der Materie uſw. beriefen, um der „materialiſtiſchen“ Phyſik ein Ende vorherzuſagen, ſo verwendet man heute Relativitäts- und Quantentheorie, ohne daß das alles einen wirklichen inneren Zuſammenhang mit den Fortſchritten der Phyſik hätte [5]).

Alfred Tarski (Warſchau): Einige methodologiſche Unterſuchungen über die Definierbarkeit der Begriffe.

Einleitende Bemerkungen.

In der Methodologie der deduktiven Wiſſenſchaften treten zwei Begriffsgruppen auf, die zwar inhaltlich von einander ziemlich entfernt ſind, jedoch erhebliche Analogien aufweiſen, wenn man ihre Rolle beim Aufbau der deduktiven Theorien ſowie die inneren Beziehungen zwiſchen den Begriffen jeder Gruppe erörtert. Zu der erſten Gruppe gehören ſolche Begriffe wie „*Axiom*“, „*abgeleiteter Satz*“, „*Schlußregel*“, „*Beweis*“, zu der zweiten — „*Grundbegriff*“ (bzw. „*Grundausdruck*“, „*Grundzeichen*“), „*definierter Begriff*“, „*Definitionsregel*“, „*Definition*“. Zwiſchen den Begriffen der beiden Gruppen läßt ſich ein weitgehender Paralellismus feſtſtellen: den Axiomen entſprechen die Grundbegriffe, den abgeleiteten Sätzen — die definierten Begriffe, dem Prozeſſe und den Regeln des Beweiſes — der Prozeß und die Regeln des Definierens.

Die bisherigen Unterſuchungen aus dem Gebiet der Methodologie der deduktiven Wiſſenſchaften haben meiſt die Begriffe der erſten Gruppe behandelt. Nichtsdeſtoweniger drängen ſich auch bei der Betrachtung der zweiten Begriffsgruppe viele intereſſante und wichtige Probleme auf, die manchmal ganz analog denjenigen ſind, welche ſich auf die Probleme der erſten Gruppe beziehen. In dieſem Aufſatz möchte ich zwei Probleme aus dieſem Gebiet beſprechen, und zwar das Problem der Definierbarkeit und der gegenſeitigen Unabhängigkeit von Begriffen ſowie das Problem der Vollſtändigkeit von Begriffen einer beliebigen deduktiven Theorie [1]).

Es werden uns hier nur diejenigen deduktiven Theorien intereſſieren, welche ein hinreichend entwickeltes Syſtem der mathematiſchen Logik „überbauen“; die Probleme, welche die Begriffe der Logik ſelbſt betreffen, werden alſo außer Betracht bleiben. Um die

[5]) Die Ausführungen dieſes Vortrages ſind zum Teil dem Artikel von Ph. Frank in der Revue de Synthése VII (1934) entnommen.

Betrachtungen zu konkretisieren, werden wir als den logischen Unterbau der deduktiven Theorien stets das in einigen Punkten modifizierte System der „*Principia Mathematica*" von A. N. Withehead und B. Russell [2]) ins Auge fassen. Die erwähnten Modifikationen bestehen im folgenden: 1. es wird angenommen, daß die verzweigte Typentheorie durch die vereinfachte ersetzt und das Reduzibilitätsaxiom beseitigt worden ist; 2. in das System der logischen Grundsätze schließen wir das Extensionalitätsaxiom (für alle logischen Typen) ein, und infolgedessen identifizieren wir die Klassenzeichen mit den einstelligen Prädikaten, Relationszeichen mit den zweistelligen Prädikaten usw. [3]); 3. wir benützen keine definierten Operatoren wie z. B. „$\hat{x}$ (φ x)" oder „($\imath$ x) (φ x)" (weil die Korrektheit ihrer Definitionen zweifelhaft scheint); 4. als Sätze und insbesondere als beweisbare Sätze des Systems werden nur diejenigen Satzfunktionen betrachtet, die keine reellen (freien) Variablen enthalten.

Eine das System der Logik „überbauende" deduktive Theorie stellen wir uns in großen Zügen folgendermaßen vor: zu den logischen Konstanten und Variablen werden neue Zeichen, sogenannte außerlogische Konstanten oder spezifische Zeichen der betrachteten Theorie hinzugefügt; jedem dieser Zeichen wird ein bestimmter logischer Typus zugeordnet. Als Satzfunktionen der Theorie betrachten wir die Satzfunktionen der Logik, sowie alle Ausdrücke, die man aus ihnen erhält, indem man reelle Variablen (nicht notwendig alle) durch außerlogische Konstanten von entsprechenden Typen ersetzt. Satzfunktionen, in denen keine reellen Variablen auftreten, werden Sätze genannt. Unter den Sätzen werden logisch beweisbare Sätze ausgezeichnet: als solche gelten die in der Logik beweisbaren Sätze sowie diejenigen, die aus ihnen durch eine regelmäßige Einsetzung der außerlogischen Konstanten an die Stelle der Variablen erhalten werden können (es wäre hier überflüssig zu präzisieren, worin die regelmäßige Einsetzung besteht).

Es sei X ein beliebige Satzmenge und y — ein beliebiger Satz der gegebenen Theorie. Wir wollen sagen, daß y eine Folgerung der Satzmenge X ist oder daß y aus den Sätzen der Menge X ableitbar ist, wenn entweder y logisch beweisbar ist oder wenn es eine logisch beweisbare Implikation gibt, deren Vorderglied ein Satz der Menge X, bzw. eine Konjunktion solcher Sätze ist und deren Nachglied sich mit y deckt.

Auf den Folgerungsbegriff lassen sich bekanntlich andere Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften zurückführen, wie z. B. die Begriffe des deduktiven (oder abgeschlossenen) Systems, der (logischen) Äquivalenz zweier Satzmengen, des Axiomensystems einer Satzmenge, der Axiomatisierbarkeit, der Unabhängigkeit, der Widerspruchsfreiheit und der Vollständigkeit einer Satzmenge; wir setzen hier alle diese Begriffe als bekannt voraus [4]). Gemäß der üblichen Redeweise werden wir die Menge, die aus einem einzigen Satze besteht, mit dem Satze selbst identifizieren; so werden wir z. B. über die Folgerungen eines Satzes oder über die Widerspruchsfreiheit eines Satzes sprechen.

1. *Das Problem der Definierbarkeit und der gegenseitigen Unabhängigkeit von Begriffen.*

Die in diesem Artikel zu erörternden Probleme beziehen sich auf die spezifischen Zeichen einer beliebigen deduktiven Theorie [5]).

Es sei „a" irgendeine außerlogische Konstante und B — eine beliebige Menge von solchen Konstanten. Jeden Satz der Form:

$$\text{(I)} \quad (x) : x = a \,.\equiv .\, \varphi\,(x; b', b'' \ldots),$$

wo „$\varphi\,(x; b', b'' \ldots)$" eine beliebige Satzfunktion ersetzt, welche „x" als die einzige reelle Variable enthält und in welcher keine außerlogische Konstanten außer den Zeichen „b'", „b''" ... der Menge B vorkommen, wollen wir eventuelle Definition oder einfach Definition des Zeichens „a" mit Hilfe der Zeichen der Menge B nennen. Wir werden sagen, daß das Zeichen „a" mit Hilfe der Zeichen der Menge B auf Grund der Satzmenge X definierbar ist (oder sich definieren läßt), wenn sowohl „a" als alle Zeichen von B in den Sätzen der Menge X auftreten und wenn dabei zumindest eine eventuelle Definition des Zeichens „a" mit Hilfe der Zeichen von B aus den Sätzen von X ableitbar ist [6]).

Mit Hilfe des Definierbarkeitsbegriffes kann man den Sinn weiterer methodologischer Begriffe präzisieren, welche denjenigen genau entsprechen, die aus dem Ableitbarkeitsbegriffe abstammen; es sind z. B. die Begriffe der Äquivalenz zweier Zeichenmengen, des Grundzeichensystems einer Zeichenmenge usw. Es ist ersichtlich, daß alle diese Begriffe auf eine Satzmenge X relativisiert werden müssen [8]). Insbesondere soll B eine unabhängige Zeichenmenge oder eine Menge von gegenseitig unabhängigen Zeichen in bezug auf eine Satzmenge X heißen, wenn kein Zeichen der Menge B mit Hilfe der übrigen Zeichen dieser Menge auf Grund von X definierbar ist.

Wir beschränken uns hier auf den Fall, wo die Satzmenge X und infolgedessen auch die Zeichenmenge B endlich ist (die Ausdehnung der erlangten Resultate auf beliebige axiomatisierbare Satzmengen bietet keine Schwierigkeiten).

Vor mehr als dreißig Jahren hat A. Padoa eine Methode skizziert, welche die Undefinierbarkeit eines Zeichens mit Hilfe anderer Zeichen in konkreten Fällen festzustellen gestattet [7]). Um nämlich nach dieser Methode nachzuweisen, daß sich ein Zeichen „a" mit Hilfe der Zeichen einer Menge B auf Grund einer Satzmenge X nicht definieren läßt, genügt es, zwei solche „Interpretationen" aller außerlogischen Konstanten, die in den Sätzen von X vorkommen, anzugeben, daß (1) in beiden „Interpretationen" alle Sätze der Menge X „erfüllt" sind und dabei (2) in beiden „Interpretationen" allen Zeichen der Menge B derselbe „Sinn" zugeschrieben wird, dagegen (3) der „Sinn" des Zeichens „a" eine Veränderung erleidet. Wir wollen hier einige Resultate angeben, welche die Methode von Padoa theoretisch rechtfertigen und — unabhängig davon — das Definierbarkeitsproblem interessant zu beleuchten scheinen.

Ziehen wir also eine beliebige endliche Satzmenge X, eine außerlogische Konstante „a", welche in den Sätzen von X vorkommt, und eine Menge B von derartigen Konstanten, die jedoch das Zeichen „a" als Element nicht umfaßt, in Betracht. Die Konjunktion aller Sätze der Menge X (in beliebiger Anordnung) stellen wir in der schematischen Form „$\psi(a;\ b', b'' \ldots; c', c'' \ldots)$" dar; „$b'$", „$b''$" ... sind hier Zeichen der Menge B und „c'", „c''" ... — außerlogische Konstanten, welche in den Sätzen von X auftreten und dabei von „a", „b'", „b''" ... verschieden sind (gibt es solche Konstanten nicht, so lassen sich die Formulierungen und Beweise der unten angegebenen Sätze einigermaßen vereinfachen). Es kommt manchmal vor, daß man in allen Sätzen der Menge X an die Stellen der außerlogischen Konstanten (nicht notwendig allen) entsprechende Variablen „x", „y'", „y''", „z'", „z''" ... einsetzt, wobei vorausgesetzt wird, daß keine dieser Variablen im Resultat der Einsetzung den Charakter einer scheinbaren (gebundenen) Variablen erlangt hat [8]); um die Konjunktion aller auf diese Weise gebildeten Satzfunktionen schematisch darzustellen, vollzieht man dieselbe Einsetzung in dem Ausdruck „$\psi(a; b', b'' \ldots; c', c'' \ldots)$“. Auf Grund der obigen Voraussetzungen und Konventionen läßt sich nun der folgende Satz beweisen:

Satz 1. Damit das Zeichen „a“ mit Hilfe der Zeichen der Menge B auf Grund der Satzmenge X definierbar ist, ist es notwendig und hinreichend, daß sich die Formel

$$\text{(II)} \quad (x) : x = a \,.\equiv.\, (\exists z', z'' \ldots) \,.\, \psi(x; b', b'' \ldots; z', z'' \ldots)$$

aus den Sätzen von X ableiten läßt.

Beweis. Es folgt direkt aus der Definition des Definierbarkeitsbegriffes, daß die Bedingung des Satzes hinreichend ist: (II) ist nämlich eine Formel vom Typus (I), also eine eventuelle Definition des Zeichens „a“ mit Hilfe der Zeichen von B.

Es erübrigt sich zu zeigen, daß diese Bedingung zugleich notwendig ist. Setzen wir dementsprechend voraus, daß das Zeichen „a“ mit Hilfe der Zeichen von B auf Grund der Menge X definierbar ist; aus den Sätzen von X läßt sich also mindestens eine Formel vom Typus (I) ableiten. Diese Formel ist zugleich eine Folgerung der Konjunktion aller Sätze von X, d. i. des Satzes „$\psi(a; b', b'' \ldots; c', c'' \ldots)$“. Gemäß der Definition des Folgerungsbegriffes schließen wir hieraus, daß die Formel

$$(1) \quad \psi(a; b', b'' \ldots; c', c'' \ldots) \,.\supset:\, (x) : x = a \,.\equiv.\, \varphi(x; b', b'' \ldots)$$

logisch beweisbar ist. Da die Formel (1) ein logisch beweisbarer Satz mit außerlogischen Konstanten ist, so muß sie sich durch eine Einsetzung aus einem logisch beweisbaren Satze ohne derartige Konstanten gewinnen lassen, und zwar aus der Formel:

$$(2) \quad (x', y', y'' \ldots, z', z'' \ldots) :.\, \psi(x'; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots) \,.\supset: (x): x = x' \,.\equiv.\, \varphi(x'; y', y'' \ldots).$$

Durch leichte Umformungen erhält man aus (2) weitere logisch beweisbare Formeln:

$$(3) \quad (x, x', y', y'' \ldots, z', z'' \ldots) :.\, \psi(x'; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots) \,.\supset: x = x' \,.\equiv.\, \varphi(x; y', y'' \ldots);$$

$$(4) \quad (x, y', y'' \ldots, z', z'' \ldots) :.\, \psi(x; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots) \,.\supset: x = x \,.\equiv.\, \varphi(x; y', y'' \ldots);$$

$$(5) \quad (x, y', y'' \ldots, z', z'' \ldots) : \psi(x; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots) \,.\supset.\, \varphi(x, y', y'' \ldots);$$

$$(6) \quad (x, y', y'' \ldots) : (\exists z', z'' \ldots) \,.\, \psi(x; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots) \,.\supset.\, \varphi(x; y', y'' \ldots).$$

Aus (3) und (6) folgt:

(7) $(x, x', y', y'' \ldots, z', z'' \ldots) : . \psi (x'; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots) :$
$(\exists z', z'' \ldots) . \psi (x; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots) : \supset . x = x',$

woraus ferner:

(8) $(x, x', y', y'' \ldots, z', z'' \ldots) : . \psi (x'; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots) . \supset :$
$(\exists z', z'' \ldots) . \psi (x; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots) . \supset . x = x' .$

Anderseits ergibt die logische Definition des Identitätszeichen:

(9) $(x, x', y', y'' \ldots, z', z'' \ldots) : . \psi (x'; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots) . \supset :$
$x = x' . \supset . \psi (x; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots)$

und hieraus:

(10) $(x, x', y', y'' \ldots, z', z'' \ldots) : . \psi (x'; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots) . \supset :$
$x = x' . \supset . (\exists z', z'' \ldots) . \psi (x; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots).$

Aus (8) und (10) gewinnen wir schrittweise die Formeln:

(11) $(x, x', y', y'' \ldots, z', z'' \ldots) : . \psi (x'; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots) . \supset :$
$x = x' . \equiv . (\exists z', z'' \ldots) . \psi (x; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots);$

(12) $(x', y', y'' \ldots, z', z'' \ldots) : . \psi (x'; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots) . \supset :$
$(x) : x = x' . \equiv . (\exists z', z'' \ldots) . \psi (x; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots);$

(13) $\psi (a; b', b'' \ldots; c', c'' \ldots) . \supset : (x) : x = a . \equiv . (\exists z', z'' \ldots) .$
$\psi (x; b', b'' \ldots; z', z'' \ldots) .$

Da (13) logisch beweisbar ist, so läßt sich das Nachglied dieser Implikation, also die Formel (II), aus dem Vorderglied „$\psi (a; b', b'' \ldots; c', c'' \ldots)$" und dadurch auch aus den Sätzen der Menge X ableiten. Demzufolge ist die Bedingung des Satzes nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig, w. z. b. w.

Die Bedeutung des obigen Satzes besteht im folgenden: wenn sich ein Zeichen mit Hilfe anderer Zeichen überhaupt definieren läßt, so ermöglicht uns der Satz, eine der eventuellen Definitionen dieses Zeichens „effektiv" anzugeben. Der Satz bezeugt ferner, daß sich das Problem der Definierbarkeit der Zeichen auf das Problem der Ableitbarkeit der Sätze restlos zurückführen läßt.

Es sei hier noch eine Umformung des Satzes 1 angegeben:

Satz 2. *Damit das Zeichen „a" mit Hilfe der Zeichen der Menge B auf Grund der Satzmenge X definierbar ist, ist es notwendig und hinreichend, daß die Formel*

(III) $(x', x'', y', y'' \ldots, z', z'' \ldots, t', t'' \ldots) :$
$\psi (x'; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots) . \psi (x''; y', y'' \ldots; t', t'' \ldots) . \supset . x' = x''$

logisch beweisbar ist.

Der Beweis stützt sich auf den Satz 1 und ist dem Beweis dieses Satzes analog.

Als unmittelbares Korollar ergibt sich aus dem obigen Satze der

S a t z 3. *Damit ſich das Zeichen „a“ mit Hilfe der Zeichen der Menge B auf Grund der Satzmenge X nicht definieren läßt, iſt es notwendig und hinreichend, daß die Formel*

$$\text{(IV)} \quad (\exists x', x'', y', y'' \ldots, z', z'' \ldots, t', t'' \ldots) .$$
$$\psi(x'; y', y'' \ldots; z', z'' \ldots) . \psi(x''; y' y'' \ldots; t', t'' \ldots) . x' \neq x''$$

widerſpruchsfrei iſt.

Um das nachzuweiſen, genügt es zu bemerken, daß die Formel (IV) der Negation der Formel (III) aus dem Satze 2 äquivalent iſt, und danach den allgemeinen methodologiſchen Satz anzuwenden, demzufolge ſich eine Formel dann und nur dann logiſch nicht beweiſen läßt, wenn ihre Negation widerſpruchsfrei iſt [9]).

Der Satz 3 bildet die eigentliche theoretiſche Grundlage für die Methode von P a d o a. In der Tat, um auf Grund dieſes Satzes feſtzuſtellen, daß das Zeichen „a“ mit Hilfe der Zeichen der Menge B nicht definierbar iſt, kann man folgende Verfahrenweiſe anwenden. Man betrachtet ein deduktives Syſtem Y, deſſen Widerſpruchsfreiheit ſchon vorher feſtgeſtellt wurde oder vorausgeſetzt wird. Man ſucht ferner gewiſſe Konſtanten (nicht notwendig außerlogiſche) „$\bar{a}$“, „$\bar{\bar{a}}$“, „$\bar{b}'$“, „$\bar{b}''$“ . . ., „$\bar{c}'$“, „$\bar{c}''$“ . . ., „$\bar{\bar{c}}'$“, „$\bar{\bar{c}}''$“ . . ., welche in den Sätzen von Y auftreten und folgenden Bedingungen genügen: (1) erſetzt man in allen Sätzen der Menge X die Symbole „a“, „b'“, „b''“ . . ., „c'“, „c''“ . . . entſprechend durch „$\bar{a}$“, „$\bar{b}'$“, „$\bar{b}''$“ . . ., „$\bar{c}'$“, „$\bar{c}''$“ . . ., ſo gewinnt man durch ſolche Umgeſtaltung aus den Sätzen von X die Sätze des Syſtems Y; (2) dasſelbe gilt auch dann, wenn man an die Stelle der Zeichen von B, d. i. „b'“, „b''“..., genau ſo wie früher die Symbole „$\bar{b}'$“, „$\bar{b}''$“ . . . einſetzt, dagegen die übrigen Zeichen „a“, „c'“, „c''“ . . . entſprechend durch „$\bar{\bar{a}}$“, „$\bar{\bar{c}}'$“, „$\bar{\bar{c}}''$“ . . . erſetzt; (3) das Syſtem Y enthält die Formel „$\bar{a} \neq \bar{\bar{a}}$“. Es ergibt ſich aus den obigen Bedingungen, daß zu dem Syſtem Y folgende Konjunktion gehört:

$$\psi(\bar{a}; \bar{b}', \bar{b}'' \ldots; \bar{c}', \bar{c}'' \ldots) . \psi(\bar{\bar{a}}; \bar{b}', \bar{b}'' \ldots; \bar{\bar{c}}', \bar{\bar{c}}'' \ldots) . \bar{a} \neq \bar{\bar{a}},$$

Hieraus ſchließt man leicht, daß das Syſtem Y auch die Formel (*IV*) aus dem Satze 3 als unmittelbare Folgerung dieſer Konjunktion umfaßt. Laut einem allgemeinen methodologiſchen Satz iſt jeder Teil einer widerſpruchsfreien Satzmenge widerſpruchsfrei; insbeſondere muß alſo die Formel (IV) als ein Element des widerſpruchsfreien

Syſtems Y widerſpruchsfrei ſein. So iſt die Bedingung des Satzes 3 erfüllt, und das Zeichen „*a*" kann nicht ausſchließlich mit Hilfe der Zeichen von B definiert werden. In dem obigen Verfahren erkennt man leicht die Methode von P a d o a — in einer inſofern erweiterten Form, daß man auch das eventuelle Vorkommen ſolcher Zeichen berückſichtigt, die weder mit „*a*" noch mit irgendwelchen Zeichen der Menge B identiſch ſind.

Die Methode von P a d o a bzw. der Satz 3 wird oft mit Erfolg benützt, wenn man beſtrebt iſt, die gegenſeitige Unabhängigkeit der Zeichen einer beliebigen Menge B aufzuſtellen; dieſe Methode muß offenbar ſo oft angewendet werden, als die gegebene Zeichenmenge Elemente enthält. Dem Unabhängigkeitsproblem ſchreibt man eine gewiſſe praktiſche Bedeutung zu, und zwar dann, wenn es ſich um das Grundzeichenſyſtem einer deduktiven Theorie handelt; falls nämlich die Grundzeichen nicht gegenſeitig unabhängig ſind, ſo kann man die entbehrlichen (d. i. definierbaren) Zeichen ausſchalten und dadurch das Grundzeichenſyſtem vereinfachen, was manchmal auch eine Vereinfachung des Axiomenſyſtems ermöglicht.

Es ſei hier ein Beiſpiel angeführt. Betrachten wir das Syſtem der n-dimenſionalen euklidiſchen Geometrie (wo n eine beliebige natürliche Zahl iſt). Nehmen wir an, daß die Symbole „*a*" und „*b*" gewiſſe Relationen zwiſchen den Punkten bezeichnen, nämlich „*a*" die viergliedrige Relation der Kongruenz zweier Punktpaare und „*b*" die dreigliedrige Relation des Zwiſchenliegens; der Ausdruck „$a\,(x, y, z, t)$" bzw. „$b\,(x, y, z)$" wird alſo geleſen: „*der Punkt x iſt ſoweit entfernt vom Punkte y wie der Punkt z vom Punkt t*" bzw. „*der Punkt y liegt zwiſchen den Punkten x und z*". Das Zeichen „*a*" kann man m e t r i ſ c h e s G r u n d z e i c h e n und das Zeichen „*b*" — d e ſ k r i p t i v e s G r u n d z e i c h e n d e r G e o m e t r i e nennen. Wie bekannt, kann die Menge, die bloß aus beiden Zeichen „*a*" und „*b*" beſteht, als Grundzeichenſyſtem der Geometrie angenommen werden; es l äßt ſich demnach ein Axiomenſyſtem X der Geometrie konſtruieren, in welchem die beiden Zeichen als einzige außerlogiſche Konſtanten vorkommen. Es entſteht nun die Frage, ob die Zeichen „*a*" und „*b*" gegenſeitig unabhängig in bezug auf die Satzmenge X ſind. Dieſe Frage iſt zu verneinen. Zwar kann man feſtſtellen, indem man die Methode von P a d o a verwendet, daß ſich das Zeichen „*a*" tatſächlich nur mit Hilfe des Zeichens „*b*" nicht definieren läßt: die Widerſpruchsfreiheit der Geometrie vorausgeſetzt, kann man nämlich beweiſen, daß die Formel (IV) aus dem Satze 3 in diesem Falle widerspruchsfrei ist (es ist interessant, daß sich dieser Beweis aus gewissen Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie ergibt, die scheinbar ein direkt entgegengesetztes Ziel bezwecken, und zwar die Begründung der metrischen Geometrie als eines Teiles der deskriptiven [10])). Es zeigt sich dagegen, daß, wenn man ein System zumindest zweidimensioneller Geometrie betrachtet, das Zeichen „*b*" mit Hilfe des Zeichens „*a*" auf Grund der Satzmenge X definierbar ist; die Definition kann nach dem Schema (II) aus dem Satze 1 konstruiert werden (obwohl auch andere viel einfachere Definitionen des Zeichens „*b*" bekannt sind). Im Einklang damit läßt sich das System X durch ein anderes äquivalentes Axiomensystem ersetzen, in dessen Axiomen das Zeichen „*a*" als die einzige außerlogische Konstante auftritt, abgesehen von einem einzigen „uneigentlichen" Axiom, nämlich von der eventuellen Definition des Zeichens „*b*". Nur im Falle der eindimensionellen Geometrie, d. i. Geometrie der Geraden, sind die beiden Zeichen „*a*" und „*b*" voneinander unabhängig, wie das A. Lindenbaum (mit Hilfe des sog. Auswahlaxioms) bewiesen hat [11]).

Es lohnt sich noch folgendes hervorzuheben. Als Ausgangspunkt für die obigen Betrachtungen haben wir eine spezielle Definitionsform verwendet, nämlich das Schema (I); nichtsdestoweniger bleiben die erlangten Resultate auch für andere bekannte Definitionsformen gültig. Um dies an einem Beispiel zu erleuchten, nehmen wir an, daß „*a*" ein zweistelliges Prädikat ist. Als eventuelle Definition des Zeichens „*a*" mit Hilfe der Zeichen der Menge B kann dann u. a. jeder Satz der Form

$$\text{(Ia)} \quad (u, v) : a(u, v) \,.\!\equiv.\, \varphi(u, v; b', b'' \ldots)$$

betrachtet werden, wo „$\varphi(u, v; b', b'' \ldots)$" durch eine beliebige Satzfunktion zu ersetzen ist, die keine reelle Variablen außer „*u*" und „*v*" und keine spezifischen Zeichen außer den Zeichen „b'", „b''" ... der Menge B enthält [12]). Es läßt sich nun leicht aufweisen, daß die Definition des Definierbarkeitsbegriffes, auf die Sätze der Form (Ia) relativisiert, der ursprünglichen Definition äquivalent ist (selbstverständlich nur in bezug auf die zweistelligen Prädikate); es folgt daraus unmittelbar, daß die Sätze 1—3 auch auf Grund der neuen Definition gültig bleiben. Es bietet dabei keine Schwierigkeit, den Satz 1 in der Richtung umzuformen, daß in ihm anstatt der Formel (II) eine Formel vom Typus (Ia) auftritt: es genügt nämlich (II) durch

(IIa) $(u, v) : . \, a(u, v) \, . \equiv : (x, z', z'' \ldots) : \Psi(x; b', b'' \ldots; z', z'' \ldots) \, .$
$\supset . \, x(u, v)$

zu erſetzen.

2. Das Problem der Vollſtändigkeit von Begriffen.

Das Problem der Definierbarkeit und der gegenſeitigen Unabhängigkeit von Begriffen iſt ein genaues Korrelat des Problems der Ableitbarkeit und der gegenſeitigen Unabhängigkeit von Sätzen. Auch das Problem der Vollſtändigkeit von Begriffen, zu dem wir jetzt übergehen, iſt gewiſſen Problemen nahe verwandt, die ſich auf Satzſyſteme beziehen, und zwar den Problemen der Vollſtändigkeit und der Kategorizität; die Analogie geht hier jedoch nicht ſo weit wie in dem vorigen Falle.

Um das Vollſtändigkeitsproblem zu präziſieren, führen wir zuerſt einen Hilfsbegriff ein. X und Y ſeien zwei beliebige Satzmengen. Wir wollen ſagen, daß die Satzmenge Y weſentlich reicher als die Satzmenge X in bezug auf die ſpezifiſchen Zeichen iſt, wenn (1) jeder Satz der Menge X zugleich zu der Menge Y gehört (und dadurch jedes ſpezifiſche Zeichen von X auch in den Sätzen von Y vorkommt) und wenn dabei (2) in den Sätzen von Y ſolche ſpezifiſche Zeichen auftreten, die in den Sätzen von X fehlen und die ſich ſogar auf Grund der Satzmenge Y ausſchließlich mit Hilfe derjenigen Zeichen, die in X vorkommen, nicht definieren laſſen.

Exiſtierte nun eine Satzmenge X, für welche es unmöglich wäre, eine in bezug auf die ſpezifiſchen Zeichen weſentlich reichere Satzmenge Y anzugeben, ſo wären wir geneigt zu ſagen, daß die Menge X in bezug auf ihre ſpezifiſche Zeichen vollſtändig iſt. Es zeigt ſich aber, daß es ſolche vollſtändige Satzmengen — von einigen trivialen Fällen abgeſehen — überhaupt nicht gibt: für faſt jede Satzmenge X läßt ſich eine in bezug auf die ſpezifiſchen Zeichen weſentlich reichere Menge Y konſtruieren; zu dieſem Zwecke genügt es gewöhnlich, zu der Menge X einen beliebigen logiſch beweisbaren Satz hinzuzufügen, welcher eine außerlogiſche Konſtante enthält, die in den Sätzen von X nicht vorkommt [13]). Aus dieſem Grunde wollen wir die vorgeſchlagene Definition der Vollſtändigkeit einer Korrektur unterziehen. Eine weſentliche Rolle wird hier der Begriff der Kategorizität ſpielen. Wie bekannt, wird eine Satzmenge kategoriſch genannt, wenn zwei beliebige „Interpretationen" („Realiſierungen") dieſer Menge iſomorph ſind [10]).

Um das genauer zu formulieren, nehmen wir an, daß in das Syſtem der Logik die ſymboliſchen Ausdrücke von der Form „$x' \underset{R}{\sim} x''$" (in Wortſprache: „*die Relation R bildet x' auf x'' ab*") eingeführt worden ſind. Die Variable „R" ſoll hier immer eine binäre Relation zwiſchen den Individuen bezeichnen; „x'" und „x''" können vom beliebigen, aber beide von demſelben logiſchen Typus ſein. Der genaue Sinn des Ausdrucks „$x' \underset{R}{\sim} x''$" hängt eben vom logiſchen Typus der Variablen „x'" und „x''" ab; wir wollen dieſen Sinn nur an einigen Beiſpielen aufklären. Sind z. B. x' und x'' Individuen, ſo bedeutet „$x' \underset{R}{\sim} x''$" dasſelbe, was „$x' R x''$" (d. i. „*zwiſchen x' und x'' beſteht die Relation R*"). Bezeichnen „x'" und „x''" Klaſſen von Individuen, ſo iſt der betrachtete Ausdruck mit der Satzfunktion:

$$(u'):u' \in x' . \supset . (\exists u'') . u'' \in x'' . u' \underset{R}{\sim} u'' :. (u''): u'' \in x'' . \supset .$$
$$(\exists u') . u' \in x' . u' \underset{R}{\sim} u''$$

gleichbedeutend (es entſteht dabei kein Zirkel, da „u'" und „u''" Individuenvariablen ſind, ſo daß der Sinn des Ausdrucks „$u' \underset{R}{\sim} u''$" ſchon vorher beſtimmt wurde). In ganz analoger Weiſe läßt ſich der Ausdruck „$x' \underset{R}{\sim} x''$" für Klaſſenzeichen von höheren Typen definieren. Betrachten wir noch den Fall, wo „x'" und „x''" zweiſtellige Prädikate mit Individuenvariablen als Argumenten ſind (alſo binäre Relationen zwiſchen den Individuen bezeichnen); die Formel „$x' \underset{R}{\sim} x''$" bedeutet dann dasſelbe, was

$$(u', v') : x'(u', v') . \supset . (\exists u'', v'') . x''(u'', v'') . u' \underset{R}{\sim} v' . u'' \underset{R}{\sim} v'' :.$$
$$(u'', v'') : x''(u'', v'') . \supset . (\exists u', v') . x'(u', v') . u' \underset{R}{\sim} v' . u'' \underset{R}{\sim} v'' .$$

Die obigen Beiſpiele reichen vermutlich hin, um aufzuklären, was für ein Sinn dem betrachteten Ausdruck in bezug auf die Variablen vom beliebigen logiſchen Typus zugeſchrieben werden ſoll. Erinnern wir uns ferner, daß in der Bezeichnungsweiſe der „*Principia Mathematica*" V die Klaſſe aller Individuen und $1 \rightarrow 1$ die Klaſſe aller eineindeutigen Relationen iſt, und ſetzen wir feſt, daß die Formel:

$$R \frac{x', y', z' \ldots}{x'', y'', z'' \ldots}$$

dasſelbe bedeuten ſoll, was die nachſtehende Konjunktion:

$$R \in 1 \rightarrow 1 \, . \, V \underset{R}{\sim} V \, . \, x' \underset{R}{\sim} x'' \, . \, y' \underset{R}{\sim} y'' \, . \, z' \underset{R}{\sim} z'' \ldots$$

(in Wortſprache: *„die Relation R bildet eineindeutig die Klaſſe aller Individuen auf ſich ſelbſt ab, wobei $x', y', z' \ldots$ entſprechend auf $x'', y'', z'' \ldots$ abgebildet werden"*) [14]).

Betrachten wir nun eine beliebige endliche Satzmenge *Y*; „*a*", „*b*", „*c*" ... ſeien alle ſpezifiſchen Zeichen, welche in den Sätzen von *Y* enthalten ſind, und „$\psi(a, b, c \ldots)$" ſei die Konjunktion aller dieſer Sätze. Die Menge *Y* heißt **kategoriſch**, wenn die folgende Formel:

$$\text{(V)} \quad (x'\, x'', y', y'', z', z'' \ldots) : \psi(x', y', z' \ldots) \, . \, \psi(x'', y'', z'' \ldots) \, . \supset . \, (\exists R) \, . \, R \frac{x', y', z' \ldots}{x'', y'', z'' \ldots}$$

logiſch beweisbar iſt [15]).

Die Kategorizität iſt einem anderen methodologiſchen Begriffe nahe verwandt, nämlich dem der **Monotransformabilität**. Eine Satzmenge iſt kategoriſch, wenn für zwei beliebige „Realiſierungen" dieſer Menge mindeſtens eine Relation exiſtiert, welche den Iſomorphismus der beiden „Realiſierungen" herſtellt; ſie iſt dagegen monotransformabel, wenn es höchſtens eine ſolche Relation gibt. In einer präziſeren Faſſung heißt die Satzmenge *X* **monotransformabel**, wenn der folgende Satz

$$\text{(VI)} \quad (x', x'', y', y'' \ldots, R', R'') : \varphi(x', y' \ldots) \, . \, \varphi(x'', y'' \ldots) \, . \, R' \frac{x', y' \ldots}{x'', y'' \ldots} \, . \, R'' \frac{x', y' \ldots}{x'', y'' \ldots} \, . \supset . \, R' = R''$$

logiſch beweisbar iſt, wobei „$\varphi(a, b \ldots)$" die Konjunktion aller Sätze von *X* darſtellt [16]).

Eine Satzmenge, die zugleich kategoriſch und monotransformabel iſt, wird **ſtrikt** oder **eindeutig kategoriſch** genannt; der Iſomorphismus zweier beliebigen „Realiſierungen" ſolch einer Menge läßt ſich alſo genau auf eine Weiſe aufſtellen. Strikt kategoriſch ſind z. B. verſchiedene Axiomenſyſteme der Arithmetik — ſowohl der Arithmetik der natürlichen Zahlen (z. B. das **Peano**ſche Axiomenſyſtem), wie auch der reellen, komplexen uſw. Zahlen [17]); dagegen ſind die Axiomenſyſteme verſchiedener geometriſchen Theorien — der Topologie, der projektiven, deſkriptiven, metriſchen Geometrie uſw. — wenn auch größtenteils kategoriſch, ſo nicht monotransformabel, alſo jedenfalls nicht eindeutig kategoriſch.

Aus verschiedenen Gründen, die wir nicht näher analysieren werden, schreibt man dem Kategorizitätsbegriffe eine große Bedeutung zu: eine nicht kategorische Satzmenge (speziell wenn sie als Axiomensystem einer deduktiven Theorie verwendet wird) macht den Eindruck einer nicht abgeschlossenen, nicht organischen Ganzheit, sie scheint den Sinn der in ihr enthaltenen Begriffe nicht genau zu bestimmen. Dementsprechend wollen wir die ursprüngliche Definition des Vollständigkeitsbegriffes folgender Modifikation unterziehen: eine Satzmenge X wird vollständig in bezug auf ihre spezifischen Zeichen genannt, wenn es unmöglich ist, eine kategorische Satzmenge Y anzugeben, die wesentlich reicher als X in bezug auf die spezifischen Zeichen wäre. Um die Unvollständigkeit einer Satzmenge festzustellen, ist es von nun ab erforderlich, eine nicht nur wesentlich reichere, sondern zugleich auch kategorische Satzmenge zu konstruieren; solche trivialen Konstruktionen, in denen der Sinn der neu eingeführten spezifischen Zeichen gar nicht bestimmt wird, sind also von vornherein ausgeschlossen [18]).

Bei dieser Fassung des Vollständigkeitsbegriffes läßt sich schon die Existenz sowohl der vollständigen wie auch der unvollständigen Satzmengen nachweisen. So sind z. B. Axiomensysteme verschiedener geometrischen Theorien in bezug auf ihre spezifischen Zeichen unvollständig, vollständig sind dagegen verschiedene Axiomensysteme der Arithmetik [17]).

Wollen wir dies näher an konkreten Beispielen erörtern. Betrachten wir das System der deskriptiven eindimensionalen Geometrie, d. h. die Gesamtheit aller geometrischen Sätze, die sich auf die Punkte und Teilmengen einer Geraden beziehen und in denen neben den allgemein logischen Begriffen nur die Relation des Zwischenliegens und die mit ihrer Hilfe definierten Begriffe vorkommen. Für diese Geometrie läßt sich leicht ein kategorisches Axiomensystem X_1 angeben, welches die Bezeichnung jener Relation als das einzige Grundzeichen enthält. Das System X_1 ist nicht in bezug auf seine spezifischen Zeichen vollständig. Wie wir nämlich noch im vorigen Abschnitt im Zusammenhang mit dem Unabhängigkeitsproblem erwähnt haben, treten in der metrischen Geometrie verschiedene Begriffe auf, die sich mit Hilfe der deskriptiven Begriffe allein nicht definieren lassen, z. B. die Relation der Kongruenz zweier Punktpaare. Nimmt man nun die Bezeichnung dieser Relation als neues Grundzeichen an und erweitert man in entsprechender Weise das Axiomensystem X_1, so gelangt man zu einem Axiomensystem X_2 für die volle metrische Geometrie der Geraden; dieses System X_2 ist wiederum kategorisch und dabei wesentlich reicher als X_1 in bezug auf die spezifischen Zeichen. Auch X_2 ist jedoch in bezug auf seine spezifischen Zeichen unvollständig. Man kann z. B. exakt beweisen, daß sich auf Grund dieses Systems kein einziges Symbol definieren läßt, welches einen konkreten Punkt bezeichnet. Deshalb ist es leicht, eine neue kategorische Satzmenge X_3 zu konstatieren, die wesentlich reicher als X_2 in bezug auf die spezifischen Zeichen ist: zu diesem Zweck genügt es, zwei beliebige Symbole, sei es „0“ und „1“, als neue Grundzeichen einzuführen und zu X_2 ein einziges neues Axiom hinzuzufügen, demgemäß diese Symbole zwei verschiedene Punkte bezeichnen. Die auf dem Axiomensystem X_3 begründete deduktive Theorie deckt sich in formaler Hinsicht mit der Arithmetik der reellen Zahlen: formal genommen ist die Arithmetik der reellen Zahlen nichts anderes als die Geometrie der Geraden, in der man zwei Punkte „effektiv“ ausgezeichnet hat. Es entsteht nun die Frage, ob sich der obige Prozeß ad infinitum fortsetzen läßt, ob man für die Menge X_3 eine neue kategorische und in bezug auf die spezifische Zeichen wesentlich reichere Satzmenge X_4 angeben kann, für diese Menge X_4 — eine neue Menge X_5 usw.? Es zeigt sich, daß das unmöglich ist: die Satzmenge X_3 ist schon vollständig in bezug auf ihre spezifischen Zeichen [17]).

Zwischen der Monotransformabilität und der Vollständigkeit einer Satzmenge läßt sich ein enger Zusammenhang beobachten: für jedes bisher bekannte Axiomensystem, das nicht monotransformabel ist, können wir eine kategorische und zugleich in bezug auf die spezifischen Zeichen wesentlich reichere Satzmenge angeben; ist dagegen ein Axiomensystem monotransformabel, so kann seine Vollständigkeit in bezug auf die spezifischen Zeichen nachgewiesen werden. Daß dies kein Zufall ist, bezeugt der folgende

S a t z 4. *Jede monotransformable Satzmenge ist in bezug auf ihre spezifischen Zeichen vollständig* [18]).

B e w e i s. Sei X eine beliebige monotransformable Satzmenge und sei „$\varphi(a, b \ldots)$“ die Konjunktion aller Sätze von X. Die Formel (VI) ist demnach logisch beweisbar. Als eine Einsetzung dieser Formel erhält man:

$$(1) \quad (x, y \ldots, R) : \varphi(x, y \ldots) \,.\, \varphi(x, y \ldots) \,.\, R\frac{x, y \ldots}{x, y \ldots} \,.\, I\,\frac{x, y \ldots}{x, y \ldots} \,. \\ \supset . \, R = I;$$

das Symbol „I" bezeichnen hier, so wie in „*Principia Mathematica*", die Relation der Identität (ist also mit dem Zeichen „=" gleichbedeutend).

Aus den Definitionen der Ausdrücke „$R\dfrac{x', y' \ldots}{x'', y'' \ldots}$" und des Identitätszeichen ergibt sich leicht, daß die Formel:

$$(2) \quad (x, y \ldots) \,.\, I\frac{x, y \ldots}{x, y \ldots},$$

unabhängig von dem Typus der Variablen „x", „y" ..., logisch beweisbar ist. Nach (2) läßt sich (1) folgendermaßen vereinfachen:

$$(3) \quad (x, y \ldots, R) : \varphi(x, y \ldots) \,.\, R\frac{x, y \ldots}{x, y \ldots} \,.\, \supset .\, R = I.$$

[Es lohnt sich bei der Gelegenheit zu bemerken, daß nicht nur die Formel (3) aus der Formel (VI) folgt, sondern auch umgekehrt; die beiden Formeln sind also äquivalent. Man kann also die Definition der Monotransformabilität vereinfachen, indem man (VI) durch (3) ersetzt. Die neue Definition läßt sich folgendermaßen ausdrücken: eine Satzmenge ist monotransformabel, wenn es in keiner ihrer „Interpretationen" nicht-identische Automorphismen gibt.]

Betrachten wir nun eine beliebige kategorische Satzmenge Y, welche die Menge X als einen Teil umfaßt. Nehmen wir an, daß in den Sätzen von Y neue außerlogische Konstanten „g", „h" ... — neben den alten „a", „b" ... — auftreten, und stellen wir die Konjunktion aller dieser Sätze in der Form „$\psi(a, b \ldots, g, h \ldots)$" dar. Es soll bewiesen werden, daß die Menge Y nicht wesentlich reicher als X in bezug auf die spezifischen Zeichen ist.

Aus der Kategorizität von Y folgt, daß die Formel:

$$(4) \quad (x', x'', y', y'' \ldots, u', u'', v', v'' \ldots) : \psi(x', y' \ldots, u', v' \ldots) \,.$$
$$\psi(x'', y'' \ldots, u'', v'' \ldots) \,.\, \supset .\, (\exists R) \,.\, R\frac{x', y' \ldots, u', v' \ldots}{x'', y'' \ldots, u'', v'' \ldots}$$

logisch beweisbar ist. Durch eine Einsetzung erhält man hieraus:

$$(5) \quad (x, y \ldots, u', u'', v', v'' \ldots) : \psi(x, y \ldots, u', v' \ldots) \,.$$
$$\psi(x, y \ldots, u'', v'' \ldots) \,.\, \supset .\, (\exists R) \,.\, R\frac{x, y \ldots, u', v' \ldots}{x, y \ldots, u'', v'' \ldots} \,.$$

Da Y alle Sätze von X enthält, so muß auch die Formel:

(6) $(x, y \ldots, u', v' \ldots) : \psi(x, y \ldots, u', v' \ldots) \,.\, \supset . \, \varphi(x, y \ldots)$

logiſch beweisbar ſein. Aus (5) und (6) gewinnen wir unmittelbar:

(7) $(x, y \ldots, u', u'', v', v'' \ldots) : \psi(x, y \ldots, u', v' \ldots) \,.$

$$\psi(x, y \ldots, u'', v'' \ldots) \,.\, \supset . \, (\exists R) \,.\, \varphi(x, y \ldots) \,.\, R \frac{x, y \ldots, u', v' \ldots}{x, y \ldots, u'', v'' \ldots};$$

mit Rückſicht auf den Sinn des Ausdrucks „$R \dfrac{x, y \ldots, u', v' \ldots}{x, y \ldots, u'', v'' \ldots}$“ erhalten wir aus (7):

(8) $(x, y \ldots, u', u'', v', v'' \ldots) : \psi(x, y \ldots, u', v' \ldots) \,.$

$$\psi(x, y \ldots, u'', v'' \ldots) \,.\, \supset . \, (\exists R) \,.\, \varphi(x, y \ldots) \,.\, R \frac{x, y \ldots}{x, y \ldots} \,.\, R \frac{u', v' \ldots}{u'', v'' \ldots} \,.$$

Die Formeln (3) und (8) haben

(9) $(x, y \ldots, u', u'', v', v'' \ldots) : \psi(x, y \ldots, u', v' \ldots) \,.$

$$\psi(x, y \ldots, u'', v'' \ldots) \,.\, \supset . \, (\exists R) \,.\, R = I \,.\, R \frac{u', v' \ldots}{u'', v'' \ldots}$$

zur Folge, woraus gemäß der Definition des Gleichheitszeichens:

(10) $(x, y \ldots, u', u'', v', v'' \ldots) : \psi(x, y \ldots, u', v' \ldots) \,.$

$$\psi(x, y \ldots, u'', v'' \ldots) \,.\, \supset . \, I \frac{u', v' \ldots}{u'', v'' \ldots} \,.$$

Schließlich kommt man leicht zur Überzeugung, daß der Satz

(11) $(u', u'', v', v'' \ldots) : I \dfrac{u', v' \ldots}{u'', v'' \ldots} \,.\, \supset . \, u' = u'' \,.\, v' = v'' \ldots$

logiſch beweisbar iſt — und zwar unabhängig vom logiſchen Typus der Variablen „u'“, „u''“, „v'“, „v''“ ... Die Formeln (10) und (11) ergeben unmittelbar:

(12) $(x, y \ldots, u', u'', v', v'' \ldots) : \psi(x, y \ldots, u', v' \ldots) \,.$
$\psi(x, y \ldots, u'', v'' \ldots) \,.\, \supset . \, u' = u'' \,.\, v' = v'' \ldots$

Wir haben alſo gezeigt, daß (12) logiſch beweisbar iſt. Da „$\psi(a, b \ldots, g, h \ldots)$“ die Konjunktion aller Sätze der Menge Y iſt. ſo ſchließen wir hieraus, indem wir den Satz 2 anwenden, daß jedes der Zeichen „g“, „h“ ..., die in den Sätzen von X fehlen, ſich auf Grund von Y mit Hilfe der in X vorkommenden Zeichen „a“, „b“... definieren läßt. Folglich iſt nicht die Satzmenge Y weſentlich reicher als X in bezug auf die ſpezifiſchen Zeichen. Es iſt demnach unmöglich, für die Menge X eine kategoriſche Satzmenge anzugeben, die wesentlich reicher als X wäre. Die Satzmenge X ist also in bezug auf ihre spezifischen Zeichen vollständig, w. z. b. w.

Die praktische Bedeutung des obigen Satzes ist ersichtlich: um festzustellen, daß eine gegebene Satzmenge in bezug auf ihre spezifischen Zeichen vollständig ist, genügt es nachzuweisen, daß diese Menge monotransformabel ist, daß also die Formel (VI) sich auf Grund der Logik beweisen läßt; dies erfordert aber keine besonderen Forschungsmethoden und bietet in den bis jetzt betrachteten Fällen keine besonderen Schwierigkeiten.

Es entsteht natürlich die Frage, ob sich der Satz 4 umkehren läßt, m. a. W. ob die Monotransformabilität einer Satzmenge eine nicht nur hinreichende, sondern auch notwendige Bedingung ihrer Vollständigkeit in bezug auf die spezifischen Zeichen ist. Das Problem ist noch nicht entschieden: es ist bisher nicht gelungen, weder den inversen Satz zu begründen noch ein Gegenbeispiel zu konstruieren.

In Anknüpfung an den zuletzt angeführten Satz möchten wir einige Bemerkungen machen, die schon über den eigentlichen Rahmen dieses Aufsatzes hinausgreifen: sie betreffen die Aussichten einer deduktiven Grundlegung der theoretischen Physik in ihrem Ganzen oder in ihren besonderen Teilen. Stellen wir uns vor, daß wir als Grundlage für den deduktiven Aufbau einer physikalischen Theorie das System der vierdimensionalen euklidischen Geometrie — der Geometrie des raum-zeitlichen Kontinuums angenommen haben. Es sei dabei das System der Axiome und Grundzeichen der Geometrie in der Weise verstärkt, daß sich auf dieser Basis ein bestimmtes Koordinatensystem auszeichnen läßt; die Geometrie deckt sich dann, formal genommen, mit der Arithmetik der hyperkomplexen Zahlen, ihr Axiomensystem ist strikt kategorisch und demnach, gemäß dem Satz 4, in bezug auf die Grundzeichen vollständig.

Überlegen wir uns ferner, wie man auf dieser Grundlage diesen oder jenen Teil der theoretischen Physik, z. B. die Mechanik, deduktiv aufbauen könnte. Es kommen hier zwei Verfahrenweisen in Betracht. Die erste Methode würde darin bestehen, daß man ihre Begriffe mit Hilfe der geometrischen Begriffe zu definieren versuchte; gelänge uns das, so würde die Mechanik vom methodologischen Standpunkte aus einfach ein spezialisiertes Kapitel der Geometrie werden. Es ist leicht zu zeigen, daß alle Versuche in dieser Richtung auf ganz wesentliche Schwierigkeiten stoßen müssen. Die spezifischen Begriffe der Mechanik sind von vielfältigem logischem Charakter; es sind z. B. Eigenschaften von Raum-Zeit-Punkten oder

Eigenschaften von ganzen Mengen von Raum-Zeit-Punkten (wie z. B. der Begriff des starren Körpers) oder auch eindeutige Funktionen, welche den Raum-Zeit-Punkten Zahlen zuordnen (z. B. der Begriff der Dichte). Wir würden nur dann imstande sein, solch einen Begriff, z. B. eine Funktion, mit Hilfe der geometrischen Begriffe zu definieren, wenn uns — um den Gedanken frei auszudrücken — der Verlauf der Funktion in der ganzen Welt genau bekannt wäre und wenn wir deshalb jeden Funktionswert aus der bloßen Lage des entsprechenden Punktes im Raum und Zeit abzuleiten vermöchten; mit gutem Recht kann man diese Aufgabe von vornherein als unausführbar ansehen. Es liegt nahe, daß wir zu der zweiten Verfahrensweise übergehen. Bei dieser Methode werden gewisse spezifische Begriffe der Mechanik als Grundbegriffe und gewisse ihrer Gesetze als Axiome angenommen; die Mechanik würde dadurch den Charakter einer selbständigen deduktiven Theorie erlangen, für welche die Geometrie nur ein Unterbau wäre. Obwohl das Axiomensystem der Mechanik anfangs unvollständig wäre, könnten wir es gemäß den Fortschritten des empirischen Wissens erweitern und vervollständigen. Wollten wir jedoch auf die Mechanik dieselben Kriterien wie auf jede andere deduktive Theorie anwenden, so würden wir das Problem der deduktiven Grundlegung der Mechanik erst dann als erschöpft betrachten, wenn wir für diese Theorie ein kategorisches Axiomensystem erhielten. In diesem Moment aber — und das ist der wichtigste Punkt — würde der Satz 4 in Aktion treten: da wir als Grundlage ein strikt kategorisches System der Geometrie angenommen haben, so kann nicht die Mechanik wesentlich reicher als die Geometrie in bezug auf die spezifischen Begriffe sein; die Begriffe der Mechanik müßten sich also mit Hilfe der geometrischen Begriffe definieren lassen, und so würden wir zu der ersten Methode zurückkehren. *Das Problem, die Begriffe der Mechanik (oder irgendwelcher anderen physikalischen Theorie) ausschließlich mit Hilfe der geometrischen Begriffe zu definieren, und das Problem, die Mechanik auf einem kategorischen Axiomensystem zu begründen, sind völlig äquivalent;* wer das erste Problem als aussichtslos betrachtet, muß sich ganz analog zu dem zweiten verhalten.

Die obigen Bemerkungen sind nicht gewissen neuen physikalischen Theorien angepaßt, in welchen das zugrunde liegende System der Geometrie weder strikt kategorisch noch kategorisch im üblichen

Sinne iſt und welche die ganze Phyſik oder gewiſſe ihre Teile eben als ſpezielle Kapitel der Geometrie auffaſſen. Die Schwierigkeiten verſchwinden hier ſelbſtverſtändlich nicht, nur der Schwerpunkt wird verſchoben: er liegt im Problem, für jenes Syſtem der Geometrie ein kategoriſches Axiomenſyſtem anzugeben.

Bemerkungen

[1]) Die Reſultate, die ſich auf das erſte Problem beziehen, habe ich am 17. 12. 1926 auf der Sitzung der Warſchauer Sektion der Polniſchen Mathematiſchen Geſellſchaft dargeſtellt; vgl. A. Tarſki et A. Lindenbaum, *Sur l'indépendance des notions primitives dans les systèmes mathématiques,* Ann. de la Soc. Pol. Math. V, 1927, pp. 111—113 (das Autoreferat). Die Betrachtungen und Reſultate, welche das zweite Problem betreffen, wurden von mir zum erſtenmal am 15. 6. 1932 in der Sitzung der Logiſchen Sektion der Warſchauer Philoſophiſchen Geſellſchaft vorgetragen.

[2]) 2. Ausg., Cambridge 1925—1927. Wir haben dieſes Syſtem unſeren Betrachtungen hauptſächlich deshalb zugrunde gelegt, weil es mehr ausgebaut iſt als andere Syſteme der Logik und weil die Kenntnis dieſes Syſtems ziemlich verbreitet iſt. Es iſt jedoch zu bemerken, daß die *Principia Mathematica* im allgemeinen den methodologiſchen Unterſuchungen wenig angepaßt ſind, da die Formaliſierung dieſes Syſtems den jetzigen methodologiſchen Erforderniſſen nicht genügt.

[3]) Im Zuſammenhang mit den obigen Modifikationen vgl. R. Carnap, *Abriß der Logiſtik,* Wien 1929, pp. 21—22, ſowie desſelben Verfaſſers, *Die logiſche Syntax der Sprache,* Wien 1934, pp. 98—101.

[4]) Vgl. z. B. meine Aufſätze: *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik,* C. R. des Séances de la Soc. d. Sc. et d. L. de Varsovie XXIII, 1930, Cl. III, pp. 22—29, ſowie *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wiſſenſchaften. I,* Monatsh. f. Math. u. Phyſ. XXXVII, pp. 360-404.

[5]) Ich habe mich bemüht, dieſen Bericht möglichſt knapp und allgemein verſtändlich zu faſſen; deshalb war ich nicht beſtrebt, meinen Überlegungen einen ſtreng deduktiven Charakter zu geben und ihre äußere Form präzis zu geſtalten (ſo habe ich z. B. Ausdrücke in Anführungszeichen benutzt, habe mich begnügt, die Ausdrücke ſchematiſch darzuſtellen, anſtatt ſie genau zu beſchreiben uſw.). Wollte jemand dieſe Betrachtungen mindeſtens denjenigen Forderungen der Präziſion anpaſſen, welche meine anderen methodologiſchen Arbeiten zu erfüllen beſtrebt ſind (z. B. *Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerſpruchsfreiheit und der ω-Vollſtändigkeit,* Monatsh. f. Math. u. Phyſ. 40, 1933, pp. 97—112), ſo würden ſich dabei keine weſentlichen Schwierigkeiten ergeben.

[6]) Es iſt nicht ſchwer ſich klar zu machen, warum ſowohl der Begriff der Definierbarkeit wie auch alle abgeleiteten Begriffe auf eine Satzmenge bezogen werden müſſen: es hat keinen Sinn, zu erörtern, ob ſich ein Zeichen mit Hilfe anderer Zeichen definieren läßt, ehe die Bedeutung des betrachteten Zeichens feſtgeſtellt iſt, und auf Grund einer deduktiven Theorie können wir die Bedeutung eines vorher nicht definierten Zeichens nur auf dem Wege feſtſtellen, daß wir

die Sätze beschreiben, in denen das Zeichen auftritt und die wir als wahr anerkennen.

[7]) Vgl. A. Padoa, *Un nouveau système irréductible de postulats pour l'algèbre,* C. R. du 2-e Congr. Internat. des Math., 1902, pp. 249—256, sowie *Le problème No. 2 de M. David Hilbert,* L'Enseigement Math. 5, 1903, pp. 85—91.

[8]) Eine derartige Voraussetzung wird stillschweigend in allen analogen Fällen angenommen, die in diesem Bericht vorkommen werden.

[9]) Vgl. z. B. den Satz 13* in dem ersten der in [4]) zitierten Aufsätze; man soll nämlich in diesem Satz „O" an die Stelle von „X" einsetzen und dabei die Bemerkung berücksichtigen, welche dem Satz 4 aus dem zitierten Aufsatz folgt (in der Formulierung des Satzes 13* kommt ein Druckfehler vor: die Formel „$X + \{y\} \in \mathfrak{W}$" soll durch „$X + \{n(y)\} \in \mathfrak{W}$" ersetzt werden).

[10]) Vgl. z. B. O. Veblen, *A system of axioms for geometry,* Transact. of the Amer. Math. Soc. 5, 1904, pp. 343—384.

[11]) Vgl. das in [1]) zitierte Autoreferat von A. Tarski und A. Lindenbaum.

[12]) Die Definitionsform (Ia) ist viel spezieller als (I), dagegen hat sie den Vorteil, daß die Widerspruchsfreiheit der Definition schon durch ihre Struktur versichert ist. Will man auf Grund einer deduktiven Theorie eine Definition vom Typus (I) annehmen, ohne zu einem Widerspruch zu kommen, so soll man vorher den folgenden Satz beweisen:

$$\text{(A)}\quad (\exists x) . \varphi(x; b', b'' \ldots) : (x', x'') : \varphi(x'; b', b'' \ldots) . \varphi(x''; b', b'' \ldots) . \supset . x' = x''.$$

Ist der obige Satz bewiesen, so kann man sogar (I) durch die einfachere äquivalente Formel:

$$\text{(B)}\quad \varphi(a; b', b'' \ldots)$$

ersetzen, denn die beiden Bedingungen einer korrekten Definition — Widerspruchsfreiheit und Rückübersetzbarkeit — sind schon durch den Satz (A) garantiert.

[13]) Auf Grund der Bemerkungen von [6]) ist es einleuchtend, daß sich jene außerlogische Konstante mit Hilfe der Zeichen von X nicht definieren läßt: der einzige Satz von Y, in welchem diese Konstante vorkommt, ist logisch beweisbar, also wahr ohne Rücksicht auf die Bedeutung der in ihm enthaltenen spezifischen Zeichen; man kann also behaupten, daß die Bedeutung der betrachteten Konstante durch die Satzmenge Y gar nicht bestimmt ist.

[14]) Die Einführungsweise der symbolischen Ausdrücke „$x' \underset{R}{\sim} x''$" und „$R\dfrac{x', y', z' \ldots}{x'', y'', z'' \ldots}$" ist vom Standpunkte der Typentheorie nicht ganz einwandfrei. Es ist deshalb zu betonen, daß diese Symbole nur als Ausdrucksschemata betrachtet werden sollen; bei einer präzisen Darstellung dieser Betrachtungen wird der Gebrauch derartiger Symbole entbehrlich, so daß alle damit gebundenen Schwierigkeiten verschwinden.

[15]) Das Wort „kategorisch" gebrauchen wir in einem anderen, etwas stärkeren Sinne, als man es bisher benützte: früher verlangte man nur von der Relation R, die in (V) vorkommt, daß sie $x', y', z' \ldots$ entsprechend auf $x'', y'', z'' \ldots$ abbilde, aber nicht, daß sie gleichzeitig die Klasse aller Individuen auf sich

ſelbſt abbilde. Die im üblichen (Veblenſchen) Sinne kategoriſchen Satzmengen kann man intern kategoriſch, die im neuen Sinne — abſolut kategoriſch nennen. Die Axiomenſyſteme verſchiedener deduktiven Theorien ſind meiſtenteils intern und nicht abſolut kategoriſch; es iſt aber leicht, ſie abſolut kategoriſch zu machen, indem man z. B. zu dem Axiomenſyſtem der Geometrie einen einzigen Satz hinzufügt, der beſagt, daß jedes Individuum ein Punkt iſt (oder allgemeiner die Anzahl derjenigen Individuen beſtimmt, die keine Punkte ſind). Es wird ſpäter klar ſein, was uns zu ſolcher Modifikation des Kategorizitätsbegriffes veranlaßte (vgl. [19])). Es ſei noch bemerkt, daß der Begriff der Kategorizität, den wir verwenden, zu den a-Begriffen im Sinne von R. Carnap vgl. *Die logiſche Syntax der Sprache*, pp. 123 und ff.) gehört; man kann aber auch den entſprechenden f-Begriff definieren.

[16]) Man kann wiederum zwei Bedeutungen des Wortes „monotransformabel" — die interne und die abſolute Monotransformabilität — unterſcheiden; hier wird das Wort immer in der zweiten Bedeutung gebraucht (vgl. [15])).

[17]) Das iſt nur dann exakt, wenn die betrachteten Axiomenſyſteme einen Satz enthalten, demgemäß jedes Individuum eine Zahl iſt (vgl. [15])).

[18]) Vgl. [18]) und die zugehörige Textſtelle.

[19]) Wenn wir die Worte „kategoriſch" und „monotransformabel" im internen Sinne gebrauchen wollten (vgl. [15]) und [16])), ſo würde der Satz 4 in der obigen Formulierung falſch ſein. Damit der Satz gültig bleibe, müßte man die Definition der Vollſtändigkeit einer Modifikation (Abſchwächung) unterziehen — und zwar die abſolute durch die interne Vollſtändigkeit oder die Vollſtändigkeit in bezug auf die internen Begriffe erſetzen; zu dieſem Zwecke müßte man noch vorher aufklären, was der Ausdruck „interner Begriff (in bezug auf eine gegebene Satzmenge)" bedeutet. Das alles würde unſere Betrachtungen ziemlich ſtark komplizieren.

Louis Rougier (Besançon – Le Caire), La Scolastique et la Logique:

Le mouvement néo-scolastique, l'adoption par le Saint-Siège du Thomisme comme philosophie officielle de l'Eglise romaine, l'obligation faite par le *Nouveau Code de Droit Canon* à tous les professeurs qui enseignent au nom de l'Eglise „d'exposer toutes les matières de leur cours suivant la doctrine et les principes du Docteur Angélique" ont donné un regain d'actualité à la Scolastique et tout particulièrement au Thomisme, où certains voudraient voir la *perennis philosophia*, la philosophie éternelle de l'esprit humain.

Que doit-on penser de cette prétention? Il est difficile de ne pas présumer que c'est un singulier anachronisme philosophique, puisque cela revient à nier tout l'apport de la pensée philosophique depuis le XIII^e^ siècle: l'Ockamisme, l'empirisme anglais, l'Encyclopédie, le Positivisme français, le pragmatisme anglo-saxon, l'empirisme