OTTO BACHMANN

ZUR SPIEGELUNGSGEOMETRISCHEN BEGRÜNDUNG VON GEOMETRIEN

Für die absolute Geometrie mit den drei klassischen Spezialfällen, der ebenen euklidischen, hyperbolischen und elliptischen Geometrie (vgl. Bachmann [1]), sind bekanntlich die Dreispiegelungssätze von grundlegender Bedeutung. Auch in der neulich untersuchten Hjelmslev-Geometrie (und damit auch in der Minkowski-Geometrie) sind die Dreispiegelungssätze erfüllt. Dabei ergibt sich die Hjelmslev-Geometrie aus der ebenen absoluten Geometrie dadurch, dass Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden durch die schwächere Forderung der Existenz und Eindeutigkeit der Senkrechten ersetzt werden. Minkowski-Geometrien sind Hjelmslev-Geometrien mit unverbindbaren Punkten und ohne Doppelinzidenzen. Es zeigt sich nun, dass in vielen der euklidischen Geometrie nahestehenden Geometrien – z.B. in den Moufangebenen und Fastkörperebenen – zwar Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden gewährleistet sind, aber anstelle des Dreispiegelungssatzes

(1) Aus $a, b, c|P$ folgt $abc \in \mathfrak{S}$

lediglich der 'schwache Dreispiegelungssatz'

$\mathrm{S_P}$ Aus $a, b, c|P$ und abc involutorisch folgt $abc \in \mathfrak{S}$

samt Umkehrung (diese stimmt mit der Umkehrung von (1) überein)

$\mathrm{US_P}$ Aus $a, b|P$, $a \neq b$ und $abc \in \mathfrak{S}$ folgt $c|P$

erfüllt ist. In den den Fastkörperebenen nahestehenden Semi-Bol-Ebenen (vgl. Burn [3], Kallaher [6]) gilt im allgemeinen $\mathrm{S_P}$ nicht mehr, wohl aber der schwächere Satz über die 'Existenz der Senkrechten'

L Zu P, g gibt es stets ein h mit $h|P$ und $h|g$.

Das Ziel dieser Arbeit besteht in der Untersuchung der Gruppen und Geometrien, deren Axiomensystem aus demjenigen der ebenen absoluten Geometrie dadurch hervorgeht, dass anstelle des Dreispiegelungsaxioms (1) L oder $\mathrm{S_P}$ gefordert wird. $\mathrm{US_P}$ ist dann erfüllt (vgl. (18)).

Wird L verlangt, sprechen wir von der ebenen semiabsoluten Geometrie; die den semiabsoluten Bewegungsgruppen zugeordneten Gruppenebenen werden semiabsolute Ebenen genannt. Im 1. Kapitel werden später benötigte Sätze aus der ebenen semiabsoluten Geometrie zusammengestellt. Der Begriff der Hjelmslevschen Halbdrehung lässt sich (auch bei Voraussetzung

Geometriae Dedicata **5** (1976) 497–516.

von S_P) nicht mehr anwenden. Die semiabsoluten Ebenen lassen sich im allgemeinen denn auch nicht in sinnvoller Weise in projektive Ebenen einbetten. In den Kapiteln 2 und 3 wenden wir uns den den drei klassischen Spezialfällen entsprechenden Geometrien, der euklidischen, elliptischen und hyperbolischen semiabsoluten Geometrie, zu.

Da in der elliptischen semiabsoluten Geometrie jeder Punkt auch Gerade ist, gilt der Dreispiegelungssatz (1); diese Geometrie fällt also mit der elliptischen Geometrie zusammen.

Jede euklidische semiabsolute Ebene ist eine Translationsebene; für jede euklidische semiabsolute Bewegungsgruppe $\mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{G})$ isomorph zu einer von involutorischen Homologien erzeugten Kollineationsgruppe einer Translationsebene (Satz 1). Der Stabilisator von $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{G})$ bezüglich eines Punktes der Gruppenebene ist isomorph zu einer von Involutionen erzeugten Untergruppe der Gruppe der linearen Abbildungen des von der zur Translationsebene gehörigen Kongruenz über ihrem Kern gebildeten Vektorraums (Satz 2). Umgekehrt lässt sich nicht jede Translationsebene in dieser Weise aus einer euklidischen semiabsoluten Bewegungsgruppe gewinnen. Für eine wichtige Klasse von Translationsebenen ist die Beziehung jedoch kanonisch, nämlich für die Klasse der Semi-Bol-Ebenen (wozu auch die Fastkörper- und Moufangebenen gehören). Besitzt eine euklidische semiabsolute Bewegungsgruppe $\mathfrak{G}$ ein Lotbüschel L, so dass die Vereinigung $\mathsf{L} \cup \mathsf{L}^{\perp}$ von L mit dem Lotbüschel $\mathsf{L}^{\perp}$, das aus allen zu einer (beliebigen) Geraden aus L senkrechten Geraden besteht, in $\mathfrak{G}$ invariant ist, dann ist die Gruppenebene eine Semi-Bol-Ebene und $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{G})$ isomorph zu einer von involutorischen Homologien erzeugten Kollineationsgruppe dieser Ebene; umgekehrt lässt sich jede Semi-Bol-Ebene aus einer euklidischen semiabsoluten Bewegungsgruppe mit invariantem $\mathsf{L} \cup \mathsf{L}^{\perp}$ gewinnen (Satz 4).

Im endlichen Fall lässt sich mehr zeigen: Jede endliche semiabsolute Bewegungsgruppe $\mathfrak{G}$ ist euklidisch semiabsolut (Satz 3). Existiert eine invariante Vereinigung $\mathsf{L} \cup \mathsf{L}^{\perp}$, dann ist, falls die Gruppenebene nicht von quadratischer Ordnung ist, $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{G})$ isomorph zu einer von involutorischen Homologien erzeugten Kollineationsgruppe einer Fastkörperebene (Satz 6); $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{G})$ ist eine euklidische S_P genügende semiabsolute Bewegungsgruppe.

Im hyperbolischen Fall lässt sich mehr zeigen: Jede hyperbolische semiabsolute Bewegungsgruppe ist eine hyperbolische Bewegungsgruppe (Satz 7).

Herrn F. Bachmann und Herrn M. Gerth danke ich für Ihre Anregungen bestens.

1. Definitionen und Sätze der ebenen semiabsoluten Geometrie

Es sei $\mathfrak{S}$ ein aus involutorischen Elementen bestehendes invariantes Erzeugendensystem der Gruppe $\mathfrak{G}$. Die Elemente aus $\mathfrak{S}$ seien mit kleinen lateinischen Buchstaben, die involutorischen Produkte zweier Elemente aus $\mathfrak{S}$ mit grossen lateinischen Buchstaben bezeichnet; griechische Buchstaben bezeichnen beliebige Elemente aus $\mathfrak{G}$. $\rho|\sigma$ bedeute 'das Produkt $\rho\sigma$ ist involutorisch'. ρ^σ stehe für das Element $\sigma^{-1}\rho\sigma$.

Die folgenden Axiome seien erfüllt:

E Zu P, Q gibt es ein g mit $P, Q|g$. Im Falle $P \neq Q$ ist g eindeutig bestimmt.

L* Aus $P|g$ folgt $Pg \in \mathfrak{S}$.

S_g Aus $a, b, c|d$ folgt $abc \in \mathfrak{S}$.

D ('Axiom vom Dreiseit') Es gibt g, h, j derart, dass $g|h$ und weder $j|g$ noch $j|h$ noch $j|gh$ gilt.

Das Paar $\mathfrak{G}, \mathfrak{S}$ werde semiabsolute Bewegungsgruppe genannt, die Elemente aus $\mathfrak{G}$ heissen Bewegungen, die durch das Axiomensystem gelieferte Theorie sei als ebene semiabsolute Geometrie bezeichnet.

Der semiabsoluten Bewegungsgruppe $\mathfrak{G}, \mathfrak{S}$ wird durch folgende Konstruktion eine geometrische Struktur, die Gruppenebene, zugeordnet: Die Elemente von $\mathfrak{S}$ werden Geraden und die involutorischen Produkte zweier Elemente von $\mathfrak{S}$ Punkte der Gruppenebene genannt. Die Gesamtheit der Punkte sei mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet. Der Punkt A und die Gerade b heissen inzident, falls $A|b$ gilt; die Geraden a, b heissen zueinander senkrecht (oder orthogonal, i.Z. $a \perp b$), falls $a|b$ gilt. E besagt dann in der Gruppenebene die Existenz und Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden zweier Punkte. S_g ist der Dreispiegelungssatz für drei zu einer Geraden senkrechte Geraden. Die Gruppenebene einer semiabsoluten Bewegungsgruppe sei als semiabsolute Ebene bezeichnet.

Die Invarianz von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}$ hat zur Folge, dass durch

(2) $$\gamma^*(x) = x^\gamma, \qquad \gamma^*(X) = X^\gamma$$

Automorphismen der Gruppenebene gegeben sind. Sie heissen Bewegungen der Gruppenebene, im Falle $\gamma = c$ bzw. $\gamma = C$ Spiegelung der Gruppenebene an der Geraden c bzw. Spiegelung der Gruppenebene am Punkt C. Die von den Bewegungen (2) gebildete Gruppe $\mathfrak{G}^*$ wird von dem System $\mathfrak{S}^*$ der Geradenspiegelungen erzeugt. Indem $\gamma \in \mathfrak{G}$ die Bewegung (2) zugeordnet wird, ergibt sich ein Homomorphismus von $\mathfrak{G}, \mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{G}^*, \mathfrak{S}^*$. Im Gegensatz zur ebenen absoluten Geometrie braucht dieser Homomorphismus kein Isomorphismus zu sein. Es gilt offenbar: $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{G}) \cong \mathfrak{G}^*$. Wegen $Z(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{S}^2 = \{1\}$ (vgl. (25)) bildet das Produkt dieses Isomorphismus mit dem kanonischen Homomorphismus $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}/Z(\mathfrak{G})$ $\mathfrak{S}$ bijektiv auf $\mathfrak{S}^*$ ab.

Wir werden nun einige Folgerungen aus dem zugrundegelegten Axiomensystem angeben.

(3) (Satz vom Orthogonalenschnitt) Aus $P|a, b$ und $a|b$ folgt $P = ab$, und umgekehrt.

Beweis wie in [1].

L Zu P, g gibt es stets ein h mit $h|P$ und $h|g$.

Zum Beweis vgl. [1], p. 37.

Wird im zugrundegelegten Axiomensystem L anstelle von L* gefordert, so lässt sich L* beweisen (vgl. etwa Wolff [11]). Die Ersetzung von L* durch L liefert demnach ein äquivalentes Axiomensystem.

(4) (Eindeutigkeit des Lotes) Aus $P, g|a, b$ und $P \neq g$ folgt $a = b$.

Beweis wie in [1].

Aus den angegebenen Folgerungen ergibt sich: Aus dem zugrundegelegten Axiomensystem folgt das Axiomensystem des Senkrechtstehens (vgl. hierzu Bachmann [2], § 2*).

Wie in [1] zeigt man:

(5) Mit einer Geraden inzidieren mindestens 3 verschiedene Punkte. Mit jedem Punkt inzidieren mindestens 4 verschiedene Geraden.

Minimalmodell einer semiabsoluten Ebene ist die affine Ebene über GF(3). Später wird sich zeigen, dass als Modell einer semiabsoluten Ebene kleinster Ordnung, welche nicht Gruppenebene einer absoluten Bewegungsgruppe ist, eine Translationsebene der Ordnung 9 auftritt.

(6) Die Menge der Punkte und die Menge der Geraden sind entweder fremd oder gleich.

Beweis in [2] oder [11].

Wird für die semiabsolute Bewegungsgruppe zusätzlich das Axiom der elliptischen Geometrie gefordert

P Es gibt a, b, c mit $abc = 1$

oder gleichwertig

(7) Es gibt P, g mit $P = g$,

so folgt aus (6) und S_g die Gültigkeit des Dreispiegelungssatzes (1):

(8) Jede elliptische semiabsolute Bewegungsgruppe ist eine elliptische Bewegungsgruppe.

Wir setzen von nun ab das Axiom

$\sim$P Es ist stets $abc \neq 1$

voraus, oder gleichwertig,

(9) Kein Punkt ist eine Gerade.

Nach [2] oder [11] gilt dann auch

(10) $A \nmid B$ für alle Punkte A, B,

während aus (4) die ausnahmslose Eindeutigkeit des Lotes folgt. Die Senkrechte durch P zu g wird mit (P, g) bezeichnet. Man folgert nun weiter

(11) Die Punktmengen auf zwei beliebigen Geraden sind gleichmächtig.

Beweis. Seien zwei Geraden $g, h, g \nmid h$ gegeben. Von jedem Punkt der Geraden g aus fällen wir das Lot auf h. Die Fusspunkte sind sämtliche voneinander verschieden, woraus $\mathrm{card}\{P : P|h\} \geqslant \mathrm{card}\{P : P|g\}$ folgt. Da die Rollen von g und h vertauschbar sind, kann die Ungleichung durch eine Gleichheit ersetzt werden. Ist $g|h$, so gibt es dank (5) ein l mit $l|gh, l \nmid g, l \nmid h$. Nach dem soeben Bewiesenen haben g und l sowie l und h gleichviele Punkte. Dies gilt daher auch für g und h.

Wie in [1], [2] und [11] beweist man:

(12) (Eindeutigkeit des Mittelpunktes) Aus $A^M = A^N$ folgt $M = N$.

(13) (Ergänzung zu S_g) Aus $a, b, c|g$ und $abc = d$ folgt $d|g$.

(14) (Ergänzung zu S_P) Aus $a, b, c|P$ und $abc = d$ folgt $d|P$.

(15) AbC ist genau dann eine Gerade, wenn es v mit $v|A, b, C$ gibt.

(16) Abc ist genau dann ein Punkt, falls es v mit $v|A, b, c$ gibt.

(17) (US_g: Umkehrung von S_g) Ist abc eine Gerade und gilt $a, b|g$ und $a \neq b$, so gilt auch $c|g$.

Auch die Umkehrung von S_P ist beweisbar:

(18) (US_P: Umkehrung von S_P) Aus $a \neq b$ und $a, b|P$ und $abc = d$ folgt $d, c|P$.

Beweis (F. Bachmann). Die Voraussetzung in (18) hat $P = P^{ab} = P^{dc}$ zur Folge. Zusammen mit (12) ergibt sich hieraus nach § 4.1 in [2] $(P, d)d = (P, c)c$, also $(P, d)(P, c) = dc = ab$. Wegen $a \neq b$ ist daher $(P, d) \neq (P, c)$. Mit $F = (P, c)c = (P, d)d$ gilt $P, F|(P, c), (P, d)$, woraus wegen der Eindeutigkeit der Verbindungsgeraden $P = F$ folgt. $F|d, c$ zieht daher $P|d, c$ nach sich.

Der Reduktionssatz gilt im allgemeinen nicht mehr (damit geht auch die für Bewegungsgruppen der ebenen absoluten Geometrie typische Eigenschaft der 'Zweispiegeligkeit' verloren), man hat lediglich die Ergebnisse (vgl. [1], [2] und [11])

(19) Jedes Produkt UvW ist gleich einem Produkt Ab.

(20) Jedes Produkt aB ist gleich einem Produkt abc mit $a, b|c$ und umgekehrt. Dasselbe gilt für die Produkte Ab.

(21) Jedes Produkt AB ist gleich einem Produkt ab mit der Bedingung: es gibt c mit $a, b|c$, und umgekehrt.

(22) Jede Involution der Form uVw ist ein Punkt.

Existieren zu $a, b \in \mathfrak{S}$ Elemente $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{S}$ mit $a_0 = a$, $a_n = b$ und $a_{i-1}|a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, so sagt man a, b sind durch eine Lotkette verbindbar. Sind je zwei Geraden durch eine Lotkette verbindbar, so ist der Dreispiegelungssatz (1) erfüllt. Dies folgt aus dem Satz

(23) $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ genüge dem Axiomensystem des Senkrechtstehens und es gelte das Axiom $\sim$P. Sind dann je zwei Elemente aus $\mathfrak{S}$ durch eine Lotkette verbindbar, so ist $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ eine Hjelmslevgruppe (vgl. deren Definition in [2], § 1*.2).

Beweis (M. Gerth). Es ist die Gültigkeit des Dreispiegelungssatzes nachzuweisen. Seien $a, b \in \mathfrak{S}$ beliebig und sei $a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b$ eine a, b verbindende Lotkette. Dann ist $ab = a_0a_1 \cdot a_1a_2, \ldots, a_{n-1}a_n$ mit $a_ia_{i+1} \in \mathfrak{P}$. Folglich gilt $\mathfrak{S}^2 \subseteq \langle\mathfrak{P}\rangle$. Nach (19) (zu dessen Beweis genügt das Axiomensystem des Senkrechtstehens) gilt $\mathfrak{P}\mathfrak{P}\mathfrak{S} = \mathfrak{P}\mathfrak{S}$ und damit dann $\langle\mathfrak{P}\rangle\mathfrak{S} = \mathfrak{P}\mathfrak{S}$. Aus $\mathfrak{S}^2 \subseteq \langle\mathfrak{P}\rangle$ ergibt sich hiermit $\mathfrak{S}^3 \subseteq \mathfrak{P}\mathfrak{S}$. Sei nun $c, d, e|P$ und $cde = Af$. Es folgt $P^A = P^{cdef} = P^f = P^{(P,f)f}$. Dank (12) (zu dessen Beweis genügt das Axiomensystem des Senkrechtstehens sowie das Axiom $\sim$P) folgt $A = (P, f)f$, also $cde = Af = (P, f) \in \mathfrak{S}$.

Offenbar gilt

(24) $Z(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{S} = \emptyset \qquad Z(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{P} = \emptyset$

und damit (man beachte (10))

(25) $Z(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{S}^2 = \{1\} \qquad Z(\mathfrak{G}) \cap \mathfrak{P}^2 = \{1\}.$

Mittels (25) zeigt man leicht, dass für den kanonischen Homomorphismus $^-$ von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{G})$ gilt:

(26) Aus $a|b$ bzw. $g|P$ folgt $\bar{a}|\bar{b}$ bzw. $\bar{g}|\bar{P}$ und umgekehrt.

Damit gilt

(27) Mit $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ ist auch $(\bar{\mathfrak{S}}, \bar{\mathfrak{G}})$ eine semiabsolute Bewegungsgruppe.

2. Die euklidischen semiabsoluten Bewegungsgruppen

In diesem Kapitel behandeln wir die Bewegungsgruppen, welche neben dem Axiomensystem aus dem 1. Kapitel noch den beiden folgenden (die euklidischen Bewegungsgruppen in der absoluten Geometrie kennzeichnenden) Axiomen genügen:

R (Axiom vom Rechtseit) Es gibt ein Rechtseit, d.h. es gibt a, b, c, d mit $a, b|c, d$ und $a \neq b$, $c \neq d$.

V (Verbindbarkeitsaxiom) Zu a, b gibt es stets ein S mit $S|a, b$ oder ein s mit $s|a, b$.

Solche Bewegungsgruppen seien als euklidische semiabsolute Bewegungsgruppen bezeichnet.

Noch ohne Voraussetzung von V gilt ([1], [2], [11], Schütte [10])

(28) ABC ist stets ein Punkt.

(29) (Rechtseitsatz) Aus $a, b|c$ und $a|d$ folgt $b|d$.

Werden zwei Geraden als lotgleich oder parallel bezeichnet, falls sie dieselben Lote besitzen, so lässt sich der Rechtseitsatz auch wie folgt formulieren: Zwei Geraden mit einem gemeinsamen Lot sind lotgleich. Ferner hat man

(30) Zwei parallele Geraden sind gleich oder nichtschneidend.

(31) (Euklidisches Parallelenaxiom) Zu P, g gibt es genau ein h mit $P|h$ und $g\|h$.

Die Axiome E, D, V sowie (30) und (31) zeigen:

(32) Die Gruppenebene einer euklidischen semiabsoluten Bewegungsgruppe ist eine affine Ebene.

Um die Gruppenebene als Translationsebene nachzuweisen, ist die Existenz einer auf der Menge der Punkte transitiven Gruppe von Translationen zu beweisen. Dazu betrachten wir die Abbildungen der Gruppenebene der Form

(33) $\xi \to \xi^{ab}$ mit $a\|b$.

Diese Abbildungen sind bijektiv und bilden Geraden auf Geraden ab. Sie haben im Falle $a \neq b$ keine Fixpunkte: Gemäss (21) gibt es Punkte A, B, so dass $\xi^{ab} = \xi^{AB}$ für alle $\xi \in \mathfrak{S}$ gilt. Wäre nun für ein P $P^{AB} = P$, so hätte man nach (12) $A = B$ und damit $\xi^{ab} = \xi$ für alle $\xi \in \mathfrak{S}$; insbesondere $a^{ab} = a^b = a$, also $a|b$, im Widerspruch zu $a\|b$. Ist g eine beliebige Gerade und $h = (A, g)$, so hat man der Reihe nach $h|g$; $h^A|g^A$; $h|g^A$; $g\|g^A$. Daher gilt auch $g^A\|g^{AB}$ und damit dann $g\|g^{AB}$. Die Abbildungen (33) sind hiermit als Translationen der affinen Ebene nachgewiesen.

Dank (21) und (28) bilden die Translationen eine abelsche Untergruppe der Bewegungsgruppe; infolge $(AB)^\delta = A^\delta B^\delta$ ist diese Untergruppe sogar ein Normalteiler.

Seien nun zwei verschiedene Punkte P, Q gegeben. Wie in [1] § 12.2. Satz 4 kann

(34) In einer euklidischen semiabsoluten Ebene haben zwei Punkte stets einen Mittelpunkt

bewiesen werden. Sei M der Mittelpunkt von $P, Q: P^{PM} = P^M = Q$. Dank

(21) existiert also eine Translation, die P in Q überführt. Die Gruppe der Translationen ist somit transitiv.

(35) Die Gruppenebene einer euklidischen semiabsoluten Bewegungsgruppe ist eine Translationsebene.

Werden die Gruppenelemente ab mit $a \| b$ als Translationen der Bewegungsgruppe bezeichnet, so gilt in Analogie zu den metrisch-euklidischen Bewegungsgruppen.

(36) In einer euklidischen semiabsoluten Bewegungsgruppe $\mathfrak{G}$ bilden die Translationen einen abelschen Normalteiler $\mathfrak{T}$. Ist $\mathfrak{G}_O$ die Untergruppe, welche von den Geraden durch einen festen Punkt O erzeugt wird, so ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_O\mathfrak{T}$.

Es ist lediglich noch die zweite Hälfte der Behauptung zu beweisen: Es ist für $a \in \mathfrak{G}$ $a = a_O(a_Oa) \in \mathfrak{G}_O\mathfrak{T}$ (u_O bezeichne für eine beliebige Gerade u die Parallele durch O). Ist schon bewiesen, dass $a_1a_2 \ldots a_{n-1} = \alpha_O\tau$ mit $\alpha_O \in \mathfrak{G}_O$, $\tau \in \mathfrak{T}$, gilt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n = \alpha_O\tau a_n &= \alpha_O a_{nO}(a_{nO}\tau a_{nO})(a_{nO}a_n) \\ &= (\alpha_O a_{nO})(\tau^{a_{nO}}(a_{nO}a)) \in \mathfrak{G}_O\mathfrak{T}\,. \end{aligned}$$

Die Translationsebene hat folgende Eigenschaften: Die Zuordnung $a \cap \omega \to b \cap \omega$ mit $b \perp a$ und mit ω als uneigentlicher Geraden der Translationsebene ist eine fixpunktfreie Involution auf der Menge der Punkte von ω, die sogenannte Rechtwinkelinvolution ϕ.

Für jedes a ist die Abbildung a^* mit $a^*(x) = x^a$, $a^*(X) = X^a$ eine involutorische Homologie der Gruppenebene mit der Achse a und dem Zentrum $\phi(a \cap \omega)$. Nach Burn [4] gestattet die Translationsebene dann keine involutorische Elation. Jeder zugehörige Quasikörper ist daher von Charakteristik $\neq 2$.

(37) Jede Bewegung $\gamma^* \in \mathfrak{G}^*$ lässt die Rechtwinkelinvolution ϕ invariant, d.h.: Bezeichnet γ^*_ω die durch γ^* auf ω induzierte Abbildung, so gilt $\gamma^*_\omega\phi = \phi\gamma^*_\omega$.

Beweis. Aus $a|b$ folgt $a^\gamma|b^\gamma$ für jedes $\gamma \in \mathfrak{G}$.

Um weitere Eigenschaften der Translationsebene zu finden, führen wir den Quasikörper $(\mathfrak{Q}, +, \ )$ bezüglich eines Punktequadrupels O, E, U, V mit $U, V \in \omega$ und $V = \phi(U)$ ein (vgl. Pickert [9]). Für beliebiges $m \in \mathfrak{Q}$ sei γ_m die eindeutig bestimmte involutorische Homologie mit Zentrum $(m) \in \omega$ und Achse $O\phi(m)$. Dann ist (vgl. Dembowski [5], p. 120) $\gamma_{\phi(m)}\gamma_m$ eine involutorische (O, ω)-Kollineation; die zugehörige Punkteabbildung ist daher gegeben durch

(38) $\gamma_{\phi(m)}\gamma_m(p, q) = (-p, -q) \qquad (p, q \in \mathfrak{Q}).$

Sei für ein $m \neq 0$ $\gamma_m(V) = (a)$. Das Bild $\gamma_m(p, q)$ liegt einerseits auf der Geraden mit der Gleichung $y = xm + q - pm$ (da (m) Zentrum von γ_m ist) und andererseits auf der Bildgeraden der Geraden mit der Gleichung $x = p$; diese hat die Gleichung $y = xa + p\phi(m) - pa$:

(39) $\gamma_m(p, q) = (x, y)$ mit $xa + p\phi(m) - pa = xm + q - pm = y$.

Kombination von (38) und (39) ergibt

(40) $-pa + xm - xa = -p\phi(m) + y - x\phi(m) = -q$.

Die Addition der Gleichungen in (39) und (40) liefert (man beachte, dass -1 und 2 im Kern von $\mathfrak{Q}$ liegen)

(41) $2pa = pm + p\phi(m)$.

Mit $p = 1$ erhält man

(42) $m + \phi(m) = 2a$, d.h. $(2^{-1}(m + \phi(m))) = \gamma_m(V)$.

(41) und (42) führen zu

(43) $2p(m + \phi(m)) = p2m + p2\phi(m)$ für alle $m, p \in Q$, $m \neq 0$.

Wir führen nun den Quasikörper $\mathfrak{Q}^*$ der Translationsebene bezügliche O, E, V, U mit derselben Koordinatenmenge OW ($W = UV \cap OE$) ein. Da im (U, V, W)-Gewebe die Bolsche W-Bedingung für O erfüllt ist, stimmen die Addition in $\mathfrak{Q}$ und in $\mathfrak{Q}^*$ überein (vgl. [9], p. 53). Die Gerade mit der Steigung r bezüglich $\mathfrak{Q}$ enthält den Punkt $(r^{-1}, 1)$ (r^{-1} bezeichnet das Element mit $r^{-1}r = 1$ in $\mathfrak{Q}$), hat also bezüglich $\mathfrak{Q}^*$ die Steigung r^{-1}. Da nach (37) die Abbildung γ_m mit Zentrum (m) und Achse $O\phi(m)$ (bezüglich $\mathfrak{Q}$) den Punkt U in $\phi(a)$ (bezüglich $\mathfrak{Q}$) überführt, gilt nach (42)

(44) $m^{-1} + (\phi(m))^{-1} = 2(\phi(a))^{-1} \qquad (a, m \in Q - \{0\})$.

(42) und (44) zusammen liefern

(45) $2^{-1}(m^{-1} + \phi(m)^{-1}) = (\phi(2^{-1}(m + \phi(m))))^{-1} \qquad (m \in \mathfrak{Q} - \{0\})$.

Die Abbildungen γ_m aus (39) lassen sich übersichtlicher schreiben: Aus $2va = vm + v\phi(m)$ folgt für beliebige $u, v \in \mathfrak{Q}$ die Beziehung

$$(u - v)a + (u + v)\phi(m) - (u + v)a$$
$$= (u - v)m + u\phi(m) + vm - (u + v)m = u\phi(m) - vm.$$

(39) hat daher

(46) $\gamma_m(u + v, u\phi(m) + vm) = (u - v, u\phi(m) - vm)$
$(u, v, m \in \mathfrak{Q}, m \neq 0)$

zur Folge. Damit ist der folgende Satz bewiesen:

SATZ 1. *Zu jeder euklidischen semiabsoluten Bewegungsgruppe* $\mathfrak{G}$ *existieren ein Quasikörper* $\mathfrak{Q}$ *von Charakteristik* $\neq 2$ *und eine fixpunktfreie,* (43) *und* (45) *genügende Involution* $\phi' : \mathfrak{Q} - \{0\} \to \mathfrak{Q} - \{0\}$, *so dass die Rechtwinkelinvolution* ϕ *durch* $\phi(s) = (\phi'(s))$, $\phi(U) = V$ *gegeben ist und so dass der Stabilisator von* $\mathfrak{G}/Z(\mathfrak{G}) \cong \mathfrak{G}^*$ *bezüglich des Punktes O isomorph ist zu der von den involutorischen Homologien* γ_m, *welche für* $m \neq 0$ *die Gleichung* (46) *erfüllen, erzeugten Kollineationsgruppe der zu* $\mathfrak{Q}$ *gehörenden Translationsebene.*

Sei $\mathfrak{T}, \mathscr{K}$ die der Translationsebene zugeordnete Kongruenz und $\mathfrak{K}(\mathfrak{T})$ ihr Kern. $\mathfrak{T}$ ist Vektorraum über $\mathfrak{K}(\mathfrak{T})$, jede Komponente aus $\mathscr{K}$ ist ein Unterraum. Der bekannte Zusammenhang zwischen Translationsebenen und Kongruenzen liefert zusammen mit den Sätzen 8 und 11 aus [9] § 8.3 und Satz 1 den folgenden Zusammenhang zwischen euklidischen semiabsoluten Bewegungsgruppen und linearen Gruppen:

SATZ 2. *Ist* $\mathfrak{G}$ *eine euklidische semiabsolute Bewegungsgruppe, so ist der Stabilisator* $\mathfrak{G}^*_P$ *isomorph zu einer Untergruppe der aus kongruenzerhaltenden Automorphismen einer Kongruenz* $\mathfrak{T}, \mathscr{K}$ *bestehenden Gruppe, welche von involutorischen, je eine Komponente punktweise festlassenden Automorphismen erzeugt wird.* $\mathfrak{G}^*_P$ *ist damit isomorph zu einer von involutorischen linearen Abbildungen erzeugten Untergruppe der Gruppe der linearen Abbildungen des Vektorraums* $\mathfrak{T}$ *über* $\mathfrak{K}(\mathfrak{T})$.

Im endlichen Fall kann in Satz 1 das Wort 'euklidisch' weggelassen werden. Dies folgt aus

SATZ 3. *In endlichen semiabsoluten Bewegungsgruppen sind die Axiome R und V erfüllt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{G}$ eine endliche semiabsolute Bewegungsgruppe. Nach (8) und [1] § 6, 12 ist $\mathfrak{G}$ nicht elliptisch semiabsolut. Wir können daher $\sim$P und damit die eindeutige Existenz von Loten voraussetzen. Seien $g, h, j \in \mathfrak{G}$ mit $g|h$, $h|j$, $g \neq j$. Nach (11) haben g, h, j gleich viele Punkte. Wir errichten in einem auf g gelegenen Punkt $\neq gh$ das Lot k und fällen von jedem Punkt auf j das Lot auf k. Wäre $j \nmid k$, so hätten verschiedene Punkte von j verschiedene Lote, und durch jeden Punkt von k ginge ein solches Lot. Wegen $g|k$ müsste g ein solches Lot sein und damit einen Punkt Q von j enthalten. Von Q aus würden also auf h zwei Lote g, j existieren, was nicht sein kann. Folglich gilt $g, j|h, k$ und $g \neq j$, $h \neq k$. Nach (29) ist der Rechtseitsatz erfüllt.

Zum Nachweis von V seien g, h zwei Geraden ohne gemeinsames Lot, M ein Punkt auf h und m das Lot auf h in M. Jedem Punkt $A|g$ werde das Lot (A, m) zugeordnet. Das Urbild von h bei dieser Lotabbildung ist ein gemeinsamer Punkt von g und h.

Die die Umkehrung von Satz 1 ergebenden Bedingungen für den Quasikörper scheinen recht kompliziert zu sein. In einem wichtigen Spezialfall lässt sich die Beziehung jedoch kanonisch machen.

DEFINITION. Eine spezielle euklidische semiabsolute Bewegungsgruppe ist eine euklidische semiabsolute Bewegungsgruppe $\mathfrak{G}$, in der ein Lotbüschel L existiert, sodass die Vereinigung $\mathsf{L} \cup \mathsf{L}^{\perp}$ von L mit dem Lotbüschel $\mathsf{L}^{\perp}$, das aus allen zu einer (beliebigen) Geraden aus L senkrechten Geraden besteht, in $\mathfrak{G}$ invariant ist.

Im folgenden sei $\mathfrak{G}$ eine spezielle euklidische semiabsolute Bewegungsgruppe, (A, B) ein Paar $(\mathsf{L}, \mathsf{L}^{\perp})$ mit der in der Definition angegebenen Eigenschaft. Für $a, a' \in \mathsf{A}$ ist $a^{a'} \in \mathsf{A}$, für $a \in \mathsf{A}$, $b \in \mathsf{B}$ ist $a^b = a$ und für $a \in \mathsf{A}$, $c \in \mathfrak{G} - (\mathsf{A} \cup \mathsf{B})$ ist $a^c \in \mathsf{B}$. Man hat also

$$(47) \qquad (ac)^4 = 1 \quad \text{für alle} \quad a \in \mathsf{A} \cup \mathsf{B}, \qquad c \in \mathfrak{G} - (\mathsf{A} \cup \mathsf{B}).$$

Sei die Gruppenebene von $\mathfrak{G}$ bez. O, E, U, V durch den Quasikörper Q koordinatisiert; hierbei bezeichne U, V die durch A, B bestimmten uneigentlichen Punkte. Ist $c \notin \mathsf{A} \cup \mathsf{B}$, so gilt $a^c \in \mathsf{B}$, $b^c \in \mathsf{A}$ für beliebiges $a \in \mathsf{A}$, $b \in \mathsf{B}$, d.h. zu jeder nicht durch U oder V gehenden Geraden c gibt es eine involutorische Kollineation mit der Achse c, welche U und V vertauscht. Nach Burn [3] ist also Q ein Bol-Quasikörper, d.h. ein Quasikörper, der der folgenden Bedingung genügt:

$$(48) \qquad x(u(vu)) = ((xu)v)u \qquad \text{für alle } u, v, x \in \mathsf{Q}.$$

Beispiele für Bol-Quasikörper sind die Alternativkörper und die Fastkörper. Bol-Quasikörper, in denen die Moufangidentität nicht gilt, sind in [3] angegeben. Dort wird auch gezeigt, dass in jedem Bol-Quasikörper

$$(49) \qquad -1 \in Z(Q - \{0\}, \ , 1)$$

und für die Rechtwinkelinvolution ϕ

$$(50) \qquad \phi((m)) = (-m) \quad \text{für alle} \quad m \in \mathsf{Q} - \{0\}$$

gilt. Betrachtet man anstelle von ϕ die als ausgezeichnete Involution bezeichnete Abbildung ψ mit

$$(51) \qquad \psi((m)) = (-m) = \phi((m)) \quad \text{für} \quad m \in Q - \{0\}, \psi(U) = U, \psi(V) = V,$$

so gilt

(52) Die ausgezeichnete Involution ist eine hyperbolische projektive Involution auf der uneigentlichen Geraden der Gruppenebene.

Zum Beweis hat man nur zu beachten, dass ψ sich einbetten lässt in die projektive Kollineation mit der Punktabbildung $(x, y) \to (x, -y)$ und dass $m \neq -m$ für $m \neq 0$ gilt.

Mit Hilfe des Quasikörpers $\mathfrak{Q}$ lassen sich die involutorischen Homologien (Spiegelungen) wie folgt ausdrücken:

(53) Spiegelung mit Achse durch $\begin{cases} U: (x, y) \to (x, k - y) \\ V: (x, y) \to (k - x, y) \end{cases}$

Spiegelung mit Achse $\{(x, y): y = xm + k, m \neq 0\}$ $\Big\}\ (x, y) \to ((y - k)m^{-1}, xm + k)$.

Damit ist die erste Hälfte des folgenden Satzes bewiesen:

SATZ 4. *Zu jeder speziellen euklidischen semiabsoluten Bewegungsgruppe* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$ *gibt es einen Bol-Quasikörper* $\mathfrak{Q}$, *so dass* $\mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{S}^*$ *isomorph ist zu der von den Abbildungen* (53) *erzeugten Kollineationsgruppe der zu* $\mathfrak{Q}$ *gehörenden Translationsebene* (*Semi-Bol-Ebene*). *Die Rechtwinkelinvolution ist durch* (50) *gegeben und die ausgezeichnete Involution* (51) *ist hyperbolisch projektiv. Ist umgekehrt ein Bol-Quasikörper gegeben, so ist die von den Abbildungen* (53) *erzeugte Gruppe eine spezielle euklidische semiabsolute Bewegungsgruppe, in der* A *und* B *die Menge der Spiegelungen in* (53) *mit Achse durch U bzw. V sind und deren Rechtwinkelinvolution der Bedingung* (50) *genügt.*

Die im Satz behauptete Umkehrung lässt sich ohne Schwierigkeiten verifizieren.

Nach [1] ist die Gruppenebene einer endlichen Bewegungsgruppe der ebenen absoluten Geometrie eine pappossche Ebene. Da jeder Fastkörper ein Bol-Quasikörper und jede Translationsebene der Ordnung $\leqslant 8$ pappossch ist, ergibt sich daher mit den Sätzen 1, 3 und 4, dass die Fastkörperebene der Ordnung 9 eine semiabsolute Ebene minimaler Ordnung ist, die nicht schon als Gruppenebene einer Bewegungsgruppe der ebenen absoluten Geometrie auftritt.

Eine Kongruenz $\mathfrak{T}$, $\mathscr{K}$ heisse Bol-Kongruenz, falls gilt: Es gibt Komponenten $U, V \in \mathscr{K}$ mit folgender Eigenschaft: Sind für $i = 1, 2$ $h_i + u_i$, $h_i + v_i$ mit $h_i \in H$ für ein $H \in \mathscr{K}$, $u_i \in U$, $v_i \in V$, Elemente derselben Komponente, so gehören die beiden Elemente $h_i + u_i + v_i$ zur gleichen Komponente (s. Abbildung 1).

(54) Eine Kongruenz gehört genau dann zu einer Semi-Bol-Ebene, falls sie eine Bol-Kongruenz ist.

Beweis. Sei $\mathfrak{T}, \mathscr{K}$ eine Bol-Kongruenz. Zu $G \in \mathscr{K} - \{U, V\}$ und $h \in \mathfrak{T}$ definieren wir die folgende Abbildung

$$(55)\qquad \varphi_{G+h}: \mathfrak{T} \to \mathfrak{T}, \qquad \varphi_{G+h}(t) = t + u + v \text{ mit } t + u, t + v \in G + h, \quad u \in U, v \in V.$$

φ_{G+h} ist offenbar wohldefiniert. φ_{G+h} ist involutorisch: Sei $\varphi_{G+h}(t) = t + u + v$ mit $t + u$, $t + v \in G + h$; dann ist $\varphi_{G+h}(t) - u$, $\varphi_{G+h}(t) - v \in G + h$ und daher $\varphi^2_{G+h}(t) = \varphi_{G+h}(t) - u - v = t$. Als involutorische Abbildung

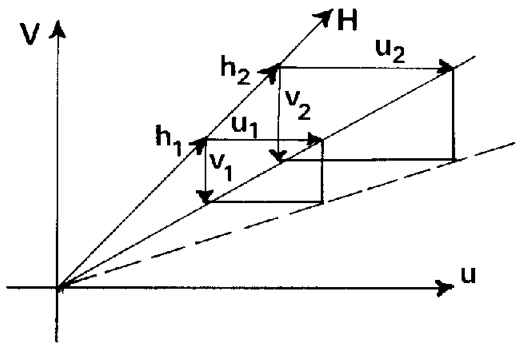

Abb. 1.

ist φ_{G+h} bijektiv. φ_{G+h} bildet Nebengruppen von Komponenten auf Nebengruppen von Komponenten ab, d.h.: Zu $R \in \mathscr{K}$, $r \in \mathfrak{T}$ existieren $S \in \mathscr{K}$, $s \in \mathfrak{T}$ mit $\varphi_{G+h}(R + r) = S + s$: Für $i = 1, 2, 3$ sei $r_i \in R + r$ und damit $r_i + u_i$, $r_i + v_i \in G + h$ für eindeutig bestimmte Elemente $u_i \in U$, $v_i \in V$. Sei im Falle $R \neq G$, $R + r \cap G + h = \{s\}$ und damit $G + h = G + s$, $R + r = R + s$, es folgt nacheinander: $r_i - s + u_i$, $r_i - s + v_i \in G$; $r_i - s + u_i + v_i \in S$ für eine geeignete Komponente S (gemäss Definition der Bol-Kongruenz); $r_i + u_i + v_i \in S + s$. Ist $R = G$, so gilt $r_i + u_i + v_i \in G + h + h - r$. Folglich gibt es stets $S \in \mathscr{K}$, $s \in \mathfrak{T}$ mit $\varphi_{G+h}(R + r) \subseteq S + s$. Analog ist $\varphi_{G+h}(S + s) \subseteq T + t$ für eine geeignete Komponente T und ein geeignetes Element t. Es folgt dank dem bereits über φ_{G+h} Bewiesenen: $R + r = \varphi^2_{G+h}(R + r) \subseteq \varphi_{G+h}(S + s) \subseteq T + t$, also $R + r = T + t$ und damit weiter $\varphi_{G+h}(S + s) = R + r$, $\varphi_{G+h}(R + r) = S + s$. φ_{G+h} vertauscht U und V: Sei für ein $u' \in U$, $u' + u, u' + v \in G + h$ und daher $\varphi_{G+h}(u') = u' + u + v$. Lässt man u' die Komponente U durchlaufen, so folgt, da $u' + u$ dabei konstant, etwa $u' + u = u_0$, ist, die Beziehung $\varphi_{G+h}(U) \subseteq V + u_0$ und mit dem soeben Bewiesenen dann $\varphi_{G+h}(U) = V + u_0$. Da $\varphi_{G+h}(x) = x$ für jedes $x \in G + h$ gilt, hat man bewiesen: Die durch die Kongruenz $\mathfrak{T}, \mathscr{K}$ gegebene Translationsebene besitzt Punkte U, V auf der uneigentlichen Geraden (die den Komponenten U, V entsprechenden uneigentlichen Punkte bezeichnen wir ebenfalls mit U, V) und zu jeder nicht durch U, V gehenden Geraden eine U, V vertauschende, involutorische zentrale Kollineation mit dieser Geraden als Achse. Nach [3] ist daher die Ebene eine Semi-Bol-Ebene.

Sei umgekehrt eine Semi-Bol-Ebene gegeben und sei $\mathfrak{T}, \mathscr{K}$ die (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) zugehörige Kongruenz. Die den ausgezeichneten Punkten U, V der Semi-Bol-Ebene entsprechenden Komponenten seien ebenfalls mit U, V bezeichnet, die diesen Komponenten zugeordneten Geraden seien OU, OV. Wir wollen die zu einer beliebigen Geraden $G \in \mathscr{K}$ als Achse gehörende, U und V vertauschende involutorische

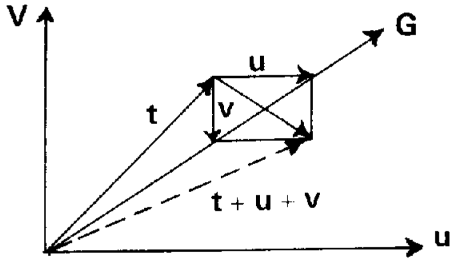

Abb. 2.

Homologie bestimmen: Nach Abbildung 2 ist für $t \in \mathfrak{T}$, $\varphi_G(t) = t + u + v$ mit $t + u, t + v \in G$. Ist nun für $i = 1, 2$, $r_i \in R$, $r_i + u_i$, $r_i + v_i \in G$, so gehören $\varphi_G(r_i) = r_i + u_i + v_i$ zur gleichen Komponente. $\mathfrak{T}, \mathscr{K}$ ist so als Bol-Kongruenz erkannt.

(56) Die Abbildungen φ_G aus (55) sind lineare Abbildungen im Vektorraum $\mathfrak{T}$ über $\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$.

Beweis. Sei für $i = 1, 2$, $t_i \in \mathfrak{T}$, $t_i + u_i$, $t_i + v_i \in G$ und damit für $\alpha, \beta \in \mathfrak{R}(\mathfrak{T})$, $\alpha t_1 + \beta t_2 \in \mathfrak{T}$, $\alpha t_1 + \beta t_2 + (\alpha u_1 + \beta u_2)$, $\alpha t_1 + \beta t_2 + (\alpha v_1 + \beta v_2) \in G$ mit $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$, $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V$. Es folgt $\varphi_g(\alpha t_1 + \beta t_2) = \alpha t_1 + \beta t_2 + \alpha u_1 + \beta u_2 + \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(t_1 + u_1 + v_1) + \beta(t_2 + u_2 + v_2) = \alpha\varphi_G(t_1) + \beta\varphi_G(t_2)$.

Um die ausgezeichnete Involution in der Bol-Kongruenz zu bestimmen, zeigen wir zunächst, dass $\varphi_G(H) = H$ gilt, falls $u \in U$, $v \in V$ mit $u + v \in G$, $u - v \in H, u \neq 0 \neq v$ existieren. Ist nämlich $u + v \in G, u - v \in H, u \neq 0 \neq v$, so folgt nacheinander: $\varphi_G(u) = u + (-u + v)$ (nach (55)), $= v$; $\varphi_G(v - u) = \varphi_G(\varphi_G(u) - u) = \varphi_G^2(u) - \varphi_G(u) = u - v$; $\varphi_G(H) = H$ (da $\varphi_G(H)$ eine Komponente ist). Da φ_G als nichtidentische Homologie ausser G und H keine Komponente fest lässt, ist die durch

(57) Sei $\chi(G) = H$ genau dann, falls $u \in U, v \in V, u \neq 0 \neq v$, mit $u + v \in G, u - v \in H$ existieren $(G, H \in \mathscr{K})$

definierte Abbildung $\chi: \mathscr{K} \to \mathscr{K}$ wohldefiniert; die Komponenten U, V sind offenbar bezüglich χ isotrop: $\chi(U) = U$, $\chi(V) = V$. Nach dem Erwähnten gilt nun

(58) Die durch χ auf der uneigentlichen Geraden induzierte Involution stimmt mit der ausgezeichneten Involution überein.

Berücksichtigt man noch, dass durch

(59) $$\left.\begin{aligned} \varphi_{U+v'}(t) &= 2v' - v + u \\ \varphi_{V+u'}(t) &= 2u' - u + v \end{aligned}\right\} \text{ mit } t = u + v \text{ und } u, u' \in U; v, v' \in V$$

involutorische Homologien der Semi-Bol-Ebene mit $U + v'$ bzw. $V + u'$ als Achse und den durch V bzw. U auf der uneigentlichen Geraden bestimmten Punkten als Zentren gegeben sind, so hat man die erste Hälfte des folgenden Satzes bewiesen:

SATZ 5. *Zu jeder speziellen euklidischen semiabsoluten Bewegungsgruppe* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$ *gibt es eine Bol-Kongruenz* $\mathfrak{T}$, $\mathscr{K}$, *so dass* $\mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{S}^*$ *isomorph ist zu der von den Abbildungen aus* (55) *und* (59) *erzeugten Gruppe kongruenzerhaltender Abbildungen von* $\mathfrak{T}$ *und der Stabilisator* $\mathfrak{G}_P^*$ *eines Punktes P isomorph ist zu der von den Involutionen* φ_G $(G \in \mathscr{K})$ *erzeugten Untergruppe der linearen Gruppe des Vektorraums* $\mathfrak{T}$ *über* $\mathfrak{K}(\mathfrak{T})$, *und so dass die der Rechtwinkelinvolution von G zugeordnete ausgezeichnete Involution mit der Involution aus* (57) *gemäss* (58) *zusammenhängt. Umgekehrt erzeugen bei gegebener Bol-Kongruenz die Abbildungen* (55) *und* (59) *eine spezielle euklidische semiabsolute Bewegungsgruppe, deren Mengen* A *und* B *durch die Abbildungen* φ_{U+t} *bzw.* φ_{V+t} $(t \in \mathfrak{T})$ *aus* (59) *gegeben sind und deren Rechtwinkelinvolution durch die aus* (57) *und* (58) *sich ergebende ausgezeichnete Involution bestimmt ist.*

Die Umkehrung ergibt sich aus der Umkehrung in Satz 4, aus dem unter (54) Bewiesenen und aus (57) und (58). Mit Hilfe von Satz 4 verifiziert man leicht die Aussage

(60) Ist $\mathfrak{G}$ eine spezielle euklidische semiabsolute Bewegungsgruppe und ist in $\mathfrak{G}^*$ der schwache Dreispiegelungssatz S_P erfüllt, so gilt in dem $\mathfrak{G}$ zugeordneten Bol-Quasikörper die folgende Verschärfung des Bolschen Gesetzes ('starke Bolbedingung')

$$\text{Aus}((XA)B)C = ((XC)B)A \text{ für alle } X \in \mathfrak{Q} \text{ folgt}$$
$$((XA)B)C = X((AB)C) \text{ für alle } X \in \mathfrak{Q}.$$

Ist umgekehrt in einem Quasikörper von Charakteristik $\neq 2$ diese Bedingung erfüllt, so ist die durch die Abbildungen (53) erzeugte Kollineationsgruppe der zugehörigen Translationsebene eine spezielle euklidische semiabsolute Bewegungsgruppe, für die S_P gilt.

In jedem Fastkörper ist die starke Bolbedingung trivialerweise erfüllt; ihre Gültigkeit in jedem Alternativkörper kann durch eine leichte Rechnung bestätigt werden. Dies ergibt

(61) Liegt ein planarer Fastkörper oder ein Alternativkörper von Charakteristik $\neq 2$ vor, so sind die durch die Abbildungen (53) erzeugten Kollineationsgruppen der zugehörigen Ebenen spezielle euklidische semiabsolute Bewegungsgruppen, in denen S_P erfüllt ist.

Im endlichen Fall lässt sich Satz 4 wesentlich verschärfen:

SATZ 6. *Ist die Anzahl der Punkte auf einer Geraden einer endlichen speziellen euklidischen semiabsoluten Bewegungsgruppe* $\mathfrak{G}$ *kein Quadrat, so gibt es einen Fastkörper* $\mathfrak{F}$, *so dass* $\mathfrak{G}^*$ *isomorph ist zu* $\Sigma\Pi\mathfrak{T}$, *wobei* $\Pi = \{\pi, \varepsilon\}$ *mit* $\pi(x, y) = (y, x)$ *und* $\varepsilon(x, y) = (x, -y)$, $\mathfrak{T}$ *die Gruppe der Translationen* $(x, y) \to (x + a, y + b)$, $(a, b \in \mathfrak{F})$ *und* Σ *die Gruppe der Abbildungen der Form* $(x, y) \to (xr_1r_2 \ldots r_n, yr_1^{-1}r_2^{-2} \ldots r_n^{-1})$ $(r_i \in \mathfrak{F} - \{0\})$ *ist.*

Beweis. Nach Satz 4 gibt es einen Bol-Quasikörper $\mathfrak{F}$ endlicher Ordnung, so dass $\mathfrak{G}^*$ isomorph ist zu der von den Abbildungen (53) erzeugten Gruppe. Nach Kallaher und Ostrom [7] ist $\mathfrak{F}$ dank der Voraussetzung über die Ordnung ein Fastkörper, die Multiplikation in $\mathfrak{F}$ also assoziativ. Jede Abbildung aus $\Sigma \cup \Pi \cup \mathfrak{T}$ lässt sich dann durch Zusammensetzung von Abbildungen (53) und jede Abbildung (53) durch Zusammensetzung von Abbildungen aus $\Sigma \cup \Pi \cup \mathfrak{T}$ gewinnen.

Nach dem im Beweis zu Satz 6 Gesagten ist in jedem endlichen Bol-Quasikörper, dessen Ordnung kein Quadrat ist, die starke Bolbedingung erfüllt. Satz 4 und (61) implizieren daher

(62) Ist in einer endlichen speziellen euklidischen semiabsoluten Bewegungsgruppe $\mathfrak{G}$ die Anzahl der Punkte auf einer Geraden kein Quadrat, so ist in $\mathfrak{G}^*$ S_P erfüllt.

3. Die hyperbolischen semiabsoluten Bewegungsgruppen

Sei $\mathfrak{G}, \mathfrak{S}$ eine semiabsolute Bewegungsgruppe.

$\mathsf{G} \subset \mathfrak{S}$ heisst Geradenbüschel, falls $a, b \in \mathfrak{S}$ mit $ab \neq 1$ und $\mathsf{G} = \mathsf{G}(ab) = \{x : abx \in \mathfrak{S}\}$ existieren.

Ein Geradenbüschel $\mathsf{G} = \mathsf{G}(ab)$ heisse spezielles Geradenbüschel, falls gilt:

G1 Aus $u, v \in \mathsf{G}$, $u \neq v$, $uvz \in \mathfrak{S}$ folgt $z \in \mathsf{G}$

G2 Gilt $s|a, b$ für kein $s \in \mathfrak{S}$, so ist G mit beliebigem Punkt und beliebiger nicht in G liegender Geraden verbindbar.

a, b seien als Trägergeraden des Büschels $\mathsf{G}(ab)$ bezeichnet. Offenbar hängt $\mathsf{G}(ab)$ nur vom Produkt ab ab; ist $\mathsf{G}(ab)$ speziell und $ab = cd$, so ist auch $\mathsf{G}(cd)$ speziell (vgl. hierzu (69)). Im Gegensatz zur absoluten Geometrie können wegen Fehlens des Transitivitätsgesetzes nicht mehr zwei beliebige Geraden des Büschels als Trägergeraden gewählt werden. In der absoluten Geometrie ist jedes Geradenbüschel speziell; die in der folgenden Definition auftretende Bedingung B ist daher in der absoluten Geometrie erfüllt.

Erfüllt jedes Geradenbüschel G1, so gilt der allgemeine Dreispiegelungssatz und damit das Transitivitätsgesetz: Aus $a, b, c|P$ folgt nämlich $(Pb)bc = Pc \in \mathfrak{S}$ und $Pb \in \mathsf{G}(ab)$ und hieraus dank G1 $c \in \mathsf{G}(ab)$, also $abc \in \mathfrak{S}$.

DEFINITION. Eine hyperbolische semiabsolute Bewegungsgruppe ist eine semiabsolute Bewegungsgruppe, in der folgende Axiome gelten:

H (Hyperbolisches Axiom) Durch einen gegebenen Punkt gibt es höchstens zwei Geraden, welche mit einer gegebenen Geraden unverbindbar sind.

$\sim$V (Negation des Verbindbarkeitsaxioms) Es gibt unverbindbare Geraden.

B Je zwei Geraden gehören einem speziellen Büschel an.

Wir ziehen einige später benötigte Folgerungen. Ein G1 erfüllendes Büschel bezeichnen wir oft auch kurz als G1-Büschel.

(63) $\mathsf{G}(ab) = \mathsf{G}(ba)$

Beweis. Es sind gleichwertig: $abx \in \mathfrak{S}$, $xba \in \mathfrak{S}$, $ba(xba)ab = bax \in \mathfrak{S}$.

(64) Ist G_1 ein G1-Büschel und gilt $\mathsf{G}_1 \subseteq \mathsf{G}_2$, so ist $\mathsf{G}_1 = \mathsf{G}_2$.

Beweis. Sei $\mathsf{G}_1 = \mathsf{G}_1(ab)$, $\mathsf{G}_2 = \mathsf{G}_2(cd)$. Wegen $a, b \in \mathsf{G}_2$ gilt $cda = a'$, $cdb = b'$, also $baa' = b'$; $a' \in \mathsf{G}_1$ nach G1. Aus $a'ad = c$ folgt $d \in \mathsf{G}_1$ nach G1. Analog: $c \in \mathsf{G}_1$. Folglich ist $\mathsf{G}_2 \subseteq \mathsf{G}_1$ und damit $\mathsf{G}_2 = \mathsf{G}_1$.

(65) Zwei G1-Büschel haben höchstens eine Gerade gemein.

Beweis. Sei $\mathsf{G}_1 = \mathsf{G}_1(ab)$, $\mathsf{G}_2 = \mathsf{G}_2(cd)$ und $g, h \in \mathsf{G}_1 \cap \mathsf{G}_2$, $abg = g'$, $abh = h'$, $cdg = g''$, $cdh = h''$. Es folgt $g''gh = h''$ und damit $g'' \in \mathsf{G}_1$; $g''gd = c$, also $c, d \in \mathsf{G}_1$ und damit $\mathsf{G}_2 \subseteq \mathsf{G}_1$, also nach (64) $\mathsf{G}_1 = \mathsf{G}_2$.

(66) Die Gesamtheit der Geraden durch einen Punkt P bildet ein spezielles Büschel $\mathsf{G}(P)$.

Beweis. Sei $P = ab$ und $\mathfrak{G}_P = \{x : x|P\}$. $x \in \mathfrak{G}_P$ ist mit $Px = abx \in \mathfrak{S}$ gleichwertig: $\mathfrak{G}_P$ ist ein Geradenbüschel. Aus $u, v \in \mathfrak{G}_P$, $u \neq v$, $uvz \in \mathfrak{S}$ folgt nach US_P (vgl. (18)) $P|z$, also $z \in \mathfrak{G}_P$: G1 ist erfüllt. G2 ist eine Folge von E und L.

(67) Gilt $a, b|c$, $a \neq b$, so ist das Büschel $\mathsf{G}(ab)$ speziell; es besteht aus allen zu c orthogonalen Geraden.

Beweis. Sei $\mathfrak{H} = \{s \in \mathfrak{S} : s|c\}$ und sei $x, u, v \in \mathfrak{H}$, $u \neq v$, $uvz \in \mathfrak{S}$. Dann ist $abx \in \mathfrak{S}$ nach S_g und $z \in \mathfrak{H}$ nach US_g (vgl. (17)). Folglich ist $\mathfrak{H} = \mathsf{G}(ab)$ und $\mathsf{G}(ab)$ speziell.

Ein Büschel der Form $\mathsf{G}(P)$ heisse eigentlich.

(68) Jedes Büschel $\mathsf{G}(ab)$ ist entweder eigentlich oder keine zwei Geraden aus $\mathsf{G}(ab)$ haben einen gemeinsamen Punkt.

Beweis. Sei $x, y \in \mathsf{G}(ab)$, $x \neq y$; $P|x, y$; $abx = c$, $aby = d$. $yxc = ybaabxc = yba = d$ und US_P haben $c|P$ zur Folge, woraus mit $a = cxb$

dann $b|P$ folgt; hieraus ergibt sich nach (14) $a = cxb|P$. Ist nun $g \in \mathsf{G}(ab)$ und damit $abg \in \mathfrak{S}$, so gilt nach $\mathrm{US_P}$ $g|P$, also $\mathsf{G}(ab) \subseteq \mathsf{G}(P)$. Nach (64) ist dann $\mathsf{G}(ab) = \mathsf{G}(P)$.

(69) Ist G ein spezielles Büschel, so tritt einer der folgenden 3 Fälle ein:
1. G ist eigentlich
2. G ist ein Lotbüschel (d.h. G besteht aus allen zu einer gegebenen Geraden senkrechten Geraden)
3. Keine zwei Geraden aus G haben einen Punkt oder ein Lot gemeinsam.

Umgekehrt ist jedes eigentliche Büschel und jedes Lotbüschel speziell.

Beweis. Zu zeigen bleibt noch: Haben zwei Geraden c, d eines speziellen Büschels $\mathsf{G}(ab)$ ein Lot g gemeinsam, dann ist $\mathsf{G}(ab)$ ein Lotbüschel. Es gilt $\mathsf{G}(cd) \subseteq \mathsf{G}(ab)$; nach (67) ist $\mathsf{G}(cd)$ ein spezielles Büschel, das aus allen zu g orthogonalen Geraden besteht. (64) liefert nun die Behauptung.

Ein spezielles Büschel der Klasse 3. sei wie in der hyperbolischen Geometrie als Ende bezeichnet.

(70) $\mathsf{G}(ab)^\delta = \mathsf{G}(a^\delta b^\delta)$ für jedes $\delta \in \mathfrak{S}$. Mit $\mathsf{G}(ab)$ ist auch $\mathsf{G}(ab)^\delta$ ein spezielles Büschel.

Beweis. Es sind gleichwertig: $x \in \mathsf{G}(ab)^\delta$; $x^{(\delta^{-1})} \in \mathsf{G}(ab)$; $abx^{(\delta^{-1})} \in \mathfrak{S}$; $a^\delta b^\delta x \in \mathfrak{S}$; $x \in \mathsf{G}(a^\delta b^\delta)$. Folglich ist $\mathsf{G}(ab)^\delta$ ein Büschel mit $\mathsf{G}(ab)^\delta = \mathsf{G}(a^\delta b^\delta)$.

Gilt $c|a, b$ für ein $c \in \mathfrak{S}$, so auch $c^\delta|a^\delta, b^\delta$ und die zweite Behauptung in (70) folgt aus (67) und (9). Sei nun $c|a, b$ für kein $c \in \mathfrak{S}$ und $\mathsf{G}(ab)$ als speziell vorausgesetzt. Aus $u, v \in \mathsf{G}(ab)^\delta$, $u \neq v$, $uvz \in \mathfrak{S}$ folgt: $u^{\delta^{-1}}$, $v^{\delta^{-1}} \in G(ab)$ und $u^{\delta^{-1}}v^{\delta^{-1}}z^{\delta^{-1}} = (uvz)^{\delta^{-1}} \in \mathfrak{S}$, $z^{\delta^{-1}} \in \mathsf{G}(ab)$, $z \in \mathsf{G}(ab)^\delta$. Zu P, l gibt es $g, h \in \mathsf{G}(ab)$ mit $P^{\delta^{-1}}|g$, $l^{\delta^{-1}}|h$. Dann ist $P|g^\delta$, $l|h^\delta$, g^δ, $h^\delta \in \mathsf{G}(ab)$ und damit $\mathsf{G}(ab)^\delta$ als speziell erkannt.

(71) Ist $\mathsf{G}(ab)$ ein spezielles Büschel und gilt $\mathsf{G}(ab)^c = \mathsf{G}(ab)$, dann ist $c \in \mathsf{G}(ab)$ oder $c|a, b$. Umgekehrt folgt für ein spezielles Büschel $\mathsf{G}(ab)$ aus $c \in \mathsf{G}(ab)$ oder $c|a, b$ die Beziehung $\mathsf{G}(ab)^c = \mathsf{G}(ab)$.

Beweis. Sei $\mathsf{G}(ab)^c = \mathsf{G}(ab)$ und etwa $c \nmid a$, also $c = a \in \mathsf{G}(ab)$ oder $a^c \neq a$. Ist $a^c \neq a$, so ist wegen $a, a^c \in \mathsf{G}(ab)$ und wegen $a^c ac = c^{ac} \in \mathfrak{S}$ nach G1 $c \in \mathsf{G}(ab)$.

Ist $c|a, b$, dann auch $c|a^c, b^c$. Nach (67) sind die Büschel $\mathsf{G}(ab)$ und $\mathsf{G}(a^c b^c)$ identisch. Sei $c \in G(ab)$. Nach (70) ist $\mathsf{G}(ab)^c = \mathsf{G}(a^c b^c)$. Wegen $abc \in \mathfrak{S}$, $a^c b^c c = (abc)^{ab} \in \mathfrak{S}$, $ab(bac) = c \in \mathfrak{S}$, $a^c b^c(bac) = c^{bac} \in \mathfrak{S}$ ist $c, bac \in \mathsf{G}(ab) \cap \mathsf{G}(ab)^c$, woraus nach (65) $\mathsf{G}(ab) = \mathsf{G}(ab)^c$ folgt.

(72) Eine Gerade gehört entweder keinem oder genau zwei Enden an.

Beweis. Sei $\mathsf{G}(ab)$ ein Ende und sei $g \in \mathsf{G}(ab)$. Für $h|g$ folgt aus $abg \in \mathfrak{S}$ $h^{-1}abgh = h^{-1}abhg \in \mathfrak{S}$ und daraus $g \in \mathsf{G}(a^h b^h)$. Mit $\mathsf{G}(ab)$ ist offenbar auch

$\mathsf{G}(a^h b^h)$ ein Ende. $\mathsf{G}(a^h b^h) \neq \mathsf{G}(ab)$, nach (70) und (71). Sei nun G ein von $\mathsf{G}(ab)$ und $\mathsf{G}(a^h b^h)$ verschiedenes Ende mit $g \in \mathsf{G}$ und sei P ein Punkt mit $P \nmid g$. Nach G2 gibt es $g_1 \in \mathsf{G}(ab)$, $g_2 \in \mathsf{G}(a^h b^h)$, $g_3 \in \mathsf{G}$ mit $P | g_1, g_2, g_3$. Da g_1, g_2, g_3 mit g unverbindbar sind, liegt ein Widerspruch zu H vor.

(73) Je zwei Enden haben eine gemeinsame Gerade.

Beweis. Seien $\mathsf{G}(ab)$, $\mathsf{G}(cd)$ Enden und sei $c, d \notin \mathsf{G}(ab)$. Nach G2 existieren $u, v \in \mathsf{G}(cd)$ mit $u|a$, $v|b$. Sei h die Verbindungsgerade von ua mit vb und sei $f \in \mathsf{G}(ab)$ mit $f|h$. Dann ist $bfa = (abf)^a \in \mathfrak{S}$ und $bfa \in \mathsf{G}(ab)$. Nach dem Lotensatz (dieser lässt sich wie in [1] beweisen) gilt $ufv \in \mathfrak{S}$ und damit $vufvv = vuf \in \mathfrak{S}$, also $f \in \mathsf{G}(cd)$.

(74) Sind A, B verschiedene Enden mit der Verbindungsgeraden v, so gilt $\mathsf{A}^\gamma = \mathsf{B}$ für $\gamma \in \mathfrak{S} \cup \mathfrak{P}$ genau dann, wenn $\gamma | v$ erfüllt ist.

Beweis. Ist $v \in \mathsf{A}, \mathsf{B}$, $\gamma \in \mathfrak{S} \cup \mathfrak{P}$, $\gamma | v$, so $\gamma \notin \mathsf{A}, \mathsf{B}$, also nach (71) im Falle $\gamma \in \mathfrak{S}$ $\mathsf{A}^\gamma \neq \mathsf{A}$. Ist $\gamma \in \mathfrak{P}$, also $\gamma = vw$ für ein $w|v$, so ist nach (71) $\mathsf{A}^\gamma = \mathsf{A}^{vw} = \mathsf{A}^w \neq \mathsf{A}$. (72) und $v^\gamma = v \in \mathsf{A} \cap \mathsf{A}^\gamma$ ziehen daher $\mathsf{B} = \mathsf{A}^\gamma$ nach sich. Ist umgekehrt für ein $\gamma \in \mathfrak{S} \cup \mathfrak{P}$ $\mathsf{A}^\gamma = \mathsf{B}$ erfüllt, so ist $v^\gamma \in \mathsf{A}^\gamma \cap \mathsf{B}^\gamma = \mathsf{B} \cap \mathsf{A}$ und deshalb $v^\gamma = v$, also $\gamma | v$.

Das Hauptergebnis ergibt sich nach M. Gerth nun wie folgt:

(75) Zwei beliebige Geraden a, b sind durch eine Lotkette verbindbar.

Beweis. O.E.d.A. sei $a \neq b$.

Gibt es ein Ende U mit $a, b \in \mathsf{U}$, so seien V, W die nach (72) existierenden Enden $\neq \mathsf{U}$ mit $a \in \mathsf{V}$, $b \in \mathsf{W}$. Sei C ein beliebiger Punkt auf der Verbindungsgeraden von V, W. (74) hat dann $\mathsf{U}^{(C,b)C} = \mathsf{W}^C = \mathsf{V}$, also $a|(C, b)C$ zur Folge. Wegen $(C, b)C|(C, b)$, $(C, b)|b$ sind somit a, b durch eine Lotkette verbindbar. Gehören a, b keinem Ende an, so gibt es nach G2 Lote c, d von einem nach $\sim$V existierenden Ende U auf a bzw. b. Nach dem soeben Bewiesenen sind a, b durch eine Lotkette verbindbar.

Auf Grund von (23) schliesst man nun auf

SATZ 7. *Ist $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ eine hyperbolische semiabsolute Bewegungsgruppe, so ist $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ eine hyperbolische Bewegungsgruppe.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Bachmann, F.: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Berlin–Heidelberg–New York, 1973.
2. Bachmann, F.: *Hjelmslev-Gruppen*, Mathematisches Seminar Kiel, 1970/71.
3. Burn, R.P.: 'Bol Quasifields and Pappus' Theorem', *Math. Z.* **105** (1968), 351–364.
4. Burn, R.P.: 'The Coexistence of Involutory Elations and Homologies', *Math. Z.* **103** (1968), 195–200.
5. Dembowski, P.: *Finite geometries*, New York, 1968.

6. Kallaher, M.J.: 'Projective Planes over Bol Quasi-Fields', *Math. Z.* **109** (1969), 53–65.
7. Kallaher, M.J. and Ostrom, T.G.: 'Fixed Point Free Linear Groups, Rank three Planes and Bol Quasifields', *J. Algebra* **18** (1971), 159–178.
8. Karzel, H.: *Inzidenzgruppen*, Vorlesungsausarbeitung, Hamburg, 1965.
9. Pickert, G.: *Projektive Ebenen*, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1955.
10. Schütte, K.: 'Der projektiv erweiterte Gruppenraum der ebenen Bewegungen', *Math. Ann.* **134** (1956), 106–120.
11. Wolff, H.: 'Minkowskische und absolute Geometrie', *Math. Ann.* **171** (1967), 144–193.

Anschrift des Verfassers:

O. Bachmann,
Département de mathématiques
École polytechnique fédérale
1007 *Lausanne*
Schweiz

(Eingegangen am 1. August 1975)