Chapitre 26

George William Hill

George William Hill (1838–1914) a appris les mathématiques et la mécanique céleste à *Rutgers College*, auprès du mathématicien Theodore Strong, ami du traducteur de la *Mécanique céleste* de Laplace, Nathaniel Bowditch. Strong (1790–1869) lui a fait connaître l'œuvre de l'école mathématique française, dont le *Traité du calcul différentiel et intégral* de Lacroix, le *Traité de mécanique* de Poisson, la *Mécanique analytique* de Lagrange, et les *Fonctions elliptiques* de Legendre, entre autres (Woodward 1914). En 1859, Hill a obtenu le diplôme de *Bachelor of Arts* à Rutgers, et peu après, il est entré au bureau du *Nautical Almanac*, où il sera employé jusqu'à sa retraite, d'abord à Cambridge puis, à partir de 1867, à Washington, D.C.

La théorie de la lune a attiré l'attention de Hill dans les années 1870, alors qu'on disposait de deux méthodes de calcul : celle de Hansen, plutôt numérique et celle de Delaunay, plus algébrique. Hill s'est convaincu que ces deux méthodes étaient inadéquates, et en 1877–1878, il en a proposé une troisième, qui s'est montrée, avec les apports de Ernest W. Brown à partir des années 1890, supérieure à ses prédécesseurs, jusqu'à remplacer en 1922 la méthode de Hansen utilisée pour les almanachs.

Hill aurait aimé parfaire sa propre théorie, mais il n'a pas eu le temps de le faire. Lorsque Simon Newcomb a pris la direction du *Nautical Almanac* en 1877, il a confié a Hill les tâches de refonte de la théorie de Jupiter et de Saturne, dans un projet ambitieux de réfection des tables de toutes les planètes, ainsi que la refonte des tables lunaires, selon la méthode de Hansen. Ces travaux ont absorbé les efforts de Hill jusqu'à sa retraite en 1892.

Hill a obtenu la médaille d'or de la *Royal Astronomical Society* en 1887, le prix Damoiseau de l'Institut de France en 1898, et la médaille Bruce de l'*Astronomical Society of the Pacific* in 1909. Il a présidé l'*American Mathematical Society* en 1895–1896, et a enseigné la mécanique céleste à *Columbia University* entre 1898 et 1901.

Poincaré estimait les contributions de Hill, qu'il a présentées dans son introduction aux *Collected Papers* de ce dernier (Poincaré 1905a). Deux contributions en particulier ont retenu l'attention de Poincaré. D'abord, dans son calcul de la périgée lunaire, Hill a rencontré un déterminant d'ordre infini, qu'il a réussi à résoudre. Par conséquent, Hill a

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_26

non seulement simplifié les calculs par rapport à la méthode de Delaunay, son exemple a incité Poincaré à reprendre son analyse, dans un article qui lancera une vague de développements à propos des déterminants infinis (Poincaré 1900d ; Bernkopf 1968). Ensuite, le travail de Hill sur une solution périodique du problème des trois corps (terre-lune-soleil) a été, comme l'a remarqué Poincaré, "le premier exemple d'une solution périodique du problème des 3 corps," alors que ces solutions périodiques "ont pris une importance tout à fait capitale en Mécanique Céleste"(Poincaré 1905a, XII).

La correspondance entre Hill et Poincaré comprend une seule lettre, envoyée par Hill en remerciement pour le premier tome des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Poincaré avait noté qu'une des affirmations de Hill sur les orbites de lunes était inexactes ; Hill a reconnu son erreur. [1]

26.1 Hill à Poincaré

1892 Jan. 20
Nautical Almanac Office — Washington D.C.

M. H. Poincaré — Membre de l'Institut — Professeur à la Faculté des Sciences — Paris, France

Cher Monsieur :
J'ai reçu l'exemplaire de Tom. I de votre *"Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste"* que vous avez été aussi bon que d'envoyer. [2] Acceptez mes remerciements.
Relativement à votre critique de ma affirmation de la lune de lunaison maximum (pp. 104–109), vous avez raison j'admets. [3] Il m'échappa que la rotation des axes des coordonnées

1. À propos de la théorie lunaire dite de Hill-Brown, voir C. Wilson (2010), et sur l'influence de Hill sur Poincaré, voir Nauenberg & Charpentier (2006). Pour des survols de la vie de Hill, voir Moulton (1914) et Brown (1916).

2. Poincaré 1892b.

3. Dans ses *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Poincaré s'intéresse aux "recherches de M. Hill sur la lune" par rapport aux solutions périodiques. Il reprend l'étude de Hill du problème des trois corps lorsque la masse d'un des corps (C) est très grande par rapport à celle des deux autres corps et que la distance entre le corps le plus massique (C) et un des autres corps (A) est très grande :

> Si, en même temps, on rapporte la masse B à deux axes mobiles, à savoir un axe $A\xi$ coïncidant avec AC et à un axe $A\eta$ perpendiculaire au premier, les équations du mouvement deviendront comme M. Hill l'a démontré,
>
> $$\begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{\mu}{r^3} - 3n^2\right)\xi = 0 \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} - 2n\frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{\mu}{r^3}\right)\eta = 0\ ; \end{cases} \tag{1}$$
>
> n désigne la vitesse angulaire de C.
> Les solutions de la première sorte subsistent encore dans ce cas et ce sont celles dont M. Hill a reconnu le premier l'existence, ainsi qe l'ai dit plus haut. [...]
> Les équations (1) admettent une intégrale qui s'écrit
>
> $$\frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - \frac{\mu}{r} - \frac{3}{2}n^2\xi^2 = C.$$
>
> (Poincaré 1892b, 104–105, avec correction d'une coquille, $\mu/2 \to \mu/r$)

rendît le mouvement de l'élongation rétrograde pendant que la lune maintînt un mouvement direct en espace. En faisant la quadrature mécanique à partir de l'axe de x, je me trompe en s'attendant la quadrature symétrique toujours à la *première* intersection de la courbe avec l'axe de y. Evidemment, il faut quelquefois de prolonger la courbe à l'intersection deuxième.

Je note que votre équation de p. 105 il faut de lire $1/C$ à la place de C pour que les re-

---

Hill étudie alors numériquement les variations de la trajectoire périodique en fonction de C.

> The method of employing numerical values, from the outset, in the equation of condition, determining the a_i, is far less laborious than the literal development of these coefficient in powers of a parameter. (Hill 1878, 245)

La forme de la trajectoire "rappelle grossièrement celle d'une ellipse dont le grand axe serait l'axe des η". Lorsque C augmente, l'excentricité augmente et Hill montre que pour une certaine valeur C_0 de C, la courbe présente deux points de rebroussement situés sur l'axe des η. Hill dénomme cette orbite "Moon of maximum lunation" :

> Any information regarding the motion of satellites having long periods of revolution about their primaries will doubtless be welcome, as the series given by previous investigators are inadequate for showing anything in this direction. Hence this chapter will be terminated by a table of the more salient properties of the class of satellites having the radius at a minimum in syzygies and at a maximum in quadratures. For this end I have selected, besides the earth's moon, taken for the sake of comparison, the moons of 10, 9, 8, ..., 3 lunations in the periods of their primaries, and also what may be called the moon of maximum lunation, as, of the class of satellites under discussion, exhibiting the complete round of phases, it has the longest lunation. (Hill 1878, 250)

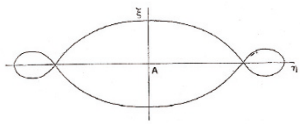
Hill termine son article par une série de courbes construites point par point représentant la trajectoire de la lune terrestre, des lunes présentant quatre et trois lunaisons ainsi que celle de lune de lunaison maximum :

> The moons in the first lines of the table have paths which approach the ellipse quite closely, but the paths of the moons of the last lines exhibit considerable deviation from this curve, while the orbit of the moon of maximum lunation has sharp cusps at the points of quadrature. (Hill 1878, 260)

Hill affirme sans démonstration ni même justification qu'au-delà de la valeur critique C_0, les solutions périodiques n'existent plus, ou du moins se réduisent à des oscillations qui n'intersectent pas l'axe η des quadratures :

> Whether this class of satellites is properly to be prolonged beyond this moon, can only be decided by further employment of mechanical quadratures. But it is at least certain that the orbits, if they do exist, do not intersect the line of quadratures, and that the moons describing them would make oscillations to and fro, never departing as much as 90° from the point of conjunction or of opposition. (Hill 1878, 259)

Poincaré montre que "la classe de satellites découverte par M. Hill peut être prolongée au-delà de la Lune de lunaison maximum" (Poincaré 1892b, 108) et il étudie la forme de l'orbite de la lune au-delà de la valeur critique :

> La trajectoire relative pour $C > C_0$ présente donc la forme représentée par la figure ci-contre.
> Dans le cours d'une période, la masse $\boldsymbol{B}$ se trouve six fois en quadrature, car sa trajectoire relative coupe l'axe des η en deux points doubles et en deux points simples.
>
> 
>
>
> Ainsi M. Hill se trompe en supposant que cette sorte de satellites ne seraient jamais en quadrature ; *il y aurait, au contraire, trois quadratures entre deux syzygies consécutives*. (Poincaré 1892b, 109)

Une figure analogue a été publiée par W. Thomson (1892). Pour une étude de cette orbite voir Wintner (1928) et Szebehely (1967, chap. 10).

marques suivantes relatives à C s'appliquent.
Les brillantes additions que vous avez contribué à la mécanique céleste causent en moi un vif regret d'avoir négligé pour aussi long un temps les recherches de cette sorte. Cependant j'ai été industrieux dans une autre direction.[4]
En terminant, permettez moi de vous remercier pour votre bienfaisant intérêt en mes contributions à la théorie lunaire et pour la flatteuse mention vous en avez faite dans vos écritures.
Agréez, Monsieur, etc. — Votre serviteur dévoué,
G.W. Hill

ALS 3p. Collection particulière, Paris 75017.

4. Hill n'a rien publié en mécanique céleste entre 1880 et 1895. Durant cette période, il suivait le programme de travail proposé par Simon Newcomb, de reconsidérer l'ensemble des mouvements des planètes du système solaire, et a fini par perfectionner les théories de Saturne et de Jupiter (Hill 1890). Hill a pris sa retraite en 1892, et a repris alors ses études théoriques, ce qui aboutira à plusieurs articles sur le problème des trois corps et sur la théorie de Delaunay (Hill 1895, 1900, 1902).