MANFRED OEHLER

ENDLICHE BIAFFINE INZIDENZEBENEN

Nennt man in einer Inzidenzstruktur $\mathfrak{A}=(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathrm{I})$ (siehe [1]) zwei Geraden f, g aus $\mathfrak{G}$ parallel genau dann, wenn f und g alle Punkte oder keinen Punkt gemeinsam haben und bezeichnet man für jedes Paar (P, g) aus $\mathfrak{P}\times\mathfrak{G}$ mit $\pi(P, g)$ die Anzahl der zu g parallelen Geraden durch P, so ist $\mathfrak{A}$ eine affine Inzidenzebene genau dann, wenn folgende Axiome erfüllt werden:

(A1) *Zu verschiedenen Punkten P, Q aus $\mathfrak{P}$ gibt es genau eine Gerade g (Verbindungsgerade) aus $\mathfrak{G}$, die mit P und Q inzidiert.*

(A2) *Es gibt drei Punkte A, B, C in $\mathfrak{P}$, die nicht mit einer gemeinsamen Geraden inzidieren.*

(A3, 1) *Für alle Paare (P, g) aus $\mathfrak{P}\times\mathfrak{G}$ gilt $\pi(P, g)=1$.*

Eine Verallgemeinerung der affinen Struktur erhält man offensichtlich, wenn man für eine natürliche Zahl h (A3, 1) ersetzt durch

(A3, h) *Für alle Paare (P, g) aus $\mathfrak{P}\times\mathfrak{G}$ gilt*

$$1 \leqslant \pi(P, g) \leqslant h.$$

DEFINITION 1. *Eine Inzidenzstruktur $\mathfrak{A}$, die* (A1), (A2) *und* (A3, h) *für eine natürliche Zahl h erfüllt, heißt h*-affine Inzidenzebene. *Sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{G}$ endliche Mengen, so heißt $\mathfrak{A}$* endlich. *Eine 2-affine Ebene heißt auch* biaffin.

Unmittelbare Folge von Definition 1 ist, daß jede endliche Inzidenzstruktur, bei der (A1) und (A2) gültig sind, h-affin ist bei geeigneter Wahl von h. Außerdem ist jede h_1-affine Ebene auch h_2-affin, falls $h_1<h_2$ gilt. Bei allen folgenden Untersuchungen sei daher h eine feste Zahl, der durch die Zusatzforderung

(1) *Es gibt ein (P, g) aus $\mathfrak{P}\times\mathfrak{G}$ mit $\pi(P, g) = h$*

geometrische Bedeutung gegeben wird.

Diese Arbeit befaßt sich mit endlichen biaffinen Inzidenzebenen; soweit jedoch die Entwicklung parallel verläuft, wird auch allgemein die Struktur der h-affinen Inzidenzebenen untersucht. Die Sätze 6, 14, 19 und 20 bilden das Hauptresultat: abgesehen von vier Ausnahmeebenen läßt sich jede endliche biaffine Ebene aus einer affinen Inzidenzebene gewinnen durch Wegnahme eines Punktes oder einer Punktreihe samt Trägergeraden.

Geometriae Dedicata 4 (1975) 419–436.

1. Fundamentalsatz

Bezeichnet man für einen beliebigen Punkt P mit $O(P)$ die Anzahl der Geraden durch P und für eine beliebige Gerade g mit $O(g)$ die Anzahl der Punkte auf g, so gelten allgemein

$$(2) \qquad O(P) = O(g) + \pi(P, g) \qquad \text{für} \qquad P \not I g \qquad \text{und}$$

$$(3) \qquad O(P) \geq 3.$$

Gibt es daher zu zwei Geraden f, g einen Punkt S, der weder auf f, noch auf g liegt, so erhält man mit (2) und (A3, h)

$$(4) \qquad O(f) \leqslant O(g) + (h - 1).$$

Diese Ungleichung gilt jedoch auch allgemein. Für $O(f) \leqslant h-1$ sowie für den Fall $O(f)=h$ und $f \nparallel g$ ist (4) trivial erfüllt. Ist $f \parallel g$ und $O(f) \geq h$, so gibt es mit (A2) einen nicht auf f liegenden Punkt P mit $O(P) \geq h+1$, woraus $O(g) \geq 1$ folgt. Für $O(f)=h$ ist also (4) erfüllt.

Ganz entsprechend erhält man für $O(f) \geq h+1$ und $f \cap g = S$ die Existenz eines von S verschiedenen Punktes auf g, also $O(g) \geq 2$. Ist jedoch $O(f) \geq h+1$ und $f \parallel g$, so gibt es nach dem bisherigen auf g mindestens einen Punkt P und auf f mindestens $h+1$ verschiedene Punkte $F_0, \ldots, F_h$. Sei $a_i = [P, F_i]$ für $i=1, \ldots, h$ und b eine Parallele zu a_1 durch F_0. Dann ist b von f verschieden und geht nicht durch P. Trifft b g nicht in einem Punkt Q $(\neq P)$, so können wegen $b \parallel a_1$, $b \parallel g$ und (A3, h) nicht alle Geraden $a_2, \ldots, a_h$ zu b parallel sein. O.B.d.A. sei dann $S = a_2 \cap b$. S liegt nicht auf f und nicht auf g, so daß mit (4) auch in diesem Fall $O(g) \geq 2$ gilt. Zusammenfassend hat man für $O(f) = h+1$ allgemein (4) gezeigt.

Ist $O(f) \geq h+2$, $S = f \cap g$, so gibt es auf g einen von S verschiedenen Punkt Q und dazu auf einer Parallelen zu f durch Q einen von Q verschiedenen Punkt P, der weder auf f, noch auf g liegt, so daß auch jetzt (4) erfüllt ist.

Ist schließlich $O(f) \geq h+2$ und $f \parallel g$, so gibt es F auf f, G auf g und die Gerade $[F, G]$ trägt mindestens noch einen von F und G verschiedenen Punkt P, der weder auf f, noch auf g liegt. Damit ergibt sich

SATZ 1. (Fundamentalsatz). *Für je zwei Geraden f, g gilt* (4).

Satz 1 hat weitreichende Folgen für die Endlichkeit von $\mathfrak{A}$. Gibt es eine Gerade g_0 mit endlichem $O(g_0)$, so haben alle Geraden g endliches $O(g)$, die Zahlen

$$(5) \qquad N := \max \{O(g) \mid g \in \mathfrak{G}\}, \qquad n := \min \{O(g) \mid g \in \mathfrak{G}\}$$

sind wohldefiniert, und es gilt

$$(6) \qquad n \leqslant O(g) \leqslant N \qquad \textit{für} \qquad g \in \mathfrak{G}$$

und mit Satz 1

$$(7) \qquad N - n \leqslant h - 1.$$

Dann liefern (2) und (A3, h)

$$(8) \qquad n + 1 \leqslant O(P) \leqslant N + h \qquad \textit{für} \qquad P \in \mathfrak{P},$$

also die Endlichkeit aller $O(P)$. Umgekehrt folgt aus der Endlichkeit eines $O(P_0)$ die Endlichkeit aller $O(g)$. Aus (8) folgt weiter

$$(9) \qquad n^2 \leqslant |\mathfrak{P}| \leqslant 1 + (N + h)(N - 1),$$

d.h. die Endlichkeit von $\mathfrak{P}$. Ist zusätzlich $n \geq 1$, so folgt auch die Endlichkeit von $\mathfrak{G}$, also von $\mathfrak{A}$.

SATZ 2. *Ist für ein g aus $\mathfrak{G}$ oder für ein P aus $\mathfrak{P}$ $O(g)$ oder $O(P)$ endlich, so ist die h-affine Inzidenzebene $\mathfrak{A}$ endlich, falls jede Gerade wenigstens einen Punkt trägt. Dies ist sicher erfüllt, wenn für die in* (5) *definierte Zahl N gilt $N \geq h$.*

Im folgenden untersuchen wir nur noch endliche h-affine Ebenen. Für diese gilt

DEFINITION 2. *Die in* (5) *angegebenen Zahlen N bzw. n heißen* Ordnung *bzw.* Subordnung *der betrachteten Ebene.*

2. MINIMALMODELL. VOLLSTÄNDIGE EBENEN

Nach (A2) gibt es drei nicht-kollineare Punkte A, B, C, welche die verschiedenen Geraden $a = [B, C]$, $b = [C, A]$, $c = [A, B]$ definieren. Außerdem gibt es nach (A3, h) zu a wenigstens eine Parallele a_1 durch A und analog eine Parallele b_1 zu b durch B und eine Parallele c_1 zu c durch C. Für diese drei Punkte und sechs Geraden gilt das Inzidenzschema

(10)

	a	b	c	a_1	b_1	c_1
A		*	*	*		
B	*		*		*	
C	*	*				*

.

Als Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ betrachtet, ist

$$\mathfrak{A}^M := (\{A, B, C\}, \{a, b, c, a_1, b_1, c_1\}, \mathrm{I}_u)$$

eine biaffine Inzidenzebene, also das in allen Ebenen enthaltene Minimalmodell.

Im Unterschied zum Minimalmodell, bei dem nicht alle Geraden gleich viele Punkte tragen, gilt

SATZ 3. *Tragen in einer endlichen h-affinen Inzidenzebene alle Geraden gleich viele Punkte, so gelten*

(11) $\qquad \pi(P, g) = h \quad$ *für* $\quad (P, g) \in \mathfrak{P} \times \mathfrak{G}$ *und* $P \not\mathrm{I}\, g \quad$ *und*

(12) $\qquad |\mathfrak{P}| = 1 + (N - 1)(N + h).$

Beweis. Es gilt $N=n$, also für ein beliebiges Paar (P, g) mit $P \not\mathrm{I}\, g$: $|\mathfrak{P}| = 1+(N-1)(N+\pi(P, g))$. Daraus folgt, daß $\pi(P, g)$ eine konstante Zahl ist, die dann nach (1) den Wert h besitzt.

DEFINITION 3. *Eine h-affine Inzidenzebene heißt* vollständig, *wenn sie* (11) *erfüllt.*

Für eine vollständige Ebene erhält man mit (2)

(13) $\qquad O(P) = N + h,$

vorerst für alle Punkte P, zu denen es eine Gerade g mit $O(g)=N$ und $P \not\mathrm{I}\, g$ gibt. Eine solche Gerade g existiert sicher, woraus dann (13) allgemein und nachstehender Satz gefolgert werden kann.

SATZ 4. *In einer endlichen vollständig h-affinen Inzidenzebene gilt $N=n$ und Formel* (12).

Die Existenz vollständiger Ebenen für beliebiges h wird durch folgendes Beispiel gezeigt:

Es seien $\mathfrak{P}_h$ ··· eine Menge mit $h+3$ Elementen,
$\mathfrak{G}_h$ ··· die Menge aller zweielementigen Teilmengen von $\mathfrak{P}_h$,
I_h ··· die Enthaltensseinrelation und
$\mathfrak{A}_2^h := (\mathfrak{P}_h, \mathfrak{G}_h, \mathrm{I}_h)$.

Dann ist $\mathfrak{A}_2^h$ eine vollständige h-affine Inzidenzebene mit $N=2$. Speziell erhält man für $h=1$ das affine Minimalmodell.

Sind f und g zwei beliebige Geraden, so bezeichnen wir mit $B(f, g)$ die Anzahl aller Geraden, die von f und g verschieden und sowohl zu f, als auch zu g parallel sind.

Seien nun f, g zwei Geraden einer vollständig h-affinen Ebene, die sich in S schneiden. Mit

$$b_S := B(f, g)$$

erhält man durch Abzählen die Formel

$$(14) \qquad |\mathfrak{G}| = N^2 + (2h-1)N + (1-h) + b_S,$$

woraus folgt

SATZ 5. *In einer endlichen vollständig h-affinen Ebene mit Ordnung N ist für jedes Paar f, g sich schneidender Geraden die Zahl $B(f, g)$ eine Konstante b_S und es gilt* (14).

Weiter gilt

SATZ 6. *Ist N die Ordnung der endlichen vollständig h-affinen Ebene $\mathfrak{A}$, so ist N ein Teiler der Zahl $H := h(h-1)$. Speziell ist $\mathfrak{A}_2^2$ die einzige endliche vollständig biaffine Ebene.*

Beweis. Es sei a eine feste Gerade von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}_a$ die Menge aller von a verschiedenen zu a parallelen Geraden. Dann folgt aus Satz 4, (13) und Satz 5

$$(15) \qquad |\mathfrak{G}_a| = h(N-1) + b_S.$$

Seien A ein fester Punkt auf a und $x_1, \ldots, x_{N+h-1}$ die von a verschiedenen Geraden durch A. Jedem x_i sei die Menge $\mathfrak{K}_{x_i}$ aller Geraden zugeordnet, die zu a und x_i parallel und von diesen verschieden sind. Nach Satz 5 ist b_S die Anzahl der Elemente für jedes $\mathfrak{K}_{x_i}$. Ist y ein beliebiges Element aus $\mathfrak{G}_a$, so gibt es zu y durch A außer a genau $h-1$ Geraden x_i, die zu y parallel sind: y ist in genau $h-1$ Mengen $\mathfrak{K}_{x_i}$ enthalten, also

$$(16) \qquad (h-1)|\mathfrak{G}_a| = (N+h-1)\, b_S.$$

Aus (15) und (16) erhält man

$$(17) \qquad b_S = \frac{h(h-1)(N-1)}{N} \qquad \text{oder}$$

$$(18) \qquad N(H - b_S) = H.$$

Wegen $N \geq 2$ resultiert für $h=2$ speziell $N=2$. Aus (17) folgt $b_S = 1$, aus (14) $|\mathfrak{G}| = 10$ und aus (12) $|\mathfrak{P}| = 5$, was nur für $\mathfrak{A}_2^2$ zutreffen kann.

Unter Verwendung von

DEFINITION 4. *Es sei $\mathfrak{S}$ ein System von Geraden einer h-affinen Inzidenzebene $\mathfrak{A}$.*

(*a*) $\mathfrak{S}$ *heißt* Parallelsystem, *falls die Elemente von* $\mathfrak{S}$ *paarweise parallel sind.*
(*b*) *Das Parallelsystem* $\mathfrak{S}$ *heißt* maximal, *falls es nicht echte Teilmenge eines Parallelsystems von* $\mathfrak{A}$ *ist.*
(*c*) *Das Parallelsystem* $\mathfrak{S}$ *heißt* vollständig, *falls es die Punktmenge von* $\mathfrak{A}$ überdeckt, *d.h., daß es zu jedem* P *aus* $\mathfrak{P}$ *ein Element* s *von* $\mathfrak{S}$ *gibt mit* $P \mathrm{I} s$.

gilt

SATZ 7. *Ist* $h>1$, *so besitzt die endliche vollständig h-affine Ebene* $\mathfrak{A}$ *mit Ordnung* $N \geq h$ *kein vollständiges Parallelsystem.*

Denn $|\mathfrak{P}|$ ist nach (12) genau dann durch N teilbar, wenn $N \mid (h-1)$ gilt, was nach Voraussetzung nicht zutrifft.

3. Maximale und minimale Punkte

Wir führen für eine endliche h-affine Ebene $\mathfrak{A}$ die Bezeichnungen

(19) $$M := \max\{O(P) \mid P \in \mathfrak{P}\}, \qquad m := \min\{O(P) \mid P \in \mathfrak{P}\}$$

ein, womit dann mit (8) gilt

(20) $$n + 1 \leqslant m \leqslant M \leqslant N + h.$$

DEFINITION 5. *Ein Punkt P einer endlichen h-affinen Ebene* $\mathfrak{A}$ *heißt* maximal, *falls* $O(P)=M$ *gilt. Gilt für einen Punkt Q von* $\mathfrak{A}$ $O(Q)=m$, *so heißt Q* minimal.

In einer vollständigen Ebene sind alle Punkte maximal ($M=N+h$), in einer affinen Ebene sind alle Punkte gleichzeitig maximal und minimal. Allgemein gilt

SATZ 8. *Es sei P ein Punkt einer endlichen h-affinen Ebene* $\mathfrak{A}$ *der Ordnung* $N \geq h+1$ *mit* $O(P)=N+h$. *Dann tragen alle Geraden durch P gleich viele Punkte. Ist sogar* $N>(h-1)^2$, *so ist* $\mathfrak{A}$ *vollständig.*

Beweis. Es seien g_1, g_2 zwei verschiedene Geraden durch P und $k_i := O(g_i)$ für $i=1,2$. Wegen $N \geq h+1$ ist $k_i \geq 2$, womit es auf g_i einen von P verschiedenen Punkt G_i gibt. Ist für $i,j=1,2$, $i \neq j$ $r_i := \pi(G_i, g_j)$, so gilt

(21a) $$|\mathfrak{P}| = (r_i + k_j - 1)(N-1) + k_i,$$

da jede Gerade, die nicht durch P geht, N Punkte trägt. Durch Subtraktion der beiden Gleichungen (21a) voneinander erhält man

(22a) $$(r_1 - r_2)(N-1) = (k_1 - k_2)(N-2), \quad \text{also}$$

(23a) $$(N-1) \mid (k_1 - k_2) \quad \text{und} \quad (N-2) \mid (r_1 - r_2).$$

Wegen $N \geq h+1$ und $|k_1 - k_2| \leqslant h-1$ folgt $k_1 = k_2$.

Es sei nun zusätzlich $N>(h-1)^2$. Ist f eine Parallele zu g_1 und $r=\pi(G_1,f)$, so ist $O(G_1)=N+r$. Die Mächtigkeit von $\mathfrak{P}$ errechnet sich über P bzw. G_1 zu

$$(N+h)(k-1)+1=|\mathfrak{P}|=k+(N+r-1)(N-1),$$

woraus

$$(k-1)=(N-1)-(h-r)+\frac{h(h-r)}{N+h-1} \tag{24a}$$

folgt $(k:=k_1=k_2)$.
$k \neq N$ hätte $r<h$ zur Folge. Aus $N>(h-1)^2$ ergibt sich aber $(N+h-1)>h(h-r)$. Da $k-1$ ganz sein muß, gilt $k=N$. Damit tragen alle Geraden N Punkte, die Ebene ist nach Satz 3 vollständig.

SATZ 9. *Die h-affine Ebene* $\mathfrak{A}$ *der Subordnung* $n \geq h+1$ *besitze einen Punkt* P *mit* $O(P)=n+1$. *Dann ist* $\mathfrak{A}$ *affin.*

Beweis. Es seien g_1, g_2 zwei verschiedene Geraden durch P mit $O(P)=n+1$. Analoges Vorgehen wie beim Beweis zu Satz 8 liefert

$$|\mathfrak{P}|=(r_i+k_j-1)(n-1)+k_i, \tag{21b}$$

$$(r_1-r_2)(n-1)=(k_1-k_2)(n-2), \tag{22b}$$

$$(n-1) \mid (k_1-k_2) \quad \text{und} \quad (n-2) \mid (r_1-r_2), \tag{23b}$$

woraus entsprechend $k_1=k_2$ folgt: alle Geraden durch P tragen gleich viele, nämlich $k:=k_1$ Punkte, während die restlichen Geraden n Punkte tragen.

Entsprechend wie im Beweis zu Satz 8 erhält man dann aus

$$1+(k-1)(n+1)=|\mathfrak{P}|=k+(n+r-1)(n-1)$$

$$(k-1)n=(r+n-1)(n-1). \tag{24b}$$

Damit ist $n-1$ ein Teiler von $k-1$, also $k=n$. Alle Geraden tragen n Punkte, womit die Ebene vollständig ist. Wegen $O(P)=n+1$ ist $h=1$, die Ebene also affin.

4. Endliche biaffine Ebenen vom Typ I

Ab jetzt werden nur endliche biaffine Inzidenzebenen betrachtet, für die gilt

$$N-n \leqslant 1, \qquad N \geq 2, \tag{25}$$

womit speziell jede Gerade mindestens einen Punkt trägt. Die einzige vollständig (echt) biaffine Ebene ist die $\mathfrak{A}_2^2$ mit $N=n=2$. Die Sätze 8 und 9 und (1) liefern für $h=2$

SATZ 10. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine endliche biaffine Ebene der Ordnung $N \geq 3$. Dann gilt*

$$(26) \qquad n + 1 = N = M - 1.$$

Ist sogar $N \geq 4$, so gilt $m = M$.

Für die nächsten Paragraphen gelte deshalb

$$(27) \qquad N \geq 4$$

für die betrachtete endliche biaffine Ebene $\mathfrak{A}$ der Ordnung N, womit

$$(28) \qquad O(P) = N + 1 \quad \textit{für} \quad P \textit{ aus } \mathfrak{P}$$

gilt.

DEFINITION 6. *Eine Gerade f von $\mathfrak{A}$ mit $O(f) = N$ heißt v*-Gerade. *Ist $O(g) = n$, so heißt g w*-Gerade.

Nach Satz 10 gibt es in $\mathfrak{A}$ Geraden beider Art.

Es sei P ein Punkt und v die Anzahl der v-Geraden durch P.

Durch Abzählen erhält man mit (28)

$$(29) \qquad |\mathfrak{P}| = 1 + (N + 1)(n - 1) + v,$$

woraus der erste Teil von

SATZ 11. *In einer endlichen biaffinen Ebene der Ordnung $N \geq 4$ ist die Anzahl der v-Geraden durch einen Punkt eine konstante Zahl v, und es gelten* (29) *und*

$$(30) \qquad 1 \leqslant v \leqslant N.$$

folgt. Die Existenz von v-Geraden und von w-Geraden zeigt (30).

SATZ 12. *Es sei f_1 eine v-Gerade der endlichen biaffinen Ebene $\mathfrak{A}$ mit Ordnung $N \geq 4$ und $v \geq 2$. Dann gibt es zu f_1 genau $N-1$ Parallelen $f_2, \ldots, f_N$, die zusammen mit f_1 ein vollständiges Parallelsystem bilden. $v-1$ der Geraden dieser Schar sind v-Geraden.*

Beweis. Sei X_1 ein fester Punkt von f_1, g eine wegen $v \geq 2$ existierende v-Gerade durch X_1, die von f_1 verschieden ist. $X_2, \ldots, X_N$ seien die restlichen Punkte von g. Wegen (28) und $O(f_1) = N$ gibt es (wie durch jeden nicht auf f_1 gelegenen Punkt) durch jeden Punkt X_i $(i=2, \ldots, N)$ genau eine Parallele f_i zu f. $\mathfrak{S} = \{f_1, \ldots, f_N\}$ ist ein Parallelsystem, auf dessen Geraden insgesamt $N(N-1)+d$ Punkte liegen, wenn d die Anzahl der v-Geraden in $\mathfrak{S}$ ist. ($d \geq 1$ wegen f_1.) Ist r die Anzahl der Punkte von $\mathfrak{A}$, die durch $\mathfrak{S}$ nicht erfaßt werden, so gilt also $|\mathfrak{P}| = N(N-1)+d+r$, was zusammen mit (29)

$$(31) \qquad d + r = v - 1 \leqslant N - 1 = n$$

ergibt. Wäre $r>0$, so würde es zu einem durch $\mathfrak{S}$ nicht erfaßten Punkt S eine Parallele s zu f_1 durch S geben, die keine der Geraden f_i ($i=2, \ldots, N$) schneiden kann, da sonst durch den Schnittpunkt zwei Parallelen zu f_1 existieren würden. Da s mindestens $N-1$ Punkte trägt, wäre $r \geq N-1$, im Widerspruch zu (31) und $d \geq 1$. Damit ist $r=0$, also $d=v-1$, und das System $\mathfrak{S}$ ist vollständig.

Wäre f eine durch $\mathfrak{S}$ nicht erfaßte Parallele zu f_1, so würde ein beliebig herausgegriffener Punkt F von f auch auf einer Geraden f_i ($i=2, \ldots, N$) liegen, im Widerspruch zu $\pi(Q, f_1)=1$ für $Q \not I f_1$.
Eine Verschärfung von (30) liefert

SATZ 13. *In einer endlichen biaffinen Inzidenzebene der Ordnung* $N \geq 4$ *gilt* $v=1$ *oder* $v=N$.

Beweis. Es gelte $v \geq 2$.
Sei f eine beliebige v-Gerade und $\mathfrak{S}$ das nach Satz 12 existierende vollständige Parallelsystem, das f enthält und das insgesamt $(v-1)$ v-Geraden besitzt. Durch jeden der N Punkte von f gehen v v-Geraden, womit man für die Menge $\mathfrak{G}_v$ aller v-Geraden erhält

$$(32) \qquad |\mathfrak{G}_v| = (N+1)(v-1).$$

$\mathfrak{S}$ enthält auch (mindestens) eine w-Gerade g. Ist r die Anzahl der v-Geraden, die g nicht schneiden, so ist wegen $\mathfrak{S}$

$$(33) \qquad r \geq v-1.$$

Durch jeden der $N-1$ Punkte von g gehen v v-Geraden, es gilt

$$(34) \qquad |\mathfrak{G}_v| = (N-1)v + r.$$

(32), (33) und (34) liefern $v \geq N$, also zusammen mit $v \leqslant N$ die Behauptung des Satzes.

DEFINITION 7. *Eine endliche biaffine Inzidenzebene, bei der durch jeden Punkt genau eine w-Gerade geht, heißt* Ebene vom Typ I.

Es sei $\mathfrak{E}$ eine beliebige (auch nicht-endliche) affine Inzidenzebene und U ein fester Punkt von $\mathfrak{E}$. Die Unterstruktur von $\mathfrak{E}$, die man durch Entfernen von U (und den dazugehörigen Inzidenzen) erhält, werde $(\mathfrak{E} \backslash U)$ bezeichnet. $\mathfrak{A}=(\mathfrak{E} \backslash U)$ ist eine biaffine Inzidenzebene. Ist $\mathfrak{E}$ endlich von Ordnung N, so ist auch $\mathfrak{A}$ endlich mit Ordnung N und Subordnung $n=N-1$ und ist vom Typ I. Umgekehrt gilt

SATZ 14. *Zu jeder endlichen biaffinen Inzidenzebene* $\mathfrak{A}$ *vom Typ* I *der Ordnung* $N \geq 4$ *gibt es eine affine Inzidenzebene* $\mathfrak{E}$ *derart, daß* $\mathfrak{A}=(\mathfrak{E} \backslash U)$ *für einen bestimmten Punkt* U *von* $\mathfrak{E}$ *gilt.*

Beweis. Wir fügen zu $\mathfrak{A}$ den uneigentlichen Punkt

$$U := \{g \in \mathfrak{G} \mid O(g) = n\}$$

hinzu und erhalten $\mathfrak{E} := (\hat{\mathfrak{P}}, \mathfrak{G}, \hat{\mathrm{I}})$ mit

$$\hat{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P} \cup \{U\}, \qquad \hat{\mathrm{I}} = \mathrm{I} \cup \{(U, g) \mid g \in U\}.$$

Daß in $\mathfrak{E}$ (A1) und (A2) erfüllt sind, ist unmittelbar einzusehen. An der Eigenschaft zweier verschiedener Geraden f, g, parallel oder nicht parallel zu sein, ändert sich beim Übergang von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{E}$ genau dann etwas, wenn f und g beide w-Geraden sind. (w-Geraden bezüglich $\mathfrak{A}$; in $\mathfrak{E}$ haben alle Geraden N Punkte.)

Es seien g aus $\mathfrak{G}$, P aus $\hat{\mathfrak{P}}$ und $P \hat{\mathrm{I}} g$. Ist g eine v-Gerade, so bedarf es nur noch für $P = U$ des Beweises, daß in $\mathfrak{E}$ $\pi(P, g) = 1$ gilt: Nach Satz 12 gibt es zu g ein g umfassendes vollständiges Parallelsystem mit genau einer w-Geraden f. f bildet in $\mathfrak{E}$ die einzige Parallele zu g durch U. Ist g eine w-Gerade, so gilt $P \neq U$, und in $\mathfrak{A}$ gehen wegen (28) durch P genau zwei Parallelen f_1, f_2, von denen genau eine mit g den Punkt U gemeinsam hat. Damit ist auch in $\mathfrak{E}$ (A3, 1) erfüllt.

5. Endliche biaffine Ebenen vom Typ II

DEFINITION 8. *Eine endliche biaffine Inzidenzebene, bei der durch jeden Punkt genau eine v-Gerade geht, heißt* Ebene vom Typ II.

Es sei $\mathfrak{E}$ eine beliebige affine Inzidenzebene mit mindestens drei Punkten pro Geraden. Ist u eine beliebige feste Gerade von $\mathfrak{E}$, so bezeichnen wir mit $(\mathfrak{E} \backslash u)$ diejenige Unterstruktur von $\mathfrak{E}$, die man durch Weglassen von u, aller Punkte auf u und der einschlägigen Inzidenzen erhält. Dann ist $\mathfrak{A} := (\mathfrak{E} \backslash u)$ eine biaffine Inzidenzebene. Ist $\mathfrak{E}$ endlich von Ordnung N, so ist N auch die Ordnung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}$ ist vom Typ II. Im Unterschied zu den Ebenen vom Typ I wird es sich herausstellen, daß sich für $N \geq 4$ nicht jede biaffine Ebene von Typ II und Ordnung N als $(\mathfrak{E} \backslash u)$ darstellen läßt.

Als Korollar zu Satz 14 hat man: Die w-Geraden einer endlichen biaffinen Inzidenzebene von Typ I und Ordnung $N \geq 4$ bilden ein vollständiges Parallelsystem. Analog gilt mit der *Bezeichnung* Typ-II-Ebene für eine endliche biaffine Inzidenzebene vom Typ II und Ordnung $N \geq 4$

SATZ 15. *Die v-Geraden einer Typ-II-Ebene bilden ein vollständiges Parallelsystem. Es gilt*

$$|\mathfrak{P}| = N(N-1) \tag{35}$$

und für die Mengen $\mathfrak{G}_v$ bzw. $\mathfrak{G}_w$ aller v- bzw. w-Geraden

$$|\mathfrak{G}_v| = N - 1, \qquad |\mathfrak{G}_w| = N^2. \tag{36}$$

Beweis. Es sei wie im Beweis zu Satz 12 f_1 eine v-Gerade und X_1 ein Punkt auf f_1. Jetzt sind alle von f_1 verschiedenen Geraden durch X_1 w-Geraden; g sei eine solche. Bildet man analog zum Beweis zu Satz 12 mit den $N-1$ Punkten X_i von g das System $\mathfrak{S}=\{f_1,\ldots,f_{N-1}\}$, so erkennt man entsprechend, daß $\mathfrak{S}$ ein aus der Gesamtheit aller v-Geraden bestehendes vollständiges Parallelsystem ist. Durch Abzählen bekommt man den Rest der Aussage von Satz 15.

Um eine Satz 14 entsprechende Aussage für Ebenen vom Typ II zu bekommen, müssen weitgehende Betrachtungen über Parallelsysteme angestellt werden. Im folgenden handelt es sich dabei stets um w-Parallelsysteme, d.h. sämtliche Elemente sind w-Geraden.

DEFINITION 9. *Sind f, g, k drei verschiedene w-Geraden und ist k sowohl zu f, als auch zu g parallel, so heißt k* (f, g)-Parallele.

SATZ 16. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine Typ-II-Ebene, f, g seien zwei verschiedene w-Geraden von $\mathfrak{A}$. Ist f zu g parallel, so gibt es genau $N-2$ (f, g)-Parallelen, andernfalls genau 2. Ein vollständiges w-Parallelsystem von $\mathfrak{A}$ besteht aus N Geraden.*

Beweis. Mit (36) ist $|\mathfrak{G}|=N^2+N-1$. Durch Abzählen der f oder g oder beide schneidenden Geraden erhält man als Differenz die angegebenen Zahlen $N-2$ bzw. 2. Da auf jeder w-Geraden $N-1$ Punkte liegen, folgt mit (35) der Rest der Aussage.

Bezeichnungen:

$$(37)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{T}_S := \{\{f, g\} \mid f \neq g, f \nparallel g, f, g \in \mathfrak{G}_w\}, && T_S := |\mathfrak{T}_S|,\\ &\mathfrak{T}_P := \{\{f, g\} \mid f \neq g, f \parallel g, f, g \in \mathfrak{G}_w\}, && T_P := |\mathfrak{T}_P|,\\ &\mathfrak{W} := \mathfrak{T}_S \cup \mathfrak{T}_P, \qquad W := |\mathfrak{W}|. \end{aligned}$$

Nach Satz 16 kann man nun auf folgende Art eine Abbildung

$$\varphi : \mathfrak{T}_S \to \mathfrak{W}$$

definieren durch

$$\{c, d\} = \varphi(\{a, b\}) \Leftrightarrow c \neq d,\ c \text{ und } d \text{ sind } (a, b)\text{-parallel.}$$

Für ein beliebiges Element $\{f, g\}$ aus $\mathfrak{W}$ sei noch

$$(38)\qquad \mu(\{f, g\}) := |\varphi^{-1}[\{f, g\}]|.$$

Es gilt

SATZ 17. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine Typ-II-Ebene. Dann gilt für die Zahlen T_S, T_P und W aus* (37)

$$(39) \qquad T_S = \frac{N^2 n^2}{2}, \qquad T_P = N^2 n, \qquad W = \frac{N^2 (N^2 - 1)}{2}.$$

Ist $\{f, g\}$ ein Element von $\mathfrak{T}_P$, so ist $\mu(\{f, g\}) = 0$ für die Funktion μ aus (38), *falls es ein vollständiges Parallelsystem gibt, das f und g enthält. Andernfalls gilt*

$$(40) \qquad \mu(\{f, g\}) \geq N - 3.$$

Beweis. Die Formel für W erhält man unmittelbar aus (36), die Formel für T_S aus (35) und der Tatsache, daß durch jeden Punkt N w-Geraden gehen.

Es sei nun $\{f, g\}$ in ein vollständiges Parallelsystem $\mathfrak{S}$ einbettbar, d.h. $\{f, g\} \subset \mathfrak{S}$. Gäbe es zwei sich im Punkt P schneidende (f, g)-Parallelen a, b, so könnten nicht beide in $\mathfrak{S}$ enthalten sein, im Widerspruch zu Satz 16, wonach $\mathfrak{S} \setminus \{f, g\}$ aus allen (f, g)-Parallelen besteht.

Falls $\{f, g\}$ nicht einbettbar ist, sei $\mathfrak{S}_1$ ein $\{f, g\}$ enthaltendes maximales Parallelsystem und $\mathfrak{S}_2 := \mathfrak{S}_1 \setminus \{f, g\}$, $x := |\mathfrak{S}_2|$, also nach Satz 16 und Voraussetzung

$$(41) \qquad 1 \leqslant x \leqslant N - 3.$$

Sei $\mathfrak{S}_3$ die Menge der nicht in $\mathfrak{S}_2$ enthaltenen (f, g)-Parallelen. Dann gilt nach Satz 16

$$(42) \qquad |\mathfrak{S}_3| = N - x - 2.$$

Ist a ein Element von $\mathfrak{S}_3$, dann gibt es ein b in $\mathfrak{S}_2$, das von a in einem Punkt Q geschnitten wird. Würde es dann ein zu a paralleles Element c von $\mathfrak{S}_2$ geben, so wären f, g und c drei verschiedene (a, b)-Parallelen. Aus diesem Widerspruch mit Satz 16 folgt, daß jedes Element aus $\mathfrak{S}_2$ jedes Element aus $\mathfrak{S}_3$ schneidet. Dabei werden insgesamt nach (42) und Definition von x

$$(43) \qquad y := x(N - x - 2)$$

verschiedene Schnittpunkte erzeugt: würden zwei verschiedene Elemente von $\mathfrak{S}_3$ mit einem Element aus $\mathfrak{S}_2$ den gleichen Schnittpunkt Q erzeugen, so würden durch Q drei verschiedene Parallelen zu f gehen. Jeder solche Schnittpunkt ist nun Träger von genau einem Element von $\varphi^{-1}[\{f, g\}]$, so daß $\mu(\{f, g\}) \geq y$ gilt. Die Abschätzung (40) erhält man dann über die Randminima von (43).

Für den nächsten Satz benötigen wir noch folgendes

LEMMA 1. *Es seien f, g zwei verschiedene parallele w-Geraden einer Typ-II-Ebene. Dann läßt sich $\{f, g\}$ in höchstens ein, $\{f\}$ in höchstens zwei vollständige Parallelsysteme einbetten.*

Beweis. Ein $\{f, g\}$ umfassendes vollständiges Parallelsystem trägt nach Satz 16 sämtliche (f, g)-Parallelen, so daß kein weiteres System möglich ist. Durch einen nicht auf f liegenden Punkt G gibt es genau zwei Parallelen g_1, g_2 zu f, zu $\{f, g_1\}$ und $\{f, g_2\}$ gibt es je höchstens ein vollständiges Parallelsystem.

SATZ 18. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine Typ-II-Ebene, bei der sich je zwei parallele w-Geraden in ein vollständiges Parallelsystem einbetten lassen. Dann gibt es eine affine Inzidenzebene $\mathfrak{E}$ und in $\mathfrak{E}$ eine Gerade u derart, daß $\mathfrak{A} = (\mathfrak{E} \backslash u)$ gilt.*

Beweis. Nach den Voraussetzungen des Satzes gibt es sicher ein vollständiges Parallelsystem

$$\mathfrak{M} = \{g_1, \ldots, g_N\}, \qquad g_i \in \mathfrak{G}_w.$$

Nach Lemma 1 gibt es zu einem g_i aus $\mathfrak{M}$ höchstens noch ein zweites g_i umfassendes vollständiges Parallelsystem. Wir zeigen, daß es noch genau ein solches System U_i gibt:

Dazu sei $k \in \{1, \ldots, N\}$ mit $k \neq i$ und Q ein Punkt auf g_k, f die zweite Parallele zu g_i durch Q. Nach Voraussetzung gibt es ein vollständiges Parallelsystem U_i, das $\{g_i, f\}$ enthält und das von $\mathfrak{M}$ wegen g_k verschieden ist, genauer:

$$(45) \qquad \mathfrak{M} \cap U_i = \{g_i\}.$$

Denn wäre für $j \neq i$ g_j in U_i enthalten, so hätte man im Widerspruch zu Lemma 1 für $\{g_i, g_j\}$ zwei umfassende vollständige Parallelsysteme. Außerdem gilt für $i \neq j$:

$$(46) \qquad U_i \cap U_j = \emptyset,$$

denn ein im Durchschnitt enthaltenes c würde zu g_i und zu g_j parallel, also nach Lemma 1 in $\mathfrak{M}$ sein. Mit (45) würde dies $i = j$ ergeben.

Wir erweitern $\mathfrak{A}$ um die uneigentlichen Punkte U_i und um die uneigentliche Gerade $u := \{U_1, \ldots, U_N\}$, d.h.: wir betrachten $\mathfrak{E} = (\hat{\mathfrak{P}}, \hat{\mathfrak{G}}, \hat{\mathrm{I}})$ mit

$$\hat{\mathfrak{P}} := \mathfrak{P} \cup \{U_i \in u\}, \qquad \hat{\mathfrak{G}} := \mathfrak{G} \cup \{u\},$$
$$\hat{\mathrm{I}} := \mathrm{I} \cup \{(U, u) \mid U \in u\} \cup \{(U, g) \mid g \in U,\ U \in u\}.$$

$\mathfrak{E}$ ist eine affine Inzidenzebene:

(A1) und (A2) sind leicht zu zeigen. Sei daher $g \in \hat{\mathfrak{G}}$, $P \in \hat{\mathfrak{P}}$ und $P \hat{\mathrm{I}} g$. Ist g eine v-Gerade, so sind genau die v-Geraden und die Gerade u in $\mathfrak{E}$ zu g parallel, also (A3, 1) erfüllt. Das gleiche gilt für $g = u$.

Sei daher g eine w-Gerade. Ist P eigentlich, so gibt es in $\mathfrak{A}$ zu g zwei Parallelen f_1, f_2 durch P. Wegen (36), Satz 16 und (46) gibt es je genau ein i_0, i_1, i_2 in $\{1, \ldots, N\}$ mit

$$g \in U_{i_0}, \qquad f_1 \in U_{i_1}, \qquad f_2 \in U_{i_2}.$$

Da U_{i_0} vollständig ist, gibt es ein f in U_{i_0} durch P. O.B.d.A. gilt $f = f_1$. Mit $f \in U_{i_0} \cap U_{i_1}$ und (46) ist $U_{i_0} = U_{i_1}$, wegen $f_1 \neq f_2$ also $U_{i_0} \neq U_{i_2}$, also f_2 in $\mathfrak{S}$ die einzige Parallele zu g durch P.

Ist P uneigentlich, also $P = U_i$, so kommt als Parallele zu g nur eine w-Gerade in Frage, und es gilt $g \notin U_i$. Es seien $Q_1, \ldots, Q_{N-1}$ die eigentlichen Punkte von g, q_j sei die v-Gerade durch Q_j $(j = 1, \ldots, N-1)$. Jedes q_j wird von jedem Element aus U_i geschnitten; verschiedene Elemente erzeugen verschiedene Schnittpunkte auf q_j: zu jedem q_j gibt es genau ein Element r_j von U_i, das aus q_j den Punkt Q_j ausschneidet. Es bleibt genau ein Element von U_i übrig, das zu g parallel ist, womit allgemein (A3, 1) erfüllt ist.

LEMMA 2. *Es seien $\mathfrak{S}$ ein vollständiges w-Parallelsystem einer Typ-II-Ebene $\mathfrak{A}$, a und b zwei sich schneidende w-Geraden von $\mathfrak{A}$ mit a aus $\mathfrak{S}$ und $\{c, d\} = \varphi(\{a, b\})$. Dann schneiden sich auch c und d, und genau eine dieser Geraden liegt in $\mathfrak{S}$.*

Beweis. Von den n Punkten von b liegt einer auf a, und die restlichen liegen auf $(n-1)$ der n Geraden von $\mathfrak{S}' := \mathfrak{S} \setminus \{a\}$. Es gibt also genau eine Gerade in $\mathfrak{S}'$, die zu a und zu b parallel ist; diese sei o.B.d.A. die Gerade c. Dann liegen die n Punkte der nicht in $\mathfrak{S}$ enthaltenen Geraden d auf den n Geraden von $\mathfrak{S}'$, womit d speziell c schneidet.

Wir bezeichnen im folgenden bei der Typ-II-Ebene $\mathfrak{A}$ mit K die Anzahl der vollständigen w-Parallelsysteme und mit F die Mächtigkeit von $\varphi^{-1}[\mathfrak{T}_S]$. Dann gilt mit Satz 17

$$T_S = F + \sum_{\{a,b\} \in \mathfrak{T}_P} \mu(\{a, b\}) \geq F + (N-3)\left[T_P - K\binom{N}{2}\right]. \tag{47}$$

Für einen beliebigen Punkt P bezeichne R_P die Anzahl der Elemente aus $\mathfrak{T}_S$, deren Schnittpunkt P ist und deren φ-Bild in $\mathfrak{T}_S$ liegt. Ist R das Minimum aller solcher R_P, so gilt mit (35)

$$F \geq NnR. \tag{48}$$

Es sei weiter $\{g_1, \ldots, g_{L_P}\}$ die Menge jener w-Geraden durch P, die sich in je ein vollständiges Parallelsystem einbetten lassen, $\{h_1, \ldots, h_{N-L_P}\}$ sei die Menge der restlichen w-Geraden durch P. Nach Lemma 2 trägt jedes Paar $\{g_i, h_k\}$ und jedes Paar $\{g_i, g_k\}$ mit $i \neq k$ zu R_P bei, woraus

$$2R_P \geq (2N - 1 - L_P)\, L_P \tag{49}$$

folgt. Nach Lemma 1 gilt

$$\frac{K}{2} \leqslant L_P \leqslant N,$$

das in (49) eingesetzt $4R \geq nK$ ergibt und dieses mit (48), (47) und Satz 17

$$K(N-5) \geq 2N(N-5). \tag{50}$$

Da durch einen Punkt N w-Geraden gehen, liefert Lemma 1 $K \leqslant 2N$, womit (50) erst ab $N \geq 6$ ein Ergebnis bringt, nämlich zusammen mit Satz 18

SATZ 19. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine Typ-II-Ebene mit Ordnung $N \geq 6$. Dann gibt es eine affine Inzidenzebene $\mathfrak{E}$ und eine Gerade u von $\mathfrak{E}$ derart, daß $\mathfrak{A} = (\mathfrak{E} \backslash u)$ gilt.*

Die Sätze 14 und 19 sagen aus, daß ab $N=6$ jede endliche biaffine Inzidenzebene vom Typ $(\mathfrak{E} \backslash U)$ oder $(\mathfrak{E} \backslash u)$ ist, also eine einfache Unterstruktur affiner Ebenen: die endlichen affinen Inzidenzebenen werden durch die Axiome der (endlichen) biaffinen Inzidenzebenen fast vollständig beschrieben.

6. Typ-III-Ebenen

Wir nennen eine endliche nichtvollständig biaffine Inzidenzebene $\mathfrak{A}$ eine Typ-III-Ebene, falls sie sich nicht als $(\mathfrak{E} \backslash U)$ oder $(\mathfrak{E} \backslash u)$ darstellen läßt. Nachfolgend werden systematisch alle diese Ebenen aufgeführt. Dabei gilt nach obenstehenden Sätzen für die Ordnung $2 \leqslant N \leqslant 5$. Die einzelnen möglichen Fälle werden zuerst nach (wachsendem) N unterschieden, bei festem N nach (wachsendem) $|\mathfrak{P}|$, bei festem N und $|\mathfrak{P}|$ nach (wachsendem) $|\mathfrak{G}|$.

$N=2$::

Es muß $3 \leqslant |\mathfrak{P}| \leqslant 5$ gelten (nach (9) und (A2)). Das Minimalmodell $\mathfrak{A}^M$ ist keine Typ-III-Ebene. Nimmt man zu $\mathfrak{A}^M$ noch zusätzliche Geraden hinzu, so tragen diese alle mindestens einen Punkt, gehen also durch A, B oder C, verletzen daher (A3, 2); für $|\mathfrak{P}|=3$ gibt es keine Ebenen.

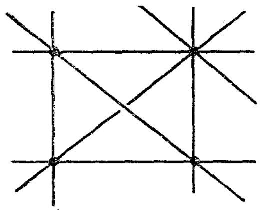

Abb. 1.

Für $N=2$ und $|\mathfrak{P}|=4$ ist mindestens $|\mathfrak{G}|=6$. Das affine Minimalmodell ist jedoch keine Typ-III-Ebene. Erweitert man es jedoch durch eine siebte Gerade, so erhält man die kleinste Typ-III-Ebene $\mathfrak{B}^1$ (Abbildung 1). Da jede weitere Gerade wegen $n=1$ durch einen der vier Punkte gehen muß, ist mit (A3, 2) der Fall $|\mathfrak{P}|=4$ erschöpft.

Die einzige Ebene mit $N=2$, $|\mathfrak{P}|=5$ ist die vollständige Ebene $\mathfrak{A}_2^2$, die nicht vom Typ III ist.

$N=3$::

Wegen Satz 8 ist $M \leqslant 4$ und daher $|\mathfrak{P}| \leqslant 9$. Da es eine Gerade a mit drei Punkten A, B, C und zu a eine Parallele b mit mindestens zwei Punkten D, E gibt, ist die in Abbildung 2 wiedergegebene Typ-III-Ebene $\mathfrak{B}^2$ mit $|\mathfrak{P}|=5$ und $|\mathfrak{G}|=8$ in jeder Ebene mit $N \geq 3$ enthalten. Für $N=3$, $|\mathfrak{P}|=5$ ist $\mathfrak{B}^2$ die einzige Ebene.

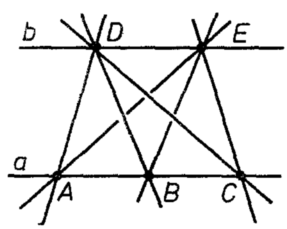

Abb. 2.

Würde eine Typ-III-Ebene mit $N=3$, $|\mathfrak{P}| \geq 6$ keinen Punkt enthalten, der auf der Geraden b der Unterstruktur $\mathfrak{B}^2$ liegt und von D, E verschieden ist, so müßte eine Parallele durch einen sechsten Punkt G zur Geraden a auch zu b parallel sein und einen siebten Punkt H tragen. Die einzige mögliche biaffine Ebene mit $N=3$ und $|\mathfrak{P}|=6$ ist daher die $(\mathfrak{E}^3 \backslash u)$, die keine Typ-III-Ebene ist ($\mathfrak{E}^3 \cdots$ affine Ebene mit $N=3$).

Ist $|\mathfrak{P}| \geq 7$, so gibt es einen Punkt G, der nicht auf den Geraden a oder b der Unterstruktur $\mathfrak{B}^2$ liegt. Wegen $M \leqslant 4$ liegt G auf einer Geraden von $\mathfrak{B}^2$ durch D, also o.B.d.A. auf $[AD]$. Analog erhält man o.B.d.A. G auf $[CE]$. Sei c eine Parallele zu a durch G. Dann kann von den Geraden $[BD]$ und $[BE]$ höchstens eine zu c parallel sein. O.B.d.A. schneide $[BD]$ die Gerade c in einem Punkt H, der von G verschieden ist und nicht auf b liegt. Wegen $M \leqslant 4$ liegt H auf einer Geraden von $\mathfrak{B}^2$ durch E; es muß H auf $[AE]$ liegen. Ist d eine Parallele zu $[BD]$ durch A, so liegt von den Punkten B, C, D, E, G, H keiner auf d; es gibt einen weiteren Punkt F auf d, und es ist $|\mathfrak{P}| \geq 8$. F liegt auf einer Geraden von $\mathfrak{B}^2$ durch D und nicht auf $[AD]$, nicht auf $[BD]$. Im Fall $F I b$ sind a, b zwei parallele Geraden mit je drei Punkten, im

Fall $FI[CD]$ trifft dies für die Geraden $[AE]$ und $[CD]$ zu. Es sei daher o.B.d.A. die Unterstruktur $\mathfrak{B}^2$ so gewählt, daß auch b einen dritten Punkt F trägt und dann $d=[AF]$ gilt (wegen $M \leqslant 4$). Da dann keiner der Punkte D, E, F auf c liegt, ist c auch zu b parallel.

Wegen $M \leqslant 4$ liegt F auf $[BG]$ und auf $[CH]$. Die bisher erarbeiteten acht Punkte A bis H und ihre Verbindungsgeraden bilden eine Unterstruktur $(\mathfrak{E}^3 \backslash U)$, die als solche nicht schon eine Typ-III-Ebene ist und auch nicht durch Hinzunahme weiterer Geraden zu einer solchen gemacht werden kann. Damit gibt es auch für $|\mathfrak{P}|=7, 8$ keine Typ-III-Ebenen.

Dies trifft auch für $|\mathfrak{P}|=9$ zu. Denn ein zu $(\mathfrak{E}^3 \backslash U)$ zusätzlicher neunter Punkt ergänzt diese Unterstruktur notwendig zur affinen Ebene $\mathfrak{E}^3$, die durch keine weiteren Geraden zu einer Typ-III-Ebene gemacht werden kann.

$N=4$, $N=5$::

Für $N \geq 4$ wurde ein Computer-Programm geschrieben. Es ergab sich, daß es für $N=5$ keine Typ-III-Ebene gibt und daß die durch folgendes Inzidenzschema beschriebene Typ-III-Ebene $\mathfrak{B}^3$ die einzige mit $N=4$ ist. Im Schema sind die Punkte mit großen Buchstaben, die v-Geraden mit kleinen Buchstaben und die w-Geraden mit Zahlen bezeichnet.

	a	*b*	*c*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	*			*	*	*	*												
B	*							*	*	*	*								
C	*											*	*	*	*				
D	*															*	*	*	*
E		*		*				*				*				*			
F		*			*				*				*				*		
G		*				*				*				*				*	
H		*					*				*				*				*
I			*	*					*						*			*	
J			*		*			*						*					*
K			*			*					*	*					*		
L			*				*			*			*			*			

Man erkennt, daß in $\mathfrak{B}^3$ jedes maximale w-Parallelsystem aus drei Geraden besteht.

Zusammenfassend hat man

SATZ 20. *Es gibt nur die Typ-III-Ebenen* $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^2$ *und* $\mathfrak{B}^3$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Pickert, G., *Projektive Ebenen*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.

Anschrift des Verfassers:

Manfred Oehler,
Mathematisches Institut B,
Universität Stuttgart,
7000 Stuttgart,
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 17.10.1974)