämlich „*p*“ falsch, so ist die materiale Konfequenz „*p*, also *q*“ für beliebiges *q* gut; denn wird die wahre Aussage „nicht-*p*“, d. h. das kontradiktorische Gegenteil der laut Voraus-

fetzung falschen Aussage „ p “, als Prämisse hinzugenommen, so bekommt man die Schlußregel „ p und nicht- p , also q “, und diese Schlußregel ist eine *formale* Konsequenz, wie wir weiter unten sehen werden. In drei Fällen somit („wahr-wahr“, „falsch-wahr“ und „falsch-falsch“) ist die Implikation wahr; im vierten Fall („wahr-falsch“) ist sie selbstverständlich falsch. Damit ist die Implikation streng nach Philonischem Muster als eine Wahrheitsfunktion definiert.

Duns Scotus scheint diese Folgerung entgangen zu sein. Doch hat er alle Voraussetzungen dazu klar erkannt. Er weiß nämlich, daß jede falsche Aussage eine beliebige andere Aussage in einer guten materialen Konsequenz nach sich zieht, ebenso wie jede wahre Aussage in einer guten materialen Konsequenz sich aus einer beliebigen anderen Aussage ergibt. Und er beweist schließlich, daß aus einer Aussage, die einen formalen Widerspruch enthält, jede beliebige Aussage in *formaler* Konsequenz abgeleitet werden kann⁴³). Der Beweis wird an einem Beispiel geführt und lautet wie folgt: Die Konsequenz „Sokrates läuft und Sokrates läuft nicht, also bist du in Rom“ ist formal richtig. Aus der Konjunktion nämlich „Sokrates läuft und Sokrates läuft nicht“ ergibt sich in formaler Konsequenz sowohl die Aussage „Sokrates läuft“, als auch die Aussage „Sokrates läuft nicht“. Aus der Aussage „Sokrates läuft“ folgt wieder in formaler Konsequenz die Disjunktion „Sokrates läuft oder du bist in Rom“. Aus dieser Disjunktion und der Negation ihres ersten Gliedes bekommt man endlich in formaler Konsequenz die Aussage „du bist in Rom“⁴⁴). Mit dem Zusammenbruch der mittelalterlichen Scholastik sind alle diese schönen Untersuchungen in gänzliche Vergeffenheit geraten.

Die „philosophische“ Logik der Neuzeit ist von der Psychologie und Erkenntnistheorie durch und durch verseucht. Für formallogische Fragen hat sie kein Verständnis noch Interesse. Allenfalls wird noch die Aristotelische Syllogistik in traditioneller Verunstaltung berücksichtigt, von der Aussagenlogik findet man kaum eine Spur. Vergeblich sucht man nach neuen, exakt formulierten und methodisch gelösten Problemen. Alles zerfließt in vagen philosophischen Spekulationen.

Ihre Wiedergeburt erfährt die neuzeitliche Logik aus dem Geiste der Mathematik. In der „mathematischen“ Logik oder *Logistik* entsteht eine neue Logik, die sich in wenigen Jahrzehnten zur vollen Blüte entfaltet. Damit kommt auch die Aussagenlogik wieder zu ihrem Recht. Und da begegnen wir auf einmal einem in der Ge-

schichte der Logik einzigartigen Phänomen: Ganz unvermittelt, ohne daß es möglich wäre, eine historische Erklärung anzugeben, entspringt die moderne Ausfagenlogik in einer beinahe höchsten Vollkommenheit dem genialen Kopfe Gottlob F r e g e s, dieses größten Logikers unserer Zeiten. Im Jahre 1879 gibt F r e g e eine kleine, aber inhaltlich schwerwiegende Abhandlung heraus unter dem Titel: „Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens“. In dieser Abhandlung ist die ganze Ausfagenlogik zum erstenmal in streng axiomatischer Form als deduktives System aufgestellt⁴⁶⁾. Das F r e g e'sche System der Ausfagenlogik ist auf zwei Grundbegriffen aufgebaut, auf der Negation und der Implikation. Die Implikation wird als Wahrheitsfunktion in ganz derselben Weise definiert, wie es vor mehr als 2000 Jahren P h i l o n getan hat. Andere Funktionen werden nicht eingeführt, doch kann der Ausdruck „wenn nicht- p , so q “ auch als „ p oder q “ gelesen werden, und der Ausdruck „nicht- (wenn p , so nicht- q)“ als „ p und q “. Mit Hilfe der Grundbegriffe werden sechs „Kernsätze“ oder Axiome aufgestellt, aus denen alle anderen Theoreme der Ausfagenlogik vermittlems zweier Schlußregeln abgeleitet werden können, und zwar mittels der *Abtrennungsregel*, die ausdrücklich als Schlußregel formuliert wird, und der *Einfsetzungsregel*, die nur angewendet, aber nicht formuliert wird. Als Abtrennungsregel (der Name stammt nicht von F r e g e) fungiert der erste unbeweisbare Syllogismus der Stoiker: Sind sowohl die Implikation „wenn α , so β “ als auch der Vorderatz dieser Implikation „ α “ anerkannte Thesen des Systems, so darf auch der Nachatz dieser Implikation „ β “ anerkannt und als neue These von der Implikation abgetrennt werden. Was die Einfsetzungsregel anbelangt, so dürfen für die Variablen nur sinnvolle Ausdrücke eingefetzt werden. *Sinnvolle* Ausdrücke (dieser Begriff kommt übrigens in der „Begriffsschrift“ nicht vor) sind zunächst die Variablen, sodann Negationen vom Typus „nicht- α “ sofern „ α “ ein sinnvoller Ausdruck ist, schließlich Implikationen vom Typus „wenn α , so β “, sofern „ α “ und „ β “ sinnvolle Ausdrücke sind. Die Thesen des Systems, d. h. Axiome und Theoreme, werden in einer Symbolik ausgedrückt, die aus senkrechten und waagrechten Strichen besteht und äußerst viel Raum einnimmt. Diese F r e g e'sche Symbolik hat aber den Vorteil, daß alle Interpunktionszeichen, wie Klammern, Punkte und dgl., vermieden werden. Es ist mir gelungen, eine einfachere klammerfreie Symbolik zu erfinden, die möglichst wenig Raum beansprucht. Die Klammern

werden dadurch vermieden, daß man die Funktoren „wenn“ und „nicht“ den Argumenten voranstellt. Der Ausdruck „wenn p , so q “ wird in meiner Symbolik durch „ Cpq “ dargestellt, „nicht- p “ durch „ Np “. Zu jedem „ C “ gehören als Argumente zwei unmittelbar auf „ C “ folgende sinnvolle Ausdrücke, zu jedem „ N “ gehört ein solcher Ausdruck. Die Frege'schen Axiome nehmen in dieser Symbolik die folgende Gestalt an:

- I $CpCqp$
- II $CCpCqrCCpqCpr$
- III $CCpCqrCqCpr$
- IV $CCpqCNqNp$
- V $CNNpp$
- VI $CpNNp$.

Dieses Axiomensystem ist vollständig, d. h. alle richtigen Thesen der Aussagenlogik können aus ihm mittels der beiden Schlußregeln abgeleitet werden. Es hat nur einen „Schönheitsfehler“: Das System ist nicht unabhängig, denn das dritte Axiom kann aus den zwei ersten erschlossen werden. Die Ableitung, die hier unten durchgeführt ist, gibt auch zugleich eine Vorstellung davon, wie ein modernes formalisiertes System der Aussagenlogik aussieht. Zur Erläuterung der Ableitungstechnik füge ich folgende Bemerkungen hinzu⁴⁷⁾: Vor einer jeden abzuleitenden These, die alle mit laufenden Nummern versehen und dadurch als Thesen kenntlich sind, befindet sich eine nicht-numerierte Zeile, die von mir die „Beweiszeile“ genannt wird. Jede Beweiszeile besteht aus zwei Teilen, die durch das Zeichen „ \times “ getrennt sind. Was vor und nach diesem Trennungszeichen steht, bezeichnet dieselbe Formel, nur auf eine andere Weise. Vor dem Trennungszeichen ist die Einsetzung angegeben, die an einer bereits gegebenen These ausgeführt werden soll. Z. B. in der Beweiszeile, die zur These I gehört, bedeutet der Ausdruck „ $Ip/CCpCqrCCpqCpr, q/Cqr$ “, daß in I für „ p “ „ $CCpCqrCCpqCpr$ “ und für „ q “ „ Cqr “ eingesetzt werden soll. Die These, die durch diese Einsetzung entsteht, ist im Beweisgang der Kürze halber weggelassen; sie sieht folgendermaßen aus:

$$I' \quad CCCpCqrCCpqCprCCqrCCpCqrCCpqCpr$$

Der Ausdruck nach dem Trennungszeichen „ $CII-I$ “ deutet die Konstruktion ebender selben These I' an, und zwar in einer solchen Weise, die einleuchtend klar macht, daß auf I' die Abtrennungs-

regel angewendet werden kann. Man sieht nämlich, daß These 1 vom Typus „ $C\alpha\beta$ “ ist, wo „ α “ das Axiom II bezeichnet; also kann von ihr „ β “, oder 1, als neue These abgetrennt werden. Bis zur These 3 ist die Ableitung genau dem Frege'schen Gedankengang nachgebildet.

- I $CpCqp$
 II $CCpCqrCCpqCpr$
 *
- $Ip|CCpCqrCCpqCpr, q|Cqr \times CII-1$
 1 $CCqrCCpCqrCCpqCpr$
 $IIp|Cqr, q|CpCqr, r|CCpqCpr \times C1-2$
 2 $CCCqrCpCqrCCqrCCpqCpr$
 $2 \times CIp|Cqr, q|p-3$
 3 $CCqrCCpqCpr$
 $IIp|Cqr, q|Cpq, r|Cpr \times C3-4$
 4 $CCCqrCpqCCqrCpr$
 $Ip|CpCqp, q|r \times CI-5$
 5 $CrCpCqp$
 $4q|Cpq, p|q \times C5r|CCpqr, p|q, q|p-6$
 6 $CCCpqrCqr$
 $3q|CCpqr, r|Cqr, p|s \times C6-7$
 7 $CCsCCpqrCsCqr$
 $7s|CpCqr, r|Cpr \times CII-8$
 8 $CCpCqrCqCpr$ (III)

Die von den Stoikern begründete, von den Scholastikern fortgeführte und von Frege axiomatisch aufgebaute zweiwertige Aussagenlogik steht nunmehr als ein fertiges System vor unseren Augen da. Die wissenschaftliche Forschung kennt jedoch keine Grenzen. In den „mehrwertigen“ Systemen der Aussagenlogik ist in den letzten Jahren ein neues Forschungsgebiet entstanden, das überraschende und bisher ungeahnte Ausblicke eröffnet. Über diese neue Logik wird jedoch die Geschichte erst in der Zukunft zu berichten haben.

¹⁾ Sextus adv. math. VIII 292 (fehlt bei Arnim): *εἰ τὸ πρῶτον, τὸ πρῶτον*. — So verdienstvoll auch die Sammlung H. v. Arnims ist (Stoicorum veterum fragmenta, Bd. II, Leipzig 1903), so reicht sie doch als Quellenmaterial zur stoischen Dialektik bei weitem nicht aus. ²⁾ Alexander in anal. pr. comm. ed. Wallies, S. 34, 19: *γίνεται... τὸ Α τινὶ τῶ Α μὴ ἐπάρχον, διαρῶ ἄτοπον*. ³⁾ K. Prantl, Geschichte der Logik im Abendlande, Bd. I-IV, Leipzig 1855-70, Bd. II, 2. Aufl., Leipzig 1885. ⁴⁾ Sextus adv. math. VIII 227 (Arnim II 242, S. 81, 22): *εἰ τὸ πρῶτον, τὸ δεύτερον· τὸ δὲ γε πρῶτον· τὸ ἄρα δεύτερον*.

⁵⁾ Apuleius de interpr. 279 (Arnim II, S. 81, Anm.): Stoici porro pro litteris numeros usurpant, ut „si primum, secundum; atqui primum; secundum igitur“. ⁶⁾ Diogenes Laert. VII, 76 (zit. bei Prantl I, S. 471, Anm. 177, fehlt bei Arnim): *εἰ ζῆ Πλάτων, ἀναπνεῖ Πλάτων· ἀλλὰ μὴν τὸ πρῶτον· τὸ ἄρα δευτέρον.* ⁷⁾ Aristoteles an. pr. II 11, 61 b 34: *εἰ γὰρ τὸ Α παντὶ τῶ Β καὶ τὸ Γ παντὶ τῶ Α, τὸ Γ παντὶ τῶ Β (sc. ὑπάρχει).* ⁸⁾ Diese Auffassung der stoischen Dialektik vertrete ich schon seit 1923; vgl. Łukasiewicz, Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls. Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie XXIII. 1930. Cl. III. S. 77. Ich freue mich, in H. Scholz, Geschichte der Logik, Berlin 1931, S. 31, einen Anhänger dieser Ansicht gefunden zu haben. ⁹⁾ Sextus hyp. pyrrh. II 137 (fehlt bei Arnim, der jedoch II 239, S. 78, 15 die parallele Stelle aus adv. math. VIII 415/16 anführt): *ἐν τούτῳ τῶ (λόγῳ) *εἰ ἡμέρα ἐστὶ, φῶς ἐστὶν ἀλλὰ μὴν ἡμέρα ἐστὶν φῶς ἄρα ἐστὶν· τὸ μὲν *φῶς ἄρα ἐστὶν συμπεράσμα ἐστὶ, τὰ δὲ λοιπὰ λήμματα. τῶν δὲ λόγων οἱ μὲν εἰσι συνακτικοὶ οἱ δὲ ἀσυνακτικοί, συνακτικοὶ μὲν, ὅταν τὸ συνημμένον τὸ ἀρχόμενον μὲν ἀπὸ τοῦ διὰ τῶν τοῦ λόγου λημμάτων συμπεπλεγμένον, λήγον δὲ εἰς τὴν ἐπιφορὰν αὐτοῦ, ὕγιες ἢ, ὅσον ὁ προσειρημένος λόγος συνακτικός ἐστὶν, ἐπεὶ τῆ διὰ τῶν λημμάτων αὐτοῦ συμπλοκῆ ταύτῃ *ἡμέρα ἐστὶ καὶ εἰ ἡμέρα ἐστὶ, φῶς ἐστὶν* ἀκολουθεῖ τὸ *φῶς ἐστὶν* ἐν τούτῳ τῶ συνημμένῳ *εἰ ἡμέρα ἐστὶ καὶ εἰ ἡμέρα ἐστὶ, φῶς ἐστὶ, φῶς ἐστὶν*.* ¹⁰⁾ Cicero acad. pr. II 95 (Arnim II 196, S. 63): *Fundamentum dialecticae est, quidquid enuntietur, id autem appellat ἀξίωμα . . ., aut verum esse aut falsum.* ¹¹⁾ Boethius ad Arist. de interpr. ed. secunda, Meiser, S. 208 (fehlt bei Arnim): *Putaverunt autem quidam, quorum Stoici quoque sunt, Aristotelem dicere in futuro contingens nec veras esse nec falsas.* — Vgl. dazu meine oben, Anm. 8, zitierte Mitteilung, S. 75 ff. ¹²⁾ Apuleius de interpr. 266 (Arnim II 204a, S. 66): *Solum autem abdicativum vocant, cui negativa particula praepositur.* — Als Zeichen der Ausfagenegation dient das Wörtchen „οὐχι“. ¹³⁾ Vgl. Anm. 41. ¹⁴⁾ Cicero acad. pr. II 143 (Arnim II 285, S. 93): *In hoc ipso, quod in elementis dialectici docent, quo modo iudicare oporteat, verum falsumne sit, siquid ita conexum est, ut hoc: „si dies est, lucet“, quanta contentio est. aliter Diodoro, aliter Philoni, Chrysippo aliter placet.* ¹⁵⁾ Sextus adv. math. VIII 113: *ὁ μὲν Φίλων ἔλεγεν ἀληθῆς γίνεσθαι τὸ συνημμένον (= Implikation), ὅταν μὴ ἀρῆται ἀπ' ἀληθοῦς καὶ λήγῃ ἐπὶ ψεῦδος, ὥστε τριχῶς μὲν γίνεσθαι κατ' αὐτὸν ἀληθῆς συνημμένον, καθ' ἓνα δὲ τῶσπον ψεῦδος.* — Es folgt die Aufzählung aller vier Fälle mit Angabe von Beispielen. ¹⁶⁾ Sextus adv. math. VIII 115: *Διόδωρος δὲ ἀληθῆς εἶναι φησι συνημμένον ὅπερ μῆτε ἐνδέχεται μῆτε ἐνδέχεται ἀρχόμενον ἀπ' ἀληθοῦς λήγειν ἐπὶ ψεῦδος.* ¹⁷⁾ Sextus adv. math. I 309: *τὸ ὑπὸ τοῦ Καλλιμάχου εἰς Διόδωρον τὸν Κρόνον συγγραφέν (sc. ἐπιγραμμάτιον) ἦν δὲ κοινὸς κόρακες τεγέων ἐπι κοῖτα συνηπται κρώζουσι . . .* ¹⁸⁾ In der Meinung, daß der Begriff der „materialen Implikation“, der eben von Philon stammt, zu Paradoxien führt, wie: „eine falsche Aussage impliziert jede Aussage“ und „eine wahre Aussage wird von jeder Aussage impliziert“ (vgl. unten, Anm. 44, die Stellen aus Duns Scotus), will Lewis die „materiale Implikation“ durch die „frikte Implikation“ ersetzen, die er in folgender Weise definiert: „*p* implies *q*“ or „*p* strictly implies *q*“ is to mean „It is false that it is possible that *p* should be true and *q* false“. Vgl. C. I. Lewis u. C. H. Langford, Symbolic Logic, New York u. London (1932), S. 122 u. 124. ¹⁹⁾ Hyp. pyrrh. II 104 und adv. math. VIII, 245 (Arnim II 221, S. 72, 32). — Vgl. auch Diogenes Laert. VII 81 (Arnim II 243, S. 81). ²⁰⁾ Sextus adv. math. VIII 125 (Arnim II 211, S. 69): *(λέγουσι) ὕγιες εἶναι συμπεπλεγμένον (= Konjunktion) τὸ πάντ' ἔχον ἐν αὐτῷ ἀληθῆ, ὅσον τὸ *ἡμέρα ἐστὶ καὶ φῶς ἐστὶν*, ψεῦδος δὲ τὸ ἔχον ψεῦδος.* ²¹⁾ Galenus institutio logica, ed. Kalbfleisch S. 9, 13: *τὸ τοιοῦτον εἶδος τῆς λέξεως *εἰ μὴ νύξ ἐστὶν, ἡμέρα ἐστὶν* διεzeugμένον ἐστὶν ἀξίωμα τῆ φύσει τῶν πραγμάτων αὐτῆ, συνημμένον δὲ ἰδέαν ἔχει τῆ λέξει.* — Die ausschließende Disjunktion heißt „dielezeugμένον“. Für die nichtausschließende Alternative verwendet Galenus den Ausdruck „paradiezeugμένον“ (S. 35, 6). ²²⁾ Galenus inst. log. ed. Kalbfleisch, S. 15 (Arnim II 245, S. 82): *ὄν ὁ Χρούσιππος ὀνομάζει πρῶτον ἀναπόδεικτον, ὁ τοιοῦτος τρόπος ἐστὶν *εἰ τὸ α', τὸ β'· τὸ δὲ α'· τὸ ἄρα β'·* ὄν ὁ Χρούσιππος δευτέρον ἀναπόδεικτον ὀνομάζει, τοιοῦτος ἐστὶν *εἰ τὸ α', τὸ β'· οὐχι δὲ τὸ β'· οὐκ ἄρα τὸ α'.* — Κατὰ τοῦ τρίτου

κατὰ τοῦτον . . . τοιοῦτος ὁ τρόπος ἐστίν "οὐχὶ τὸ τε α' καὶ τὸ β' (τὸ δὲ α' οὐκ ἄρα τὸ β')". — κἀπὶ τοῦ τεταρτου κατὰ τὸν αὐτὸν . . . τοιοῦτός τις ὁ τρόπος ἐστίν "ἦτοι τὸ α' ἢ τὸ β' τὸ δὲ α' οὐκ ἄρα τὸ β'". — κἀπὶ τοῦ πέμπτου . . . τοιοῦτός ἐστίν ὁ τρόπος "ἦτοι τὸ α' ἢ τὸ β' (οὐχὶ δὲ τὸ β' τὸ ἄρα α')". — Vgl. auch Arnim II, 241 u. 242, S. 79—81. ²³⁾ Prantl (I, S. 474), der die stoische Logik geradezu haßt, schreibt dazu wörtlich: „Hiebei nun braucht die grenzenlose Stupidität in der Trennung des IV. und V. Modus wohl nicht noch besonders hervorgehoben zu werden“. Es ist beidämend, einer solchen Äußerung in einem wissenschaftlichen Werk zu begegnen, zumal sie auf Unkenntnis der Logik beruht. Prantl meint weiter, Chryssippos habe eben die fünf Syllogismen dem Theophrast entnommen, und „jeder, welcher bloß fremde Produkte abschreibt, läuft hiebei Gefahr, nur seine eigene Dummheit zur Schau zu tragen“. Hierin steckt wieder eine historische Unwahrheit. Es läßt sich nicht quellenmäßig nachweisen, daß Theophrast die oben genannten Syllogismen erdacht oder auch nur gekannt hat. ²⁴⁾ Sextus adv. math. VIII 235, 236 (fehlt bei Arnim): Die Schlussformel lautet: "εἰ τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον, τὸ τρίτον οὐχὶ δὲ γε τὸ τρίτον, ἀλλὰ καὶ τὸ πρῶτον οὐκ ἄρα τὸ δεύτερον." Zum Schluß der Zurückführung heißt es: ὥστε δύο εἶναι ἀναποδείκτους, ἓνα μὲν τοιοῦτον "εἰ τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον, τὸ τρίτον οὐχὶ δὲ γε τὸ τρίτον οὐκ ἄρα τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον", ἓς ἐστὶ δεύτερος ἀναπόδεικτος, ἕτερον δὲ τρίτον τὸν οὕτως ἔχοντα "οὐχὶ τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον ἀλλὰ μὴν τὸ πρῶτον οὐκ ἄρα τὸ δεύτερον". ²⁵⁾ Sextus adv. math. VIII 230—233 (fehlt bei Arnim). Der Text ist verderben, obwohl unzweideutig klar. Richtig emendiert hat ihn erst E. Kochalsky in seiner Dissertation: De Sexti Empirici adversus logicos quaestiones criticae, Marburg 1911, S. 83—85. Doch schließt er seine Korrektur mit Berufung auf Zeller und Prantl in folgender Weise: Nimirum huiusmodi argumentum non simplex indemonstrabile per se est absurdissimum, sed Stoicos in syllogismis inveniendis incredibilia paene gessisse inter omnes constat. Man erfieht daraus, wie verderblich Prantls Einfluß war. ²⁶⁾ Hilbert u. Bernays, Grundlagen der Mathematik, Bd. I, Berlin 1934, S. 66. Die genannte These lautet in Worten: „wenn [wenn p, so (wenn p, so q)], so (wenn p, so q)". ²⁷⁾ Cicero topica 14, 57 (zitiert von Zeller, Die Philosophie der Griechen III 1, 5. Aufl. 1923, S. 114 Anm. 1, fehlt bei Arnim): ex iis modis conclusiones innumerabiles nascuntur. ²⁸⁾ Origenes contra Celsum VII 15 (Werke Bd. II. ed. Koetschau, 1899, S. 166, fehlt bei Arnim): ὅταν δὲ δύο συνημμένα λήγη εἰς τὰ ἀλλήλους ἀντικείμενα τῷ καλουμένῳ "διὰ δύο τροπικῶν" θεωρηματι ἀνααιρεῖται τὸ ἐν ἀμφοτέροις τοῖς συνημμένοις ἡγούμενον . . . καὶ ὑπάγεται γὰρ ὁ λόγος τροπικῶν τοιαύτῳ "εἰ τὸ πρῶτον, καὶ τὸ δεύτερον" εἰ τὸ πρῶτον, οὐ τὸ δεύτερον οὐκ ἄρα τὸ πρῶτον". φέρονται δὲ καὶ ἐπὶ ἄλλης τὸν τρόπον τοῦτον οἱ ἀπὸ τῆς Στοᾶς λέγοντες τὸ "εἰ ἐπιστασάσι οὐ τέθνηκας, (τέθνηκας εἰ ἐπιστασάσι οὐ τέθνηκας), οὐ τέθνηκας". ἀκολουθεῖ τὸ "οὐκ ἄρα ἐπιστασάσι, οὐ τέθνηκας". ²⁹⁾ Die Stelle kennt weder Prantl noch Zeller, obwohl schon Fabricius (Sexti Empirici Opera, 2. Aufl. 1840, Bd. I. S. 112) auf sie hingewiesen hat. Der Ausdruck, um den es sich handelt, ist "διὰ δύο τροπικῶν" ("τροπικόν") ist eine nicht einfache Prämisse, z. B. eine Implikation). Von Prantl (I, S. 480) und Zeller (III 1, S. 114/5 Anm. 5) falsch interpretiert, bezeichnet der Ausdruck nach dem Obigen einen Syllogismus, in welchem zwei τροπικά, hier zwei Implikationen, als Prämissen vorkommen. ³⁰⁾ Galenus inst. log. ed. Kalbfleisch, S. 11, 6 (Arnim II 208, S. 69, 4): ἀλλ' οἱ περὶ Χρυσίππου κἀταυθὰ τῆ λέξει μᾶλλον ἢ τοῖς πράγμασι προσέχοντες τὸν νοῦν . . . ³¹⁾ Alexander in anal. pr. com. ed. Wallies, S. 372, 29: οὐκ ἐν ταῖς λέξεσιν ὁ συλλογισμὸς τὸ εἶναι ἔχει ἀλλ' ἐν τοῖς σημανομένοις. ³²⁾ Alexander l. c. S. 373, 29 (Arnim II 253, S. 84): οἱ δὲ νεώτεροι ταῖς λέξεσιν ἐπακολουθούσας οὐκέτι δὲ τοῖς σημανομένοις, οὐ ταυτὸν φασὶ γίνεσθαι ἐν ταῖς εἰς τὰς ἰσοδυναμούσας λέξεις μεταλήψει τῶν ὄρων ταυτὸν γὰρ σημαίνοντος τοῦ "εἰ τὸ A, τὸ B" τῷ "ἀκολουθεῖ τῷ A τὸ B" συλλογιστικὸν μὲν λόγον φασὶ εἶναι τοιαύτης ληφθείσης τῆς λέξεως "εἰ τὸ A, τὸ B τὸ δὲ A τὸ ἄρα B", οὐκέτι δὲ συλλογιστικὸν ἀλλὰ περαντικὸν τὸ "ἀκολουθεῖ τῷ A τὸ B τὸ δὲ A τὸ ἄρα B". ³³⁾ Geschichte der Logik, S. 32. ³⁴⁾ Alexander in top. com. ed. Wallies, S. 218: ἔστιν ἔτι καὶ ἐν τῇ λογικῇ συγκατασκευῇ τινὰ ζητούμενα, ὡς τὸ πότερον πεισικώτερον, ἐπαγωγή ἢ συλλογισμὸς, καὶ ποῖος πρῶτος συλλογισμὸς, ὁ κατηγορικὸς ἢ ὁ ὑποθετικὸς, καὶ ποῖον σχῆμα πρῶτον ἢ βέλτιον.

³⁵⁾ Galenus inst. log. ed. Kalbfleisch, S. 17: *καὶ μέντοι καὶ τῶν ἐκ τοῦ Περιπάτου τινὲς ὡπερ καὶ Βοηθὸς οὐ μόνον ἀναποδείκτους ὀνομάζουσιν τοὺς ἐκ τῶν ἡγεμονικῶν λημμάτων συλλογισμούς, ἀλλὰ καὶ πρώτους· ὅσοι δὲ ἐκ κατηγορικῶν προτάσεων εἰσὶν ἀναπόδεικτοι συλλογισμοί, τοὺτους οὐκ ἔτι πρώτους ὀνομάζειν συγχωροῦσιν· καίτοι καθ' ἕτερόν γε τρόπον οἱ τοιοῦτοι πρότεροι τῶν ὑποθετικῶν εἰσιν, ἔπειτα γὰρ καὶ αἱ προτάσεις αὐτῶν ἐξ ἂν σύγκεινται πρότεροι βεβαίως εἰσὶν· οὐδεὶς γὰρ ἀμφισβητήσει τὸ μὴ οὐ πρότερον εἶναι τὸ ἀπλοῦν τοῦ συνθέτου. ἀλλὰ περὶ μὲν τῶν τοιούτων ἀμφισβητήσεων οὐτε εἰρεῖν οὐτε ἀγνοῆσαι μέγα· χρὴ γὰρ ἀμφότερα τὰ μέρη γινώσκειν τῶν συλλογισμῶν, καὶ τοῦτ' ἔστι τὸ χρῆσιμον, ὀνομάζειν δὲ τοὺς ἕτερους ἢ διδάσκειν προτέρους ὡς ἐκάστῳ φίλον.*

³⁶⁾ Prantl (III, S. 43) weiß nichts davon zu berichten, denn er merkt nicht den Unterschied, der zwischen der Disjunktion und der Alternative besteht.

³⁷⁾ Summulae, tract. I, de disiunctiva (von Prantl III, S. 43, Anm. 158 nur im Auszuge angeführt; ich zitiere nach einer verhältnismäßig späten Ausgabe: Petri Hispani Summulae Logicales cum Versorii Parisiensis clarissima expositione, Venetiis 1597 apud Matthaeum Valentinum, die an verschiedenen Stellen von den bei Prantl angeführten Texten abweicht): Disiunctiva est illa, in qua coniunguntur duae propositiones categoricae per hanc coniunctionem „vel“ aut aliam sibi equivalentem, ut „Socrates currit vel Plato disputat“. Ad veritatem disiunctivae sufficit, alteram partem esse veram, ut „homo est animal vel equus est asinus“, tamen permittitur, quod utraque pars eius sit vera, sed non ita proprie, ut „homo est animal vel equus est hinnibilis“. Ad falsitatem eius oportet, utramque partem eius esse falsam, ut „homo est asinus vel equus est lapis“.

³⁸⁾ Summulae l. c.: dupliciter arguitur a disiunctivis. Uno modo, a tota disiunctiva cum destructione unius partis ad positionem alterius, ut „homo est animal vel equus est lapis; sed equus non est lapis, igitur homo est animal“. Secundo modo, arguendo a veritate unius partis ad veritatem totius, et est bona consequentia, unde bene sequitur, haec est vera „homo currit“, igitur haec est vera „homo est asinus vel homo currit“.

³⁹⁾ Summulae, tract. I, de copulativa: arguendo a tota copulativa ad veritatem cuiuslibet partis eius seorsum, est bona consequentia, ut bene sequitur „homo est animal et Deus est, ergo homo est animal“. ⁴⁰⁾ Summulae l. c.: copulativa et disiunctiva de partibus contradicentibus contradicunt. — Denfelben Gedanken, der hier etwas zu knapp ausgedrückt ist, spricht Occam viel deutlicher aus: *Opposita contradictoria disiunctivae est una copulativa composita ex contradictoriis partium ipsius disiunctivae.* (Vgl. Prantl III, S. 396 Anm. 958).

⁴¹⁾ Summulae l. c.: non est verius dare contradictionem, quam toti propositioni praeponeere negationem. ⁴²⁾ Duns Scotus, Quaestiones super anal. pr. I, 10 (Prantl III, S. 139 Anm. 614): Consequentia est propositio hypothetica composita ex antecedente et consequente mediante coniunctione conditionali vel rationali. — Als „coniunctio conditionalis“ wird „si“ angegeben, als „coniunctio rationalis“ gilt „igitur“ oder „ergo“. ⁴³⁾ a. a. O. (Prantl III, S. 139 Anm. 615, S. 140 Anm. 617, 619): Consequentia sic dividitur: quaedam est materialis, quaedam formalis. Consequentia formalis est illa, quae tenet in omnibus terminis stante consimili dispositione et forma terminorum. (Es folgt eine genaue Darlegung dessen, was zur Form der Konsequenz gehört.) — Consequentia materialis est illa, quae non tenet in omnibus terminis retenta consimili dispositione et forma. Et talis est duplex, quia quaedam est vera simpliciter, et alia est vera ut nunc. Consequentia vera simpliciter est illa, quae potest reduci ad formalem per assumptionem unius propositionis necessariae. — Consequentia materialis bona ut nunc est illa, quae potest reduci ad formalem per assumptionem alicuius propositionis contingentis verae.

⁴⁴⁾ a. a. O. (Prantl III, S. 141 Anm. 621): Ad quamlibet propositionem falsam sequitur quaelibet alia propositio in consequentia bona materiali ut nunc. — Omnis propositio vera sequitur ad quamcunque aliam propositionem in bona consequentia materiali ut nunc. — Ad quamlibet propositionem implicantem contradictionem de forma sequitur quaelibet alia propositio in consequentia formali. ⁴⁵⁾ Duns Scotus, Quaestiones super anal. pr. II, 3 (von Prantl nicht angeführt): „Socrates currit et Socrates non currit; igitur tu es Romae.“ Probatur, quia ad dictam copulativam sequitur quaelibet eius pars gratia formae. Tunc reservata ista parte „Socrates non currit“, arguatur ex alia sic: „Socrates currit, igitur Socrates currit vel tu es Romae“, quia quaelibet propositio infert seipsam for-

maliter cum qualibet alia in una disiunctiva. Et ultra sequitur: „Socrates currit vel tu es Romae; sed Socrates non currit (ut reservatum fuit); igitur tu es Romae“, quod fuit probatum per illam regulam: ex disiunctiva cum contradictoria unius partis ad reliquam partem est bona consequentia. ⁴⁶⁾ Vgl. dazu: Łukasiewicz und Tariski, Untersuchungen über den Ausfagenkalkül, Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, XXIII. 1930, Cl. III, S. 35 Anm. 9. ⁴⁷⁾ Vgl. dazu: Łukasiewicz, Ein Vollständigkeitsbeweis des zweiwertigen Ausfagenkalküls, Comptes Rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, XXIV. 1931, Cl. III, S. 157.

Jörgen Jörgensen (Kopenhagen), Einige Hauptpunkte der Entwicklung der formalen Logik seit Boole:

Eine ganz kurze und dennoch zufriedenstellende Übersicht über die reiche Entwicklung der formalen Logik seit Boole zu geben, ist wohl eine unmögliche Aufgabe, selbst wenn man sich darauf beschränkt, nur einige Hauptpunkte dieser Entwicklung zu skizzieren. Vieles kann nur angedeutet werden.

Was charakterisiert die seit Boole entwickelte formale Logik besonders? *Die mathematische Form und Methode*. Weil nun diese Art, die logischen Probleme zu behandeln, in systematischer Durchführung zuerst von Boole eingeführt wurde, ist es wohlbegründet, diese neueste Epoche in der Geschichte der Logik mit ihm beginnen zu lassen.

Ganz allgemein kann man sagen, daß George Boole (1815 bis 1864) als einer der ersten Mathematiker die abstrakte Formalität der Algebra eingesehen hat, wonach „die Gültigkeit der Prozesse der Analyse nicht von der Interpretation der verwendeten Symbole abhängt, sondern allein von den Gesetzen ihrer Kombination“ („*Math. Anal. of Logic, being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*“, p. 3. — 1847). Weiterhin sagt Boole, „daß man den existierenden Formen der Analyse eine quantitative Interpretation gibt, ist das Resultat der Umstände, unter welchen diese Formen bestimmt waren und muß nicht als eine univervale Bedingung der Analyse aufgefaßt werden. Auf der Grundlage dieses generellen Prinzipes beabsichtige ich, den logischen Kalkül herzustellen und für denselben einen Platz unter den anerkannten Formen der mathematischen Analyse zu fordern, obgleich er gegenwärtig mit Rücksicht auf seinen Zweck und seine Hilfsmittel allein stehen muß“ (ibid., p. 4).

Von Anfang an hat Boole also gesehen, daß die von ihm entwickelte logische Algebra eine besondere Art von *Algebra* ist und daß ihre Beziehung zur Logik eigentlich nur darin besteht, daß die