Chapter 26
Affin-geometrische Grundlagen der einheitlichen Feldtheorie

Von D.D. Kosambi, in Aligarh (Indien)

DDK's work on path-geometry started in Aligarh with [DDK3] *that was submitted to the Indian Journal of Physics,* [DDK5] *in French and this paper in German were basically expositions designed to present his work to a European audience and also, as it appears, to assert that these ideas were presented at a seminar on 5 March 1931. DDK had an extensive collection of scientific books in German and knew the language well; during his brief stay in Banaras prior to the writing of this paper, he had been teaching German language classes in addition to mathematics* [DDK-JK].

In einer früheren Arbeit[1] habe ich den Versuch gemacht, eine möglichst allgemeine Theorie der affinen Bahngeometrie aufzubauen. Dadurch wird auch die einfachste geometrische Grundlage zu den neueren einheitlichen Feldtheorien[2] geschaffen. Der erste Ansatz zu dieser Auffassung wurde durch die Bemerkung von. P. Straneo gegeben, daß die Autoparallelen von den geodätischen Linien zu unterscheiden sind. In einer rein-affinen Theorie erscheinen in der Tat zwei verschiedene Arten von Parallelismen, die sich aus einer nicht-distributiven Vektorderivierten bzw. aus der entsprechenden distributiven Derivierten ergeben. Dadurch und durch de Annahme der Existenz einer kovarianten Ableitung werden Fünfervektoren überflüssig gemackt, und die Tensoren der einheitlichen Theorie sowie neue bisher physikalisch nich gedeutete Tensoren ergeben sich ohne weiteres.

[1]D.D. Kosambi, Modern Differential Geometries, erschient demnächst in Indian Journal of Physics (1932). Diese Grundzüge dieser Theorie wurden im Mathmatischen Seminar der Aligarh Universität am 5. März 1931 vorgetragen.
[2]P. Straneo, diese Sitzungber., 1931, S. 319–325; Einstein und Mayer, ib., 1931, S. 541–557.

Published in Sitzungsberichten der Preussische Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische klasse **28**, 342–45 (1932).

R. Ramaswamy (ed.), *D.D. Kosambi*, DOI 10.1007/978-81-322-3676-4_26

1. Es werde ein System von Bahnkurven zugrunde gelegt, die als Lösungen eines allgemeinen Systems von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\ddot{x}^i + \alpha^i(x, \dot{x}, t) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n) \tag{26.1}$$

gegeben werden. Dabei bedeuten die x Punktkoordinaten, und t einen (will-kürlichen) Bahnparameter.

Die Vektorderivierte $D(u)^i$ längs einer willkürlichen Kurve möge nun folgendermaßen definiert werden:

$$D(u)^i = \dot{u}^i + u^k \gamma^i_k(x, \dot{x}, t) + \varepsilon^i(x, \dot{x}, t), \tag{26.2}$$

wobei:

$$\varepsilon^i = \alpha^i - \gamma^i_k \dot{x}^k. \tag{26.3}$$

Die Parallelverschiebung eines Vektors u^i wird durch $D(u)^i = 0$ erklärt. Infolge (26.3) sind die Bahnkurven (26.1) autoparallele Linien, d. h. $D(\dot{x})^i = 0$.

Da wir verlangen, daß $D(u)^i$ gleichzeitig mit u^i zu einem kontravarianten Vektor wird, lautet das Transformationsgesetz der γ^i_k folgendermaßen:

$$\bar{\gamma}^i_k \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \gamma^k_j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}. \tag{26.4}$$

Die γ^i_k werden keiner anderen Beschränkung untworfen. Es folgt unmittelbar, daß ε^i auch ein Vektor ist. Durch das Weglassen der ε^i wird eine distributive Vektorderivierte (die Nebenderivierte) erzeugt:

$$\mathfrak{D}(u)^i = \dot{u}^i + \gamma^i_k u^k \tag{26.5}$$

mit einem entsprechenden Nebenparallelismus.

2. Wir machen jetzt die weitere Annahme, daß jedes Vektorfeld $u^i(x)$ eine von der Kurvenrichtung $\dot{x}^i$ unabhängige kovariante Ablietung $u^i_{|r}$ besitzt, durch welche die Vektorderivierte nach der üblichen Regel erzeugt wird:

$$D(u)^i = u^i_{|r}\dot{x}^r. \tag{26.6}$$

Dafür ist es notwendig und hindreichend, daß:

$$\left.\begin{aligned} u^i_{|r} &= \frac{\partial u^i}{\partial x^r} + \gamma^i_{kr} u^k + \varepsilon^i_r \\ \gamma^i_k &= \gamma^i_{kr} \cdot \dot{x}^r \\ \varepsilon^i &= \varepsilon^i_r \cdot \dot{x}^r \end{aligned}\right\} \tag{26.7}$$

wo die γ^i_{kr} und ε^i_r von den $\dot{x}^i$ unabhängig sein müssen. Daraus ergibt sich:

$$\alpha^i = \gamma^i_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l + \varepsilon^i_r\dot{x}^r. \tag{26.8}$$

Diese sind also die allgemeinsten Übertragungen, die eine richtungsunabhängige kovariente Ableitung ermöglichen.

3. Der x Torsionstensor ist jetzt:

$$\Omega^i_{kl} = \gamma^i_{kl} - \gamma^i_{lk} \tag{26.9}$$

Wir setzen außerdem:

$$2\Gamma^i_{kl} = \gamma^i_{kl} + \gamma^i_{lk}. \tag{26.10}$$

Weitere Tensoren ergeben sich, wie a. a. O.[3] gezeigt wirde, aus Integrabilitätsbedingungen. Zunächst erhält man:

$$S^i_j = -\alpha^i_{,j} + \frac{1}{2}\frac{\partial\alpha^i_{,k}}{\partial\dot{x}^j}\dot{x}^k + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\alpha^i}{\partial\dot{x}^j\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\alpha^i}{\partial\dot{x}^j\partial\dot{x}^k}\alpha^k + \frac{1}{4}\frac{\partial\alpha^i}{\partial\dot{x}^k}\frac{\partial\alpha^k}{\partial\dot{x}^j} \tag{26.11}$$

$\left(\text{wie üblich, wird gesetzt: } f^{\cdots}_{\ldots,k} = \frac{\partial f^{\cdots}_{\ldots}}{\partial x^k}\right).$

Wird, weiter S^i_{jk} durch

$$3S^i_{jk} = \frac{\partial S^i_k}{\partial\dot{x}^j} - \frac{\partial S^i_j}{\partial\dot{x}^k} \tag{26.12}$$

definiert, so ist

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial S^i_{jk}}{\partial\dot{x}^l} \tag{26.13}$$

(bei geeigneter Anordnung der Indizes) der gewöhnliche Riemann-Christoffelsche Krümmungstensor.

In unserem Falle, wo die α^i die Bedingungen (26.8) erfüllen, hat man:

$$S^i_j = K^i_{jkl}\dot{x}^k\dot{x}^l + W^i_{jk}\dot{x}^k + V^i_j. \tag{26.14}$$

Dabei sind:

$$\left.\begin{aligned} K^i_{jkl} &= \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^i_{jl,k}) - \Gamma^i_{kl,j} + \frac{1}{2}(\Gamma^i_{kr}\Gamma^r_{jl} + \Gamma^i_{lr}\Gamma^r_{jk}) - \Gamma^i_{jr}\Gamma^r_{kl} \\ W^i_{jk} &= -\varepsilon^i_{k,j} + \frac{1}{2}\varepsilon^i_{j,k} - \varepsilon^r_k\Gamma^i_{jr} + \frac{1}{2}\varepsilon^i_r\Gamma^r_{jk} + \frac{1}{2}\varepsilon^r_j\Gamma^i_{rk} + \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial t} \\ V^i_j &= \frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon^i_j}{\partial t} + \frac{1}{4}\varepsilon^i_r\varepsilon^r_j \end{aligned}\right\} \tag{26.15}$$

[3]Siehe Anm. 1 auf S. 342.

Der Riemann-Christoffelsche Krümmungstensor hängt nur von K^i_{jkl} ab und wird leicht berechnet. Wir definieren nun den weiteren Tensor:

$$\varepsilon^i_{jk} = \varepsilon^i_{j,k} + \varepsilon^r_j \Gamma^i_{rk} - \varepsilon^i_r \Gamma^r_{jk} \tag{26.16}$$

(das ist nur die gewöhnliche kovariante Ableitung der ε^i_j für den symmetrischen Zussamenhang Γ^i_{jk}).

Dann läßt sich die folgende Identität leicht verifizieren:

$$W^i_{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon^i_{jk} - \varepsilon^i_{kj} + \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial t}. \tag{26.17}$$

4. Die Gleichungen der in der neueren Zeit von verschiedenen Autoren vorgeschlagen Feldtheorien können mittels unserer Tensoren ausgedrückt werden, wie wir am Beispiel der Einstein-Mayerschen Theorie erklären wollen, wenn man noch eine Riemannsche Grundform zu Hilfe nimmt, die das Herauf-bzw. Herunterziehen von Indizes ermöglicht; dabei wird ein vierdimensionaler Raum zugrunde gelegt, und es wird auch angenommen, daß der Bahnparameter t nirgends explizit vorkommt. Die jetzt eingeführte Grundform wird mit unserem Parallelismus durch die weitere Annahme in Beziehung gesetzt, daß die geodätischen Linien der Grundform mit den ≫Nebenbahnkurven≪

$$\ddot{x}^i + \gamma^i_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l \equiv \ddot{x}^i + \Gamma^i_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l = 0 \tag{26.18}$$

zusammenfallen. Allgemeiner könnte man aber annehmen, daß die Nebenbahnkurven Extremalen eines nich-entarten Variationsproblemes sind, desen Integrand alsdann als Metrik benutzt werden kann.

Wir setzen also

$$\Gamma^i_{jk} = \begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}. \tag{26.19}$$

Der Einstein-Mayersche Tensor F^i_j wird in unserer Schreibweise:

$$-\varrho F^i_j = \varepsilon^i_j. \qquad (\varrho = \text{Konstante}) \tag{26.20}$$

Die Einstein-Mayerschen Gleichungen lauten nun, unter Benutzung der Tensoren W^i_{jk}, V^i_j:

$$\left.\begin{aligned} &(a)\ \ \varepsilon_{ik}\varepsilon_{ki} = 0, \quad \varepsilon_{ik} = g_{ir}\varepsilon^r_k \\ &(b)\ \ W_{ijk} + W_{jki} + W_{kij} = 0, W_{ijk} = g_{ir}W^r_{jk} \\ &(c)\ \ \varepsilon^k_{ik} = 0 \\ &(d)\ \ \frac{\varrho^2}{4}(R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R) + (V^i_j - \frac{1}{4}\delta^i_j V) = 0, \quad V = V^k_k. \end{aligned}\right\} \tag{26.21}$$

Wenigstens ein Teil dieser Gleichungen is nun rein-affin. Zunächst is dies der Fall für Gleichung (26.21c). Weiter folgt aus (26.21a):

$$\varepsilon^k_{ki} = 0 \tag{26.22}$$

oder, mit Hilfe von (26.17) ausgedrückt und unter Beifügung von (26.21c):

$$W^k_{ki} = 0, \quad W^k_{ik} = 0, \tag{26.23}$$

wodurch (26.21c) ersetzt werden darf.

In bekannten Spezialfall, wo die absolute Krümmung identisch verschwindet, bekommt man statt (26.21d) die weiteren rein-affinen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} R_{ij} &= 0 \\ V^i_j - \frac{1}{4}\delta^i_j \cdot V &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{26.24}$$

In diesem Spezialfall gilt, wie aus (26.23) and (26.24) folgt:

$$S_i = S^k_{ki} = 0, \tag{26.25}$$

was aber nicht genügt, um diesen Fall zu charakterisieren.

Wie ersichtlich, bekommt man sämtliche zu benutzende Tensoren durch die Annahme, erstens, der Existenz einer kovarianten Ableitung, die den zugrunde gelegten Parallelismus erzeugt, und, zweitens, der Ableitbarkeit des dazu gehörigen Nebensparallelismus aus einer Grundform. Wie oben bemerkt wurde, hängt die Verallgemeinerung der zweiten Annahme von der Lösung des Umkehrproblemes der Variationsrechnung ab, worüber ich meine Resultate anderswo zu veröffentlichen beabsichtige. Deshalb möge es auch dahingestellt bleiben, ob überhaupt eine rein-affine Feldtheorie möglich sei: dabei wäre auch gewiß der Torsionstensor zu benutzen, der, wie bekannt, in den früheren Theorien von Einstein eine wichtige Rolle spielte.