Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives

Scott A. Walter, éditeur
Philippe Nabonnand,
Ralf Krömer,
Martina Schiavon,
éditeurs associés

La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens

Birkhäuser

Birkhäuser

Publications des Archives Henri-Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives

La correspondance d'Henri Poincaré

La correspondance d'Henri Poincaré est éditée par les Archives Henri Poincaré (Laboratoire de Philosophie et d'Histoire des Sciences, UMR 7117 du CNRS) sous la direction de Gerhard Heinzmann. Elle comportera six volumes.

Collected correspondence of Henri Poincaré

The collected correspondence of Henri Poincaré is edited by the Henri Poincaré Archieves (Laboratoire de Philosophie et d'Histoire des Sciences, UMR 7117 du CNRS) under the direction of Gerhard Heinzmann. It shall include six volumes.

La correspondance entre Henri Poincaré et Gösta Mittag-Leffler.
Présentée et annotée par Philippe Nabonnand

La correspondance entre Henri Poincaré et les physiciens, chimistes et ingénieurs.
Présentée et annotée par Scott A. Walter en collaboration avec Étienne Bolmont et André Coret

La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens.
Sous la direction de Scott A. Walter, éditeur, Philippe Nabonnand, Ralf Krömer et Martina Schiavon, éditeurs associés

La correspondance entre Henri Poincare et les mathématiciens.
Sous la direction de Philippe Nabonnand, éditeur, Olivier Bruneau, Philippe Henry, Jean Mawhin, Klaus Volkert et Scott A. Walter, éditeurs associés

La correspondance de jeunesse d'Henri Poincaré.
Les années de formation: de l'École polytechnique à l'École des mines (1873-1878)
Sous la direction de Laurent Rollet

La correspondance administrative et privée d'Henri Poincaré.
Académie des sciences, Affaire Dreyfus, Revue de métaphysique et de morale
Sous la direction de Laurent Rollet

La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens

Sous la direction de
Scott A. Walter, éditeur,
Philippe Nabonnand, Ralf Krömer et
Martina Schiavon, éditeurs associés

Birkhäuser

Editors
Scott A. Walter
Centre François Viète
Université de Nantes
Nantes Cedex 3, France

Ralf Krömer
Fachgruppe Mathematik und Informatik
Bergische Universität Wuppertal
Germany

Philippe Nabonnand
LHPS – Archives Henri Poincaré
Nancy, France

Martina Schiavon
LHPS – Archives Henri Poincaré
Nancy, France

Publications des Archives Henri Poincaré Publications of the Henri Poincaré Archives
ISBN 978-3-7643-7167-8 ISBN 978-3-7643-8293-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3

Library of Congress Control Number: 2016947084

Printed on acid-free paper

This Book is published under the trade name Birkhäuser.
The registered company is Springer International Publishing AG Switzerland (www.birkhauser-science.com)

Table des matières

Introduction au Volume 3 ix

Archives dépositaires xv
Abréviations xvi
Avertissement xvii

Textes

1 Oskar Backlund 1
2 Benjamin Baillaud 5
3 Marcel Bertrand 9
4 Guillaume Bigourdan 11
5 Roland Bonaparte 15
6 Robert Bourgeois 18
7 Henry Bourget 22
8 Martin Brendel 24
9 Octave Callandreau 25
10 Carl Vilhelm Ludvig Charlier 37
11 William Henry Mahoney Christie 48
12 Nicolæ Coculesco 54
13 Louis Joseph Auguste Commines de Marsilly 57
14 Eugène Cosserat 61
15 George Howard Darwin 64
16 Henri Deslandres 134
17 Hervé Faye 136
18 Camille Flammarion 138
19 Wilhelm Julius Foerster 142
20 Maurice Fouché 144
21 Hugo Gyldén 145
22 Maurice Hamy 148
23 Spiru C. Haret 150
24 Philippe Hatt 154
25 Friedrich Robert Helmert 156
26 George William Hill 159
27 Jules Janssen 163
28 Jean Pierre Charles Lallemand 166
29 Albert-Auguste Cochon de Lapparent 170

30 Aimé Laussedat . . . 173
31 Auguste Lebeuf . . . 176
32 Aleksandr Mikhailovich Liapunov . . . 210
33 Anders Lindstedt . . . 221
34 Norman Lockyer . . . 254
35 Edgar Odell Lovett . . . 257
36 George William Myers . . . 262
37 Simon Newcomb . . . 265
38 Henri Joseph Perrotin . . . 273
39 Pierre Puiseux . . . 276
40 Rodolphe Radau . . . 278
41 Karl Schwarzschild . . . 280
42 Martial Simonin . . . 283
43 Thorvald Nicolai Thiele . . . 300
44 François-Félix Tisserand . . . 302
45 Aloys Verschaffel . . . 307
46 Max Wolf . . . 309

47 Le Bureau des longitudes . . . 311
47.1 Raoul de Saint-Arroman (cabinet) à Poincaré . . . 312
47.2 Raul-Blaise de Saint-Arroman à Poincaré . . . 313
47.3 Georges Leygues (cabinet) à Poincaré . . . 313
47.4 Georges Leygues (cabinet) à Poincaré . . . 314
47.5 Anatole Bouquet de la Grye à Poincaré . . . 314
47.6 Georges Leygues (cabinet) à Poincaré . . . 315
47.7 Poincaré à Georges Leygues . . . 315
47.8 Poincaré à Georges Leygues . . . 316
47.9 H. Poincaré. Note sur les observations en géodésie . . . 316
47.10 Charles Henry Davis à Poincaré . . . 317
47.11 Georges Leygues (cabinet) à Poincaré . . . 318
47.12 Annibale Riccò à Poincaré . . . 319
47.13 Poincaré à Georges Leygues . . . 320
47.14 Georges Leygues (cabinet) à Poincaré . . . 320
47.15 Georges Leygues (cabinet) à Poincaré . . . 321
47.16 Poincaré à Georges Leygues . . . 321
47.17 Georges Leygues à Poincaré . . . 322
47.18 Poincaré à Raoul Blaise de Saint-Arroman . . . 322
47.19 Raoul Blaise de Saint-Arroman à Poincaré . . . 323
47.20 H. Poincaré : Rapport sur une lettre de Helmert . . . 323
47.21 Poincaré à Aristide Briand . . . 329
47.22 Poincaré à Léon Bourgeois . . . 329
47.23 Aristide Briand (cabinet) à Poincaré . . . 330
47.24 Aristide Briand (cabinet) à Poincaré . . . 330
47.25 Aristide Briand (cabinet) à Poincaré . . . 331
47.26 Aristide Briand (cabinet) à Poincaré . . . 331

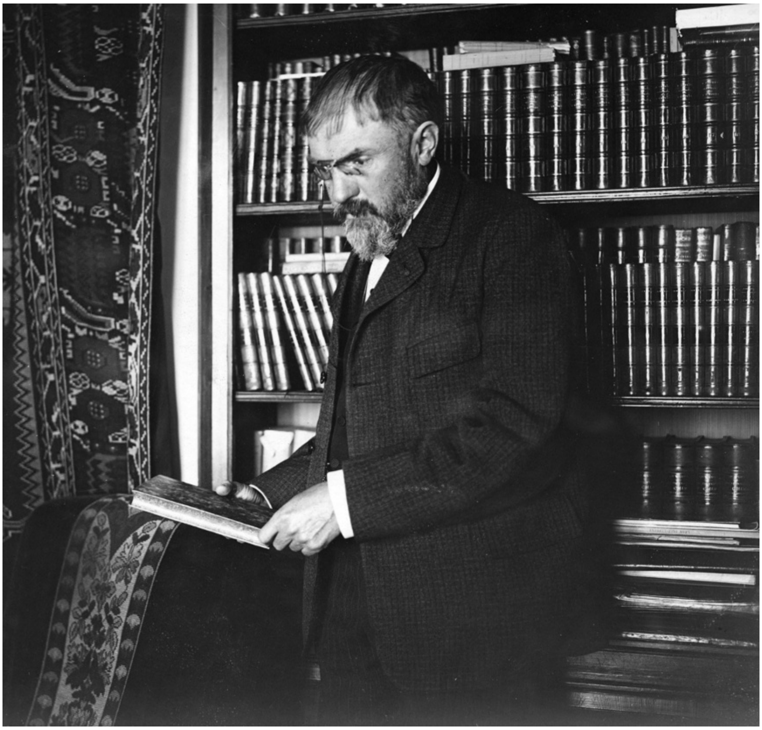
47.27 Poincaré à Gaston Doumergue 332
47.28 H. Poincaré : Sur un projet de carte 332
47.29 Poincaré à Gaston Doumergue 333
47.30 Poincaré à Gaston Doumergue 334
47.31 Poincaré à Gaston Doumergue 335
47.32 Gaston Doumergue (cabinet) à Poincaré 336
47.33 Gaston Doumergue (cabinet) à Poincaré 337
47.34 Gaston Doumergue (cabinet) à Poincaré 337
47.35 Gaston Doumergue (cabinet) à Poincaré 338
47.36 Gaëtan Blum à Poincaré 338
47.37 Poincaré à Gaston Doumergue 338
47.38 Poincaré à Gaston Doumergue 340
47.39 Poincaré à Gaston Doumergue 340
47.40 Poincaré à Gaston Doumergue 341
47.41 Poincaré à Gaston Doumergue 342
47.42 Gaston Doumergue (cabinet) à Poincaré 342
47.43 Gaston Doumergue (cabinet) à Poincaré 344
47.44 Poincaré à Gaston Doumergue 344
47.45 Poincaré à Gaston Doumergue 344
47.46 Poincaré à Gaston Doumergue 345
47.47 Gaston Doumergue (cabinet) à Poincaré 345
47.48 Poincaré à Gaston Doumergue 346
47.49 Maurice-Louis Faure (cabinet) à Poincaré 346
47.50 Poincaré à Maurice-Louis Faure 347
47.51 Poincaré à Maurice-Louis Faure 347
47.52 Théodore Steeg (cabinet) à Poincaré 348
47.53 J. Tessin à Poincaré 348

48 Documents divers 349
48.1 H. Poincaré : Résumé d'un mémoire pour *Le Temps* 349
48.2 H. Poincaré : Le prix du Roi Oscar II 351
48.3 F.-F. Tisserand : Note sur les travaux de Poincaré 353
48.4 H. Poincaré et al. : Rapport sur la thèse de Coculesco 355
48.5 H. Poincaré : Rapport sur la thèse de M. Simonin 356
48.6 Karl Schwarzschild à George Howard Darwin 357
48.7 Karl Schwarzschild à George Howard Darwin 359
48.8 Oskar Backlund au Comité Nobel 360

Compléments au Volume 2

2.12.6 Marcel Brillouin à Poincaré 361
2.63 Heike Kamerlingh Onnes 362
2.63.1 Poincaré à Kamerlingh Onnes 363
2.63.2 Poincaré à Kamerlingh Onnes 363
2.63.3 Poincaré à Kamerlingh Onnes 364

Bibliographie 365



Henri Poincaré à Paris vers 1910 (Archives Henri Poincaré)

Introduction au Volume 3

Dans ce troisième volume de la correspondance d'Henri Poincaré se trouvent transcrits et annotés deux cent quarante-quatre documents concernant ses échanges avec les astronomes, les géodésiens, et les institutions apparentées entre le mois d'août, 1880 et le mois de juillet, 1912. Depuis la publication du tome 2, consacré à la correspondance entre Poincaré et les physiciens, chimistes, et ingénieurs (Walter, Coret & Bolmont 2007), quatre lettres inédites ont été découvertes qui ont leur place dans ce même tome. Nous les publions ici en fin d'ouvrage, en tant que "compléments au deuxième volume".

La structure du Volume

Dans la première partie du volume, les échanges entre Poincaré et ses correspondants astronomes ou géodésiens sont présentés ensemble en quarante-six chapitres, par ordre alphabétique. Ce mélange de disciplines scientifiques reflète parfois l'activité scientifique de Poincaré, mais aussi celle de Bigourdan, Darwin, Foerster, Schwarzschild et d'autres savants dont nous publions des échanges. Presque toutes les lettres de cette section sont inédites, à l'exception de deux groupes d'échanges. D'abord, l'échange entre Liapunov et Poincaré a été transcrit et annoté par Smirnov & Youchkevitch (1987). Ensuite, l'échange entre George Howard Darwin et Poincaré a été transcrit et commenté par Gharnati dans sa thèse de doctorat (1996). Pour les deux échanges, nous avons établi de nouvelles transcriptions à partir des manuscrits, et annoté les lettres selon les principes présentés dans l'Avertissement.

Le quarante-septième chapitre contient les échanges issus directement de l'activité de Poincaré au sein du Bureau des longitudes. Les savoirs d'astronomes et les savoirs de géodésiens ont été déployés dans le cadre de cette institution publique, qui a vu le jour à la fin du XVIII^{e} siècle. Henri Poincaré, alors qu'il était titulaire de la chaire de physique mathématique à la Faculté des sciences de Paris, a été nommé en 1893 membre du Bureau des longitudes, sur la recommandation de Félix Tisserand, titulaire de la chaire d'astronomie mathématique, et membre du Bureau des longitudes.

Pendant sa carrière au Bureau des longitudes, Poincaré a assuré la présidence en 1899, 1909, et 1910. Les traces documentaires de l'activité de Poincaré dans son rôle présidentiel sont très nombreuses ; les cinquante-trois lettres et rapports publiés ici n'en sont qu'une partie. Néanmoins, nous avons regroupé toutes les lettres envoyées ou reçues par Poincaré en tant que membre du Bureau de longitudes dans ce chapitre (§ 3-47), pour ne pas négliger cet aspect de son activité, mais également parce que la correspondance et les rapports de Poincaré permettent de voir comment fonctionnait cette institution dans les contextes nationaux et internationaux de la science d'état à la Belle Époque.

Dans le chapitre suivant, nous publions le rapport rédigé par Tisserand en faveur de la nomination de Poincaré au Bureau des longitudes (§ 3-48-3). D'autres rapports et lettres sont publiés dans ce même chapitre quarante-six, dont la lecture permet de mieux comprendre les échanges entre Poincaré et ses interlocuteurs astronomes ou géodésiens, ou ses propres contributions à la mécanique céleste. Nous publions ici, par exemple, la lettre de nomination pour le prix Nobel de physique rédigée par Oskar Backlund en faveur de Poincaré. Sont également publiés dans ce chapitre, des rapports rédigés par Poincaré à propos du travail de ses correspondants astronomes ou géodésiens. Deux soutenances de thèses, l'une par Coculescu et l'autre par Simonin ont fait l'objet d'un rapport. Nous avons publié deux lettres envoyées par Karl Schwarzschild à George Howard Darwin dans ce chapitre, parce qu'elles rendent plus aisée la lecture de la lettre de Schwarzschild à Poincaré (§ 3-41-1).

Nous publions également dans le chapitre quarante-sept deux textes inédits de Poincaré. Les deux textes ont l'un et l'autre été publiés partiellement, mais sans attribution à Poincaré. Le premier texte (§ 3-48-1) correspond à une notice anonyme parue au journal *Le Temps* à propos d'une publication de Poincaré dans les *Acta mathematica* sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation (Poincaré 1885b). Le deuxième texte (§ 3-48-2) est un fragment trouvé aux archives départementales de l'Essonne par Laurent Rollet. Ce fragment correspond à une notice signée par Camille Flammarion à propos du prix du Roi Oscar II, parue dans le journal de Flammarion, *L'Astronomie*. Ce dernier texte est particulièrement intéressant, en ce qu'il montre ce que Poincaré trouvait louable dans son célèbre mémoire sur le problème des trois corps, après avoir obtenu le prix, mais *avant* d'avoir compris qu'il avait mal vu les conditions de fermeture d'une courbe, un aperçu qui devait le mettre sur le chemin d'une grande découverte : l'existence des orbites doublement hyperboliques.

Le problème des trois corps

À partir de 1882, alors qu'il développe sa théorie des fonctions fuchsiennes et sa théorie qualitative des équations différentielles, Poincaré trouve le temps de commencer à s'intéresser à certaines questions de mécanique céleste, avec en filigrane, le problème des trois corps. Ainsi, il publie en 1882 deux notes consacrées l'une à l'*intégration des équations différentielles par les séries* (Poincaré 1882e), l'autre aux *séries trigonométriques* (Poincaré 1882d), dont la motivation est explicitement la mécanique céleste. Poincaré poursuit en 1883 son approche de la mécanique céleste en publiant une première note consacrée au problème (restreint) des trois corps (Poincaré 1883a), dans laquelle il montre que le problème (restreint) des trois corps admet une infinité de solutions périodiques. Ces premiers travaux attirent l'attention de son condisciple à l'École polytechnique, Octave Callandreau et de l'étoile montante de l'Observatoire de Paris, Félix Tisserand. Ce dernier, qui a en charge d'animer la nouvelle revue française d'astronomie, le *Bulletin astronomique*, invite Poincaré à développer dans son journal les notes parues dans les *Comptes rendus* ; Poincaré proposera deux articles (Poincaré 1884a, 1884b). Le premier article montre l'existence de solutions périodiques du problème restreint des trois corps et les classe en fonction des conditions à l'origine ; cette classification sera reprise beaucoup plus tard, en 1892, dans le premier tome des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (Poincaré 1892b). Dans le traité de 1892, en rendant possible l'étude des solutions asymptotiques et doublement asymptotiques, la démonstration de l'existence de solutions périodiques et l'analyse de leur développement en série sont présentées comme la première étape de la résolution du problème des trois corps. En 1884, Poincaré n'insiste que sur l'intérêt pratique des solutions périodiques en soulignant que si les éléments à l'origine des masses sont proches de ceux d'une solution périodique,

> ... on pourra rapporter les positions véritables des trois masses aux positions qu'elles occuperaient dans cette solution périodique et se servir, par conséquent, de cette solution comme d'une *orbite intermédiaire*. (Poincaré 1884a, 72)

C'est en étudiant les développements non-convergents obtenus de cette manière que Poincaré sera amené à faire le lien avec ses résultats sur les développements asymptotiques obtenus dans le cadre de ses travaux sur les équations différentielles linéaires (Poincaré 1886a), et à proposer l'idée de solution asymptotique comme des solutions se rapprochant asymptotiquement des solutions périodiques lorsque t tend vers $\pm\infty$. Le second article publié en 1884 dans le *Bulletin astronomique* traite de la convergence des séries trigonométriques. Les résultats obtenus dans cet article sont aussi repris dans le premier tome des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Poincaré distingue différentes notions de convergence : convergence absolue, convergence uniforme et semi-convergence. Il montre en particulier qu'une série trigonométrique absolument convergente mais non uniformément convergente n'est pas bornée. Il en déduit un résultat applicable en mécanique céleste, pour une démonstration de stabilité, il faut que les convergences soient uniformes, et un résultat d'unicité,

> ... la somme d'une série trigonométrique ne peut être constamment nulle, sans que tous les coefficients soient nuls [...]. (Poincaré 1884b, 325)

En s'intéressant à la convergence des séries trigonométriques, Poincaré rencontre les travaux des mathématiciens suédois Gyldén et Lindstedt. En 1881, Gyldén et Lindstedt avaient réussi à donner des développements formels des équations différentielles issues de la théorie des perturbations en astronomie sous forme de séries purement trigonométriques (sans terme séculaire),

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \Psi_0 + \Psi_1 x + \Psi_2 x^2 + \dots,$$

où les fonctions Ψ sont périodiques.

Gyldén obtenait son résultat en utilisant des résultats de Hermite concernant les fonctions elliptiques. La méthode de Lindstedt est plutôt une adaptation de la méthode des approximations successives ; l'idée étant d'ajuster à chaque étape un coefficient de manière à assurer que les éventuels termes séculaires s'annulent. Poincaré s'intéresse vivement aux développements de Lindstedt qui lui donnent l'occasion de mettre dans un cas particulier symptomatique son analyse de la convergence des séries trigonométriques. Dans le même temps, il montre que la méthode de Lindstedt permet de trouver des solutions formelles sans restriction alors que Lindstedt supposait que l'équation présentait certaines symétries (Poincaré 1886b).

Poincaré aborde au début des années 1880 les questions de mécanique céleste à partir de ses propres préoccupations liées à la théorie qualitative des équations différentielles et de convergence des séries. Ainsi, la connaissance des solutions périodiques permettra, selon le programme de Poincaré, d'étudier les solutions voisines (cf. Roque 2015). De la même manière, l'analyse des diverses formes de convergence permet à Poincaré de distinguer les résultats qui intéressent l'astronome praticien en aidant à “fournir une solution du problème avec une approximation indéfinie” (Poincaré 1883b), de ceux qui concernent des problèmes théoriques comme celui de la stabilité pour lequel la convergence uniforme des développements est requise. Ces points seront emblématiques des méthodes nouvelles que Poincaré impose dans le champ de la mécanique céleste.

Remerciements

Les documents que nous publions dans ce volume viennent d'une vingtaine d'archives publiques et privées. Nous remercions d'abord les individus et les institutions qui nous ont accordé l'autorisation de publier les documents leur appartenant : Françoise Poincaré et ses enfants, qui nous ont offert un accès libre aux archives familiales, et nous ont autorisé à publier leur contenu. Un document du fonds Poincaré à l'Académie royale suédoise des sciences est publié ici avec l'aimable autorisation de Tore Frängsmyr, directeur du centre pour l'histoire des sciences, Stockholm. Nous remercions également Karl Grandin, Maria Asp Romefors, et Anne Miche de Malleray du Centre pour l'histoire des sciences, pour l'accueil qu'ils nous ont fait à Stockholm.

Pour l'autorisation de publier les documents d'archives dans leurs collections, nous remercions l'University of Exeter Information Services Special Collections, les syndics de la bibliothèque de l'Université de Cambridge, la commission des bibliothèques et archives de l'Institut de France et sa présidente, Hélène Carrère d'Encausse, Florence Greffe du Service des Archives de l'Académie des sciences de Paris, et Harry Leechburch du Museum Boerhaave.

Nous avons pu consulter des documents d'archives publiques et privées dans la préparation de ce volume, et pour l'accès aux manuscrits ou la communication de copies nous remercions Lucien Baillaud, les Archives nationales françaises, la bibliothèque de l'Observatoire de Paris, la Staatsbibliothek de Berlin, la bibliothèque du Congrès des États-Unis d'Amérique, le Bureau des longitudes de Paris, le Château-Observatoire d'Abbadia, les Archives de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg, le Centre de recherche Woodson, la bibliothèque de l'Université de Lund, les Archives départementales de l'Essonne, les Archives nationales historiques centrales de la Roumanie. Au-délà de l'autorisation de publication, l'assistance fournie pendant l'élaboration de ce volume de correspondance par les conservateurs et les bibliothécaires de ces institutions nous a été très précieuse.

L'élaboration de ce volume a commencé en 2007, et pendant huit ans nous avons bénéficié du soutien financier de plusieurs institutions. L'Université Nancy 2, l'Université de Lorraine et l'Université de Nantes ont fourni de l'aide en forme de salaires pour trois membres de l'équipe éditoriale pendant ce temps, et l'Université Nancy 2 a accordé un congé de recherche de six mois à l'un d'entre nous en 2011. La bibliothèque Dibner de l'Histoire des sciences et des techniques au Musée national d'histoire américaine (Washington, DC) a accueilli l'un de nous comme chercheur en résidence lors de l'année 2013 ; nous remercions Lilla Vekerdy et Kirsten van der Veen pour leur assistance généreuse. Nous remercions Florence Greffe, conservateur aux Archives de l'Académie des sciences de Paris pour son soutien constant du projet d'édition. Le Centre national de la recherche scientifique (CNRS) a soutenu l'édition du volume à travers une bourse postdoctorale de deux ans, et une délégation aux Archives Poincaré pendant deux ans pour le rédacteur en chef. L'Agence nationale de la recherche (ANR) a co-financé avec la Région Lorraine une bourse postdoctorale de deux ans, à travers le projet ANR-Corpus 2006 "Sources du savoir mathématique du vingtième siècle". La Maison des Sciences de l'Homme Lorraine a soutenu l'édition du Volume 3 à travers le projet Poincaré, et le projet eManMath (l'édition électronique de manuscrits mathématiques), avec l'aide du laboratoire d'Analyse et traitement informatique de la langue française (ATILF, UMR 7118, Université de Lorraine et CNRS), dirigé par Jean-Marie Pierrel. Le laboratoire d'histoire des sciences et de philosophie–Archives Henri Poincaré (Université de Lorraine et CNRS, UMR 7117) a assuré l'intendance du projet d'édition, et hébergé ses collaborateurs dans ses locaux. Nous remercions pour leur assistance professionnelle les agents des Archives Poincaré qui ont accompagné l'élaboration du Volume 3 de la Correspondance de Poincaré : Anny Begard, Pierre Édouard Bour, Pierre Couchet, Marie-Christine Duchenne, Lydie Mariani et Geneviève Schwartz. Le travail d'édition du Volume 3 a avancé grâce aux efforts conjugués de vacataires et de stagiaires, que nous remercions ici : Stefan Jokulsson, Roman Jullier, Manon Lagarde, Rémi Nazin, Amélie Ohresser, et Guillaume Schuppert.

Les services documentaires de l'Université de Lorraine ont été d'un grand soutien. Nous remercions la directrice des bibliothèques universitaires, Anne-Pascale Parret pour son accueil, et Marianne Wehrli du service de prêt entre bibliothèques de l'Université Nancy 2, qui nous a fait parvenir une quantité considérable de documents.

L'étude de la correspondance de Poincaré en vue de son annotation nous a donné l'occasion de prendre conseil auprès de nos collègues astronomes, mathématiciens et historiens. Nous remercions Suzanne Débarbat, Magda Stavinschi, Alain Chenciner, Étienne Ghys, Jean Mawhin, David Cahan, Peter Galison, Olivier Darrigol, Frédéric Brechenmacher, June Barrow-Green, Jeremy Gray et David Rowe d'avoir partagé leur savoir avec nous. La biographie scientifique de Poincaré par Jeremy Gray (2013) a été publiée alors que l'essentiel de l'annotation des manuscrits de ce volume était terminée, sinon son livre aurait certainement été cité plus souvent.

Nous remercions enfin nos collègues des Archives Henri Poincaré pour leur collaboration amicale. Gerhard Heinzmann, fondateur et ancien directeur des Archives, a eu le courage de lancer le projet d'édition de la correspondance de Poincaré en 1992 ; nous le remercions de son soutien et sa patience pendant plus de huit ans de travail éditorial. Manuel Rebuschi, Olivier Bruneau et Caroline Jullien ont accompagné chacun l'effort éditorial, en le rendant plus agréable. Le responsable du Volume 5, Laurent Rollet a découvert de nombreux documents inédits de Poincaré, et a partagé généreusement son savoir extensif de la vie de Poincaré et de toutes les traces qu'elle a laissées aux archives.

Le travail d'annotation a été rendu plus aisé et agréable grâce à une série de sites en ligne, dont nous reconnaissons ici les plus importants, à commencer par NASA-ADS (Smithsonian Astrophysical Observatory/NASA Astrophysics Data System), Gallica, In-

ternet Archive, DigiZeitschriften, l'agence bibliographique de l'enseignement supérieure, Google Scholar, Google Books, le portail d'information scientifique des unités CNRS – BiblioSHS, WorldCat, VIAF, NUMDAM, IsisCB et Wikipedia. Les fichiers et données disponibles sur ces plate-formes ont été liés parfois à ceux du projet Poincaré, disponibles sur la plate-forme Henri Poincaré Papers.

Comme on peut en juger par le nombre de remerciements, ce volume de correspondance est le résultat d'un travail de collaboration de longue haleine, entre des chercheurs et des documentalistes, des étudiants et des informaticiens, des comptables et des conservateurs. Il s'agit aussi d'un ouvrage collectif de quatre historiens des sciences, dont chacun avait son lot de lettres à annoter, et biographies à rédiger. Nous n'indiquons pas de nom d'auteur pour les annotations et biographies, étant donnée la nature collaboratrice du travail éditorial. Néanmoins, les chapitres ont été distribués entre les membres de l'équipe de rédaction tout au début, afin de partager le travail de saisie des transcriptions, et d'annotation. Ainsi, Martina Schiavon a été chargée de la correspondance de Bourgeois, Baillaud, Marcel Bertrand, Bigourdan, Roland Bonaparte, Bourget, Christie, Faye, Fouche, Hatt, Janssen, Lallemand, De Lapparent, Perrotin, et le chapitre entier du Bureau des longitudes. Ralf Krömer a reçu les échanges entre Poincaré et Darwin, Liapunov, et Schwarzschild. Philippe a pris les échanges avec O. Backlund, Callandreau, C. V. L. Charlier, E. Cosserat, Gyldén, Haret, Hill, Lindstedt, Commines de Marsilly, Simonin, Thiele, Tisserand, et Verschaffel. Quant à Scott, il s'est occupé des chapitres sur Deslandres, C. Flammarion, Hamy, Helmert, Laussedat, Lebeuf, Lockyer, Lovett, Myers, Newcomb, Puiseux et Wolf, ainsi que les compléments au deuxième volume, c'est-à-dire, les lettres de Poincaré à Heike Kamerlingh Onnes, et celle de Marcel Brillouin.

Dans chacun de ces chapitres on peut trouver matière à réflexion, que ce soit au sujet de Poincaré, ses interlocuteurs, leur interaction, ou par rapport à l'histoire des sciences et des techniques au temps de Poincaré. Alors que la présentation des échanges par ordre alphabétique permet de suivre dans le temps la communication entre Poincaré et chacun de ses correspondants astronomes ou géodésiens, il peut être intéressant de lire la correspondance de Poincaré en ordre chronologique. Sur le site web de la correspondance, on peut tenter cette lecture de deux façons : par volume, ou globalement. On trouve également sur le site web "Henri Poincaré Papers" des numérisations de manuscrits, et un moteur de recherche du corpus Poincaré, comprenant la correspondance, les publications, et les manuscrits.

Scott A. Walter & Philippe Nabonnand
Nantes & Nancy
Janvier 2016

Archives dépositaires

	Archives	Adresse	Pays
1.	Académie des sciences de Paris	Services des Archives, 23 Quai de Conti, 75006 Paris	France
2.	Académie des sciences de St. Pétersbourg	1 Universitetskaya Nab., St. Pétersbourg 199034	France
3.	Archives départementales de l'Essonne	38 rue du Commandant Arnoux, 91730 Chamarande	France
4.	Archives Henri Poincaré	91 av. de la Libération, 54001 Nancy	France
5.	Archives nationales françaises	60 rue des Francs-Bourgeois, 75141 Paris cedex 03	France
6.	Archives nationales historiques centrales de la Roumanie	Bd. Regina Elisabeta nr. 49, sector 5, Bucureşti, C-050013	Roumanie
7.	Bibliothèque de l'Institut	23 Quai de Conti, 75006 Paris	France
8.	Bibliothèque de l'Observatoire de Paris	61 avenue de l'Observatoire, 75014 Paris	France
9.	Bureau des longitudes	23 Quai de Conti, 75006 Paris	France
10.	Cambridge Univ. Library	Dept. of Manuscripts and University Archives, West Road, CB3 9DR Cambridge	UK
11.	Château-Observatoire d'Abbadia	Route de la Corniche, 64700 Hendaye	France
12.	Collection particulière 1	63000 Clermont-Ferrand	France
13.	Collection particulière 2	75017 Paris	France
14.	Library of Congress	Manuscript Div., 101 Independence Ave. SE, Washington DC 20540-4680	USA
15.	Lund University Library	Lunds universitet, Box 3, SE-221 Lund	Suède
16.	Musée des lettres et manuscrits	8 rue de Nesle, 75006 Paris	France
17.	Nobel Archives	Royal Swedish Academy of Sciences, Box 50005, SE-104 05 Stockholm	Suède
18.	Staatsbibliothek zu Berlin – Preußischer Kulturbesitz	Handschriftenabteilung, 10772 Berlin	Allemagne
19.	University of Exeter Old Library	Special Collections, Prince of Wales Road, EX4 RSB Exeter	UK
20.	Woodson Research Center	Fondren Library MS 44, P. O. Box 1892, Rice University, Houston TX 77521-1892	USA

Abréviations

Abrév.	*Meaning*	*Signification*
ADft	Autograph draft	Brouillon autographe
ADftS	Autograph draft signed	Brouillon autographe signé
AC	Autograph postcard	Carte postale
ACS	Autograph postcard signed	Carte postale signée
AL	Autograph letter	Autographe lettre
ALS	Autograph letter signed	Autographe lettre signée
ALSX	ALS photocopy	ALS photocopie
AD	Autograph document	Document autographe
ADS	Autograph document signed	Document autographe signé
PD	Printed document	Document imprimé
PTrL	Printed transcript of a letter	Transcription imprimée d'une lettre
TDS	Typed document signed	Document dactylographié signé
TL	Typed letter	Lettre dactylographiée
TLS	Typed letter signed	Lettre dactylographiée signée
TrL	Transcript of a letter	Transcription d'une lettre

Avertissement

Notre édition de la correspondance d'Henri Poincaré vise à la fois un lectorat de chercheurs, et un lectorat de curieux d'esprit. Ainsi, nous avons privilégié la lisibilité des textes, à condition qu'elle ne fasse pas obstacle au travail de recherche. La transcription et l'annotation des documents se sont accomplies en suivant des règles établies afin d'atteindre cet objectif.

Le format des transcriptions est standardisé. Chaque document est numéroté et introduit par un titre en caractères gras qui indique le nom du destinataire. À la fin de chaque document, le type de document, le nombre de pages et la provenance sont indiqués en caractères gras. Si le document transcrit a été publié ailleurs, nous indiquons la référence bibliographique.

Entre ces deux éléments se trouve la transcription de la lettre. Celle-ci est également standardisée : la date est indiquée à la première ligne, suivie par l'en-tête, transcrit en petites majuscules. Les lettres sans date sont datées par les éditeurs, selon leur contenu ; la date est alors entourée de crochets. L'adresse de retour vient ensuite, justifiée à droite avec la date et l'en-tête. Nous mettons souvent l'en-tête et l'adresse de retour sur une même ligne, en rajoutant un tiret entre les éléments. Les éléments imprimés de l'en-tête sont rendus en lettres majuscules.

Nous n'indiquons pas la pagination du manuscrit, mais la division en paragraphes du corps de la lettre est celle de l'auteur, chaque fois que nous la discernons. Dans les autres cas, nous introduisons cette division en fonction du style de l'auteur, tant que nous pouvons le discerner. La cassure des mots n'est pas indiquée par notre transcription.

Les formules mathématiques sont transcrites avec les symboles d'origine, mais afin de faciliter leur lecture, nous les mettons souvent seules sur une ligne, alors qu'elles paraissent au milieu des phrases dans le manuscrit. Lorsque une formule est numérotée dans le manuscrit, le chiffre est transcrit systématiquement entre parenthèses à droite de la formule.

Tous les mots soulignés du manuscrit sont rendus en italiques. Nous avons également rendu les titres de périodiques et de livres en italiques, mais nous avons négligé de souligner les rares formules mathématiques qui sont soulignées dans le manuscrit.

Les annotations sont de deux types, morphologique et critique. Les notes morphologiques se signalent par des lettres minuscules placées au-dessus de la ligne de texte, qui renvoient aux notes de bas de page. Les variantes sont indiquées à la discrétion des éditeurs ; ainsi, les ratures et les rajouts ne sont pas annotés systématiquement. Lorsque l'enveloppe de la lettre a été préservée, ce fait est mentionné dans une note morphologique.

Les notes critiques se signalent par des chiffres arabes placés au-dessus de la ligne de texte, qui renvoient aux notes de bas de page. La finalité des notes critiques est de faciliter la compréhension de la lettre par un lecteur averti. Ainsi, les individus, les lieux, et les événements sont identifiés par des notes critiques, lorsque ces éléments ne sont pas précisés dans le corps de la lettre.

Dans les notes critiques, nous avons employé des guillemets anglais partout, afin de faciliter le travail d'édition. Autrement dit, on trouve dans les transcriptions de documents des guillemets français, allemands, ou anglais, selon le choix de l'auteur du manuscrit, alors que dans les notes critiques de ces mêmes documents, on ne trouve que des guillemets anglais.

La correspondance de chaque correspondant est transcrite dans son intégralité, sauf si nous disposons d'une lettre et une version brouillonne de cette même lettre. Dans ce cas, nous transcrivons la lettre uniquement, en indiquant l'existence du brouillon. Les échanges sont présentés en forme de chapitres, introduits par des éléments biographiques, et une description du contexte de l'échange.

Nous nous sommes servis des sources usuelles d'information biographique suivantes : *Dictionary of Scientific Biography* (Gillispie & Holmes, eds. 1970), *Neue Deutsche Biographie*, *J.C. Poggendorffs biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften*, Hockey (ed) *The Biographical Encyclopedia of Astronomers* (Hockey 2007), *Les professeurs de la faculté des sciences de Paris (1901–1939)* de Charle et Telkes (1989), et l'*Index biographique des membres et correspondants de l'Académie des sciences* (Académie des sciences 1968). Nous sommes redevables en particulier à Philippe Véron (1939-2014), qui nous a autorisé de nous servir du manuscrit de son *Dictionnaire des astronomes français (1850–1950)* (Véron 2006). En ce qui concerne les polytechniciens, nous nous référons au registre des matricules (Archives de l'École polytechnique).

Les insertions éditoriales sont indiquées par des crochets, sauf dans les formules, où les modifications sont indiquées par une note morphologique. Les crochets d'origine dans le texte des lettres sont rendus avec des parenthèses ; dans les formules les crochets d'origine sont rendus par des crochets. Alors que les noms propres sont transcrits avec l'orthographe d'origine, nous signalons l'orthographie correcte dans une note. Nous corrigeons silencieusement, avec discrétion, les autres fautes d'orthographe. En ce faisant, nous ne suivons pas l'exemple de Poincaré, lorsqu'il publia la lettre d'Olsson dans le *Bulletin astronomique* (§ 3-10-4) ; nous en prenons la responsabilité. Pour savoir si une faute d'orthographe donnée a été introduite dans la transcription par inadvertance, la plupart du temps il suffit de se référer à une version numérisée du manuscrit sur le site web “Henri Poincaré Papers”.

Chapitre 1

Oskar Backlund

Oskar Backlund (1846–1916) fait ses études à Uppsala. En 1873, il devient l'assistant de Gyldén à l'Observatoire de Stockholm et soutient en 1875 à l'Université d'Uppsala une thèse sur la planète mineure (112) Iphigenia. Il est embauché comme astronome adjoint en 1876 à l'Observatoire de Dorpat puis en 1879 à l'Observatoire de Poulkovo par Otto Wilhelm Struve. Backlund effectue alors toute sa carrière en Russie et se fait naturaliser russe. Il est élu à l'Académie de St. Pétersbourg en 1883 et devient en 1895 le directeur de Poulkovo qu'il dirigera jusqu'à sa mort. Pendant son mandat de directeur, l'Observatoire de Poulkowo connaît un développement sans précédent (augmentation du personnel, achat de matériel, création d'antennes, politique d'accueil de jeunes astronomes).

Ses travaux scientifiques concernent la mécanique céleste ; il poursuit en particulier les travaux de Hencke et von Asten concernant la trajectoire de la comète de Hencke. En tant qu'astronome de renom et directeur d'un des plus importants observatoires, il a participé à de nombreux congrès et commissions. Backlund est élu membre correspondant de l'Académie des sciences de Paris en 1895, et il est nommé correspondant du Bureau des longitudes en 1904. Il reçoit en 1909 la médaille d'or de la *Royal Astronomical Society* et en 1914 la médaille Bruce. Sur la vie et ses travaux de Backlund, voir le *DSB* (Dieke 1970).

La lettre que Backlund a envoyée à Poincaré en 1901 (§ 3-1-1) a pour but de défendre une méthode de Gyldén concernant *les séries employées dans les théories des planètes* (Gyldén 1891, 1893a, 1893b). Quelques années plus tard, Poincaré fit un commentaire très sévère sur la méthode horistique de Gyldén (Poincaré 1904d, 1905d). Backlund et Poincaré ont eu l'occasion de discuter en personne la critique de ce dernier, lors du Congrès des Arts et Sciences tenu pendant l'exposition universelle à Saint Louis en septembre 1904. Mais la confiance de Backlund dans les méthodes de son maître n'a pas diminué pour autant, puisqu'il a complété, avec l'aide de Karl Sundman et de H. van Zeipel, le manuscrit du Tome 2 du *Traité analytique des orbites absolues* que Gyldén n'a pas eu le temps d'achever lui-même (Backlund 1908).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_1

1.1 O. Backlund à Poincaré

Poulkovo le 5 Févr. 1901 [1]

Très honoré Collègue,

Je Vous suis très reconnaissant pour avoir appelé l'attention à l'erreur fâcheuse dans ma note sur la précession. [2] En effet il m'avait échappé que par des approximations successives le second terme du membre droit dans

$$\frac{d^2\nu_1}{dt^2} = a\sin(at+\varepsilon) + a(\nu_1+\nu_2)\cos(at+\varepsilon) - a\nu_1\nu_2\sin(at+\varepsilon)\ldots$$

donne naissance à un terme

$$+a\nu_1\nu_2\sin(at+\varepsilon),$$

ce qui réduit ν_0^2 à zéro (au moins aux quantités d'ordre supérieur).

Cette erreur élémentaire appartient exclusivement à moi.

Dans Votre Note Vous considérez l'équation

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = a\varepsilon\cos(nt+\nu_0) + b\sin pt.$$

Gyldén considère au début des approximations l'équation [3]

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = a\varepsilon\cos(nt+\nu_0) - \frac{1}{2}a\varepsilon^2\sin(nt+\nu_0) - \frac{1}{6}a\varepsilon^3\cos(nt+\nu_0) + b\sin pt,$$

1. Cette lettre est publiée avec quelques modifications linguistiques dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* (Backlund 1901).

2. O. Backlund 1900 ; Poincaré 1901e. La note de Poincaré compare les résultats de Stockwell (1872) et ceux d'O. Backlund (1900) concernant "les variations séculaires de l'équateur terrestre qui sont la conséquence des variations séculaires de l'écliptique" (Poincaré 1901e, 50). Backlund avait repris les calculs de Stockwell en utilisant les méthodes proposées par Gyldén (1891, 1893b) dans ses *Nouvelles recherche sur les séries employées dans les théories des planètes*. Comme les résultats de Stockwell et Backlund sont significativement divergents, Poincaré en fait un test pour juger de la validité des travaux de Gyldén. Le point essentiel de la méthode de Gyldén en cause est la prise en compte dans les premières étapes du processus d'approximations successives de certains termes :

> Le principe de la méthode employée par M. Backlund consiste à ne pas supprimer tout de suite dans ses équations les termes à courtes périodes qui produisent la nutation ; dans les équations qu'on obtient après quelques transformations figurent certains coefficients périodiques qui dépendent de ces termes ; et pour l'intégration, au lieu de supprimer purement et simplement ces coefficients périodiques comme on le fait d'ordinaire, M. Backlund en conserve la partie constante [...]. (Poincaré 1901e)

3. Gyldén 1891 ; 1893a. Poincaré reprend en le simplifiant l'exemple de Backlund (1900, 397) et se propose de traiter en suivant les méthodes de Stockwell et de Backlund l'équation différentielle

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} = a\sin(nt+\nu) + b\sin pt,$$

"de telle façon que $\frac{b}{p^2}$ soit notoirement plus grand que $\frac{a}{n^2}$ et que p^2 soit du même ordre de grandeur que $\frac{a^2}{n^2}$."

En posant $\nu = \nu_0 + \varepsilon$ où ν_0 vérifie

$$\frac{d^2\nu_0}{dt^2} = a\sin(nt+\nu_0), \tag{1}$$

ε vérifie au premier ordre l'équation différentielle

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = a\varepsilon\cos(nt + \nu_0) + b\sin pt. \tag{2}$$

En négligeant comme Stockwell les termes à courte période, on trouve

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = b\sin pt \qquad \varepsilon = -\frac{b}{p^2}\sin pt.$$

Backlund introduit une approximation de $\nu_0 = -\frac{a}{n^2}\sin nt$ et tient compte des termes à courte période ; il obtient comme équation

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = \varepsilon(a\cos nt + \frac{a^2}{n^2}\sin^2 nt) + b\sin pt.$$

En première approximation, on obtient alors :

$$\varepsilon = -\frac{b\sin pt}{\frac{a^2}{2n^2} + p^2}.$$

Poincaré poursuit son raisonnement en résolvant directement les équations (1) et (2) en utilisant des techniques de fonctions elliptiques et obtient pour ε une approximation au premier ordre de la forme $\varepsilon = \frac{-e^{ipt}}{\alpha^2+p^2}$.

> Comparons maintenant cette formule avec celles de Stockwell et de Backlund. Nous voyons que, pour obtenir celle de Stockwell, il faut faire $\alpha = 0$, et pour obtenir celle de Backlund, $\alpha = \frac{a}{n\sqrt{2}}$. (Poincaré 1901e, 54)

Un argument analytique montre que nécessairement α est nul et donc que “c'est Stockwell qui a raison”. Poincaré conclut en faisant la responsabilité de l'erreur sur la méthode proposée par Gyldén :

> La critique qui précède ne saurait, en aucune façon, s'adresser à notre savant correspondant, puisqu'il n'a fait qu'appliquer une méthode classique que tout le monde croyait correcte.
>
> Mais c'est là une raison de plus pour que j'aie cru devoir mettre en évidence le vice fondamental de la méthode de Gyldén, dont on pourrait être tenté de faire d'autres applications. (Poincaré 1901e, 54–55)

Backlund répond en expliquant qu'il n'a pas bien utilisé la méthode de Gyldén en négligeant les termes d'ordre supérieur. Dans sa défense plus générale de la méthode horistique de Gyldén, Backlund (1904) reprend le même argument pour montrer que l'objection de Poincaré n'est pas valable :

> Il faut regretter que M. Poincaré, dans sa critique de la méthode de Gyldén, ne tienne compte que des termes du premier ordre. Gyldén lui-même a démontré que dans ce cas il n'existe pas de coefficient horistique et que c'est seulement en considérant au début des approximations les termes du troisième ordre qu'on peut établir une équation horistique pour la détermination de la longitude. La critique de M. Poincaré [...] ne se rapporte pas alors à la théorie de Gyldén, mais seulement au coefficent erroné, déterminé par moi. (Backlund 1904, 292)

Dans ses observations sur l'article de Backlund sur la méthode horistique, Poincaré (1904d) répond en maintenant ses objections et en annonçant son article (Poincaré 1905d) :

> En ce qui concerne l'application de la méthode horistique à la longitude, j'ai reconnu qu'il n'y avait pas de coefficient horistique, *même quand on tient compte des termes du troisième ordre*. C'est ce que j'exposerai dans un Mémoire plus étendu. L'erreur, dont M. Backlund veut généreusement s'attribuer toute la responsabilité, ne lui appartient donc pas. Il s'est conformé aux principes généraux de la méthode et s'est servi du mode de raisonnement préconisé par Gyldén, et dont ce savant avait fait d'autres applications. Ce mode de raisonnemment consiste à remplacer certains coefficients périodiques par leur valeur moyenne : c'est ce qu'a fait M. Backlund, c'est ce qu'avait fait Gyldén ; si l'astronome russe s'est trompé, ce n'est pas qu'il en a mal appliqué les règles, c'est que ces règles ne valaient rien. (Poincaré 1904d, 294–295)

et parvient à déterminer ν_0^2 dans

$$-\frac{b}{\nu_0^2 + p^2} \sin pt.$$

La valeur de ν_0^2 [a] ainsi déterminée est évidemment beaucoup plus petite que $\frac{a^2}{2n^2}$.
Gyldén dit expressément qu'il est même inutile, pour la détermination de ν_0^2, [b] de partir de l'équation où l'on a négligé la deuxième et la troisième puissance de ε. C'est justement ce que Vous avez démontré. [4]
Je serais très redevable si Vous vouliez insérer ces lignes dans les *Comptes Rendus*. Je le dois à la mémoire de Gyldén. [5]
Votre très reconnaissant
O. Backlund

ALS 3p. Pochette de séance, 11.02.1901, Archives de l'Académie des sciences de Paris. Publiée dans O. Backlund (1901).

4. Une des ambitions de Gyldén dans ses *Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes* est de montrer que la résolution des équations différentielles "du second ordre qui se présentent fréquemment dans la mécanique céleste" nécessite de prendre en compte les termes d'ordre supérieur ou égal à deux. Après avoir expliqué que l'on linéarise l'équation en ne tenant pas compte des termes perturbatifs d'ordre supérieur ou égal à deux, il poursuit :

> Cette équation n'étant pas linéaire au début, le devient toutes les fois qu'on néglige les termes dépendant de la troisième puissance de la force perturbatrice, ainsi que les termes d'un ordre plus élevé. Mais il paraît indispensable d'éviter cette forme dès le commencement du calcul, car bien que l'on n'ait pas démontré directement l'impossibilité de parvenir à la solution absolue en négligeant les termes du troisième ordre dans la première approximation, des tentatives stériles et réitérées, même dans les derniers temps, ont rendu cependant extrêmement probable que la solution absolue ne s'obtiendra pas en utilisant exclusivement des équations linéaires. (Gyldén 1891, 65–66)

5. Gyldén est mort le 9 novembre 1896 à Stockholm.

a. Dans la note aux *Comptes rendus,* il y a une faute de frappe : ρ_0^2.

b. La phrase "pour la détermination de ν_0^2" paraît en marge. Dans la publication on trouve la même faute de frappe que précédemment.

Chapitre 2

Benjamin Baillaud

Édouard-Benjamin Baillaud (1848–1934) entra à l'École normale supérieure en 1866, dans la même promotion que Jules Tannery et Edmond Bouty. Agrégé en sciences mathématiques en 1869, il devint élève-astronome à l'Observatoire de Paris en 1872, et enseigna dans plusieurs lycées parisiens. Il soutint sa thèse sur une méthode de Hugo Gyldén (1876) à la Faculté des sciences de Paris, où il devint suppléant de Le Verrier l'année suivante. En 1878, Baillaud a remplacé Tisserand à la direction de l'Observatoire de Toulouse ; il fut chargé du cours d'astronomie à la Faculté des sciences. L'année suivante, il devint professeur d'astronomie, et doyen de la Faculté des sciences. Pendant son décanat, Baillaud refondit les *Annales de l'Observatoire de Toulouse*, fondit en 1886 les *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques*, augmenta le nombre des chaires, et lança un programme de construction de bâtiments universitaires. Baillaud a introduit également un certificat de science dans les curricula de la formation de médecine qui sera étendu ailleurs en France par la volonté du ministre de l'Instruction publique, sous l'intitulé de "physique, chimie et histoire naturelle" (PCN). Baillaud a réorganisé l'Observatoire de Toulouse en faisant installer cinq grands instruments, un service magnétique, un service météorologique, des ateliers, des laboratoires, des bureaux et des magasins. Pendant sa direction, il a recruté trois agrégés de mathématiques en tant qu'aide-astronomes, qui cumulaient un enseignement à la faculté des sciences : Henri Andoyer (1884), Eugène Cosserat (1886), et Henri Bourget (1895). Il a également fait installer au Pic du Midi un télescope de 50 centimètres de diamètre.[1]

En 1887, l'Observatoire entra à son initiative dans le projet de la Carte du Ciel, dirigé par l'Observatoire de Paris. En 1899, il obtint le rattachement aux universités des observatoires de province, décret qui va accroître la prospérité de ces établissements. Mais Baillaud voulait revenir à Paris, et envisageait, vers 1902, une candidature à la succession de Charles Wolf, qui se retirait de la chaire d'astronomie physique.[2] Il visait surtout un

1. À propos de la période toulousaine de la carrière de Baillaud, voir M.-J. Nye (1975), et Lamy (2007).
2. Lettre de Lucien Baillaud à S. Walter, 29.10.2009. Un ancien collègue de Baillaud à Toulouse, Henri

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_2

poste à l'Observatoire de Paris, et en 1908, il obtient celui du directeur. La même année, il devint président du comité permanent de la Carte photographique du Ciel et, cinq ans plus tard, directeur du Bureau international de l'heure. Pendant la Première guerre mondiale, il assura la transmission des signaux horaires par la tour Eiffel.

Élu correspondant du Bureau de longitudes en 1889, et en 1902, correspondant à l'Académie des sciences (section d'astronomie), Baillaud devint membre de ces deux institutions après sa nomination à la direction de l'Observatoire de Paris. Baillaud appartint également à des commissions et comités (géodésie, sismologie, télégraphie sans fil), du Bureau central météorologique, de l'Institut d'optique, du Bureau des poids et mesures, de la Société astronomique, de la Société de physique, et des académies étrangères.

On doit à Baillaud des travaux d'astronomie mathématique et d'observation, dont des mémoires sur les satellites de Saturne, la comète d'Encke, et le développement de la fonction perturbatrice. Il a joué un rôle clé en tant que organisateur du projet de la Carte du Ciel. Ses contributions furent reconnues par la médaille Bruce en 1923. Deux de ses cinq fils devinrent astronomes : Jules, astronome à l'Observatoire de Paris et membre de l'Académie des sciences, et René, directeur de l'Observatoire de Besançon et Correspondant à l'Académie des sciences. À propos de la vie et des travaux de Baillaud, voir Borel et al. (1937).

Andoyer a été nommé à cette chaire le 28.02.1902 (Charle & Telkes 1989, 23). À propos de la Carte du Ciel, voir Lamy (2008).

2.1 Poincaré à Baillaud

[Vers le mois de décembre 1907]

Mon cher Collègue,
Après avoir longtemps tergiversé, je me décide à voter pour Bigourdan. [3] Il y a longtemps que nous travaillons ensemble au *Bulletin Astronomique* et il me faudrait pour ne pas lui promettre ma voix des raisons bien puissantes.
Il y a bien des raisons, et c'est ce qui m'a fait hésiter, mais, tout bien pesé, elles ne m'ont pas paru assez fortes pour me décider à briser l'avenir d'un collaborateur ancien et zélé.
Votre notice m'a vivement frappé ; mais j'ai trouvé également dans la notice de Bigourdan des titres à peu près équivalents, et en tout cas je n'ai pas vu une différence de titres suffisante pour contrebalancer les raisons que je pouvais avoir de voter pour lui. [4]
J'espère que vous comprendrez la situation dans laquelle je me trouve placé et que vous me pardonnerez ma décision.
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 2p. Archives familiales, Laissac.

2.2 Poincaré à Baillaud

[Vers le mois d'avril 1909]

Mon cher Confrère, [5]
Je vous remercie beaucoup de votre aimable invitation, mais l'état de ma santé ne me permet d'assister à aucun banquet. [6]
Mille regrets.
Votre bien dévoué Confrère,
Poincaré

ALS 1p. Archives familiales, Laissac.

3. Guillaume Bigourdan, astronome à l'Observatoire de Paris, et Benjamin Baillaud, directeur de l'Observatoire de Toulouse sont candidats à la direction de l'Observatoire de Paris en 1907, laissée vacante par le décès de Maurice Lœwy.

4. Voir les notices de Baillaud (1907) et de Bigourdan (1897). Selon l'analyse de Chinnici (1999, 452), les travaux réalisés par l'Observatoire de Toulouse au sein du projet international de la Carte du Ciel, un projet lancé et dirigé par l'Observatoire de Paris, ont favorisé la candidature de Baillaud, qui sera nommé directeur de l'Observatoire de Paris le 2 janvier 1908.

5. Baillaud et Poincaré sont membres tous les deux de l'Académie des sciences de Paris ; Baillaud fut élu à la section d'astronomie en 1908.

6. Poincaré souffre d'une hypertrophie de la prostate depuis un an au moins. A ce propos, voir Mittag-Leffler à Poincaré, 24.11.1908 (§ 1-1-238), note 3. Le banquet en question est peut-être celui offert à l'occasion du Congrès international de la Carte du Ciel en avril 1909, comme nous l'a suggéré Lucien Baillaud (lettre à S. Walter, 09.12.2008).

2.3 Baillaud à Poincaré

PARIS, LE 22 octobre 09 [a]
OBSERVATOIRE DE PARIS — CABINET DU DIRECTEUR

Monsieur et cher confrère,
M. Nordmann me communique la note ci-jointe.[7] Avant de partir, il m'avait exprimé le désir qu'elle fût présentée à l'Académie par vous qui lui en avez suggéré l'idée. Je m'empresse de vous l'envoyer.
Veuillez agréer, Monsieur et cher confrère l'expression de mon entier dévouement et de mon profond respect.
B. Baillaud

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

2.4 Baillaud à Poincaré

PARIS, LE 14 X^{b}·09 [b]
OBSERVATOIRE DE PARIS — CABINET DU DIRECTEUR

Monsieur le Président,[8]
Je m'empresse de vous envoyer une éphéméride de la comète de d'Arrest que me remet M. Leveau.[9] Il serait urgent qu'elle fût publiée au *Bulletin*, en février s'il se peut.[10]
Votre tout dévoué,
B. Baillaud

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

7. Voir la note (Nordmann 1909b) communiquée à l'Académie de sciences le 26.10.1909. Baillaud a lui-même présenté une note de Nordmann le 04.10.1909, à propos de la mesure par un photomètre stellaire hétérochrome de la température des étoiles, dont la note du 26 octobre fait suite.

Charles Nordmann (1881–1940) a soutenu à la Faculté des sciences de Paris une thèse d'astronomie physique (Nordmann 1903), à propos de laquelle Poincaré a rédigé un rapport le 13.06.1903 (F17 13248, AJ-16-5538, Archives nationales). En 1909 Nordmann fut astronome adjoint à l'Observatoire de Paris.

8. Poincaré préside le Bureau des longitudes en 1909 ; Baillaud sera président en 1913 (Borel et al. 1937, 5).

9. Gustave Leveau (1841–1911) est astronome titulaire à l'observatoire de Paris, où il fut recruté en tant que calculateur en 1857. Son travail sur la théorie et les tables de la planète Vesta, s'appuyant sur la méthode de Hansen, fut reconnu par le prix Damoiseau de l'Académie des sciences en 1892 (Fayet 1911).

10. L'urgence vient peut-être de l'état de santé de Leveau. Ce dernier disparaîtra le 10.01.1911 ; son éphéméride (Leveau 1910) sera publié au mois de mars, 1910.

a. Le manuscrit comporte trois pages de calculs d'orbites de la main de Poincaré, sans rapport avec les publications de Nordmann.

b. Le manuscrit comporte deux pages de calculs, sans rapport avec l'éphéméride dont il est question pour Baillaud.

Chapitre 3

Marcel Bertrand

Marcel Bertrand (1847–1907) fut le fils du mathématicien Joseph Bertrand (1822–1900), le neveu du mathématicien Charles Hermite (1822–1901), et le gendre du physicien Élie Mascart (1837–1908). Il entra à l'École polytechnique en 1867, et à la sortie intégra l'École des mines. En tant qu'ingénieur des mines, Marcel Bertrand fut chargé du sous-arrondissement minéralogique de Vesoul (Haute-Saône), puis du contrôle de l'exploitation des chemins de fer de l'Est. En 1878, il devint ingénieur du Service de la carte géologique détaillée de la France, et en 1886 il fut promu ingénieur en chef des mines, et nommé professeur de géologie à l'École des Mines de Paris.

Marcel Bertrand fut vice-président de la Société géologique de France en 1886, puis président en 1891. Il fut élu à l'Académie des sciences de Paris, section de minéralogie, en 1896 (Académie des sciences 1968, 46). Il voulait reconstituer l'histoire des chaînes de montagnes et des zones de plissement, et ses travaux l'ont mis en tête de l'École orogénique et tectonique française (Kilian & Révil 1908).

La lettre de Marcel Bertrand à Poincaré reprend deux notes présentées à l'Académie des sciences de Paris le 29 janvier et le 19 février 1900.

3.1 Marcel Bertrand à Poincaré

Paris, 2 Février 1900

Mon cher camarade,
J'ai repris hier soir, d'après vos indications, la série de mes raisonnements, et je crois maintenant que j'arrive à les rendre exacts.
Il est clair que je me trompais en voulant démontrer qu'il n'y a qu'une couche sphérique mise en mouvement par l'effet du charriage pour compenser la couple de dénudation.[1]
L'exemple de la mouche est en effet logique ; toutes les solutions sont possibles, depuis le mouvement en masse de la terre, jusqu'à celui d'une couche de masse égal à la masse

1. M. Bertrand (1900c), note présentée à l'Académie des sciences de Paris le 29.01.1900.

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_3

déplacée superficiellement ; le choix entre ces diverses solutions dépend des conditions d'adhérence des diverses couches, qui n'entrent pas dans les calculs. Je n'en persiste pas moins à croire qu'il y a en effet une mince écorce qui se déplace seule, d'abord par ce que cela est plus conforme aux conditions physiques de la croûte, telles que nous les observons dans les montagnes, et ensuite par ce que cela est nécessaire pour le tétraèdre. Ceci admis, en éliminant mon autre grosse erreur, on trouve que le déplacement de la couche superficielle n'est pas et ne peut pas être égal au déplacement de l'axe ; *il est beaucoup plus grand*. Ce ne sont pas les mêmes molècules qui restent auprès du pôle, et le bourrelet équatorial doit aussi (la terre solide tendant toujours à reprendre avec un peu de retard sa forme d'équilibre) se déplacer sur la sphère et être formé avec des molécules différentes. [2]

De plus on trouve ainsi que le mouvement de l'axe n'est pas uniforme. Si les actions de dénudation étaient restées constantes pendant les temps géologiques, le mouvement serait uniformément accéléré. Si au contraire, comme il y a de bonnes raisons de le croire, les actions de dénudation ont été progressivement en diminuant, le mouvement de l'axe aurait été d'abord un mouvement accéléré, pour devenir, à un moment donné, un mouvement retardé.

J'ai aussi repris ce qui est relatif aux chaînes méridiennes, que j'avais trop cavalièrement éliminées. On trouve qu'elles produisent aussi des déplacements, mais qui ne sont plus naturellement dans un plan normal à l'écliptique. De plus, pour les chaînes [illisible] (Oural), le déplacement a été de l'est à l'ouest, et pour les chaînes tertiaires (M.es Rocheuses et Andes), le déplacement a été de l'ouest à l'est. Il est donc probable que, par suite des actions de ces chaînes méridiennes, le pôle au lieu de décrire un grand cercle méridien, décrit sur la sphère une ligne ondulée autour de ce grand cercle. C'est d'ailleurs conforme à ce que l'on peut rétablir pour 3 anciennes positions du pôle. [3]

Enfin, dans ces conditions, les données géologiques ne me semblent plus pouvoir fournir, même approximativement, une évaluation de la vitesse de déplacement du bourrelet équatorial, et par conséquent de la vitesse correspondante de variation de l'excentricité. Le calcul que vous m'aviez décrit hier ne peut donc plus s'appliquer, et pour moi je reste persuadé, jusqu'à preuve du contraire, que c'est bien là la cause de l'accéleration du mouvement lunaire, par ce que la seule donnée nouvelle à introduire dans la mécanique céleste est naturellement celle dont elle n'a pas tenu compte jusqu'ici, la déformation des roches.

J'espère que vous me permettrez d'aller encore vous demander vos conseils, et je vous prie de croire à l'assurance de mes sentiments dévoués.

M. Bertrand

ALS 4p. Collection particulière, Paris 75017.

---

2. Lors de la séance du 05.02.1900, M. Bertrand présente une note dans laquelle il met en relation le déplacement de l'axe de rotation de la Terre et la mobilité de l'écorce terrestre. Il admet ainsi que la Terre n'est pas un solide invariable (M. Bertrand 1900a). Cette théorie suscite une critique d'Albert Cochon de Lapparent (1900), et une réponse de M. Bertrand (1900b).

3. M. Bertrand 1900a, note présentée le 19.02.1900.

Chapitre 4

Guillaume Bigourdan

Né dans une famille d'agriculteurs modestes, Camille Guillaume Bigourdan (1851–1932) obtient son baccalauréat ès sciences à l'université de Toulouse en 1870. Ne pouvant pas se préparer aux grandes écoles faute de ressources, il devient préparateur dans un pensionnat d'une école privée. Il obtient à l'université de Toulouse une licence de physique (1874) et une licence de mathématiques (1876). Félix Tisserand, directeur de l'Observatoire de Toulouse, le fait nommer aide-astronome en 1877. Deux ans plus tard, il quitte Toulouse pour assister Tisserand à l'Observatoire de Paris. Il devient astronome-adjoint en 1882 et participe à diverses observations astronomiques, dont le passage de Vénus, avec Tisserand, en Martinique. En 1886, Bigourdan soutient sa thèse de doctorat : "Sur l'équation personnelle dans les mesures d'étoiles doubles", étude qui porte sur 2800 mesures micrométriques d'étoiles doubles (Bigourdan 1886). En 1897, il devient astronome titulaire à l'Observatoire de Paris et en 1902, il est chargé, avec Henri Renan, de la mesure de la différence des longitudes Paris-Greenwich. Cette opération va ouvrir à Bigourdan les portes du Bureau des Longitudes en 1903. L'année suivante, il est élu à l'Académie des Sciences de Paris, dans la section d'astronomie (Académie des sciences 1968, 51).

À la mort de Lœwy, en 1907, Bigourdan est candidat pour la direction de l'observatoire de Paris. Alors que l'Académie des sciences le place en première ligne [1] devant Baillaud et Bassot, le ministre lui préfère Baillaud. Avec Paul Deschanel, Poincaré soutenait la candidature de Bigourdan, comme il l'a affirmé dans une lettre à Baillaud (§ 3-2-1), mais les contributions de l'Observatoire de Toulouse (sous la direction de Baillaud) au projet de la Carte du Ciel furent très appréciées. [2] Dans sa notice sur Bigourdan, Frank Dyson (1933) observe que Bigourdan a pris pour épouse la fille de l'amiral Ernest Mouchez (1821–1892), l'ancien directeur de l'Observatoire de Paris qui a lancé ce dernier projet.

1. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences* 145, 16.12.1907, 1252.

2. Voir l'annotation de la correspondance entre Poincaré et Bigourdan, ainsi que Deschanel à Poincaré, 07.11.1907, et Pierre Bigourdan à Charles Mouchez, 16.12.1907, dossier Bigourdan, archives de l'Académie des sciences de Paris. Sur cette élection controversée voir également les lettres de l'épouse de Bigourdan dans le dossier Bigourdan.

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_4

Bigourdan fut le lauréat du prix Lalande à deux reprises (1883 et 1891) et reçut la médaille d'or de la *Royal Astronomical Society* en 1919. Il fut également membre de l'Académie d'agriculture (1924) en raison de ses travaux dans le domaine de la météorologie. En 1919 il est devenu le premier directeur du Bureau international de l'heure ; en 1924, il présida l'Académie des sciences de Paris et l'Institut de France (Lévy 1970 ; Véron 2006 ; Dyson 1933 ; le dossier Bigourdan, archives de l'Académie des sciences de Paris).

En 1902, conformément au vœu exprimé par l'Association géodésique internationale, les gouvernements anglais et français mettent à la disposition des observatoires de Greenwich et de Paris des crédits spéciaux pour calculer la différence de longitude entre ces deux stations. Les valeurs trouvées antérieurement par les officiers de l'Etat-major français et les astronomes anglais à deux reprises, en 1888 et en 1892, ne s'accordent pas. Christie et Lœwy, respectivement directeurs des observatoires de Greenwich et de Paris, sont chargés de procéder à une nouvelle détermination afin de trouver une valeur exacte de la distance en longitude de deux des méridiens fondamentaux du réseau géodésique européen. Les astronomes délégués par l'Observatoire de Paris sont Bigourdan et Henri Renan ; l'équipe anglaise se compose de Sir Frank Dyson (1868–1939) et Henry Park Hollis (1858–1939).

La lettre de Bigourdan concerne la première de deux séries d'opérations, celle du printemps 1902 (18 avril–29 juin). Les deux équipes réalisent leurs mesures avec des lunettes méridiennes construites par la maison anglaise Troughton & Simms. Parmi les travaux de préparation, il y a l'étude des instruments ; dans la lettre suivante, Bigourdan présente à Poincaré les observations relatives à l'étude de l'influence de l'inclinaison de l'axe de rotation de la lunette. Cette inclinaison est déterminée à l'aide du niveau et par observation de l'image réfléchie sur un bain de mercure (détermination de la collimation par des retournements sur une mire, sur le bain de mercure et sur des étoiles circumpolaires).

Bigourdan a remarqué des imperfections dans son appareil de mesure. Surtout, le niveau qui sert à déterminer l'inclinaison accusait, dans la grandeur de ses parties, une variabilité directe avec la température. Bigourdan a donc étudié le comportement du niveau afin de pouvoir corriger les lectures effectuées dans les opérations de longitude. Il trouva que la monture métallique sur la fiole du niveau, "employé encore assez souvent, surtout à l'étranger", fut responsable de la dilatation (Lœwy 1904a ; Bigourdan 1904 ; Bigourdan & Lancelin 1910).

4.1 Poincaré à Bigourdan

[Entre fin juin et fin août 1900]

Cher Monsieur,
Vous devez avoir entre les mains les placards 1770 et 1772 avec les manuscrits. Je vous serais obligé si vous vouliez bien les renvoyer directement à l'imprimerie afin d'éviter les pertes de temps. Je préviens à l'imprimerie.
Avez-vous remis à l'imprimerie votre manuscrit pour l'éclipse. [3]
J'ai reçu une lettre de l'éditeur d'*Ambronn* qui réclame un Compte Rendu ; c'est bien vous n'est-ce pas qui avez l'ouvrage entre les mains. [4]
J'espère que vous allez passer de bonnes vacances ; nous devons être voisins, car nous sommes aux Petites Dalles avec les Tisserand, mais comme j'ignore votre adresse il faut bien que je vous écrive à Paris. [5]
Votre bien sincèrement dévoué,
Poincaré

ALS 2p. Musée des lettres et manuscrits, Paris.

4.2 Bigourdan à Poincaré

5 Nov. 1901 [a]

Cher Monsieur,
En rentrant après 8 jours d'absence je trouve votre petit mot relatif au placard 1853. Il vous a été renvoyé, sans doute entre le moment où vous l'enverrez et celui-ci revenu. S'il ne vous était pas parvenu j'en corrigerais un second exemplaire.
Votre serviteur bien dévoué,
G. Bigourdan

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

3. Il s'agit de l'observation de l'éclipse totale de Soleil faite en Espagne le 28.05.1900. Bigourdan a dirigé la mission d'observation, organisée sous les auspices du Bureau des longitudes, avec le concours de l'Observatoire de Paris. Son rapport (Bigourdan 1900b) paraîtra dans le numéro d'octobre du *Bulletin astronomique*. Une expédition britannique a été menée par William Henry Mahoney Christie au Portugal à l'occasion de cette éclipse (Carolino & Simões 2012).

4. Le *Handbuch der astronomischen Instrumentenkunde* (1899) de Leopold Ambronn (1854–1930), astronome à Göttingen, sera recensé par Bigourdan (1900a) pour les lecteurs du *Bulletin astronomique* en décembre 1900.

5. Suite au décès de Félix-François Tisserand en 1896, Poincaré lui a succédé dans la chaire d'astronomie mathématique et de mécanique céleste. Poincaré passe ses vacances aux Petites Dalles avec la famille de l'astronome décédé. Les Petites Dalles est une station balnéaire en Haute-Normandie, fréquentée vers la fin du XIX[e] siècle par Jules Verne et Sissi, et réputée pour ses falaises, qui figurent dans les toiles de Camille Pissarro et de Claude Monet.

a. Le manuscrit comporte au verso des calculs de la main de Poincaré.

4.3 Bigourdan à Poincaré

Paris le 25 avril 1902

Cher Monsieur,
Au sujet de la conversation de tout-à-l'heure, voici les différences que j'ai trouvées à *Greenwich* entre l'inclinaison donnée par le nadir et celle donnée par le niveau : il s'agit, bien entendu, de l'inclinaison de l'axe de rotation : [6]

1902	Nadir–Niveau
Avril 9	$+0'', 05$
10	$-0, 49$
10	$+0, 13$
12	$-0, 72$
12	$-0, 76$
13	$-0, 73$
13	$-0, 69$
14	$-1, 18$
14	$-0, 75$
15	$-0, 88$
16	$-0, 89$

Le 12 on a rapproché une des lampes servant à l'éclairage de l'oculaire nadiral, de façon à la placer *à la même distance* que l'autre.

Les observations des trois premiers jours n'indiquaient rien de systématique ; et cependant les deux lampes Est et Ouest étaient inégalement éloignées de l'oculaire.
Je dois ajouter que je ne me suis aperçu de cette différence systématique que le 15 avril : aucune préoccupation n'a donc pu influencer les résultats du 12 et du 13.
M. Dyson et M. Hollis trouvent aussi une différence du même genre, mais deux fois plus petite en valeur absolue. [7]
À Greenwich, où je pouvais pointer le nadir presque tout le temps, je compte faire des observations nombreuses pour tâcher de trouver la cause de cette différence. Peut-être même pourrions nous faire plus tard la même étude à Paris, car j'espère arriver à améliorer notre bain de mercure ; malheureusement dans les quelques heures qui me séparent de mon départ, je ne puis guère faire d'essai. [8]
Je vous prie, cher Monsieur, d'agréer l'expression des meilleurs sentiments de votre serviteur,
G. Bigourdan

ALS 3p. Collection particulière, Paris 75017.

6. À propos de ces mesures, voir Bigourdan & Lancelin (1910).
7. Frank Watson Dyson (1868–1939) ; Henry Park Hollis (1858–1939).
8. Le bain de mercure permet de réaliser des visées nadirales. C'est l'un des accessoires dont l'instrument méridien, construit par la maison anglaise Troughton & Simms, fut équipé.

Chapitre 5

Roland Bonaparte

Le prince Roland Bonaparte (1858–1924) fut le petit-neveu de Lucien, frère puîné de l'Empereur Napoléon Ier. Roland Bonaparte est sorti de l'École militaire de Saint-Cyr en 1879 et a entamé une prometteuse carrière militaire dans l'infanterie avant d'être rayé des cadres militaires suite à la loi de 1886. En 1880, il épousa Marie-Félix Blanc, qui a donné naissance à une fille, Marie (1882–1962). Sa jeune femme est morte un mois plus tard ; Bonaparte a entrepris alors des études de géographie, d'anthropologie, de physique du globe, de géologie, et de botanique. Dans sa résidence parisienne, Roland Bonaparte a fait installer une grande bibliothèque d'environ cent mille ouvrages, ainsi qu'un très grand herbier.

Roland Bonaparte a participé à la création de centres scientifiques, telles que l'Observatoire météorologique du Mont-Blanc, la station zoologique de Banyuls-sur-mer, la station physiologique du Parc des Princes ainsi que de nombreux postes d'observation dans les Alpes et les Pyrénées pour l'étude des glaciers français. Membre fondateur de la Société astronomique de France, Bonaparte appartenait également à la Société statistique de France, la Société d'économie sociale, l'Association française pour l'avancement des sciences, et à la Société historique.

En 1892, Poincaré présenta la candidature de Roland Bonaparte à la Société mathématique de France. À l'Académie des sciences de Paris, Roland Bonaparte fut élu académicien libre le 4 février 1907. Donateur de l'Académie des sciences de Paris, Bonaparte la présida en 1919. Bonaparte fut aussi un membre influent de la Société de géographie, qu'il a présidé à partir de 1879. [1]

Poincaré, en tant que président de la commission de l'Académie des sciences chargée de l'opération de mesure de l'arc (Poincaré 1900c), a interpellé Bonaparte afin de renflouer le budget de l'expédition entamée en 1901. Sans la donation (anonyme) de Bonaparte au montant de 100000 francs-or, la mesure d'arc se serait achevée, mais sans les mesures pendulaires auxquelles tenait Poincaré. [2]

---

1. Sur Bonaparte voir le carton BO-BON : Roland Bonaparte, archives de la Société de géographie, Bibliothèque nationale de France ; dossier Bonaparte, archives de l'Académie des sciences de Paris ; dossier "célébrités", Service historique de l'armée de Terre.

2. L'opération de 1901 faisait suite à l'expédition historique menée par Louis Godin (1704–1760),

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_5

5.1 R. Bonaparte à Poincaré

Samedi 7 Janvier 1905
PARIS, 10, AVENUE D'IÉNA — RB

Cher Monsieur Poincaré,
J'ai trouvé votre aimable lettre hier soir en rentrant chez moi.
Ce que vous me dites au sujet des opérations de l'Équateur m'étonne beaucoup car il y a quelques semaines une personne très autorisée m'avait dit que la mission n'avait besoin de rien et que tous les fonds avaient été votés.[3]
Mes intentions à l'égard de cette grande entreprise scientifique française sont toujours les mêmes.
Attachant une très grande importance à vos conseils au sujet de cette mission, je serai bien aise de pouvoir en causer avec vous avant la réunion de mardi. Pourriez-vous donc venir me voir lundi à l'heure qui vous conviendra, de 2 à 7.
Agréez, cher Monsieur Poincaré, l'assurance de mes meilleurs sentiments.
Roland Bonaparte

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

5.2 R. Bonaparte à Poincaré

Lundi 15 Mai 1905
PARIS, 10, AVENUE D'IÉNA — RB

Cher Monsieur Poincaré,
J'ai reçu le Rapport sur la mission géodésique de l'Équateur que vous avez bien voulu m'envoyer.[4] Je suis très sensible à votre bon souvenir et vous en remercie beaucoup. Ne vous serait-il pas possible de m'en envoyer quelques autres exemplaires ?
Agréez, cher Monsieur Poincaré, l'assurance de mes meilleurs sentiments.
Roland Bonaparte

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

Charles-Marie de la Condamine (1701–1774), Pierre Bouguer (1698–1758) et Joseph de Jussieu (1704–1779) en 1735 (Schiavon 2006).

3. Vraisemblablement, Poincaré a écrit à Bonaparte en tant que président de la commission de l'Académie des sciences chargée de l'opération de mesure de l'arc de Quito (Poincaré 1900c).

4. Il s'agit vraisemblablement du rapport communiqué par Poincaré à l'Association géodésique internationale lors de sa réunion en août 1903 à Copenhague (Poincaré 1904c), ou la version abrégée présentée à l'Académie des sciences de Paris le 10.04.1905 (Poincaré 1905c).

5.3 R. Bonaparte à Poincaré

Vendredi 4 octobre 1907.
PARIS, 10, AVENUE D'IÉNA — RB

Cher Monsieur Poincaré,
Vous serait-il possible de m'envoyer quelques exemplaires de votre dernier rapport sur la mission de l'Équateur dont vous avez donné lecture à l'Académie il y a quelque jours ? [5]
Agréer, cher Monsieur Poincaré, l'assurance de mes sentiments les meilleurs.
Roland Bonaparte

ALS 1p. Dossiers généraux 18 : Commission du Méridien de Quito, Archives de l'Académie des sciences.

5. Voir Poincaré (1907b), note présentée à l'Académie des sciences de Paris le 22.07.1907. Poincaré a donné suite à la demande de R. Bonaparte, comme l'indique un récépissé de l'Administration des colis postaux de Paris pour la somme de vingt-cinq centimes (Archives de l'Académie des sciences), ainsi que deux annotations : une de la main de Poincaré, "20 du dernier," et une autre de main inconnue, "Envoyé les 20 exemplaires le 5.10.07," suivie d'une signature illisible.

Chapitre 6

Robert Bourgeois

Robert Bourgeois (1857–1945) est né Sainte-Marie-aux-Mines, et a fait ses études à l'École polytechnique. À sa sortie de l'École en 1878, il a choisi une carrière de géodésien militaire, qui impliquait un long apprentissage sur le terrain. Bourgeois a entrepris des missions topographiques en Algérie (1887–1888 ; 1891–1893) et en Tunisie (1888–1890), et dans le corps expéditionnaire de Madagascar (1895–1896). En 1898, Bourgeois devint chef de la section de géodésie et d'astronomie du Service géographique de l'armée. En tant que directeur technique de la mission géodésique chargée de la mesure de l'arc de méridien de Quito (1901–1906), il s'est fait un nom à l'Académie des sciences de Paris. Poincaré, qui présida la commission de l'Académie chargée du contrôle scientifique des opérations en Équateur, le considère comme le seul capable de réaliser les mesures pendulaires auxquelles il tient tout particulièrement (Poincaré (1902c, 1903). À son retour de l'Équateur, Bourgeois remplaça Poincaré au cours de géodésie et d'astronomie de Polytechnique, et assura un cours analogue crée au Service géographique de l'armée (Bourgeois 1908). En 1912, ayant atteint le rang de général de brigade, Bourgeois fut nommé à la direction du Service géographique de l'armée. Lors de la Première Guerre mondiale, il dirigea les sections de repérage par le son et par observation terrestre.

Membre de la Société française de physique, la Société de géographie, et la Société astronomique de France, Bourgeois fut élu en 1917 à l'Académie des sciences de Paris, section de géographie et navigation (Académie des sciences 1968, 74). En 1921, il devint membre du Bureau des longitudes. À partir de 1920, Bourgeois entama une carrière politique : il devint sénateur du Haut-Rhin (1920–1936), et vice-président du Sénat (1934–1936).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_6

6.1 Bourgeois à Poincaré

PARIS, LE 4 Juin 1902
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE – MINISTÈRE DE LA GUERRE
ÉTAT-MAJOR DE L'ARMÉE – SERVICE GÉOGRAPHIQUE
140, RUE DE GRENELLE – SECTION de Géodésie

Monsieur et Cher Camarade,
Je connais par les *Comptes rendus de l'Académie* (1897), l'appareil de M. Brillouin. [1]
Tout y repose, au fond, sur l'invariabilité de la marche du Chronomètre, chose difficile à réaliser en Équateur, avec un chronomètre que l'on transporte, et qui certainement changera fréquemment de marche ; il faudra donc toujours emporter avec soi de quoi faire une station astronomique. [2]
D'autre part, j'ai étudié ces temps derniers avec M. Blumbach, astronome russe venu à Paris avec M. Mendeleif pour y déterminer l'intensité de la pesanteur, l'appareil von Sterneck. [3] J'ai été amené à conclure que cet instrument, avec tous ses accessoires, était aussi lourd que le pendule relatif de Defforges ; il est de plus beaucoup plus délicat, et la méthode d'observation me paraît moins simple et moins bonne que la notre. De plus il faut toujours aussi emporter une horloge et en déterminer la marche.
De tout cela résulte que la meilleure solution consistera probablement à opérer avec ce que nous avons, quitte à remplacer la machine pneumatique, le cas échéant, par une pompe à main, et à faire un vide moins parfait, et à employer le cercle méridien le plus portatif que nous pourrons trouver, en subdivisant les colis le plus possible. [4]
J'écrirai à M. Brillouin pour voir son appareil lundi ou mardi prochain, et vous ferai savoir par le Général Bassot, ce que j'en penserai après l'avoir vu, au point de vue spécial de nos opérations en Équateur. [5]
Agréez, Monsieur et Cher Camarade, l'assurance de mon respect.
R. Bourgeois

ALS 3p. Collection particulière, Paris 75017.

1. Marcel Brillouin 1897.
2. Sur l'expédition française à Quito, voir Galison (2003, 191) et Schiavon (2006).
3. Dmitri I. Mendeleev (1834–1907) a perfectionné la table périodique des éléments. Il fut professeur de chimie à St. Pétersbourg jusqu'en 1890 ; en 1893, il prit la direction du Bureau des poids et mesures de cette même ville. Fedor Ivanovič Blumbach fut employé comme inspecteur à ce même Bureau en 1905, selon Strobel (1905).
4. À propos des mesures d'intensité de la pesanteur et l'installation d'une station d'observation, voir Schiavon (2014b, § 2).
5. Le général Léon Bassot, membre de la section de géographie et navigation de l'Académie des Sciences et de la commission académique qui suit les travaux de mesure d'un arc de méridien en Amérique du Sud, est le directeur du Service géographique de l'armée (Schiavon 2014b, § 2).

6.2 Bourgeois à Poincaré

Paris 21 Mai 1904

Monsieur et cher Camarade,
J'ai vu hier M. de Saint Arroman. C'était bien au sujet de la démarche que l'Instruction Publique pouvait avoir à faire auprès des Affaires Étrangères qu'il désirait me parler. Je lui ai exposé l'état de la question et lui ai dit qu'avant tout il était bon que je vous en parle. D'un autre côté j'ai reçu une lettre du Général Bassot que je vous envoie par la poste ainsi que diverses lettres de l'Équateur. Toujours pas moyen de savoir de Maurain s'il se met en route et s'il a vu Peyronel.[6]
Autre question. Le Général Berthaut m'a fait appeler ce matin à l'issue du Conseil des Directeurs tenu aujourd'hui sous la présidence du Ministre.[7] - « Où en est le cours de Géodésie, a dit ce dernier ? »- « M. le Ministre nous attendons vos décisions pour nous y conformer. »- « L'École Polytechnique et l'Institut m'embêtent. J'ai décidé de couper court aux réclamations de Poincaré, de Bouquet de la Grye et de Berthelot. Vous allez immédiatement faire mettre à l'Officiel une décision signée de moi, disant que le Service Géographique ouvrira, à partir du mois de janvier, un cours de Géodésie et d'Astronomie dont vous donnerez le programme, et que les personnes désireuses de prendre des inscriptions devront vous en envoyer la demande. »
J'ai donc reçu l'ordre de préparer ladite décision *pour mardi.* Je ne la remettrai que le soir, après vous avoir vu, car je suppose qu'il y aura Institut mardi.[8] Je pars Mercredi matin au voyage d'État Major, jusqu'au 1r Juin. Si vous désirez me voir avant, je suis tout à votre disposition, ne m'absentant pas pendant la Pentecôte.
Je vous serais très reconnaissant de me prévenir au cas où il n'y aurait pas Institut mardi.
Veuillez agréer, Monsieur et cher Camarade, l'expression de tout mon respect.
R. Bourgeois

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

6. Le Capitaine Eugène Maurain, du Service géographique de l'armée, participe à la mesure d'arc de méridien en Équateur et est le frère aîné de Charles qui, en 1921, est nommé premier directeur de l'Institut de physique du globe à Paris (Charles & Telkès 1989). Capitaine Peyronel, du Service géographique de l'armée, participe à la mesure d'arc de méridien en Équateur (Schiavon 2006).

7. Henri Berthaut, sous-chef de l'état-major général et directeur du Service géographique de l'armée de 1903 jusqu'en 1911. Il poursuivit les travaux de dessin de la carte de France au 50.000e.

8. Dans le projet du ministre de la Guerre de 1904, le cours d'astronomie et géodésie de position du Service géographique de l'armée aurait dû remplacer celui existant à l'École Polytechnique, qui aurait été, par conséquent, supprimé. Finalement, l'intervention de Poincaré qui se charge de l'enseignement, sauve le cours de l'X sans annuler celui du Service géographique. C'est Bourgeois qui donnera, dans la pratique, les deux enseignements à l'École Polytechnique et au Service géographique de l'armée (Schiavon 2006).

6.3 Bourgeois à Poincaré

PARIS, LE 21 décembre 1906
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE – MINISTÈRE DE LA GUERRE
ÉTAT-MAJOR DE L'ARMÉE – SERVICE GÉOGRAPHIQUE
140, RUE DE GRENELLE — SECTION Mission de l'Équateur

Le lieutenant-Colonel Bourgeois, Chef de la Mission de l'Équateur, à Monsieur Henri Poincaré, Président de l'Académie des Sciences, à Paris [9]

Monsieur le Président,
Mes Camarades de la Mission Géodésique Française de l'Équateur et moi-même, avons lu les paroles trop flatteuses que vous avez prononcées à la Séance Publique Annuelle de l'Académie des Sciences, le 17 décembre, au sujet de nos travaux. [10]
Je viens, au nom des officiers de la Mission, vous remercier du fond du cœur, et vous dire tout particulièrement combien nous avons été touchés du souvenir que vous avez consacré à nos malheureux camarades, qui ont succombé là-bas aux fatigues, inévitables dans d'aussi lointaines opérations, et aux atteintes du rude climat de la Cordillère. [11]
Des éloges venant de vous ont pour nous eu bien grand prix et nous vous prions de croire à toute notre reconnaissance.
Veuillez agréer, Monsieur le Président, l'expression de mon profond respect.
R. Bourgeois

ALS 2p. Musée des lettres et des manuscrits, Paris.

9. Bourgeois, responsable technique de la mission, avait pour camarades les capitaines d'artillerie Maurain, Lacombe, Lallemand, et Peyronnel, le lieutenant d'artillerie Georges Perrier et le médecin aide major Paul Rivet. Avec le personnel secondaire (adjudant, sergent, brigadiers, caporaux, soldats, secrétaires, sapeurs télégraphistes, ordonnances, et mécanicien) trente-quatre hommes en tout furent envoyés par l'État-Major en Équateur (Schiavon 2014b, § 2).

10. Poincaré 1906.

11. Le Commandant Massenet (mort de fièvre typhoïde), le Sapeur Roussel, et le Cannonier Pressé (Poincaré 1906, 998).

Chapitre 7

Henry Bourget

Henry Bourget (1864–1921), demi-frère du romancier Paul Bourget, est né le 15 juin 1864 à Clermont-Ferrand (Puy de Dôme). Il obtient en 1885 sa licence ès sciences mathématiques, et deux ans plus tard, sa licence ès sciences physiques. Nommé préparateur de physique à la Faculté des sciences de Clermont-Ferrand, il est mis en congé de 1887 à 1889 avec une bourse d'agrégation et passe un an à l'Observatoire de Toulouse, sous la direction de Benjamin Baillaud. Agrégé de mathématiques en 1890, il est nommé professeur de mathématiques au lycée de Moulins. Il obtient ensuite une bourse de voyage et un congé d'un an pour poursuivre ses études à Göttingen et à Berlin. À son retour, il est nommé professeur de mathématiques au collège d'Aurillac puis, en 1892, professeur au lycée de Clermont et, en 1893, chef de travaux de mathématiques, de mécanique et d'astronomie à la faculté des sciences de Toulouse.

En juillet 1893, il épouse Camille Perroud, fille du recteur de l'académie de Toulouse, et deux ans plus tard, il remplace Eugène Cosserat dans les fonctions d'aide-astronome à l'Observatoire de Toulouse.

Ayant soutenu à Paris, le 21 janvier 1898, une thèse de doctorat ès sciences mathématiques "Sur une classe particulière de groupes hyperabéliens," il est nommé astronome adjoint et maître de conférences de mathématiques, puis professeur adjoint en 1905. À l'observatoire, Benjamin Baillaud lui confie l'organisation de la photographie stellaire à l'aide du télescope Gautier de 80cm, et de la mesure des clichés de la Carte du Ciel.

Il prend une part active à la réalisation du catalogue photographique, ainsi qu'aux observations de la planète Éros. En 1907 il est nommé directeur de l'observatoire de Marseille en remplacement de Stephan, et chargé d'un cours d'astronomie à la faculté des sciences de l'université d'Aix-Marseille, où il devient professeur d'astronomie en février 1909. Il crée, avec la collaboration de Louis Fabry, un centre d'avertissement pour les petites planètes qui comporte l'envoi de circulaires et de télégrammes (Véron 2006).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_7

7.1 Bourget à Poincaré

MARSEILLE, LE 28 Décembre 1909 [a]
OBSERVATOIRE DE MARSEILLE — TÉLÉPHONE 5.29

Monsieur,
J'ai l'honneur de vous envoyer les observations ci-jointes de M. Coggia en vous demandant de bien vouloir les insérer au *Bulletin Astronomique*. [1]
Je profite de la circonstance de cette lettre pour vous demander si vous avez bien reçu la traduction par M. Fleurot d'une brochure de M. G. Schiaparelli sur les comètes. Je serais extrêmement heureux si vous pouviez me confirmer par quelques lignes, la reception de cet envoi et me dire si je puis écrire à M. Schiaparelli que vous l'avez accueilli favorablement, en me donnant la date probable de son impression. [2]
Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de mes sentiments respectueux et dévoués.
Henry Bourget

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

7.2 Bourget à Poincaré

1912 Février 20
OBSERVATOIRE MARSEILLE

Monsieur,
Je vous serais reconnaissant de bien vouloir insérer au *B. A.* les observations ci-jointes de M. Borrelly. [3]
Veuillez agréer l'assurance de mes sentiments respectueux et dévoués.
Henry Bourget

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

1. Jérôme Eugène Coggia (1849–1919), astronome à l'Observatoire de Marseille. Il s'agit vraisemblablement de Coggia (1910).

2. La traduction par Fleurot de l'article de Schiaparelli parait en deux parties, dans les numéros de juin et juillet, respectivement, du *Bulletin astronomique* (Schiaparelli 1910a, 1910b).

3. Alphonse Borrelly (1842–1946). Il s'agit vraisemblablement des observations de comètes publiées dans le numéro d'avril du *Bulletin astronomique* (Borrelly 1912).

a. Le manuscrit porte au verso des calculs et une figure de la main de Poincaré, sans rapport apparent avec le contenu de la lettre de Bourget.

Chapitre 8

Martin Brendel

Martin Brendel (1862–1939) a fait ses études de mathématiques et d'astronomie à Berlin, Munich, Stockholm, Paris et Londres. Il a soutenu sa thèse sur la méthode de Gyldén à Berlin (Brendel 1890), et il a obtenu son habilitation à Griefswald en 1892. En 1898, il fut nommé professeur assistant d'astronomie théorique à l'Université de Göttingen, où il a eu l'occasion d'enseigner les mathématiques d'assurance-vie et les statistiques mathématiques, ainsi que l'astronomie théorique. En 1907, il est devenu professeur d'astronomie et de mathématiques d'assurance-vie à l'Akademie für Sozial- und Handelswissenschaften à Frankfurt a. M., et l'année suivante, directeur du nouvel observatoire dans cette même ville. À propos de la vie et les travaux de Brendel, voir Boda (1940).

8.1 Poincaré à Brendel

[24.01.1912][1]

Mon cher Collègue,
Je suis bien négligent ; voilà déjà plusieurs semaines que le Bureau des Longitudes m'avait chargé de vous écrire que nous serions heureux d'envoyer à Francfort de jeunes astronomes français afin de s'initier, tout en vous aidant à vos travaux, à la théorie des petites planètes.[2] Il y a toutefois encore quelques difficultés que nous espérons surmonter.
Votre bien dévoué,
Poincaré

ALS 1p. Acc. Darms. 9.8.28, Handschriftenabteilung, Staatsbibliothek Berlin.

1. Date de réception, selon une annotation de main inconnue : "24.1.12."

2. Un jeune astronome français, Jean Trousset (1885–1943), a collaboré avec Brendel en 1913–1914, selon son exposé de la méthode de calcul d'orbites de petites planètes de Brendel (Trousset (1933). Par la suite, Trousset est devenu professeur de mécanique rationnelle à la Faculté des sciences de Bordeaux, et doyen (Véron 2006).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_8

Chapitre 9

Octave Callandreau

Né à Angoulème le 18 septembre 1852, Octave Callandreau entre à polytechnique en 1872. Il est diplomé de l'École polytechnique en 1874 et rejoint l'Observatoire de Paris comme aide-astronome puis à partir de 1881, comme astronome adjoint. À l'Observatoire, il se livre à la fois à des travaux d'observation et d'astronomie pratique tout en approfondissant sa formation mathématique.

> [Callandreau] entra à l'Observatoire sous les auspices de Le Verrier, dont il reçut les conseils et qui pressentait en lui un maître futur de la science. Bientôt, en effet, tout en se familiarisant avec l'étude pratique du Ciel, Callandreau apportait aux *annales de l'Observatoire* des contributions théoriques importantes. (Loewy 1904b, 132)

Callandreau soutient sa thèse en 1880 avec une étude *des perturbations d'une petite planète par les méthodes de M. Gyldén* (Callandreau 1882b). En 1882, il dirige la mission française à Haïti d'observation du transit de Vénus. Il participe en 1884 au lancement du *Bulletin astronomique*. Jusqu'à sa mort, en 1904, il sera membre du comité de rédaction de cette revue et en rédigera la chronique bibliographique. L'ensemble des "Revues des publications astronomiques" constitue une chronique détaillée des activités éditoriales des astronomes dans tous les domaines : mécanique céleste, astronomie pratique, astrophysique, photographie, géodésie, problème de l'unification des systèmes horaires.

Pour autant, Callandreau n'en poursuit pas moins ses propres recherches théoriques en participant à la discussion autour de la résolution de l'équation de Gyldén (Callandreau 1883)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + ...)x = 0,$$

en contribuant à la question du *Calcul des variations séculaires des éléments des orbites* (Callandreau 1882a), et plus généralement au calcul des perturbations et au problème des trois corps (Callandreau 1886, 1890a, 1890b, 1891, 1892b, 1892a, 1893a, 1893b, 1895). À partir de 1888, il s'intéresse aussi à la théorie de la figure des planètes (Callandreau

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_9

1888, 1889a, 1889b, 1897c, 1899, 1901a, 1901b). Callandreau ne propose pas d'innovations théoriques fondamentales mais il a le souci de développer la mécanique céleste théorique sans oublier les applications pour les calculs. Ainsi, il peut la même année publier des notes au *Bulletin astronomique* sur les solutions périodiques du problème des trois corps (Callandreau 1891, 1892b, 1893a) et un mémoire dans les *Annales de l'Observatoire de Paris* sur les comètes périodiques (Callandreau 1892a). De plus, ses contributions visent souvent à convaincre les astronomes calculateurs de l'intérêt des travaux de Poincaré pour leur pratique :

> Il est naturel de chercher à faire profiter la Mécanique céleste des progrès réalisés récemment, grâce surtout au grand travail de M. Poincaré sur le problème des trois corps. À l'époque (1877) où M. G.-W. Hill et M. Adams ont publié leurs belles recherches sur la théorie de la Lune, lesquelles offrent précisément des applications des théories mentionnées, ces théories n'étaient pas encore fixées et les éminents auteurs durent se laisser guider par l'induction. Les remarques suivantes aideront, j'espère, à bien saisir l'esprit des recherches de MM. Hill et Adams et permettront, peut-être, au besoin, d'en élargir le cadre. (Callandreau 1891, 49)

Callandreau ne contribue pas seulement au renouvellement des pratiques des mécaniciens-célestes mais aussi à l'élaboration d'outils pédagogiques ; avec Radau, il participe à la rédaction du *Traité de mécanique céleste* de Tisserand. Il est élu membre de la section d'astronomie de l'académie des sciences le 20 février 1893. La même année, il succède à Faye comme professeur d'astronomie et de géodésie à l'École polytechnique.

Callandreau a épousé en 1882 Sophie de Luynes, la fille d'un professeur du Conservatoire des arts et métiers. Le couple aura sept enfants. Callandreau meurt le 13 février 1904.

La correspondance entre Callandreau et Poincaré date du début des recherches de Poincaré en mécanique céleste. Callandreau comprend tout de suite l'intérêt des questions que pose Poincaré aux mécaniciens-célestes et l'encourage à poursuivre dans cette direction.

9.1 Callandreau à Poincaré

[Avant le 26.02.1882]

Mon cher ami,

Je m'empresse de te dire ce que je sais sur les deux points qui t'intéressent :

Sur la stabilité du système solaire, je savais aussi, par une indication de M. Gyldén, que M. Weierstrass avait examiné la convergence des séries ; où et comment je ne l'ai pas appris. [1] Mais M. Gyldén, en septembre dernier, a lu au Congrès astronomique à Strasbourg,

1. Voir Callandreau à Poincaré, 26.02.1882 (§3-9-2).

un travail simple et court sur le même sujet.[2] Le *bulletin* de la Société astronomique aurait dû paraître déjà ; je pourrais te le communiquer.[3] C'est du reste à cause de ce défaut de convergence des séries qu'il a été amené, comme il le dit dans la Note qui accompagne ma lettre „Ueber die Theorie", à imaginer quelque nouveau moyen de calculer les perturbations.[4]

Sans doute tu as regardé les conclusions de Le Verrier, *Annales de l'Observatoire Mémoires* tome II p. 163–168.[5] Le Verrier conclut à la stabilité du système de Jupiter, Saturne, Uranus ; quant au système de Vénus, la terre, Mercure et Mars, il déclare la méthode des approximations successives incapable de prononcer un jugement et il fait alors appel aux géomètres.[6]

---

2. L'observatoire astronomique de Strasbourg fut inauguré le 22 septembre 1881. Ce fut aussi l'occasion de tenir la 9e assemblée générale de l'*Astronomische Gesellschaft* du 22 au 24 septembre. La plupart des directeurs d'observatoires européens assistèrent à cette réunion dont H. Gyldén, directeur de l'observatoire de Stockholm. Callandreau participa aussi à cette assemblée ; voir W. Seggewiss (2005).

3. Il s'agit de Gyldén (1881d), où il étudie la convergence des développements obtenus par approximations successives dans certains problèmes de mécanique céleste. Cet article est la rédaction de sa conférence à l'assemblée de Strasbourg de l'*Astronomische Gesellschaft*. Pour introduire sa nouvelle méthode des orbites intermédiaires, il évoque un cours de Weierstrass sur la théorie des perturbations dans lequel ce dernier aurait critiqué les méthodes utilisées en mécanique céleste :

> In einem unlängst veröffentlichten Bericht über meine neuesten theoretischen Untersuchungen habe ich die Ansicht ausgesprochen, dass die bisherige Betrachtungsweise in der theoretischen Astronomie dem wissenschaftlichen Bedürfnisse nicht mehr genüge, und darauf hingewiesen, dass die successiven Annäherungen, wenn man von osculirenden Kepler'schen Ellipsen ausgeht, nicht immer convergiren und in Folge dëssen nur in beschränkter Weise brauchbar sind. Durch die Güte meines Freundes Prof. Mittag-Leffler habe ich seitdem Gelegenheit gehabt, Kenntniss von den Vorlesungen zu nehmen, die Professor Weierstrass über das Problem der Störungen in der Astronomie vergangenen Winter gehalten hat. (Gyldén 1881d, 296–297)

Il n'est pas fait mention de ces leçons sur la théorie des perturbations dans la liste des cours de Weierstrass publiée dans le tome III de ses œuvres.

4. Il s'agit de la note de Gyldén (1881e) publiée dans *Astronomische Nachrichten*. Gyldén exprime dans cet article ses doutes et ses insatisfactions par rapport aux techniques usuelles de perturbations et présente les grandes lignes de sa méthode :

> Wenn es aber als zweckmässig erachtet wird, die Vorstellungsweise von osculirenden Ellipsen zu verlassen, was soll sie ersetzen ! – Da das Problem der drei Körper mit Hülfe der gegenwärtig bekannten Functionen nur durch Annäherungen gelöst werden kann, so lautet die Antwort auf diese Frage : jedenfalls Annäherungen, aber Annäherrungen, deren erste bereits einen näheren Anschluss an die wahre Bahn gewährt, als die Kepler'sche Ellipse. Das einfachste Mittel, den Ausgangspunkt solcher Annäherungen zu finden, scheint aber das zu sein, dass man versucht, ob nicht die mecanischen Differential-gleichungen der Dynamik integrirt werden können bei Hinzuziehung mehrerer Glieder aus der Kräftefunction ausser dem einzigen, welches von der Anziehung der Sonne herrührt. (Gyldén 1881e, 99)

5. Le Verrier 1856.

6. Dans le chapitre consacré aux inégalités séculaires, Le Verrier (1856) conclut que la méthodes des approximations successives fournit des développements des intégrales en séries "assez convergentes pour qu'on puisse répondre de la stabilité" du système des trois planètes Jupiter, Saturne et Uranus. En revanche, pour le système des planètes les plus proches du soleil (Mars, Terre, Vénus, Mercure), Le Verrier est beaucoup plus prudent et signale que les techniques développées par les astronomes sont certainement insuffisantes :

> Il nous reste à parler du système composé des quatre planètes, Mercure, Vénus, la Terre et

Je ne sais pas par quelle voie tu as été amené à conclure à la divergence des séries pour t assez grand mais en effet – c'est une idée et non un raisonnement – le fait que les puissances de t et les puissances des masses sont toujours associées conduit à penser que la limite de convergence dépend du produit de la masse par le temps.[7] À cet égard ne pourrais-tu pas, considérant les équations différentielles du mouvement et multipliant les masses troublantes par un paramètre α, voir quelles sont les limites de α, dans le développement des intégrales ordonnés suivant les puissances de α, compatibles avec la convergence des séries. Il y aurait là une justification des procédés jusqu'ici constamment appliqués dans le calcul des perturbations.[8]

> Mars. Il ne saurait être traité aussi complétement que le précédent. L'incertitude qui règne sur les masses de ces petites planètes fait que nous ne pouvons compter que faiblement sur les valeurs d'une partie des coefficients et des arguments qui entrent dans les formule de la première approximation. [. . .] Or il est clair qu'il n'y aurait aucun avantage à calculer les corrections dues aux termes du troisième ordre, et dont la valeur absolue tomberait au-dessous des erreurs provenant des inexactitudes probables des masses.
>
> Aussi, bien que les arguments de la première approximation dussent être notablement modifiés pour qu'on pût compter sur les formules dans un avenir reculé, nous n'insisterons pas sur ces corrections, et nous nous bornerons à dire qu'elles sont assez petites par rapport aux arguments eux-mêmes, pour que les séries suivant lesquelles se développent les intégrales soient regardées comme convergentes.
>
> Mais la principale difficulté vient ici de ce que les termes du troisième ordre introduisent, dans les équations différentielles, plusieurs termes dont les arguments diffèrent très-peu de ceux de la première approximation. Ces termes acquièrent, par l'intégration, de très-petits diviseurs ; et ainsi il en résulte, dans les intégrales, des termes dus à la seconde approximation, et dont les coefficients surpassent même ceux de la première approximation. Si l'on pouvait répondre de la valeur absolue de ces termes, la conclusion serait simple : la méthode des approximations successives devrait être rejetée. En recourant aux formules que j'ai données pour juger du degré d'exactitude des arguments, j'ai reconnu qu'on ne pouvait pas arriver à une semblable conclusion, et même qu'on en pouvait tirer aucune ; car, avec les masses admises dans le calcul, quelques diviseurs sont assez petits pour rendre les séries divergentes, et d'autres, par de faibles changements apportés à ces masses, produiraient le même effet. Mais d'un autre côté, par de pareils changements dans les masses, on pourrait rendre tous ces diviseurs assez grands pour que les termes du troisième ordre permissent encore de compter sur la ocnvergence des séries.
>
> Il paraît donc impossible, par la méthode des approximations successives, de prononcer si, en vertu des termes de la seconde approximation, le système composé de Mercure, Vénus, la Terre et Mars, jouira d'une stabilité indéfinie ; et l'on doit désirer que les géomètres, par l'intégration des équations différentielles, donnent les moyens de lever cette difficulté, qui peut très-bien ne tenir qu'à la forme. (Le Verrier 1856, 167–168)

7. Poincaré a dû faire part à Callandreau de ses travaux en cours (et non encore publiés) sur la convergence des séries trigonométriques dans lesquels il s'intéresse aux différents types de convergence des séries. Il souligne en particulier le fait "qu'une série purement trigonométrique et toujours convergente peut cependant croître au-delà de toute limite" (Poincaré 1883b). Poincaré note à cet égard que la démonstration de la convergence des séries de la mécanique céleste est insuffisante pour assurer la stabilité du système.

La première note de Poincaré (1882d) concernant la question de la convergence des séries trigonométriques est publiée dans les *Comptes rendus* de la séance du 30 octobre 1882. Poincaré a déjà commencé à s'intéresser à la question de la convergence des séries utilisées en mécanique céleste, comme en témoigne sa note du 27.02.1882, dans laquelle il vante un des mérites de sa théorie : appliquée "aux équations de la Mécanique céleste", les séries resteraient "convergentes pour toutes les valeurs réelles du temps" (Poincaré (1882e).

8. La suggestion de Callandreau est un résumé d'un programme de détermination du domaine de conver-

Le but poursuivi par M. Gyldén dans ses recherches est de partir d'une orbite auxiliaire plus conforme à la véritable orbite décrite que l'ellipse de Képler pour parvenir, par des

---

gence des développements en séries utilisés en mécanique céleste. En un sens, une grande partie du mémoire de Poincaré (1890a) sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique suit ce programme : à partir du développement du lagrangien F par rapport à un paramètre lié à la masse de la planète perturbatrice,

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots,$$

Poincaré (1891b, 17) distingue les solutions périodiques du premier genre qui sont développables en séries (absolument) convergentes par rapport à μ et celles du second genre qui ne le sont pas. En considérant une solution "peu différente" d'une solution périodique, il introduit la notion d'exposant caractéristique et insiste pour montrer que ceux-ci et les coefficients intervenant dans les développements en série sont "développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$" (ou de μ). Les solutions asymptotiques (introduites par Poincaré) sont associées aux solutions périodiques instables (à coefficient caractéristique réel). Poincaré (1891b, 19) déduit de son étude des solutions périodiques et asymptotiques que "les séries habituelles de la Mécanique céleste sont divergentes" en montrant que les développements ordonnés suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ ne peuvent qu'être divergents.

Poincaré commence à développer ce programme peu de temps après cet échange de lettres avec Callandreau puisqu'il publie en 1883 une note sur les solutions périodiques du problème des trois corps (Poincaré 1883a). À la demande de Tisserand (voir Tisserand à Poincaré, 29.12.1883 (§ 3-44-1), il développe ses premiers résultats sur les solutions périodiques. Il explique qu'en structurant l'espace des solutions du problème des trois corps autour des solutions périodiques, on obtient une méthode pour estimer les résultats donnés par les méthodes d'approximation successives :

> Il semble au premier abord que ces solutions périodiques ne puissent être d'aucune utilité pratique, puisqu'elles correspondent à des valeurs *particulières* des éléments initiaux, valeurs dont la probabilité est nulle. Mais, si les éléments initiaux sont très voisins de ceux qui correspondent à une solution périodique, on pourra rapporter les positions véritables des trois masses aux positions qu'elles occuperaient dans cette solution périodique et se servir, par conséquent, de cette solution comme d'une *orbite intermédiaire*. Appelons r, v, r', v' les coordonnées polaires de m et m' sur cette orbite intermédiaire, $r + \rho, v + \omega, z, r' + \rho', v' + \omega', z'$ les coordonnées semi-polaires de ces mêmes masses sur leur orbite réelle ; les quantités $\rho, \omega, z, \dots$ sont très petites au moins pendant un certain temps. Nous pourrons alors écrire les équations du mouvement sous la forme suivante :
>
> $$\frac{d^2\rho}{dt^2} = R \tag{5}$$
>
> [...] L'intégrale générale de l'équation (5) est de la forme
>
> $$\rho = F + t\Phi,$$
>
> où F et Φ sont des séries trigonométriques. Le dernier terme est séculaire ; mais *on peut toujours choisir l'orbite intermédiaire de façon que ce terme soit nul.* Les différences $\rho, \omega, z, \dots$ sont alors exprimables par des séries trigonométriques.
>
> Voici quelle me semble pouvoir être l'utilité de l'étude des équations (5). Dans le calcul des variations séculaires des excentricités, on est conduit à des équations qui sont linéaires comme les équations (5), mais où les coefficients sont des séries trigonométriques de plusieurs arguments (deux, dans le cas de trois corps). On supprime ensuite tous les termes périodiques pour ne conserver que les termes constants. Il n'est pas sûr qu'on ne commette pas ainsi une erreur considérable ; car, si l'on faisait l'intégration en tenant compte des termes périodiques, les approximations successives introduiraient des termes à petit argument qui pourraient exercer une influence apréciable sur la valeur de la période des excentricités. Au contraire, en étudiant les équations (5), on ne rencontrera pas cette difficulté, puisque les coefficients ne dépendent que d'un seul argument. L'étude de cette équation permettra donc de rendre compte de la grandeur de l'erreur commise par la méthode ordinaire. (Poincaré 1884a, 73–74)

approximations plus convergentes, à un degré convenable de précision.[9]
Il avait étudié dans un mémoire antérieur le mouv^{t} d'un point soumis à l'action d'une force centrale $\frac{\mu_1}{r^2} + \mu_2 r$.[10] L'orbite tourne dans son plan en se déformant ; par un choix convenable de μ_2 on peut se rapprocher du déplacement de l'orbite dans son plan tel qu'il est donné par les observations et les premiers calculs. Alors il prend cette orbite comme orbite auxiliaire ou intermédiaire, et il reste à corriger la position obtenue en modifiant un peu la longitude et le rayon vecteur tirés de l'orbite intermédiaire. Ce dernier point n'est pas évidemment le plus difficile, ce sera l'objet d'une transformation des équations

9. Callandreau avait présenté en 1880 une thèse sur la détermination des perturbations d'une petite planète par les méthodes de M. Gyldén (Callandreau 1882b). H. Andoyer présente les méthodes de Gyldén de la même manière que Callandreau :

> [...] les récents travaux de M. Poincaré permettent de supposer, comme l'avait déjà fait M. Weierstrass, qu'il existe des cas où la légitimité des procédés habituels de la Mécanique céleste peut être mise en doute, du moins s'il s'agit d'intervalles de temps très considérables.
>
> Si, comme nous venons d'en entrevoir la possibilité, il se présente des difficultés que les théories actuelles sont impuissantes à résoudre, il faut, de toute nécessité, supposer que les approximations successives, qui sont censées conduire à la solution, ne sont pas convergentes. La première de ces approximations est obtenue en négligeant complètement les forces perturbatrices ; l'orbite correspondante est l'ellipse de Kepler. Si l'on prend cette ellipse pour point de départ des approximations, si, en outre, comme on le fait d'habitude, ces approximations sont ordonnées par rapport aux puissances croissantes des masses perturbatrices, forme-t-on nécessairement une suite qui converge vers la véritable solution ? En d'autres termes, peut-on pousser la théorie assez loin pour que les différences entre les coordonnées véritables de l'astre et celles que l'on déduit du calcul puissent devenir et rester aussi petites qu'on le veut ? Telle est la question que s'est posée M. Gyldén, et qu'il a résolue par la négative.
>
> C'est donc une nouvelle méthode qui devient nécessaire pour étudier le mouvement des corps célestes. [...] Voici, en effet, ce qui caractérise cette méthode [de Gyldén] : pour servir de base aux approximations successives, M. Gyldén choisit, et cela suivant les cas, une courbe représentant le mouvement réel de l'astre considéré d'une façon plus approchée que l'ellipse de Kepler. Cette courbe est nommée *orbite intermédiaire*. (Andoyer 1887, M2–M3)

10. Dans sa note sur la théorie du mouvement des corps célestes, Callandreau résume de la même manière la méthode de Gyldén en insistant qu'elle fait partie de la tradition des travaux qui s'appuient sur une modification de l'expression du potentiel newtonien :

> Il s'agit essentiellement de la détermination du mouvement de l'astre dans le plan mobile de l'orbite, en considérant en quelque sorte le développement de l'orbite troublée sur un plan. La force perturbatrice a pour résultat de déformer l'ellipse de Kepler et de l'entraîner dans le plan mobile ; et il est connu que Clairaut représenta à peu près le mouvement du périgée de la Lune en prenant comme expression de la force d'attraction
>
> $$F = \frac{\mu}{r^2} + \frac{\nu}{r^3}.$$
>
> En suivant cet ordre d'idée, on rapporte l'orbite troublée non plus à l'ellipse de Kepler, mais à une orbite intermédiaire décrite sous l'action d'une force centrale ; par un choix convenable de cette force, il peut arriver, on le conçoit, que l'effet principal des perturbations, connues par les premiers calculs, soit manifesté dans l'orbite auxiliaire, circonstances avantageuse pour les approximations ultérieures. (Callandreau 1881, 779–780)

du mouvement du genre de celle que tu peux voir *C.R.* 14 novembre 1881 p. 780.[11] Cependant cette manière qu'est celle de M. Gyldén ne paraît pas être la meilleure. Mais c'est un point qui, très important pour le calcul, ne touche pas, tu le comprends, à la nature de la méthode.

Trouver de bonnes orbites intermédiaires, là est le point essentiel ; la manière dont on calculera les corrections de la longitude et du rayon vecteur ou la variation et l'évection a moins d'importance.[12]

Cependant les résultats que tu as obtenus sur l'intégration des équations différentielles du second ordre te font prendre peut-être un intérêt particulier aux équations différentielles de l'évection et de la variation, en dehors de l'application qui leur à été faite de l'équation de Lamé.[13] Dans ce cas, tu trouveras les calculs indiqués avec quelques détails dans les

11. Callandreau (1881) propose une "déduction différente" des méthodes de Gyldén, Callandreau montre qu'en utilisant un changement de variables du type

$$t = \beta \int r^2 du,$$

les équations du second ordre qui déterminent le mouvement sont "susceptibles de simplifications".

12. Gyldén décrit le mouvement des corps sur l'orbite intermédiaire en utilisant trois variables qu'il note τ, ϵ_0 ou ν_0 et qu'il appelle respectivement le temps réduit, l'anomalie intermédiaire et la longitude intermédiaire :

> La longitude intermédiaire et le *rayon vecteur intermédiaire*, appartenant tous les deux à une même valeur de τ ou de ϵ_0, sont les coordonnées polaires dans l'*orbite intermédiaire* du corps dont on examine le mouvement. (Gyldén 1881a, 1262)

La position réelle est déterminée par le rayon vecteur vrai et la longitude réelle. La différence entre la longitude réelle ν et la longitude intermédiaire ν_0 est désignée par Gyldén comme la variation. L'évection est la différence entre le rayon vecteur réel et le rayon vecteur intermédiaire.

13. Callandreau fait allusion aux travaux de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes. En effet, si $x = f(z)$ une fonction fuchsienne alors les deux fonctions $y_1 = \sqrt{\frac{df}{dz}}$ et $y_2 = z\sqrt{\frac{df}{dz}}$ sont solutions d'une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = y\varphi x$$

où φ est algébrique. Un des résultats essentiels aux yeux de Poincaré est que les fonctions fuchsiennes permettent de résoudre la plupart des équations différentielles du second ordre, en particulier "certaines équations à coefficient doublement périodique" (Poincaré 1881c, 860) du genre de celle de Lamé.

Dans la théorie de Gyldén, on obtient le rayon vecteur réel r en multipliant le rayon vecteur intermédiaire r_0 par un facteur

$$\frac{1}{1 - r_0\rho}$$

où ρ vérifie une équation du type

$$\frac{d^2\rho}{d\nu_0^2} + \rho(1 + \Psi_1) = \Psi_0 + \Psi_2\rho^2 + \Psi_3^3 + \dots,$$

où ν_0 est la longitude intermédiaire et les fonctions Ψ sont des séries "renfermant des termes périodiques et constants". La variation vérifie une équation du type

$$\frac{d^2V}{d\nu_0^2} + \alpha^2 \sin V \cos V = X.$$

Ces deux équations seront au centre de la correspondance entre Poincaré et Lindstedt.

C.R. de 1881 : 30 Mai p. 1262 [14] et 14 Novembre p. 780 [15] où la signification des notations est donnée

2 Mai p. 1033 ; 18 Juillet p. 127. [16]

J'ai aussi entre les mains un Mémoire en Suédois. [17] Je ne sais si je t'ai renseigné comme tu le désirais ; mais si tu veux me dire à l'occasion les idées qui te viendront sur ce sujet, j'en serai très heureux.
Ton bien dévoué Camarade,
Octave Callandreau

ALS 4p. Collection particulière, Paris 75017.

9.2 Callandreau à Poincaré

Paris, 26 février 1882

Mon cher ami,
Je n'ai pu dans ma première lettre te parler convenablement de la question de la stabilité ; j'ai cru que tu désirais surtout savoir ce que M. Weierstrass avait fait. [18]

14. Gyldén 1881a.
15. Callandreau 1881.
16. Gyldén 1881b, 1881c.
17. Il peut s'agir de Gyldén (1875) ou de la note que cite Callandreau au début de sa thèse (Gyldén 1874).
18. Le cours de Weierstrass auquel fait allusion Callandreau dans sa première lettre (§ 3-9-1) s'appuie certainement sur l'article dans lequel Weierstrass montre le théorème spectral pour deux formes quadratiques réelles (Weierstrass 1858, 242–243). Weierstrass applique alors ce résultat à la théorie des petites oscillations pour corriger une erreur de Lagrange. En effet, Lagrange affirme que les valeurs propres du hessien du système différentiel décrivant le système légèrement perturbé sont positives et d'ordre 1 et donc qu'il n'apparaît pas de terme séculaire dans les développements :

> Comme la solution précédente est fondée sur la supposition que les variables ξ, ψ, φ, etc., soient très petites, il faut, pour qu'elle soit légitime que cette supposition ait lieu en effet ; ce qui demande que les racines k', k'', etc., soient toutes réelles, positives et inégales, afin que le temps t, qui croît à l'infini, soit toujours renfermé sous les signes de sinus ou cosinus correspondants des exponentielles réelles [...] ; mais comme le développement de ces cas est inutile pour l'objet présent, nous ne nous y arrêterons point. (Lagrange 1853, 333)

Weierstrass montre que le système d'équations du système décrit par Lagrange peut avoir des valeurs propres multiples et qu'il peut donc apparaître des termes séculaires dans les développements en série :

> Die irrige Ansicht Lagrange's rührt daher, dass er bei den mit (1) bezeichneten Gleichungen nichts Anderes berücksichtigt, als dass sie lineare und mit constanten Coefficienten versehene Differentialgleichungen sind. In der That würden, wenn man den Coefficienten von Φ willkürliche Werthe beilegte, und die Gleichung $f(s) = 0$ hätte eine λfache Wurzel, die jetzt mit $(-r)$ bezeichnet werden möge, in den Ausdrücken von $x_1 x_2$ u.s.w. im allgemeinen Glieder vorkommen von der Form
>
> $$F(t)\cos(\sqrt{r}.t) + F_1(t)\sin(\sqrt{r}.t),$$
>
> wo $F(t)$, $F_1(t)$ ganze Functionen $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Grades von t bedeuten sollen. (Weierstrass 1858, 244)

Sur la question des éléments séculaires des petites oscillations, voir F. Brechenmacher (2007b, 2007a).

Mais venons à ta lettre qui m'a uniquement occupé depuis que je l'ai reçu.
D'abord, d'une manière générale, je puis te dire que les astronomes n'ont pas attribué à la question de [la] stabilité la portée que les géomètres lui ont donnée parfois : Ce qu'ils ont voulu, c'est représenter la marche des éléments du système solaire en tenant compte de l'incertitude des données empruntées à l'observation ; de sorte qu'une intégration rigoureuse des équations différentielles voudrait, au point de vue astronomique et pratique, être accompagnée de la connaissance entièrement précise des arbitraires masses éléments ... [19] C'est ce qui explique comment les analyses de Laplace ou de Le Verrier paraissent peu concluantes au premier abord. [20]
Parlons maintenant des beaux résultats auxquels tu es arrivé, indépendamment à coup sûr de ta connaissance des conclusions pratiques formulées par Le Verrier, Hansen, Laplace

19. Callandreau poursuit la discussion sur la stabilité du système solaire et veut dire que les résultats obtenus par les astronomes sur cette question supposent en fait une connaissance absolue des masses des corps. La sensibilité des conclusions qualitatives aux données initiales (en particulier à la détermination des masses) du problème était déjà soulignée, comme le rappelle Tisserand, par Lagrange :

> Mais certaines des masses employées étaient entièrement hypothétiques. [...] On pouvait donc se demander si, avec d'autres données notablement différentes, on trouverait encore seulement des racines réelles : "Il faudrait, disait Lagrange, pouvoir démontrer que, quelles que soient les valeurs des masses, pourvu qu'elles soient positives, les racines de l'équation dont il s'agit sont toujours nécessairement réelles et inégales, et il ne paraît pas impossible de parvenir, par quelque artifice particulier, à résoudre cette question d'une manière générale." (Tisserand 1889a, 411)

20. Laplace a consacré de nombreux mémoires à la question des inégalités séculaires ; voir Sec. perp. 1891, 325–366 ; 1891, 49–92 ; 1895, 295–306 ; 1799. Il s'intéresse en particulier au problème des valeurs propres du système d'équations en montrant que "quelles que soient les données numériques supposées pour les masses et les distances moyennes des planètes au Soleil, l'équation [caractéristique] $G = 0$ a toujours toutes ses racines réelles, pourvu que les planètes tournent toutes dans le même sens" (Tisserand 1889b, 411). La démonstration de Laplace que les valeurs propres sont d'ordre 1 est moins satisfaisante puisqu'il prouve seulement qu'il n'y a pas de terme séculaire :

> Mais il n'en résulte pas nécessairement que l'équation $G = 0$ ne puisse jamais avoir de racines égales, car on sait aujourd'hui qu'il peut arriver dans ce cas que les intégrales générales des équations ne renferment pas le temps en dehors des signes sinus et cosinus. (Tisserand 1889b, 413)

Laplace déduit de son analyse un corollaire concernant la stabilité du système solaire : l'excentricité d'une planète dont la masse représente une part importante de la masse totale restera faible. De même, Laplace prouve des résultats sur l'inclinaison mais ces résultats dépendent fortement d'hypothèses empiriques. Le Verrier reprend la question de la détermination numérique des inégalités séculaires des sept grosses planètes mais pour Tisserand, les résultats obtenus restent en grande part douteux parce que les techniques analytiques utilisées sont trop sensibles par rapport à la valeur des paramètres :

> Il ne faut pas se faire d'illusion sur la généralité des conclusions énoncées ci-dessus relativement à la stabilité du système planétaire. En premier lieu, les équations différentielles ont été obtenues en négligeant, dans les parties séculaires des fonctions perturbatrices, les termes du quatrième ordre ; Le Verrier a cherché à tenir compte de ces termes en faisant varier les constantes arbitraires [...]. L'une des conséquences auxquelles il est arrivé est qu'on ne peut obtenir, par la méthode des approximations successives, aucune conclusion sur la stabilité du système formé de Mercure, Vénus, la Terre et Mars, à cause des incertitudes qui règnent sur les valeurs des masses et peuvent modifier du tout au tout les petits diviseurs qui interviennent dans les formules. (Tisserand 1889b, 429)

d'abord.[21] Tous tes résultats concordent avec les conclusions auxquelles je fais allusion. Cependant tu apportes cette remarque que R_i peut être divergente même si le rapport n/n' est incomm[ensurable].[22] Tu veux dire sans doute que le rapport incommensurable ne doit pas être représenté, avec une approximation indéfinie, par le rapport de deux entiers. S'il n'y a pas quelque chose comme ça, ta conclusion est tout à fait nouvelle et inattendue. Que la série (1) cesse d'être convergente pour les grandes valeurs de t, telle est aussi la

21. Poincaré a dû soumettre à Callandreau le texte préliminaire de sa note sur les séries trigonométriques (Poincaré 1882d). Cette note sera publiée dans les *Comptes rendus* de la séance de l'Académie du 30 octobre 1882. Poincaré fait allusion aux applications de ces résultats à la mécanique céleste (voir note suivante) mais il ne cite pas les noms évoqués par Callandreau, ni d'ailleurs d'aucun astronome. Il en est presque de même dans la note plus étendue publiée en 1884 dans le *Bulletin astronomique* dans laquelle sont cités les noms de Tchebichef, Callandreau et Lindstedt.

22. Poincaré (1882d) étudie dans la note sur les séries trigonométriques la notion de convergence d'une série de fonctions ; il prend pour exemple la série

$$\varphi(t) = \sum A_p \sin \alpha_p t, \tag{1}$$

en supposant que $1/A_p$ et α_p sont positifs et tendent vers zéro quand p tend vers l'infini. Si la série $\sum A_p \alpha_p$ est convergente, la série est simplement convergente. La question posée par Poincaré est de montrer que le module de $\varphi(t)$ peut "*devenir plus grand [...] que toute quantité donnée*." Ce résultat peut se généraliser au cas où A_p et α_p ne seraient plus astreint à être positifs ou encore à la série

$$\sum A_p (1 - \cos \alpha_p) \tag{2}$$

lorsque la série $\sum |A_p| \alpha_p^2$ est convergente. Poincaré déduit de ces résultats quelques conséquences en mécanique céleste :

> Voici comment cela peut s'appliquer aux séries que l'on a à envisager en Mécanique celeste. On sait que, si t est le temps et a le grand axe, par exemple, on a pour la dérivée de grand axe une expression de la forme
>
> $$\frac{da}{dt} = \sum A_p \sin \alpha_p t + \sum B_p \cos \beta_p t,$$
>
> les deux séries $\sum mod A_p$ et $\sum mod B_p$ étant convergentes. En négligeant les carrés des masses, on en conclut, pour la variation δa du grand axe, l'expression
>
> $$\delta a = \sum \frac{A_p}{\alpha_p}(1 - \cos \alpha_p t) + \sum \frac{B_p}{\beta_p} \sin \beta_p t. \tag{3}$$
>
> On serait tenté de conclure que δa reste toujours compris entre certaines limites. Cela a lieu en fait pour certaines valeurs incommensurables du rapport des moyens mouvements. mais il est d'autres valeurs *également incommensurables* de ce même rapport pour lesquelles les séries du second membre de l'équation (3) se comportent comme les séries (1) et (2), et peuvent croître indéfiniment.
>
> Cela n'a pas d'importance au point de vue *pratique* du calcul des perturbations, puisque le rapport des moyens mouvements ne peut être connu qu'approximativement et que nous ne pouvons reconnaître par conséquent si les séries (3) restent finies ou croissent indéfiniment ; puisque d'ailleurs l'équation (3) ne représente la variation du grand axe que si l'on néglige les termes d'ordre supérieur par rapport aux masses, et que nous ignorons si ces termes ne peuvent pas eux-mêmes croître au-delà de toute limite.
>
> Néanmoins, il y a peut-être quelque intérêt à signaler ce fait, car il montre qu'il est impossible d'accepter certaines conséquences *théoriques* qu'on serait tenté de tirer de l'expression (3). (Poincaré 1882d, 768)

conclusion de Laplace, conclusion plutôt que démonstration précise, comme je le disais dans ma lettre. Mais si tu assignes les valeurs que t ne saurait franchir, c'est une conclusion nouvelle et de haute valeur.
À l'occasion des anciens procédés, je t'ai soumis une question sur la convergence des développements ordonnés suivant les puissances des masses ; plusieurs autres se posent encore pour l'application des anciens procédés.
Maintenant le résultat auquel tu arrives pour le calcul numérique des fonctions définies par une éq. différentielle est d'une singulière étendue. Seulement, pour ce qui concerne les perturbations, il faut compter que les circonstances arithmétiques qui se présentent dans l'application des anciens procédés se présenteront aussi. Sans doute les petits diviseurs sont un inconvenient, mais ils ont été la source de beaucoup de découvertes astronomiques.[23]
Si tu veux me renseigner sur tes recherches surtout celles qui peuvent avoir trait au calcul numérique des fonctions, je t'en serai très reconnaissant ; je voudrais n'être pas complètement ignorant sur l'étude des équations différentielles.[24] Tu pourras me trouver R. Jean Bart 9, hôtel Jean Bart, dans un domicile modeste que mon état de célibataire ne m'a pas interdit de conserver ; je ne sors pas dans la matinée et rarement dans l'après-midi.[25]
Tout à toi,
Octave Callandreau

ALS 3p. Collection particulière, Paris 75017.

23. Callandreau fait allusion au travail de Poincaré sur l'intégration des équations différentielles (Poincaré 1882e), paru dans les *Comptes rendus* de la séance du 27 février 1882.

24. Dans ce travail, Poincaré pose la question d'obtenir des développements en séries des solutions d'une équation différentielle "qui restent convergentes pour toutes les valeurs *réelles* de la variable" (Poincaré 1882e, 578). En écrivant les systèmes d'équations différentielles sous la forme

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}$$

où les X_i sont des polynomes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, Poincaré "démontre qu'on peut toujours trouver un nombre α tel que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puissent s'exprimer par des séries ordonnées suivant les puissances de

$$\frac{e^{\alpha s} - 1}{e^{\alpha s} + 1}$$

et convergentes pour toutes les valeurs réelles de s" (Poincaré 1882e, 578). Il termine sa note en soulignant que si l'on appliquait ce genre de techniques aux équations de la mécanique céleste, les séries resteraient convergentes pour toutes les valeurs du temps et en précisant que l'exemple qu'il vient de donner n'est pas obligatoirement le meilleur. Voir aussi la correspondance avec Mittag-Leffler (§§1-1-28, 1-1-29).

25. Callandreau épouse le 7 juillet 1883, Sophie de Luynes, une des filles de Victor de Luynes (1828–1904) qui était professeur au Conservatoire des arts et métiers (chaire de chimie appliquée aux industries de teinture, céramique et verrerie).

9.3 Callandreau à Poincaré

Paris, 8 Mars 1882

Mon cher ami,
Tu trouveras p. 296 du *Bulletin* qui accompagne cette lettre le travail de M. Gyldén dont je t'ai parlé.[26]
D'après ce court essai, il n'avait en septembre dernier que des idées très vagues sur le travail de M. Weierstrass ; je lui ai demandé dernièrement ce qu'il savait à ce sujet maintenant.
Tâche donc de publier bientôt ce qui concerne l'étude et le calcul des fonctions définies par des équations différentielles ; je sais que le commencement se trouve dans le journal de M. Résal ;[27] mais je voudrais voir surtout ce qui concerne le calcul des inconnues.[28]
Ton bien dévoué camarade,
Octave Callandreau

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

9.4 Callandreau à Poincaré

Paris, 1er février 1887

Mon cher ami,
J'ai appris ce matin le résultat de la journée d'hier et je viens offrir mes cordiales félicitations au plus jeune membre de l'Institut.[29]
En marchant d'un pas égal à celui des huit dernières années, il semble que tu deviendrais un grand conquérant. On dit, quand il s'agit de la guerre, que leur sort n'est pas enviable ; mais ici, c'est autre chose. Mon amitié, qui se mélange de respect, appelle sur toi la part la plus large de bonheur à laquelle on peut prétendre ici bas.
Ma femme se joint à moi pour vous présenter toutes nos félicitations, à Madame Poincaré et à toi.
O. Callandreau

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

26. Voir Callandreau à Poincaré (§ 3-9-1). Callandreau transmet à Poincaré le texte de la conférence de Gyldén (1881d) à l'assemblée de Strasbourg de l'*Astronomische Gesellschaft*.

27. Henri Resal dirigeait depuis 1875 le *Journal de mathématiques pures et appliquées*.

28. Poincaré a publié en 1881 la première partie de son *mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle* (Poincaré 1881a). Callandreau attend la seconde partie de ce mémoire (Poincaré 1882a).

29. À l'âge de 32 ans, Poincaré est élu le 31 janvier 1887 à l'Académie des sciences, dans la section de géométrie, sur le poste laissé vacant par le décès d'Edmond Laguerre.

Chapitre 10

Carl Vilhelm Ludvig Charlier

C. V. L. Charlier (1862–1934) a fait ses études à Uppsala, où il a suivi l'enseignement d'Herman Schultz, et reçu son doctorat en 1887. Il a obtenu un poste d'astronome assistant à l'Observatoire de Stockholm en 1888, puis il est revenu à Uppsala en tant que professeur assistant à l'Observatoire. En 1897, Charlier a obtenu un poste de professeur d'astronomie à l'Université de Lund, où il a fait toute sa carrière.

Charlier s'est intéressé au début de sa carrière à la mécanique céleste, le problème des trois corps y compris. C'est à ce propos qu'il a écrit à Poincaré en 1891 (§ 3-10-1), suite aux découvertes de ce dernier (Poincaré 1890a). Au début du vingtième siècle, ses leçons de mécanique céleste ont fait de Charlier une autorité sur le sujet (Charlier 1902, 1907). Mais Charlier, après l'annonce de la théorie des courants d'étoiles par J. C. Kapteyn en 1904, s'est investi dans l'astronomie statistique, devenue un domaine de recherche très prometteur. Poincaré aussi a suivi ce mouvement, qui devait ouvrir de nouveaux champs d'application pour la dynamique des systèmes (Poincaré 1911a). Quant à Charlier, il est devenu l'un des champions de l'astronomie statistique, un domaine dans lequel il a publié l'un des premiers traités (Charlier 1921). À la fin de sa vie, ses contributions ont été reconnues par la médaille Bruce (1933). Sur la vie et les travaux de Charlier, voir Trumpler (1933) and Holmberg (2007).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_10

10.1 C. V. L. Charlier à Poincaré

Upsala $\frac{25}{7}$ 91

à M. H. Poincaré — l'Institut de France — Paris

Cher Monsieur !

Il y a quelque temps (un an environ) j'ai été en possession d'une intégrale particulière d'une forme nouvelle du problème des trois corps.[1] En défaut de temps je n'ai pas pu pousser les recherches sur la convergence, sur le calcul des coefficients et d'autres questions semblables jusqu'au bout. Mais comme il me semble que résultat obtenu n'est pas sans intérêt (et pourrait être généralisé possiblement) je l'ai cru opportun de vous en faire notice, craignant seulement que vous ne le trouverez trop insignifiant.

Voici en ce que consiste le résultat.

Soient r et r' les rayons vecteurs des deux planètes qui circulent autour du soleil, m et m' leurs masses, v et v' les anomalies vraies correspondantes.

Soient enfin a, a', v_0, v_0' quatre constantes d'intégration d'une signification géométrique bien connue,[2] je dis qu'en posant

$$\Delta^2 = a^2 + a_1^2 - 2aa_1 cos(\lambda t + \delta),$$

où

$$\lambda = n - n' \quad \delta = v_0 - v_0',$$

il existe une intégrale particulière du problème des trois corps de la forme suivante

$$\begin{aligned} r &= a + m' \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \Delta^n \\ r' &= a' + m \sum A_n' \Delta^n \\ v &= v_0 + nt + \sin(\lambda t + \delta)\, m' \sum_{-\infty}^{+\infty} B_n \Delta^n \\ v' &= v_0' + n't + \sin(\lambda t + \delta)\, m \sum B_n' \Delta^n \end{aligned} \tag{1}$$

où les dernières équations pourront être écrites aussi sous la forme

$$\begin{aligned} v &= v_0 + nt + m' \frac{d\Delta}{dt} \sum_{-\infty}^{+\infty} B_n \Delta^n \\ v' &= v_0' + n't + m \frac{d\Delta}{dt} \sum B_n' \Delta^n. \end{aligned}$$

1. Charlier a publié deux articles consacrés à la théorie des trois corps ; voir Charlier (1888, 1892). D'après la recension du *Jahrbuch* (JFM 25.1408.03) par Brodén, Charlier (1892, 1893), expose dans ces études la solution dont il fait part à Poincaré dans cette lettre.

2. Parmi ces constantes, a désigne le demi-grand axe, v_0 et v_0' désignent les valeurs à l'origine des temps des anomalies vraies des deux corps.

La démonstration de ce que ces séries satisfassent formellement aux équations du mouvement se fait sans difficultés. Elle s'appuie essentiellement sur la propriété suivante de la fonction Δ, savoir

$$\frac{d^2\Delta^2}{dt^2} = \lambda^2[a^2 + a_1^2 - \Delta^2]$$

et je ne le crois nécessaire à insister longuement sur cette démonstration, dont vous voyez certainement immédiatement les traits capitals.

Cette solution correspond, vous le voyez, à une de vos solutions périodiques, mais elle a par sa forme d'une série ordonnée d'après les puissances d'une seule variable Δ – sous la supposition bien nécessaire que cette série converge – le grand avantage de donner à le domaine de la convergence une forme continue, limitée par les deux circonférences qui sont déterminées par les rayons de convergence de la série à puissances positives et de celles à puissances négatives des expressions (1). [3]

J'espère que j'aurai occasion cet autumn à m'occuper un peu sincèrement avec le problème des trois corps et particulièrement avec votre mémoire couronné et il me semble qu'il ne sera pas donc trop difficile à déterminer les conditions de la convergence des séries (1). [4]

J'ai voulu avec ces lignes seulement vous faire une courte notice du dit résultat en supposant que vous le trouverez avoir un peu d'intérêt.

Avec beaucoup d'estime, votre

C.V.L. Charlier

ALS 5p. Collection particulière, Paris 75017.

3. La solution proposée par Charlier est d'un point de vue formel essentiellement analogue aux solutions "de la première sorte" proposées par Poincaré (1884a). L'intérêt de la présentation de Poincaré est de montrer a priori l'existence de solutions périodiques (dans le cas où les inclinaisons sont nulles et les excentricités petites pour les solutions de la première sorte) et d'en déduire alors que "les distances mutuelles des trois corps peuvent se développer en n séries ordonnées suivant les cosinus des multiples de t". En effet, en montrant a priori la périodicité des solutions qu'il étudie, Poincaré évite la question de la convergence de la série :

> La difficulté était de démontrer rigoureusement l'existence de la solution périodique et d'écarter ainsi à l'avance tous les embarras que pourraient nous causer les questions de convergence. On peut ensuite calculer les coefficients par des approximations successives. (Poincaré 1884a, 69)

Poincaré explique l'importance des solutions périodiques pour le problème des trois corps dans deux notes (Poincaré 1883a, 1884a). La considération des solutions périodiques est le point de départ de son article primé au concours du roi de Suède en 1883, sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique (Poincaré 1890a) dont il donne ce résumé :

> Les solutions périodiques semblent d'abord sans aucun intérêt pour la pratique. La probabilité pour que les circonstances initiales du mouvement soient précisément celles qui correspondent à une pareille solution est évidemment nulle. Mais il peut très bien arriver qu'elles en diffèrent fort peu ; la solution périodique pourra jouer alors le rôle de première approximation d'"orbite intermédiaire". Il peut donc y avoir intérêt à étudier les solutions qui diffèrent peu d'une solution périodique. (Poincaré 1891b, 16)

4. Pour le mémoire couronné voir Poincaré (1890a).

10.2 C. V. L. Charlier à Poincaré

Lund Mai 10 1899

À M. H. Poincaré — Membre de l'Institut — Paris

Cher Monsieur !

Les solutions particulières du problème des trois corps dans le plan, pour lesquelles les excentricités des orbites intermédiaires sont nulles, sont susceptibles d'être réduites à une simple quadrature. [5]

Soient en effet [6]

$$L = \beta\sqrt{a}, \qquad \mathcal{G} = \beta\sqrt{a(1-e^2)}$$

$$\ell = \text{anom[alie] moy[enne]}, \qquad g = \text{long[itude] du pér[ihélie]}$$

donc on a pour le mouvement dans un plan les équations :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \ell}; & \frac{d\ell}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L} \\ \frac{d\mathcal{G}}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}; & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}} \\ \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \ell'}; & \frac{d\ell'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L'} \\ \frac{d\mathcal{G}'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g'}; & \frac{dg'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}'} \end{aligned}$$

où la valeur de la constante β dépend du choix des coordonnées.

La fonction F peut être développée dans une série d'après les puissances des excentricités des orbites intermédiaires, soit

$$F = F_0 + \sqrt{L^2 - \mathcal{G}^2}\, F_{10} + \sqrt{L'^2 - \mathcal{G}'^2}\, F_{01} + \cdots$$

Le problème est à trouver des solutions particulières des équations (A), pour lesquelles [7]

$$\sqrt{L^2 - \mathcal{G}^2} = \sqrt{L'^2 - \mathcal{G}'^2} \equiv 0.$$

Quelque soit le choix des coordonnées, F_0 est une fonction seulement de L, L' et de la différence des longitudes des deux masses, c'est-à-dire de $\ell + g - (\ell' + g')$.

Pour des valeurs évanouissantes des excentricités on a

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F_0}{\partial \ell} \\ \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial F_0}{\partial \ell'}, \end{aligned}$$

5. Le problème étudié par Charlier est une simplification de celui étudié par Poincaré dans lequel deux masses planétaires se meuvent autour du corps central dans un même plan, les excentricités restant très petites. L'étude de ce problème donne lieu aux solutions périodiques de première sorte (Poincaré 1884a, 68).

6. Comme d'habitude, a désigne le demi-grand axe de la trajectoire elliptique, e son excentricité.

7. Charlier étudie le problème des trois corps dans le cas où les orbites intermédiaires sont des cercles.

et comme
$$\frac{\partial F_0}{\partial \ell} + \frac{\partial F_0}{\partial \ell'} = 0,$$
on a l'intégrale
$$L + L' = C. \tag{1}$$
En posant
$$\begin{aligned} L &= \Lambda \\ \because L' &= C - \Lambda \\ L - L' + g - g' &= \lambda, \end{aligned}$$

on peut donc exprimer F_0 en fonction seulement de Λ et λ.
Les équations différentielles de Λ och de λ [8] sont d'une forme canonique. [a]
On obtient
$$\frac{d\Lambda}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L} - \frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}} + \frac{\partial F}{\partial L'} + \frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}'}.$$
Mais
$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial L} &= \frac{\partial F_0}{\partial L} + \frac{L}{\sqrt{L^2 - \mathcal{G}^2}} F_{10} + \cdots \\ \frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}} &= \qquad - \frac{\mathcal{G}}{\sqrt{L^2 - \mathcal{G}^2}} F_{10} + \cdots \end{aligned}$$
On a donc pour $L = \mathcal{G}$
$$\frac{\partial F}{\partial L} + \frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}} = \frac{\partial F_0}{\partial L}$$
et
$$\frac{\partial F}{\partial L'} + \frac{\partial F}{\partial \mathcal{G}'} = \frac{\partial F_0}{\partial L'}.$$

8. En français : “de Λ *et* de λ”.

a. Variante : À cet endroit, un passage rayé reprend presque terme pour terme le début du raisonnement précédent :
“On a
$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F_0}{\partial \ell} \\ \frac{dL'}{dt} &= \frac{\partial F_0}{\partial \ell'}, \end{aligned}$$
et d'après la forme de F_0 on a
$$\frac{\partial F_0}{\partial \ell} + \frac{\partial F_0}{\partial \ell'} = 0.$$
On a donc
$$L + L' = C,$$
où C est une constante d'intégration.”

D'autre part

$$\frac{\partial F_0}{\partial L} - \frac{\partial F_0}{\partial L'} = \frac{\partial F_0}{\partial \Lambda}$$

et les équations différentielles de Λ et λ sont

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \frac{F_0}{\partial\lambda}; \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{F_0}{\partial\Lambda}. \tag{2}$$

De ces équations on connaît l'intégrale de la force vive

$$F_0 = \text{const.}$$

et les éléments Λ et λ sont donc déterminés par une simple quadrature.
La discussion de la formule (2) devient très simple si l'on se sert de la transformation (α), que vous avez envisagée dans le "*Bulletin astronomique*" pour l'an 1897.[9]
Avec une haute considération — votre

9. Poincaré (1897b) étudie différents changements de variables dans les équations du problème des trois corps. Il note par A, B, C les trois corps et par x_1, x_2, x_3 les coordonnées de A, par x_4, x_5, x_6 celles de B et par x_7, x_8, x_9 celles de C. Comme à l'accoutumée, Poincaré désigne indifféremment par m_1, m_2, m_3 la masse de A, par m_4, m_5, m_6 celle de B et par m_7, m_8, m_9 celle du troisième corps C. En notant F le lagrangien du système et en posant

$$y_i = m_i \frac{dx_i}{dt},$$

les équations du problème s'écrivent sous forme canonique :

$$\tfrac{dx_i}{dt} = \tfrac{dF}{dy_i}, \quad \tfrac{dy_i}{dt} = -\tfrac{dF}{dx_i} \quad (i = 1, 2, \cdots, 9).$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un changement de variables conserve la forme de ces équations est

$$\sum x_i' dy_i' = x_i dy_i.$$

Poincaré montre que l'on peut aussi caractériser parmi ces changements de variables ceux qui ne modifient pas la forme de l'équation des aires. Il donne des exemples de tels changements de variable et introduit le changement de variables qu'il dénote "changement (α)" :

$$y_1 = y_1', \quad y_4 = y_4', \quad x_7 = x_7', \quad x_1 - x_7 = x_1', \quad x_4 - x_7 = x_4', \quad y_7' = y_1 + y_4 + y_7.$$

"Ce changement de variables", explique Poincaré, "a une signification géométrique très simple" :

> Les variables nouvelles $x_1', x_2', \cdots, x_6'$ sont les coordonnées *relatives* des points A et B par rapport à des axes mobiles passant par le point C.
>
> Les variables $\frac{y_1'}{m_1}, \frac{y_2'}{m_2}, \cdots, \frac{y_6'}{m_6}$ sont les composantes des vitesses *absolues* de ces deux points A et B. (Poincaré, 1897b, 56)

Poincaré rappelle ensuite le changement de variables introduit par Radau (1868) qu'il propose d'appeler "le changement (β)". Il montre que ce changement conserve la forme de l'équation des forces vives ; ce changement de variables consiste à désigner par x_7', x_8', x_9' les coordonnées du centre de gravité G du système et par ξ, η, ζ celles du centre de gravité des corps A et C, puis à poser

$$x_1' = x_1 - x_7, \quad x_4' = x_4 - \eta,$$

"de telle sorte que x_1', x_2', x_3' soient les coordonnées du point A par rapport à des axes mobiles passant par le point C ; et x_4', x_5', x_6' celles du point B par rapport à des axes mobiles passant par le point D" (Poincaré 1897b, 57–58). Un intérêt supplémentaire des changements (α) et (β) est qu'ils permettent tous les deux d'abaisser le nombre de degré de liberté de 9 à 6.

C. V. L. Charlier

P.S. Les équations différentielles pour les perturbations séculaires dans le mouvement plan peuvent être traitées de la même manière. Ce que vous avez démontré vous même dans le N° 192 de vos "*Méthodes nouvelles*."[10] Peut-être que vous avez démontré aussi la même chose pour les solutions périodiques d'ordre nul par rapport aux excentricités, quoique je ne l'ai pu trouver.

ALS 5p. Collection particulière, Paris 75017.

10.3 Poincaré à C. V. L. Charlier

[Vers le mois de mai 1901]

Monsieur et cher Collègue,
Je viens de recevoir une lettre de M. Ollson.[11] Je ne suis pas très disposé à l'insérer et je ne le ferais pas en tout cas sans avoir consulté la Commission de Rédaction.
Je crois néanmoins devoir vous communiquer cette lettre pour que, dans le cas où la Commission de Rédaction déciderait qu'il y a lieu de la publier, on puisse la faire suivre immédiatement de vos observations.[12] Veuillez donc me renvoyer cette lettre en y joignant

---

Poincaré évoque alors le changement de variables le plus utilisé par les astronomes qu'il appelle le changement (γ) et dont il signale que ses "propriétés sont loin d'être aussi élégantes" que celles des changements (α) et (β) puisque le changement (γ) ne conserve "ni la forme canonique des équations, ni la forme des intégrales des aires" (Poincaré 1897b, 59).

De plus, si l'on utilise les changements de variables (α) et (β), l'intersection des plans des orbites des corps A et B reste dans le plan invariable (élimination des nœuds) :

> Il semble que tous ces avantages auraient dû faire substituer le changement (β) au changement (γ). Si on ne l'a pas fait, c'est sans doute parce que le développement de la fonction perturbatrice est un peu plus compliqué dans l'hypothèse (β). C'est pour cette raison que je crois devoir attirer l'attention sur le changement (α) qui n'a pas encore été proposé, *qui n'altère ni la forme canonique des équations, ni la forme des intégrales des aires et qui conduit à un développement de la fonction perturbatrice tout aussi simple que le changement* (γ). (Poincaré, 1897b, 61)

10. Poincaré (1893, §192) propose une modification de la méthode d'approximations successives pour l'équation (de l'évection)

$$\frac{d^2x}{dt} + x(q^2 - q_1 \cos 2t) = \alpha\phi(x,t)$$

où α est un coefficient très petit, $\phi(x,t)$ est une fonction connue de x et de t dont les termes sont tous de la forme

$$Ax^p \cos \lambda t + \mu.$$

L'objectif est d'obtenir des développements trigonométriques des solutions sans introduire de terme séculaire. Poincaré obtient deux conditions pour lesquelles on a l'alternative :

> Ou bien le problème proposé est impossible ;
>
> Ou bien nos conditions doivent être remplies d'elles-mêmes. (Poincaré 1893, §192)

Afin de montrer que le problème est possible lorsque le lagrangien est périodique par rapport aux variables y_i, Poincaré (1893, §193) utilise des techniques analogues à celles employées par Charlier dans sa lettre.

11. K.-G. Olsson, assistant a à l'Observatoire de Stockholm.

12. La lettre d'Olsson (1901) paraîtra dans le numéro de juin du *Bulletin astronomique*.

les observations de M. Schultze-Steinheil et les vôtres. [13] Vous pouvez sans inconvénient prendre du temps afin de pouvoir communiquer avec M. Schultze-Steinheil. [14]
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 2p. Brevsaml. C.V.L. Charlier, Lund University Library.

10.4 Poincaré à C. V. L. Charlier

[Vers le mois de mai 1901]

Mon cher Collègue,
J'ai l'honneur de vous adresser ci-joint l'épreuve d'une lettre que nous a adressée M. Ollson. Je ne voudrais pas publier cette lettre sans la faire suivre de vos observations ou de la réponse des intéressés. [15]
Veuillez agréer, mon cher Collègue, l'assurance de ma considération la plus distinguée.
Poincaré

Vous remarquerez sans doute quelques fautes de français dans la lettre de M. Ollson. Nous n'avons pas jugé à propos de les corriger, parce qu'en touchant au texte de sa lettre, nous en prendrions la responsabilité et que nous désirons qu'il la conserve tout entière.

ALS 2p. Brevsaml. C.V.L. Charlier, Lund University Library.

10.5 C. V. L. Charlier à Poincaré

[Vers le mois de juillet 1901]

Dans le numéro de juin de votre Journal vous avez donné hospitalité à une lettre de M. Olsson, dans laquelle il a fait quelques remarques concernant deux Mémoires, insérés dans les *Meddelanden från Lunds astronomiska observatorium.* Permettez-moi, cher Monsieur, de faire quelques observations sur les passages qui me regardent. [16]

---

13. C.-A. Schultz-Steinheil.

14. La réponse de Charlier prendra la forme d'une lettre à Poincaré ; voir Charlier à Poincaré (§ 3-10-5). Poincaré fera paraître la lettre de Charlier dans le numéro d'octobre du *Bulletin astronomique* (Charlier 1901).

15. Voir Poincaré à Charlier (§ 3-10-3). Poincaré, après avoir communiqué à Charlier la lettre qu'il a reçue d'Olsson, lui communique l'épreuve de cette même lettre. Elle paraîtra dans le numéro de juin du *Bulletin astronomique* (Olsson 1901). Charlier rédigera une réponse aux critiques d'Olsson, et l'enverra à Poincaré pour publication au *Bulletin* ; voir Charlier à Poincaré (§ 3-10-5).

16. La lettre d'Olsson (1901) critique deux articles de Schultz-Steinheil (1899a, 1899b) dont Callandreau avait rendu compte au *Bulletin astronomique* :

> L'auteur a repris la discussion des mesures spectroscopiques de Dunér sur la rotation du Soleil, et il trouve que les mesures se concilient au moins aussi bien avec une rotation uniforme. Il aurait été désirable de reprendre la discussion, sous le même point de vue, des mesures de Crew, en 1887 ; mais cela n'a pas encore été possible à M. Schultz-Steinheil. Il s'agit là d'une question importante qui demande à être éclaircie.
>
> Sur la division du cercle dans la théorie des perturbations de Hansen

Dans le Mémoire *Ueber die Theilung des Kreises,* etc., M. Schultz-Steinheil a donné des Tableaux très utiles, par lesquels on peut rapidement calculer *d'avance* le nombre des parties en lesquelles on doit diviser le cercle en employant la méthode célèbre de Hansen pour calculer les perturbations des petites planètes.[17] M. Schultz-Steinheil s'est appuyé sur une formule, donnée par moi-même en 1887, qui permet de calculer le nombre en question.
Or, dans sa lettre, M. Olsson dit qu'il a découvert que cette formule serait illusoire.
Voici le problème à résoudre :
Considérons la fonction

$$F = \frac{1}{(\Gamma_0 - 2\Gamma_1 \cos\varphi + \Gamma_2 \cos 2\varphi)^s},$$

qui peut être développée dans une série trigonométrique de la forme

$$F = \sum D_n \cos n\varphi.$$

Il s'agit de trouver le nombre des termes qu'on doit faire entrer en considération dans ce développement pour obtenir une approximation, déterminée d'avance.
À cet effet, on doit calculer la valeur approchée des coefficients D_n pour des valeurs élevées de n.
Dans le cas actuel, ce calcul peut être facilité à cause des valeurs des coefficients Γ, en ce que, Γ_0 étant d'ordre nul par rapport aux excentricités (qu'on suppose ici être petites), le coefficient Γ_1 est du premier ordre, Γ_2 du second par rapport aux excentricités.
Pour obtenir la valeur approchée du coefficient D_n, on doit calculer dans D_n le terme de l'ordre le plus bas par rapport aux excentricités. *Sur la valeur de ce terme, les termes provenant du coefficient* Γ_2 *n'ont aucune influence essentielle.* C'est là ce que j'ai affirmé dans mon Mémoire sur le perturbations de la planète Thétis.[18]

> Combien de valeurs particulières faut-il prendre, en répartissant également les valeurs de l'argument sur la circonférence, pour calculer avec la précision convenable les coefficients des développements en séries périodiques ? Telle est la question que l'auteur traite après M. Charlier. Application est faite aux deux planètes (4) Alexandra et (17) Thétis. (Callandreau 1900, 127)

Olsson affirme que les résultats obtenus dans les deux articles de Schultz-Steinheil sont faux, le mode de calcul numérique du premier mémoire étant erroné :

> En effet, les équations de condition (p. 20) sont formées par sommation des équations directement obtenues (p. 9–20) *sans qu'on ait divisé par le nombre des équations sommées*, et néanmoins on a attribué à ces équations finales des poids égaux aux nombres des équations sommées. (Olsson 1901)

Charlier ne répond qu'aux critiques du second article qui concernent l'utilisation d'une méthode qu'il a développée (Charlier 1898).

17. Schultz-Steinheil 1899b.
18. La critique d'Olsson repose sur cette affirmation :

> Le dernier Mémoire de M. Schultz-Steinheil [...] est fondé sur une formule, donnée par M. Charlier : $n \log x - \frac{1}{2} \log n < \log \frac{\sigma}{k_1} \sqrt{\Gamma_0 \pi}$ laquelle, à cause d'une approximation inadmissible, n'a aucune application au développement de la fonction perturbatrice.
>
> Pour le démontrer, il me faut vous renvoyer au Mémoire de M. Charlier : "Untersuchung

Posons

$$G = \frac{1}{(\Gamma_0 - 2\Gamma_1 \cos\varphi)^s} = \sum E_n \cos n\varphi;$$

il s'agit de comparer les valeurs des coefficients E_n et D_n.
D'après le théorème de Fourier, on a

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi d\varphi}{(\Gamma_0 - 2\Gamma_1 \cos\varphi)^s}, \\ D_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi d\varphi}{(\Gamma_0 - 2\Gamma_1 \cos\varphi + \Gamma_2 \cos 2\varphi)^s}. \end{aligned}$$

Développons D_n d'après les puissances croissantes de Γ_2, ce qui est toujours permis selon les suppositions faites sur les coefficients.
On aura alors

$$\begin{aligned} D_n =& \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\varphi d\varphi}{(\Gamma_0 - 2\Gamma_1 \cos\varphi)^s} \\ & \times \left[1 - \frac{s}{1!}\frac{\Gamma_2 \cos 2\varphi}{\Delta} + \frac{s(s+1)}{2!}\frac{(\Gamma_2 \cos 2\varphi)^2}{\Delta} - \cdots\right], \end{aligned} \tag{1}$$

où

$$\Delta = \Gamma_0 - 2\Gamma_1 \cos\varphi.$$

Les intégrales E_n et D_n étant toutes les deux de l'ordre n, par rapport aux excentricités, on peut interrompre la série (1) au terme où Γ_2 est élevé à une puissance plus grande que $\frac{n}{2}$.[19] Le nombre des termes dans (1) est donc tout au plus égal à $\frac{n}{2}$.
En substituant pour les puissances de $\cos 2\varphi$ l'expression

$$\cos^r 2\varphi = \frac{1}{2^{r-1}} \left[\cos 2r\varphi + \frac{r}{1!} \cos 2(r-2)\varphi + \frac{r(r-1)}{2!} \cos 2(r-4)\varphi + \cdots\right],$$

et en gardant dans D_n seulement les termes de l'ordre le plus bas (c'est-à-dire les termes de l'ordre n), on obtiendra[b]

$$D_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \left[\frac{\cos n\varphi}{\Delta^s} - \frac{s}{1!}\frac{\gamma e^2}{2}\frac{\cos(n-2)\varphi}{\Delta^{s+1}} + \frac{s(s+1)}{2!}\frac{\gamma^2 e^4}{2^2}\frac{\cos(n-4)\varphi}{\Delta^{s+2}} - \cdots\right],$$

über die allgemeinen Jupiterstörungen des Planeten Thetis" [...]. On y lit : "Da es nur von dem genäherten Werthe dieser Koeff, die Rede, so bemerken wir zuerst, dass Γ_2, welche Grösse von der Ordnung des Quadrates der Excentricität ist, in (86) vernachlässigt werden kann, u.s.w."

En conséquence, M. Charlier suppose que les termes du développement de l'expression dans laquelle Γ_2 est négligé sont approximativement égaux aux termes du développement de l'expression radicale complète. Mais cette supposition est fausse, car l'égalité approximative est restreinte au terme constant et aux termes qui sont multipliés par $\cos\epsilon'$ et $\sin\epsilon'$. (Olsson 1901)

Olsson continue en affirmant que pour les termes de degré supérieur, l'approximation proposée par Charlier n'est plus valable.

19. Par rapport à l'excentricité, Γ_1 est d'ordre 1 et Γ_2 d'ordre 2.

b. Nous corrigeons la coquille Δ^5 par Δ^s.

où nous avons posé

$$\Gamma_2 = \gamma e^2.$$

Tous les termes de cette expression sont de l'ordre n par rapport aux excentricités.
D'après une formule bien connue, on a [c]

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos i\varphi d\varphi}{(1-2e\cos\varphi)} = \frac{r(r+1)\cdots(r+i-1)}{i!}e^i(1+\alpha e^2+\beta e^4+\cdots),$$

α, β étant des nombres indépendants de e.
En ne gardant que les termes les plus bas, on obtiendra

$$D_n = E_n\left[1 - \frac{1}{1!}\frac{\gamma}{2}\frac{n(n-1)}{(n+s-1)(n+s-2)} + \frac{1}{2!}\frac{\gamma^2}{2^2}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+s-1)(n+s-2)(n+s-3)(n+s-4)} - \cdots\right],$$

expression contenant tout au plus $\frac{n}{2}$ termes.
Quant au nombre s, il est égal à $\frac{1}{2}$ ou à $\frac{3}{2}$.
Si $\gamma < 1$, cette série converge donc très rapidement. Dans le cas de la nature, γ est d'ordinaire plus petit que $\frac{1}{2}$. Il serait donc bien fondé de remplacer le coefficient D_n par E_n dans le problème dont il est question, et ce serait couler le moucheron et avaler le chameau que de choisir ici une expression plus compliquée pour le coefficient D_n.[20]
Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma plus haute considération.

PrTL. Charlier 1901.

20. La convergence de la série assure que E_n et D_n sont du même ordre ; pour qu'ils soient équivalents, $\frac{E_n}{D_n}$ doit converger vers 1.

c. Nous ajoutons $d\varphi$.

Chapitre 11

William Henry Mahoney Christie

William Henry Mahoney Christie (1845–1922) fut le fils de Samuel Hunter, professeur de mathématiques à la *Royal Military Academy* de Woolwich et membre de la Royal Society. Christie est éduqué à Londres dans la King's College School, puis au Trinity College à Cambridge. En 1868, il fut classé *fourth wrangler* dans les Mathematical Tripos. Il obtient ensuite le master au Sidney Sussex College. En 1870 Airy l'a engagé comme *Chief assistant* à l'Observatoire royal de Greenwich.

À Greenwich, Christie s'est intéressé à la théorie de la lune, et ensuite, aux problèmes de l'optique générale, et notamment à la spectroscopie. En 1877, Christie collabora à la création de l'*Observatory Magazine*, qu'il gère jusqu'en 1881, lorsqu'il devient Astronomer Royal. À une échelle internationale, Christie a contribué à faire attribuer au méridien de Greenwich la fonction de premier méridien du monde, ce qui veut dire méridien zéro des longitudes et méridien d'origine de l'heure civile. Sous sa direction, la différence des longitudes Paris-Greenwich fut mesurée trois fois (1888, 1892 et 1902).

Christie fut élu membre de la Royal Astronomical Society en 1871 et membre de la Royal Society en 1881. Il est devenu correspondant de l'Académie des sciences de Paris, section d'astronomie, en 1896, et en 1904, il fut élu membre étranger du Bureau des longitudes.[1]

La correspondance entre Christie et Poincaré concerne les phases préparatoires de l'opération de la mesure de la différence des longitudes Paris-Greenwich de 1902, qui ont eu lieu entre 1899 et 1901. Au début des négociations, Poincaré fut président du Bureau des longitudes, et il fut également un délégué de la France à l'Association géodésique internationale. C'est au sein de cette association qu'en 1898, la France et la Grande-Bretagne furent sollicitées pour entreprendre une nouvelle mesure de la différence des longitudes entre les méridiens fondamentaux des deux pays. En effet, deux autres mesures

1. Académie des sciences 1968, 121 ; *Annuaire du Bureau des longitudes*, 1910, D5. Sur la carrière et les travaux de Christie, voir l'article du *DSB* de North (1971).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_11

avaient été auparavant réalisées en 1888 et 1892, mais les résultats obtenus par les deux équipes ne concordaient pas. [2]

Christie appréciait les contributions de Poincaré à la science astronomique, surtout en ce qui concerne ses "généralisations mathématiques très étendues appliquées à l'astronomie gravitationnelle". C'est à ce titre que Christie a soutenu Poincaré pour la médaille Bruce de la Société astronomique du Pacifique. [3]

11.1 Poincaré à Christie

PARIS, LE 23 Juin 1899
BUREAU DES LONGITUDES

À Monsieur Christie, Astronome Royal, à Greenwich

Monsieur & très honoré Confrère,

Vous vous rappelez que l'Association Géodésique Internationale, dans sa dernière réunion, a émis le vœu qu'une nouvelle détermination de la différence de longitude Paris-Greenwich fût entreprise le plus tôt possible. [4]

Le Bureau des Longitudes s'est à son tour préoccupé de cette question et, dans la dernière séance de ce Bureau, M^{r} Faye a demandé à M^{r} Lœwy s'il avait pris des dispositions en vue de déférer au vœu de l'Association Internationale.

M^{r} Lœwy a répondu qu'il était entré en pourparlers avec vous, que vous étiez disposé, en principe, à vous associer à ce travail, que l'Observatoire de Paris était prêt et n'attendait qu'un avis de vous pour commencer les opérations.

À la suite de cette communication de M^{r} Lœwy, le Bureau des Longitudes m'a chargé de vous écrire pour vous prier de vouloir bien faire savoir :

1° Si vous êtes disposé à entreprendre cette mesure, soit dans le courant de l'année 1899, soit pendant l'année 1900 ;

2° Dans le cas contraire, à quelle époque il vous conviendrait de fixer le commencement des opérations.

2. À ce propos, voir Kershaw (2014), Bassot & Defforges (1891), et Turner (1891).

3. Poincaré est devenu le premier lauréat français de la médaille Bruce en 1911, avec le soutien de Christie, exprimé par lettre au Secrétaire de la Société astronomique du Pacifique :

> I would remark that the Bruce Gold Medal has not yet been awarded to a French astronomer, and M. Poincaré by his far-reaching mathematical generalisations applied to gravitational astronomy is marked out as the fittest French recipient of the medal. (Christie au Secrétaire de la Société astronomique du Pacifique, 10.10.1908, RGO Archives, Cambridge University Library)

4. Poincaré reprend ici les termes d'une lettre envoyée par Lœwy à Christie le 23.11.1898 (RGO 7/262, Cambridge University Library).

Le 21 juin 1899, Faye, en tant que vice-président du Bureau des longitudes, signala aux membres du Bureau que Christie proposait de procéder à une nouvelle détermination de la différence des longitudes Paris-Greenwich. Lœwy observa qu'il avait déjà fait cette proposition à Christie, mais que l'Astronome royal en avait fait différer l'exécution. Bouquet de la Grye et Bassot ont proposé un échange d'observateurs entre les deux pays, et les autres membres du Bureau ont donné leur accord ; voir les *Registres des séances du Bureau des longitudes,* 1899.

Veuillez agréer, Monsieur & très honoré Confrère, l'expression de ma haute considération.
Le Président du Bureau des Longitudes,
Poincaré

LS 2p. RGO 7/262, Cambridge University Library.

11.2 Christie à Poincaré

1899, August 3 [5]
ROYAL OBSERVATORY, GREENWICH — LONDON, S.E.

à M. Poincaré — Président du Bureau des Longitudes

My dear Sir,
I trust you will excuse my not having replied sooner to your letter of June 23, as the question required careful consideration, and we were in the midst of the discussion of the results obtained with our longitude instruments in the years 1888 to 1898. [6] I am now pushing this on as fast as we can and hope to have all the results ready for printing before the end of this year. They include the longitude Paris-Greenwich in 1888 and 1892, Montreal-Canso-Waterville-Greenwich 1892, Killorglin-Greenwich 1898, and determinations of the difference of longitude of the French & English stations at Greenwich (a few feet apart) to test the instruments in 1893 to 1897.
Now before making a fresh determination it seems to me very desirable that our longitude results should be fully discussed and published in order that we may be able to judge whether the instruments are in all respects satisfactory and that we may put in evidence the errors to which they may be liable. And it is desirable too that the French results for the longitude Paris-Greenwich should also be published in detail.
The enclosed copies of letters I wrote to M. Lœwy and to Col. Bassot may serve to explain my position, which is that we should do all that we can to trace the cause of the discrepancy, before undertaking a fresh determination, which might otherwise only result in failure. [7] I have not heard from Col. Bassot in reply to my letter of February 9, as to

5. A carbon copy of Christie's letter to Poincaré is preserved in the Cambridge University Library (RGO 7/261).

6. Dans les lettres que Christie adresse à Lœwy et à Bassot, l'Astronome royal mentionne Frank Watson Dyson et le commandant Defforges. Gilbert Defforges (1852–1915) est un ancien élève de l'École polytechnique (1870), rattaché au Service géographique de l'armée. Il a participé, avec Léon Bassot, à la détermination de la différence de longitude Paris-Greenwich en 1888. L'équipe anglaise était alors formée par Lewis et Turner. Defforges a participé également à la mesure de la longitude Paris-Greenwich de 1892 (Turner 1916).

7. The manuscript is accompanied by copies of two letters, carbons of which are preserved with Christie's papers at the Cambridge University Library (RGO 7/262). The first letter (ALS 3p) is from Christie to Lœwy; it was sent from the Royal Observatory, Greenwich, on 01.12.1898:

> Dear Monsieur Lœwy,
> Your letter on the question of a redetermination of the longitude Paris-Greenwich arrived while we were occupaied with a determination of a longitude in the west of Ireland (Killorglin, to supplement Valentia & Waterville at the Western end of European arc of parallel) and as Mr Dyson who has been engaged in the work has not yet returned from

Ireland I feel some difficulty in replying definitely till I have discussed the question with him in view of his recent experience.

I am quite disposed to agree with the Council of the Paris Observatory that the redetermination, when it is undertaken should be made by the two Observatories concerned. But I think that before the actual work is begun the instruments to be used should be thoroughly tested by determining the difference of longitude of two stations a few yards apart.

This we have done with our instruments at Greenwich, with quite satisfacory results, and it was arranged with Commandant Defforges that this should also be done at Montsouris with the instrument used by him. He is now at Constantinople, I understand, and I have not heard what has be done at Montsouris. You may remember that we have made two independent determinations of Paris-Greenwich with our instruments * and that the two results provisionally reduced are practically identical ($9^m20^s.85$ in 1888 and $9^m20^s.84$ in 1892).

The question, then, seems to me to turn on the transit instruments used, and that is the first point to be settled. The observations recently made for the longitude of Killorglin may throw further light on the matter as far as our instruments are concerned.

In the meanwhile, I should be very glad to have your views on this troumblesome question. A discrepancy between level errors determined by nadir and by striding level seems to have much to do with it.

With kind regards, Believe me – Your very sincerely – W.H.M. Christie

* different instruments in the two cases vizz: B&C in 1888 and D&E in 1893

The second letter (ALS 4p) is from Christie to Colonel Bassot, and is dated 09.02.1899:

Monsieur le Colonel,

I have to apologize for the delay in replying to your letter of January 19, which was owing to Mr Hollis' absence from the Observatory. As he has had charge of the Longitude computations I wished to talk the matter over with him before replying, and he has only just returned. I trust the delay has not caused you inconvenience.

As regards the redetermination of the Paris-Greenwich longitude, I think before the actual work is begun the instruments to be used should be thoroughly tested by determining with them the difference of longitude of the two piers at Paris and Greenwich respectively under the same conditions as for the Paris-Greenwich Longitude. This was arranged, if I remember right with Commandant Defforges, and we have carried it out as well as we could at Greenwich, having longitude determinations on 14 nights which give a result agreeing satisfactorily with the geodetic difference. This year I hope we may be able to get some further observations meanwhile Mr Hollins is reexamining the computations which had to be made at odd times in the midst of other work, and when he has completed the reexamination, I will send you the results. I should be very glad to hear what results you have arrived at on your side. As the two independent French & English longitudes in 1888 & 1892 respectively agreed remarkably, I doubt whether anything would be gained by repeating the determination with the same instruments until we have found the cause of the discrepancy, and in any case I am afraid I could not arrange to undertake the new determination this summer. We have just completed a determination of the longitude of Killorglin in Ireland in connection with the Western end of the European arc of longitude and we want to discuss this before taking up the new longitude of Paris-Greenwich.

Prof Darwin has communicated to me the wish of the Association Géodésique that the results of the longitude operations should be published, and now that we have completed them by the Killorglin longitude we are getting them ready for publication. I am not clear, however, as to the meaning of the last sentence in your letter. Our clock errors have been long ago determined and were, I believe, compared by Commandant Defforges with the French results when he was over here, so that I do not understand what is the "travail qui n'a pas été fait". For the 1888 longitude we sent you our definitive clock errors on 1890 May 15 and our adopted clock rates to Commandant Defforges on 1890 Oct 17.

Believe me – Yours very truly, W. H. M. Christie

whether the testing of the French instruments at Paris, as arranged with Comm^t Defforges, has been completed and whether the results are satisfactory.
Under all the circustances I am afraid we should not have cleared up the preliminary questions sufficiently to allow of a redetermination of the longitude being made in 1900 with all the precautions suggested by past experience and I would suggest that we should fix the year 1901 for the new determination.
Believe me, My dear Sir, Yours very truly,
W. H. M. Christie

ALS 4p. Observatoire de Paris, X5 C6, Bureau des longitudes, manuscrits mis en depot a l'Observatoire de Paris en 1985, 1987 et 1989.

11.3 Poincaré à Christie

[09.08.1899][8]

Cher Monsieur,
J'ai reçu votre lettre dont je vous remercie ; je l'envoie au général Bassot.
M. Lœwy est absent pour le moment et nous devrons attendre son retour pour arriver à une solution définitive. Je ne crois pas que la vérification des instruments dont vous me parlez ait été faite jusqu'à présent. En ce qui concerne le passé, elle n'aurait aucun intérêt, puisqu'elle ne pourrait pas être confiée aux observateurs qui ont opéré en 1892.[9]
En ce qui concerne l'avenir, elle peut au contraire avoir une grande importance mais on a attendu jusqu'ici pour la commencer que la date de l'opération nouvelle soit fixée ; tant qu'elle ne l'était pas en effet et que cette opération nouvelle n'était même pas décidée en principe, on ne pouvait pas désigner les observateurs qui devront procéder à cette détermination nouvelle et par conséquent faire la vérification préalable.
En ce qui concerne les publications des résultats, je suis heureux d'apprendre que nous ne tarderons pas à recevoir la publication anglaise ; j'espère qu'elle contiendra le détail des calculs et les méthodes de réduction.
Je ne sais où en est l'impression des résultats français, mais les cahiers de calculs sont à votre disposition.
Je crois que la date de 1901 sera agréée, mais je ne puis vous donner de réponse définitive qu'après le retour de M. Lœwy.
Veuillez donc ne considérer ma lettre que comme une réponse provisoire.
Agréez l'assurance de ma considération distinguée,
Poincaré

ALS 3p. RGO 7/262, Cambridge University Library.

8. Le manuscrit porte une annotation de main inconnue : "Longitude of Paris — Z8 — Received 1899 Aug. 9".
9. Defforges, l'officier concerné, est parti en mission diplomatique à Constantinople, puis en Roumanie, entre 1895 et 1899 ; il rentrera en 1905 (Turner 1916).

11.4 Poincaré à Christie

[Apres le 01.12.1899][a]

Monsieur et très honoré Confrère,
Le Bureau des Longitudes s'est occupé de votre proposition de commencer en 1901 les opérations en vue d'une nouvelle détermination de la différence de longitude entre Paris et Greenwich.[10]
Après avoir examiné les diverses difficultés soulevées par ce projet, il a reconnu que ces difficultés pouvaient être écartées et il a décidé d'accepter votre projet et de vous remercier.
Je puis vous annoncer d'ailleurs que la publication détaillée des résultats obtenus par la mission française lors de la précédente détermination, va commencer incessamment. Elle sera donc terminée au moment où les opérations nouvelles commenceront.
Veuillez agréer, Monsieur et très honoré confrère, l'assurance de ma considération la plus distinguée,
Poincaré

ALS 2p. RGO 7/262, Cambridge University Library.

10. Le 11.10.1899, Bassot informa les membres du Bureau que le Service géographique de l'armée ne pourra pas prêter ses nouveaux instruments pour la différence des longitudes Paris-Greenwich, car les officiers les ameneront en Amérique du Sud. Le 31.10.1899, les membres du Bureau s'accordaient à penser qu'il était inutile de renvoyer ultérieurement la date de l'opération. Dans un premier temps, Poincaré fut chargé d'écrire aux directeurs des observatoires de Nice et de Montpellier afin de leur demander le prêt de leurs lunettes méridiennes pour une période de six mois ; Perrotin lui a répondu le 04.11.1899 (§ 3-38-1). Le 22.11.1899, Lœwy demanda aux membres du Bureau des longitudes de procéder à l'achat d'instruments pour l'opération Paris-Greenwich. À la même occasion, Poincaré fut chargé de saisir Liard par écrit afin d'engager la responsabilité du gouvernement ; Bassot a promis que les résultats des anciennes mesures seraient publiés avant 1900. Ces deux conditions devaient permettre, selon les membres du Bureau, d'établir une date pour le début des opérations. Le 27.12.1899, Poincaré communiqua au Bureau la lettre ministérielle autorisant une nouvelle détermination de la différence de longitude entre Paris et Greenwich ; voir le Rapport des séances du Bureau des longitudes, octobre-novembre 1899. Par la suite, Christie proposera que les deux équipes franco-anglaises se servent d'instruments de fabrication anglaise (lunette méridienne Troughton & Simms). Les équipes concernées sont, du côté français, Bigourdan et Lancelin, et du côté anglais, Dyson et Hollins.

a. Le MS porte une annotation de main inconnue : "Re-determination of Paris longitude — Put Inst Papers".

Chapitre 12

Nicolæ Coculesco

Né à Clisura en Macédoine, Nicolæ Coculesco (1866–1952) obtint une licence de sciences mathématiques à l'université de Bucarest. Il devint élève libre à l'Observatoire de Paris en 1887, et a rejoint Mouchez à l'Observatoire de Montsouris en 1890, où il resta environ deux ans. Il devint aide-astronome à titre étranger à l'Observatoire de Paris en octobre 1891, et participa à l'observation au Sénégal de l'éclipse du soleil en 1893, sous la direction de Deslandres (Stavinschi 2002 ; Boistel 2010, 171).

Coculesco a soutenu sa thèse le 5 novembre 1895 "Sur les expressions approchées des termes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice" à la Faculté des sciences de Paris (Coculesco 1895b), dans laquelle il a développé les travaux de Poincaré sur les méthodes de perturbation en mécanique céleste (Poincaré 1892b ; Tisserand 1896, 474). Avec Paul Appell et Félix Tisserand, Poincaré a été membre du jury de soutenance, dont il a rédigé le rapport (§ 3-48-4). Coculesco a été nommé par la suite professeur à la Faculté des sciences de Bucarest, et avec l'appui de Spiru Haret il est devenu le premier directeur de l'Observatoire astronomique de Bucarest.

À la fin des années 1890, Coculesco enseigna à la Faculté des sciences de Bucarest la théorie de la réfraction atmosphérique, et se trouvant incapable de suivre un raisonnement de Laplace, il a écrit à Poincaré afin de solliciter son aide (§ 3-12-1). Il publia son cours (Coculesco 1899), qui prend en considération les hypothèses de Newton, de Bouguer et de Laplace. Poincaré en a publié une courte notice par Radau dans le numéro de juin, 1900 du *Bulletin astronomique* (Radau 1900).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_12

12.1 Coculesco à Poincaré

Bucarest, 29 Mai 1899
Professeur à la Faculté des Sciences de Bucarest — 8, str. Piatza Amzü

Mon cher Maître,
L'hypothèse de Newton, qui rend intégrable l'équation différentielle de la réfraction astronomique

$$d\vartheta = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\sin z\, d\cdot\frac{\delta}{\delta_0}}{\sqrt{\cos^2 z - 2\alpha\left(1-\frac{\delta}{\delta_0}\right) + 2s\,\sin^2 z}},$$

[$\alpha =$ 0,000294211,
$z =$ distance zénithale apparente,
$\delta =$ densité en un point quelconque de l'atmosphère,
$\delta_0 =$ " à la surface de la Terre,
s une très petite quantité variant entre 0 et 0,01167, liée à la hauteur r, du point considéré dans l'atmosphère par la relation : $\frac{a}{r} = 1 - s$ (a rayon terrestre)], l'hypothèse de Newton, disons-nous, suppose la *température constante tout le long de l'atmosphère.*
On obtient alors pour la loi de diminution de la densité δ avec la hauteur, l'expression :

$$\frac{\delta}{\delta_0} = e^{-\beta s} \quad (\beta = 800\,\text{environ}) \tag{1}$$

qui montre que *la densité décroît en progression géométrique.*
L'hypothèse de Bouguer :

$$1 - s = \left(\frac{1+q\delta}{1+q\delta_0}\right)^m$$

[$m = \frac{1}{273}$, q un coefficient de proportionnalité, $q\delta_0 = 0,000588768$, δ_0 pris pour unité de densité] conduit à l'expression suivante, de cette même loi de diminution :

$$\frac{\delta}{\delta_0} = 1 - \frac{\beta}{2}s, \tag{2}$$

donc la *densité décroît en progression arithmétique*. On sait que, la réfraction horizontale calculée dans l'hypothèse de Newton est *plus grande*, elle est au contraire *plus petite* dans celle de Bouguer, que la réfraction horizontale observée. La seconde hypothèse est toujours plus satisfaisante.
J'arrive à l'hypothèse de Laplace.
L'illustre géomètre s'exprime ainsi :

> « Une hypothèse qui participerait de l'une et de l'autre de ces lois semble devoir représenter à la fois les réfractions et la diminution observées dans la température des couches atmosphériques. »

Il suppose alors la double hypothèse suivante

$$s - \alpha\left(1 - \frac{\delta}{\delta_0}\right) = u \qquad \frac{\delta}{\delta_0} = \left(1 + \frac{f}{\ell'}u\right)c^{-\frac{u}{\ell'}} \tag{3}$$

(f, ℓ' déterminées numériquement par la condition que cette loi exprime à la fois la réfraction horizontale et la hauteur du baromètre). Il s'exprime ainsi à propos de la densité δ : « *Cette valeur de δ participe à la fois des deux progressions arithmétique et géométrique* » (*Méc. Céleste* t. IV édition de 1805). [1] Presque tous les traités d'astronomie (voir Brunow, Dubois, etc.) on[t] reproduit ce passage de Laplace sans montrer : [2]
1° Comment peut-on arriver à la substitution (3) posée par Laplace ?
2° Pourquoi δ participe en effet (comme s'exprime Laplace) des deux hypothèses arithmétique et géométrique ?
et 3° Est-il légitime, comme Laplace procède, de substituer à δ, dans le dénominateur de l'équation différentielle de la réfraction, sa valeur déduite de la 1re de (3), tandis que la différentielle $d \cdot \frac{\delta}{\delta_0}$ la calcule avec la seconde relation (3) ?
C'est ainsi qu'il obtient :

$$d\vartheta = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{\left(1 - f + \frac{fu}{\ell'}\right)c^{-\frac{u}{\ell'}}}{\sqrt{\cos^2 z + 2u}}\sin z\frac{du}{\ell'}.$$

Je vous serais bien reconnaissant, Mon cher Maître, si vous vouliez bien me dire un mot là-dessus.
Votre élève bien dévoué,
N. Coculesco

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

1. Laplace (1805) ; Secrétaires perpétuels (1880, 263).
2. Brünnow (1869), Dubois (1877).

Chapitre 13

Louis Joseph Auguste Commines de Marsilly

Louis Joseph Auguste de Commines de Marsilly (1811–1890) naît à Anizy-le-Château dans l'Aisne. Il entre à l'École polytechnique en 1831 et effectue à la suite de ses études une carrière militaire. Il obtient le grade de général de brigade en 1871. À partir de 1871, il poursuit une activité éditoriale soutenue en mathématiques et en physique. Il soumet par exemple en 1861 à l'Académie des sciences de Paris son *Mémoire sur l'attraction universelle considérée au point de vue des actions moléculaires*, publie en 1865 des *Recherches mathématiques sur les lois fondamentales du monde physique* et poursuit dans cette direction en publiant plusieurs ouvrages ou mémoires consacrés aux lois de la matière (Commines de Marsilly 1865, 1868, 1880, 1884). Il participe régulièrement aux congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences et appartient à la Société mathématique de France dès sa création en 1872.

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_13

13.1 Commines de Marsilly à Poincaré

Auxerre le 4 juin 1885

Monsieur et cher Collègue,
Je vous remercie de votre complaisance à me répondre et, au risque d'en abuser, je viens vous donner quelques indications sur les nouvelles intégrales que j'espère obtenir dans le problème des trois corps. Je ne connais pas la solution de Bour ; mais je vous en dirai assez pour que vous puissiez juger ma méthode et me dire si elle rentre dans celle de Bour. [1]
Les neuf équations du mouvement des trois corps rapportées à un système fixe d'axes rectangulaires peuvent être représentées par le symbole

$$(9) \qquad \frac{d^2u^{(i)}}{dt^2} = m^{(j)} f \frac{u^{(j)} - u^{(i)}}{r^{(k)3}} + m^{(k)} f \frac{u^{(k)} - u^{(i)}}{r^{(j)3}} \tag{1}$$

où l'on désigne par <u>u</u> l'une quelconque des trois coordonnées x, y, z, par r la distance de deux points et par (i), (j), (k) trois accents consécutifs pris à volonté dans la série $'$, $''$, $'''$, $'$, $''$, …. Les sept intégrales premières connues des équations (1) peuvent être comprises sous les types symboliques suivants :

$$(3) \qquad m' \frac{du'}{dt} + m'' \frac{du''}{dt} + m''' \frac{du'''}{dt} = a, b \text{ ou } c \tag{2}$$

$$(3) \qquad m'\left(v'\frac{du'}{dt} - u'\frac{dv'}{dt}\right) + m''\left(v''\frac{du''}{dt} - u''\frac{dv''}{dt}\right) + m'''\left(v'''\frac{du'''}{dt} - u'''\frac{dv'''}{dt}\right) = \gamma, \alpha \text{ ou } \beta, \tag{3}$$

(u, v représentant deux coordonnées consécutives dans la série x, y, z, x, …)

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\sum m^{(i)}\left(\frac{dx^{(i)2}}{dt^2} + \frac{dy^{(i)2}}{dt^2} + \frac{dz^{(i)2}}{dt^2}\right) = \frac{m'm''f}{r'''} + \frac{m''m'''f}{r'} + \frac{m'''m'f}{r''} + k. \tag{4}$$

1. Edmond Bour publie en 1855, alors qu'il est élève-ingénieur à l'École des mines de Paris, un mémoire *Sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique analytique* (Bour 1855b), dans lequel il s'intéresse à certains cas particuliers de la théorie de Jacobi. La même année, il soutient sa thèse en proposant (comme première thèse) un *mémoire sur le problème des trois corps* (Bour 1855a), dans lequel il s'inspire comme dans son travail précédent des résultats de Joseph Bertrand sur les intégrales des équations différentielles de la mécanique. Dans sa thèse, Bour montre qu'à l'aide d'un changement de variables, on peut conserver aux équations de la théorie de Bertrand la forme habituelle des équations d'Hamilton. L'intérêt du travail de Bour est de montrer que le problème général des trois corps peut se résoudre en perturbant le cas où le mouvement est plan puisque l'hamiltonien obtenu par Bour se décompose en deux parties : l'hamiltonien du problème restreint au plan et une fonction perturbatrice "égale au produit d'une constante qui dépend des aires par la somme des moments d'inertie des corps autour d'un certain axe, divisé par le carré du triangle formé par les trois corps" (Bour 1855a, 25).

À la différence du travail de Bour, les calculs de Commines de Marsilly n'emploient pas l'approche hamiltonienne, mais une forme synthétique des équations du mouvement.

Il faut y ajouter trois intégrales secondes représentées par le symbole

$$(3) \qquad m'u' + m''u'' + m'''u''' = at + a' \text{ ou } bt + b' \text{ ou } ct + c'. \tag{5}$$

Voici l'idée qui s'est présentée à mon esprit.
Changeons de coordonnées, et, recourant à un système polaire connu, posons

$$\begin{aligned} x^{(i)} &= R^{(i)} \sin\varphi^{(i)} \cos\psi^{(i)}, \\ y^{(i)} &= R^{(i)} \sin\varphi^{(i)} \sin\psi^{(i)}, \\ z^{(i)} &= R^{(i)} \cos\varphi^{(i)}. \end{aligned} \tag{6}$$

La substitution de ces valeurs dans les trois équations (5) nous donnera R', R'', R''' en fonction de $\varphi^{(i)}$, $\psi^{(i)}$. En posant

$$\begin{aligned} D = {}& -\cos\varphi' \sin\varphi'' \sin\varphi''' \sin(\psi'' - \psi''') \\ & - \cos\varphi'' \sin\varphi''' \sin\varphi' \sin(\psi''' - \psi') \\ & - \cos\varphi''' \sin\varphi' \sin\varphi'' \sin(\psi' - \psi''), \\ N' = {}& (at + a')(\sin\varphi'' \sin\psi'' \cos\varphi''' - \sin\varphi''' \sin\psi''' \cos\varphi'') \\ & + (bt + b')(\cos\varphi'' \sin\varphi''' \cos\psi''' - \cos\varphi''' \sin\varphi'' \cos\psi'') \\ & + (ct + c') \sin\varphi'' \sin\varphi''' \sin(\psi''' - \psi''), \\ N'' = {}& (at + a')(\sin\varphi''' \sin\psi''' \cos\varphi' - \sin\varphi' \sin\psi' \cos\varphi''') \\ & + (bt + b')(\cos\varphi''' \sin\varphi' \cos\psi' - \cos\varphi' \sin\varphi''' \cos\psi''') \\ & + (ct + c') \sin\varphi''' \sin\varphi' \sin(\psi' - \psi'''), \\ N''' = {}& (at + a')(\sin\varphi' \sin\psi' \cos\varphi'' - \sin\varphi'' \sin\psi'' \cos\varphi') \\ & + (bt + b')(\cos\varphi' \sin\varphi'' \cos\psi'' - \cos\varphi'' \sin\varphi' \cos\psi') \\ & + (ct + c') \sin\varphi' \sin\varphi'' \sin(\psi'' - \psi'), \end{aligned} \tag{7}$$

et

$$M = m' + m'' + m''', \tag{8}$$

on aura

$$R' = \frac{MN'}{m'D}, \quad R'' = \frac{MN''}{m''D}, \quad R''' = \frac{MN'''}{m'''D}. \tag{9}$$

Si on remplace ces valeurs dans (6), puis les nouvelles valeurs de $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $z^{(i)}$ dans (1), on aura neuf équations ne contenant plus que les six variables $\varphi^{(i)}$, $\psi^{(i)}$, ainsi que leurs dérivées premières et secondes. En outre ces équations seront linéaires par rapport aux six dérivées secondes $d^2\varphi'/dt^2$, $d^2\psi/dt^2$, $d^2\varphi''/dt^2$, etc. On peut donc éliminer ces dernières et l'on trouvera trois équations entre les $\varphi^{(i)}$, $\psi^{(i)}$, $d\varphi^{(i)}/dt$, $d\psi^{(i)}/dt$, lesquelles contiendront les constantes a', b', c' étrangères aux sept intégrales premières déjà trouvées ; ce seront donc trois intégrales premières distinctes.
Voilà l'idée ; elle n'aboutirait pas, si la substitution rendait les trois équations résultantes identiquement nulles, alors même qu'aux neuf équations (1), on en substituerait six (1)

en trois différentielles de (3). Je ne crois cependant pas qu'il en soit ainsi, quoique je n'ai pas encore achevé tous les calculs relatifs à l'élimination, parce que les facteurs arbitraires dont je me sers pour opérer cette élimination et que j'ai déjà obtenus sont variables, et différents de m', m'', m'''. Toutefois, je ne pourrai me prononcer en connaissance exacte de cause qu'après avoir entièrement achevé et vérifié des calculs fort longs par eux-mêmes.
Il y aurait encore une autre remarque à faire. Si les trois équations résultantes sont distinctes les unes des autres, on aurait en tout dix intégrales premières et neuf dérivées $d\varphi^{(i)}/dt$, $d\psi^{(i)}/dt$. On pourrait donc éliminer celles-ci et obtenir une équation résultante entre les $\varphi^{(i)}$, $\psi^{(i)}$, laquelle serait une quatrième intégrale seconde. Mais on aurait à opérer d'énormes calculs, et il me semble que cela n'est point possible, parce que le nombre des constantes serait insuffisant.
Pour le moment, je calcule les facteurs propres à l'élimination des dérivées secondes, et j'en ai déjà trois. Si j'échoue, j'aurais fait au moins un exercice bien sérieux sur le calcul des déterminants que j'ai appris tard, et, par suite, ne manie pas facilement.
Agréez, Monsieur et cher Collègue, l'assurance de ma considération la plus distinguée.
de Marsilly

ALS 3p. Collection particulière, Paris 75017.

Chapitre 14

Eugène Cosserat

Eugène Cosserat (1866–1931) a fait ses études secondaires dans sa ville natale d'Amiens. Il est entré à l'École normale supérieure en 1883 et a obtenu l'agrégation de mathématiques en 1886. La même année, il fut recruté comme aide-astronome à l'Observatoire de Toulouse. Il a soutenu en 1889 sa thèse de mathématiques, *Sur le cercle considéré comme élément générateur de l'espace* (Cosserat 1889). En 1896, il devint professeur de mathématiques à la Faculté des sciences de Toulouse et inaugura à cette occasion le cours de calcul différentiel et intégral. En 1908, il devint dans la même faculté professeur d'astronomie et succéda à Baillaud à la direction de l'Observatoire de Toulouse.

Ses travaux mathématiques, développés avec son frère François Cosserat, portent surtout sur la géométrie différentielle et l'application de celle-ci en mécanique ; notamment, les frères Cosserat ont collaboré sur la *Théorie des corps déformables* (Cosserat 1909). Les travaux astronomiques d'Eugène Cosserat concernent surtout l'astronomie de position, l'observation photographique du ciel et les questions numériques liées aux mouvements propres des étoiles.

Cosserat fut élu à l'Académie des sciences de Paris, d'abord comme correspondant de la section de géométrie, en 1911, puis, en 1919, comme membre non-résident de la section d'astronomie. En 1923, il fut nommé membre non-résident du Bureau des longitudes. À partir de 1896, Cosserat a pris la responsabilité des *Annales de la faculté des sciences de Toulouse* :

> [Eugène Cosserat] commença à remplir les fonctions de Secrétaire des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* en 1896 et ne cessa qu'en 1930, sous l'impérieuse contrainte de l'affaiblissement qui devait l'emporter. Or, il a su maintenir le Recueil qui honore notre Faculté au premier rang des très nombreuses publications scientifiques dont le bénéfice est ainsi assuré, par voie d'échange, à notre Bibliothèque universitaire. (Buhl 1931, VIII)

Les deux lettres échanges par Cosserat à Poincaré concernent l'édition de manuscrits dans leurs revues respectives : le *Bulletin astronomique* de Poincaré (§ 3-14-1) et les

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_14

Annales de la Faculté des sciences de Toulouse de Cosserat. On peut douter que Poincaré ait eu l'occasion de lire la deuxième lettre que Cosserat lui envoya (§ 3-14-3), quelques jours seulement avant le décès de Poincaré à Paris.

14.1 Cosserat à Poincaré

TOULOUSE LE 2 Mars 1912
UNIVERSITÉ DE TOULOUSE – OBSERVATOIRE

Monsieur,
J'ai l'honneur de vous adresser les observations ci-jointes de Mars, Saturne, Neptune, effectuées par M.M. Rabioulle et Besson qui vous seraient très reconnaissants de bien vouloir les insérer dans le *Bulletin astronomique*. [1]
Veuillez agréer, Monsieur, l'hommage de mon profond respect.
E. Cosserat

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

14.2 Poincaré à Cosserat

[07.07.1912] [2]

Mon cher Collègue,
Vous m'avez demandé hier si j'avais un mémoire qu'on pourrait insérer aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.* Je vous envoie aujourd'hui quelque chose qui pourrait peut être vous convenir (sous pli separé, recommandé).
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 1p. Musée des lettres et manuscrits, Paris. Fac-similé publié dans Académie des sciences (1955, 302).

1. Rabioulle & Besson 1912. Émile Besson (1868–1948) fut assistant à l'Observatoire de Toulouse, où Émile Rabioulle (1887–1914) fut délégué dans les fonctions d'aide-astronome (Véron 2006).
2. Le manuscrit porte une inscription de main inconnue : "7 Juillet 1912".

14.3 Cosserat à Poincaré

TOULOUSE LE 11 juillet 1912 [a]
UNIVERSITÉ DE TOULOUSE – OBSERVATOIRE

Monsieur et illustre Maître,
J'ai l'honneur de vous accuser réception du Mémoire que vous avez eu la bienveillance de m'adresser pour les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* ; je l'ai remis à l'imprimeur qui vous adressera prochainement des épreuves déjà revues d'après votre manuscrit, afin de simplifier votre travail de correction. [3]
J'ai oublié de vous dire que l'éditeur aura à vous adresser cent tirages à part.
Veuillez agréer, Monsieur, l'hommage de mon profond respect.
E. Cosserat

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

3. Poincaré 1912c.

a. Le manuscrit porte deux inscriptions de main inconnue : (1) “écrit le 14 février 1913 pour demander titre et ce que ce mémoire est devenu” ; (2) “Mémoire sur les Fonctions modulaires et les fonctions fuchsiennes — reçu 100 tirages à part à la suite de ma lettre du 14 février 1913”.

Le 19.02.1913, Eugène Cosserat a expliqué à la veuve de Poincaré le retard dans la livraison des tirages (Musée des lettres et manuscrits, Paris) :

> Madame,
>
> L'éditeur des *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse* m'avait dit qu'il vous avait adressé les cent tirages à par qui vous étaient destinés ; mais il a dû constater que ses indications avaient été mal exécutées ; j'espère que son envoi vous est actuellement parvenu.
>
> M^r Henri Poincaré, que j'avais vu le samedi 6 Juillet 1912, m'avait, par la lettre ci-jointe, annoncé l'envoi d'un manuscrit pour les *Annales de Toulouse*. Ainsi que j'en avais prévenu M^r Lucien Poincaré, j'ai corrigé les épreuves correspondantes avec tout le soin possible ; je joins à cette lettre le manuscrit que vous désirez peut-être conserver.
>
> Veuillez agréer, Madame, avec l'expression renouvelée de mes sincères condoléances, l'hommage de mon profond respect.
>
> E. Cosserat

Chapter 15

George Howard Darwin

George Howard Darwin (1845–1912) was the fifth child of the British naturalist Charles Darwin. After graduating from Trinity College, Cambridge in 1868, Darwin studied law for six years, before returning to Cambridge, and publishing work in geophysics. In 1879, Darwin was elected fellow of the Royal Society, and became its president in 1900. In 1883, he was appointed Professor of Astronomy and Experimental Physics at Cambridge, succeeding James Challis. In 1907, he was elected Corresponding member of the Paris Academy of Science.

Darwin's contribution to cosmogony is original in that he put various hypotheses to the test of actual calculations, in contrast to the purely qualitative arguments usually employed in the field. [1]

The surviving Poincaré-Darwin correspondence is limited in scope, but substantial in one of its chosen subjects. The earliest letters concern the preparation of a volume in honor of George G. Stokes, and honors awarded Poincaré by the Royal Astronomical Society and the Royal Society, along with the classification of periodic orbits. The core topic of the Poincaré-Darwin correspondence, beginning with a letter from Darwin on 28 May, 1901 (§ 3-15-11) is the stability of the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating fluid mass. The exchange generated much correspondence over the next 12 months, of which thirty-four letters have been preserved and are published here, including eighteen letters from Poincaré and sixteen from Darwin.

In what follows we provide some background information on the mathematical problem and on the notation introduced by Poincaré, Darwin and others.

Equilibrium figures of rotating masses of liquid up to 1885

The historical development of the theory of equilibrium figures of rotation is described in detail by Todhunter (1873), Oppenheim (1922), Chandrasekhar (1969), Lützen

1. See Kopal (1971); Barrow-Green (1997, 193).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_15

(1984), and Lichtenstein (1987). The present account concerns only the case of a homogeneous fluid and ellipsoidal figures of equilibrium, neglecting heterogeneous fluids, rigid kernels and annular figures.

The study of equilibrium figures began with Newton's investigation of the figure of the earth (*Principia*, Book III, propositions XVIII-XX). Generalizing Newton's results to the case when the ellipticity caused by the rotation is large, Colin Maclaurin (1742) obtained a series of new equilibrium figures having the shape of oblate spheroids. For a long time, it was believed that these were the only possible equilibrium figures, and Lagrange attempted to prove this assertion in his *Mécanique analytique* (1811). However, Jacobi (1834) showed through an analysis of Lagrange's argument that there is an additional series of equilibrium figures consisting of ellipsoids with three unequal axes (the shortest axis being the axis of rotation). Jacobi's student C. O. Meyer (1842) showed that the Jacobi series bifurcates (as Poincaré later would say) from the Maclaurin series for an eccentricity of 0.81267. Partly motivated by Jacobi's result which he and other French mathematicians interpreted as a challenge, Liouville began to work on the topic around the same time; in particular, he developed a certain kind of function, introduced by Lamé in a different context, into a powerful tool for the investigation of equilibrium figures. Liouville also stressed (as Laplace had pointed out in the *Mécanique Céleste* livre 3, § 21) that the angular momentum and not the angular velocity is the relevant parameter for series of equilibrium figures. However, since angular velocity decreases monotonously in the case of the Jacobi series, it is reasonably taken as a parameter in this case.

The main tool used by Poincaré and Darwin in their investigations of figures of equilibrium of rotating fluids are ellipsoidal harmonic functions (or ellipsoidal harmonics, for short), also known as Lamé functions. The expressions for all relevant physical magnitudes are developed in series of these functions. This approach was developed by Lamé and Liouville, in analogy to the theory of spherical harmonics introduced around the end of the eighteenth century by Legendre, Laplace and others. We will follow the systematic presentation of Hobson (1931), although Darwin most likely relied on the presentation of spherical harmonics in Appendix B of Thomson and Tait's *Treatise* (1879b, 171–218).

A harmonic function of three variables is a solution $V(x, y, z)$ of Laplace's equation

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0,$$

which is the basic equation of classical potential theory. Solutions of this equation appropriate for spaces with boundaries of various forms (eg., spheres, spheroids, and ellipsoids) are often sought after. This is done by transforming the equation into a form in which the independent variables are the parameters h_1, h_2, h_3 of three orthogonal sets of surfaces. The values of h_1, h_2, h_3 at any point (x, y, z) may be regarded as curvilinear coordinates at that point. Normal solutions to Laplace's equation are then sought, i.e., solutions in the form

$$V = \phi(h_1)\psi(h_2)\chi(h_3)$$

where ϕ denotes a function of h_1 only, ψ of h_2 only, and χ of h_3 only.

In Cartesian coordinates, the triply orthogonal set of surfaces consists of the planes parallel to the coordinate planes, where h_1, h_2, h_3 are x, y, z, respectively. We will consider the case of spherical harmonics, a case which in itself is only of minor importance for the correspondence but gives the non-expert reader a good general idea of how the conceptually more complicated ellipsoidal harmonic functions are used.

In this case, h_1, h_2, h_3 are r, θ, ϕ respectively, the polar coordinates of a point in 3-space, and the triply orthogonal set of surfaces consists of concentric spheres ($r = \text{const.}$), coaxial cones ($\theta = \text{const.}$), and planes through the axis ($\phi = \text{const.}$). It is easily shown (eg., by Hobson 1931, 10) that the normal solutions of Laplace's equation, transformed in these coordinates, are of the form

$$r^n \cdot u \cdot \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\phi, \quad r^{-n-1} \cdot u \cdot \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\phi.$$

Here, $u = u_n^m$ is a solution to the following equation

$$\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{du}{d\mu}\right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right)u = 0 \tag{15.1}$$

where $\mu = \cos\theta$, and n, m are arbitrary constants (usually positive integers). Note that in the expression u_n^m, m is an upper index, no exponent. This notation is standard in the theories of spherical and ellipsoidal harmonics.

A special case of particular interest is where $m = 0$; the resulting equation is called Legendre's equation. The complete solution of this equation is

$$u = AP_n(\mu) + BQ_n(\mu)$$

where A and B are arbitrary constants, P_n a polynomial of degree n (called Legendre's polynomial), and Q_n another function of a certain type.

P_n can be expressed as

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{n!}(\mu^2 - \alpha_1^2)(\mu^2 - \alpha_2^2)\ldots(\mu^2 - \alpha_{\frac{n}{2}}^2)$$

for n even and in a similar fashion (involving a factor μ) for n odd. Now we construct the surface of revolution with polar equation

$$r = a + bP_n(\cos\theta);$$

this surface will cut the sphere $r = a$ in the points for which $P_n(\cos\theta)$ vanishes. These points lie, according to the above expression for $P_n(\cos\theta)$, upon n circles whose planes are perpendicular to the axis. This system of n circles on the sphere is called the system of nodal lines of the function $P_n(\cos\theta)$. Since these lines divide the spherical surface into zones, $P_n(\mu)$ is called a zonal harmonic. The function $r^n P_n(\mu)$ is called a solid zonal harmonic of degree n; the function $P_n(\mu)$ is called a surface zonal harmonic (Hobson 1931, 20).

Corresponding to P_n and Q_n are solutions P_n^m and Q_n^m of (15.1) in its general form (i.e., for $m \neq 0$). These are given as follows (Hobson 1931, 89):

$$P_n^m(\mu) = (-1)^m(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m} = \frac{(-1)^m}{2^n n!}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^{n+m}}{d\mu^{n+m}}(\mu^2-1)^n \quad (15.2)$$

(and similarly for Q_n^m). The functions $\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin} m\phi \cdot P_n^m(\mu)$ are tesseral surface harmonics when $m \neq n$ and sectorial surface harmonics when $m = n$. The geometric motivation for this terminology is similar to that of the zonal harmonic: the surface of a sphere is divided into tesseræ (i.e., spherical squares) or sectors (Hobson 1931, 94). Every continuous function can be developed into a series with respect to these functions.

The case of ellipsoidal harmonics is in many respects analogous to that of spherical harmonics. Here, the triply orthogonal set of surfaces consists of confocal ellipsoids, one-sheeted hyperboloids, and two-sheeted hyperboloids. The parameters (usually called ellipsoidal or more simply elliptic coordinates) are the three roots ρ, μ, ν of the equation[2]

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1.$$

By choosing a value of ρ, we select a particular ellipsoid from a series of confocal ellipsoids, and a subsequent choice of μ, ν determines a particular point on the surface of the selected ellipsoid. In the theory of ellipsoidal harmonics, the role of Legendre's equation is played by Lamé's equation (Poincaré 1885b, 302):

$$(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)\frac{d^2R}{d\rho^2} + (2\rho^2 - b^2 - c^2)\rho\frac{dR}{d\rho} = (n(n+1)\rho^2 - B)R \qquad (15.3)$$

For B an appropriate number, there exist particular solutions $R(\rho)$ which are polynomials in ρ^2 (one of them playing the role of the P_n in the spherical case above), or such polynomials multiplied by one, two or three of the factors ρ, $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, where n is the total degree of $R(\rho)$. Replacing ρ by μ or ν, one obtains functions $M(\mu)$ or $N(\nu)$, respectively. The functions RMN are then normal solutions to Laplace's equation in elliptic coordinates.

There is another type of solutions to Lamé's equation, namely functions $S(\rho)$, corresponding to a given $R(\rho)$ and defined as

$$S = (2n+1)R\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{R^2\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} \qquad (15.4)$$

2. While Poincaré uses this form of the equation in the *Acta* paper (Poincaré 1885b), he switched to the following form in his paper on the stability of the pear-shaped figure (Poincaré 1902d):

$$\frac{x^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1$$

with $a^2 > b^2 > c^2$.

(these functions correspond roughly to the spherical Q functions discussed above). Lamé introduced his functions in the context of a problem of heat conduction, but it was Liouville who applied them first in the context of equilibrium figures and found several important properties of these functions. First of all, let

$$l = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}}; \tag{15.5}$$

further, let (ρ, μ, ν), (ρ, μ', ν') be two points of the ellipsoid, Δ their distance, and $d\omega'$ a surface element having (ρ, μ', ν') as its center. Write M', N', l' for the functions of μ', ν' corresponding to the functions M, N, l of μ, ν. Then

$$\iint \frac{l' M' N' d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi RSMN}{2n+1},$$

where the integral extends to all surface elements of the ellipsoid. Another important property is the following orthogonality relation: given four Lamé functions M, $M_1 \neq M$, N, $N_1 \neq N$, we have

$$\iint lMNM_1N_1 d\omega = 0, \tag{15.6}$$

where $d\omega$ is defined as before. Perhaps the most important property, however, is that an arbitrary function of μ, ν can be developed into a series of the form

$$\sum A_i M_i N_i$$

where the A_i are constant coefficients.

The precise relation between Lamé functions and the spherical harmonics discussed before will become clearer below in connection with Darwin's work on ellipsoidal harmonics. Note that the terminology of zonal, tesseral and sectorial harmonic was taken over to the ellipsoidal case in the English literature.

In the second edition of their *Treatise on Natural Philosophy*, Thomson and Tait inserted a paragraph absent from the first edition, containing a stimulating list of open problems and intuitive conjectures about equilibrium figures of rotating masses of liquid and their stability. Of particular interest to us is their assertion that Jacobi ellipsoids cease to be stable beyond a certain angular momentum. This led them to remark:

> We have a most interesting gap between the unstable Jacobian ellipsoid when too slender for stability, and the case of smallest moment of momentum consistent with stability in two equal detached portions. The consideration of how to fill up this gap with intermediate figures, is a most attractive question, towards answering which we at present offer no contribution. (Thomson & Tait 1879a, § 778"(i))

This passage suggested to Poincaré to consider the possibility of pear-shaped figures of equilibrium. He published a long paper in *Acta mathematica* which resolved several of the open questions mentioned by Thomson and Tait, and supplied complete proofs of some of their claims.[3]

Poincaré's paper made good use of Lamé functions, and outlined new concepts and methods: stability coefficients, linear series of equilibrium figures, points of bifurcation of such series, and the principle of exchange of stabilities at such a point of bifurcation. These conceptual ideas were motivated in part by his parallel work on the three body problem; in both cases, he used a result from Analysis situs: the Kronecker index (Poincaré 1885b, 268).

The basic idea is the following (Poincaré 1885b, 261ff): suppose that the position of the system is defined by n quantities $x_1, x_2, \ldots, x_n$ and that there is what Poincaré calls a force function (a potential) $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ (where y is a parameter), such that we have equilibrium in case

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0.$$

This system of equations has a certain number of roots varying continuously with y. The necessary and sufficient condition that a given root belongs to more than one linear series is that the Hessian of F, i.e., the discriminant Δ of the quadratic form

$$\Phi = \sum \frac{d^2 F}{dx_i dx_k} X_i X_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, n) \tag{15.7}$$

changes its sign. In his proof, he uses a result by Kronecker (Kronecker 1869; Poincaré 1885b, 268). He calls such a form of equilibrium a *bifurcation form*, or *limit form* if the equilibrium equations become imaginary (and thus one of the series "disappears") after the point of intersection. For instance, the MacLaurin ellipsoids form a linear series which admits of a point of bifurcation (where the series of Jacobi ellipsoids starts; see below). In his correspondence with Poincaré, Darwin (1886) calculated the numerical values corresponding to this point of bifurcation; see (§ 3-15-11).

From his study of the function F, Poincaré drew information not only about bifurcations, but about stability as well. The first step in this direction was to bring Φ into the following form (which is always possible with quadratic forms):

$$\Phi = \sum \alpha_i Y_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{15.8}$$

where Y_i is a linear function of the X. $\Delta = 0$ is then equivalent to $\alpha_i = 0$ for some i. Now, Poincaré wrote that the equilibrium is stable if and only if F is maximum, i.e., if and only if Φ is negative definite. This is the case if and only if all the α_i are negative. Consequently, he called the α_i *coefficients of stability*. His study of the stability of various figures of equilibrium, especially of his newly discovered pear-shaped figures (see below), relied on the study of the sign of the coefficients of stability.

3. Poincaré 1885b. Poincaré announced some of the results contained in this paper, in particular the existence of new figures of equilibrium which are non-ellipsoidal and pear-shaped, in two short notes in the *Comptes rendus* (Poincaré 1885c, 1885d).

A central tool of Poincaré's analysis of stability is what he calls the principle of exchange of stabilities. Let the coordinate system be such that a bifurcation occurs in the origin, so that the expressions $\frac{d^2F}{dx_i^2}$ are the stability coefficients, and $y = 0$ is the critical parameter. Now, Poincaré keeps x_1 fixed in F and eliminates the other variables with the aid of the equilibrium equations (assuming the Hessian of F as a function of $x_2, \ldots, x_n$ is not zero, or equivalently, that $\frac{d^2F}{dx_1^2}$ is the only stability coefficient that vanishes). According to Schwarzschild (1898, 41), this restriction poses no difficulty in practice.

Poincaré wrote F as a function of the two variables x_1 and y. The equilibrium equation $\frac{dF}{dx_1} = 0$ defines a curve in the (x_1, y)-plane with a double point (in agreement with the assumption that $\frac{d^2F}{dx_1^2}$ is zero for a value of x_1, hence that there occurs a bifurcation). Accordingly, Poincaré was able to express x_1 as a function of y in two different ways, say

$$x_1 = \psi_1(y), \qquad x_1 = \psi_2(y).$$

Next he expressed Δ as a function of the two variables x_1 and y as well and then, using ψ_1, ψ_2, as a two-branch function of y. Thus he was able to study what happens to the sign of the coefficients of stability on each branch when the parameter y changes the sign. In particular, he found that if there is stability on one linear series B and instability on another B' before a point of bifurcation, B will be unstable and B' stable afterwards. This he calls the principle of exchange of stabilities.

We can express this in a more intuitive, geometrical manner, following Poincaré's own presentation (Poincaré 1902a, 167ff).[4] Let F be expressed as $\psi(x_1, y)$, and recall that there will be stability if $\frac{d^2\psi}{dx_1^2} < 0$. Poincaré wrote that the curve $\frac{d\psi}{dx_1} = 0$ divides the (x_1, y)-plane in two regions, one in which $\frac{d\psi}{dx_1}$ is positive, and one in which it is negative. If the positive region is situated below the curve, $\frac{d^2\psi}{dx_1^2}$ will be negative. If two curves arrive at a point of bifurcation, one stable (having the positive region above), the other unstable (having the positive region below), the situation will be exchanged after the passage through the point of bifurcation.

There is another way of expressing the stability condition, by studying the energy of the system. In this approach, there are two types of stability: that destroyed by friction, or ordinary stability, and that unaffected by friction, or secular stability. Following Poincaré (1902d, 333), let U denote the potential energy of the fluid mass, ω the angular velocity, J the moment of inertia, and $\mu = \omega J$ the angular momentum. For stability, either the expression

$$U + \frac{1}{2}\omega^2 J \tag{15.9}$$

is a minimum, ω being given, or the expression

$$U - \frac{\mu^2}{2J} \tag{15.10}$$

4. For a similar, but more detailed approach, see Schwarzschild (1898).

is a minimum, μ being given. For Poincaré, the first condition is necessary and sufficient for secular stability (with an assumption about friction). For an isolated mass, the first condition is sufficient, while the second condition is necessary and sufficient. In a similar fashion, Darwin (1902b, 315) distinguished between the first condition, applied in the static case, and the second condition, for the non-static system. In the correspondence with Poincaré, condition (15.9) is used (§§ 3-15-18, 3-15-22), while Liapunov employed condition (15.10); see (§ 3-32-5).

Poincaré assumed F to be a holomorphic function, and noted that the position of the systems under consideration is typically *not* defined by a finite number of quantities, although generalization to an infinite number of variables is at hand 1885b, 276). According to Schwarzschild (1898, 18), this transition is possible using Lamé functions.

Let us look closer at how Poincaré employs Lamé functions in the study of the Jacobi series. Note first that Poincaré uses two different notations for the R functions, a systematic one and an ad hoc one. The systematic notation (Poincaré 1885b, 308) is $R_{n,i}^{(k)}$.[5] Here, k is 1, 2, 3, or 4, according to whether R is a polynomial, involves the factor $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, the factor $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, or both; n is the total degree (hence corresponds to n in our presentation of spherical harmonics above), and is consequently called the degree of the function; the order of the function, i, corresponds to our m above in the sense that $R_{n,i}^{(k)}$ reduces to

$$A(\rho^2 - c^2)^{\frac{i}{2}} D^{i+n} (\rho^2 - c^2)^n$$

for $b^2 = c^2$, where A is a constant and D^{i+n} is the operator $\frac{d^{i+n}}{d\rho^{i+n}}$.

The alternative notation involves indexing the various R as they arrive. For example (Poincaré 1885b, 317):

$$R_{1,1}^{(3)} =: R_1.$$

Let g denote the force resulting from gravitation and centrifugal force in a point of the surface of an ellipsoid in equilibrium. Then, since the fluid is supposed to be in equilibrium, the direction of g is always perpendicular to the surface. Poincaré gave the expression of g at the pole (where the centrifugal force is zero) in elliptic coordinates and, using the quantity l (see equation 15.5), obtained

$$gl = \frac{4}{3}\pi R_1 S_1, \tag{15.11}$$

this expression being valid for every point of the surface of the ellipsoid. He then developed the normal displacement ζ into a series of the form

$$\zeta = \sum A_i l M_i N_i, \tag{15.12}$$

which is possible since Poincaré showed that l is a function of ρ only, hence can be considered as constant on the surface. By using this and Liouville's theorems about Lamé

5. However, as Darwin points out (§ 3-15-40), on occasion Poincaré writes $R_{i,n}^{(k)}$ for $R_{n,i}^{(k)}$.

functions discussed above in an evaluation of the energy of the system, he arrived at the following formula for the total potential energy W:

$$W = W_0 - \frac{4\pi}{2} \sum A_i^2 \int \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} \right) l M_i^2 N_i^2 d\omega, \tag{15.13}$$

where W_0 is the potential energy of the ellipsoid, $d\omega$ a surface element, and n the degree of the Lamé function R_i. The form of the deformed surface is then determined by the A_i, which play the role of the Y_i in (15.8). Thus, the coefficients of the A_i in the above sum are the stability coefficients, and their vanishing is equivalent to the following fundamental equation:

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0. \tag{15.14}$$

Why is the latter equation responsible for bifurcations? By developing into a series of Lamé functions the part of the potential of the deformed body due to the perturbing forces, and denoting by B_i the coefficients, Poincaré showed that the A_i (determining the figure) emerge from the equations

$$4\pi A_i \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} \right) = B_i,$$

unless the final factor on the left hand side is zero. Thus for a solution of equation (15.14), the form of the deformed surface is no longer uniquely determined, and there is bifurcation (Poincaré 1885b, 321).

Poincaré then sought functions R_i for which this is actually the case. One obvious solution is $i = 1$, corresponding to an infinitesimal movement of translation of the ellipsoid which does not alter the state of equilibrium. He found other functions R_i, and called R_2 the function (of degree 2) for which the Jacobi series bifurcates from the MacLaurin series (Poincaré 1885b, 335) such that:

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_2 S_2}{5} = 0. \tag{15.15}$$

In order for a Jacobi ellipsoid to be an ellipsoid of bifurcation, a second stability coefficient has to cancel out, which leads to the two equations (Poincaré 1885b, 341):

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_2 S_2}{5} = \frac{R_i S_i}{2n+1}. \tag{15.16}$$

Poincaré shows that the only R_i satisfying these equations are the $R^1_{n,0}$, the zonal harmonics of degree n, for $n \geq 3$ (Poincaré 1885b, 343).[6] The coefficient of stability cor-

6. The exact expression of $R^1_{3,0}$ is

$$R^1_{3,0}(\rho) = \frac{1}{5}\rho(5\rho^2 - 2(b^2 + c^2) + \sqrt{4b^4 - 7b^2c^2 + 4c^4}).$$

Note that the notation for Lamé functions is slightly inconsistent throughout the *Acta* paper: Poincaré writes this function $R^1_{0,3}$ on p. 343, but it is clear from the fact that the function is a polynomial in ρ of degree 3 that he should have written it $R^1_{3,0}$ in agreement with the earlier definition. Compare also Darwin to Poincaré (§ 3-15-40).

responding to this case is called C_n. By considering the equation $\zeta = 0$ (where ζ is the normal displacement for $R^1_{3,0}$ and thus a function involving $M^1_{3,0}$ and $N^1_{3,0}$), Poincaré obtained the lines of intersection of the ellipsoid with the deformed figure corresponding to C_3, and provided a rough sketch (reproduced in § 3-15-11) showing a pear-shaped figure. Similarly, the coefficients C_n for $n \geq 4$ will give rise to other bifurcating series composed of figures with $n-2$ constrictions. In a popular presentation, Poincaré (1892a) provided sketches of some of these figures, and an intuitive interpretation of the harmonic functions involved as oscillations giving rise to normal displacements.

With the discovery of the pear-shaped figure of equilibrium, Poincaré thought he had closed the gap discussed by Thomson & Tait (1879a). But what about the stability of the new figures? Poincaré thought it admissible to apply the principle of exchange of stabilities in this case. This principle applies, for instance, at the point of bifurcation of the MacLaurin series: the MacLaurin ellipsoids cease to be stable at this point, and the Jacobi ellipsoids are stable from this point on. Poincaré held the situation to be similar at the first point of bifurcation of the Jacobi series, where the series of pear-shaped figures begins (he showed in his paper that the Jacobi ellipsoids actually cease to be stable at the point of bifurcation leading to the series of pear-shaped figures, thus proving Thomson and Tait's assertion, mentioned above).

Over the next decade, Poincaré added no further insight but affirmed the stability of the pear-shaped figures, while Karl Schwarzschild's doctoral thesis (1898) held the argument of exchange of stability to be fallacious in the case of the series of pear-shaped figures. Schwarzschild thus reopened the question of the stability of this series.

Darwin's work on equilibrium figures prior to 1901

Darwin became interested in figures of equilibrium very early in his career. His interest was motivated by problems of cosmogony and geophysics.[7] In July 1881, while reflecting on the rapid motion of a Martian satellite, Darwin wondered if the earliest form of a satellite might not be annular (Darwin 1881, 534). Some years later he presented two papers, one on the Jacobi ellipsoid (Darwin 1886), and another in which he investigated pear-shaped figures of equilibrium (Darwin 1887). These papers were written independently of Poincaré's *Acta* paper (Poincaré 1885b). Like Poincaré, Darwin was motivated by Thomson's discussion of the "most interesting gap" (Darwin 1887, 420). However, unlike Poincaré who had found pear-shaped figures by investigating the series of Jacobian ellipsoids for decreasing angular velocity, Darwin took the configuration of two separated spherical bodies as his point of departure, and studied the further development of the equilibrium figure "backwards in time", so to say, in agreement with his motivation from cosmogony. In this paper, he confined himself to the use of spherical harmonic analysis.

Also important for understanding the Poincaré-Darwin exchange is Darwin's approach to the theory of ellipsoidal harmonic functions. He sought to develop this theory

7. The roots of Darwin's geophysical research in his father's evolutionary theory, and his uncomfortable role as an intermediary between his father and Lord Kelvin are discussed by Kushner (1993).

in a form more appropriate for numerical calculations (Darwin 1901, 462). His major innovations in this respect were a new approach to elliptic coordinates, and the introduction of a particular notation for the functions, analogous to the notation used in the spherical case, and deviating from Poincaré's notation. Darwin's elliptic coordinates are defined with respect to the three roots u_1, u_2, u_3 of the cubic in u

$$\frac{x^2}{a^2+u^2}+\frac{y^2}{b^2+u^2}+\frac{z^2}{c^2+u^2}=1.$$

Darwin then writes

$$u_1^2 = k^2\nu^2, \qquad u_2^2 = k^2\mu^2, \qquad u_3^2 = k^2\frac{1-\beta\cos 2\phi}{1-\beta},$$

where β and k are given by the three axes of the fundamental ellipsoid of reference [8]

$$k\sqrt{\nu_0^2-\frac{1+\beta}{1-\beta}}, k\sqrt{\nu_0^2-1}, k\nu_0.$$

Then $\infty > \nu \geq 0$, $1 \geq \mu \geq -1$ and $2\pi \geq \phi \geq 0$ are the coordinates of a point. As Darwin observed, this presentation is less symmetric than Lamé's, and instead of Lamé's equation (15.3) and corresponding equations in the coordinates μ, ν (in the sense of Lamé), Darwin had to consider three differential equations the third of which differs from the two other in the same manner as the equation for u_3 differs from the equations for u_1, u_2 (Darwin 1901, 467). Of course, a product of three functions, each of which is a solution of one of the three equations will be a normal solution of Laplace's equation in Darwin's coordinates. The functions in ν and in μ are related to the spherical P and Q functions discussed above, while the functions in ϕ involve a cosine or sine of a multiple of ϕ.

As announced, Darwin's notation for these functions is analogous to the notations of the spherical harmonics. Note, however, that he writes P_i^s where we wrote P_n^m above, and correspondingly for the Q functions; thus, i is the complete degree of Legendre's polynomial, and s the order of derivation. Darwin observes that contrary to the spherical case, there are two types of P functions, divisible or not by the following factor:

$$\Omega(\nu) = \sqrt{\frac{\nu^2-\frac{1+\beta}{1-\beta}}{\nu^2-1}}$$

8. In his paper on the stability of the pear-shaped figure, Darwin (1903a) considers as an ellipsoid of reference for a certain value of ν_0 the critical Jacobian ellipsoid enclosing the whole pear; compare, for instance, Darwin to Poincaré, 21.06.1901 (§ 3-15-16).

In a loose sense, Darwin's fundamental ellipsoid of reference figures in the construction of the coordinates, as explained by Darwin in the case of spheroidal coordinates. In this case ν, μ and ϕ can reasonably be thought of as the radial, latitudinal, and longitudinal coordinates, respectively. In the general case, the geometry involved is more difficult, but Darwin affirms that the above interpretation of the coordinates is still acceptable (Darwin 1901, 549).

($\Omega(\mu)$ being defined similarly). The indivisible functions are written $\mathfrak{P}_i^s$, and the divisible ones P_i^s. There are also two types of functions of ϕ, expressed as $\mathfrak{C}$ and C (or $\mathfrak{S}$ and S, according to whether they involve a cosine or a sine of ϕ).[9]

The Q functions relate to the P functions much like the S functions relate to the R functions in Poincaré's notation of Lamé functions (see equation 15.4 above).[10] Since P functions fall into two classes, the same is true for Q functions (which are written $\mathfrak{Q}$ or Q), and we have

$$\mathfrak{Q}_i^s(\nu_0) = \mathfrak{P}_i^s(\nu_0) \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu}{(\mathfrak{P}_i^s(\nu))^2 \sqrt{\nu^2 - 1}\sqrt{\nu^2 - \frac{1+\beta}{1-\beta}}}. \tag{15.17}$$

Darwin determined these functions rigorously for $i = 2$, $s = 0, 1, 2$, and gave approximate formulæ for the higher functions (Darwin 1902a, 488); in his subsequent paper concerned with the determination of the limiting stability of the Jacobi series, he added rigorous determinations of the functions for $i = 3$, $s = 0, 1, 2$ which are crucial for this purpose, $\mathfrak{P}_3^0 = \mathfrak{P}_3$ being the third zonal harmonic (Darwin 1902b, 307ff).

Darwin provided the formulæ of the normal displacement, the surface density, and the internal and external potentials for a given surface harmonic (Darwin 1901, 505).[11] The stability coefficients are (Darwin 1902b, 320)

$$\mathfrak{K}_i^s = 1 - \frac{\mathfrak{P}_i^s(\nu_0)\mathfrak{Q}_i^s(\nu_0)}{\mathsf{P}_1^1(\nu_0)\mathsf{Q}_1^1(\nu_0)}, \qquad \mathsf{K}_i^s = 1 - \frac{\mathsf{P}_i^s(\nu_0)\mathsf{Q}_i^s(\nu_0)}{\mathsf{P}_1^1(\nu_0)\mathsf{Q}_1^1(\nu_0)}, \tag{15.18}$$

and Poincaré's equation (15.14) for the vanishing of the stability coefficients in Darwin's notation reads (Darwin 1902b, 321)

$$\mathsf{P}_1^1\mathsf{Q}_1^1 - \mathfrak{P}_i^s\mathfrak{Q}_i^s = 0.$$

Darwin explained (p. 514) that in order to develop an arbitrary function of μ, ϕ in a series of ellipsoidal harmonics it is necessary to know the integrals over the surface of the ellipsoid of the squares of surface harmonics multiplied by the perpendicular on the tangent plane. He provided a table (p. 548) collecting these integrals showing, once again, his interest in numerical results.

9. These functions are related to the spherical harmonics in that the functions of the $\mathfrak{P}$ type can be developed in a certain manner into a sum of ordinary P_i^s functions, while the functions of the P type can be so developed only up to the factor Ω.

The precise form of the P function to be taken in the normal solution depends on the evenness or oddness of i and of s and on whether a cosine or a sine of ϕ is involved; thus, Darwin has to distinguish eight cases (four of which involve a $\mathfrak{P}$ function and the other four a P function).

10. The precise relation of Darwin's and Poincaré's notation was explained by Darwin in his letter to Poincaré of 22.10.1901 (§ 3-15-40) in the case of P functions and in a note to Poincaré's paper (Poincaré 1902d) in the case of Q functions.

11. The expression for a normal displacement of an element of the ellipsoid for the third zonal harmonic was given in Darwin's letter to Poincaré of 28.05.1901 (§ 3-15-11).

Poincaré's and Darwin's strategies for proving stability

The correspondence shows that it was Darwin and not Poincaré who started their joint attack of the question of the stability of the pear-shaped figure. From the outset, the goal of providing a new setting for the theory of ellipsoidal harmonic functions was geared towards obtaining exact numerical results with respect to this figure (Darwin 1901, 462). As a early achievement of this program, he obtained good numerical data about the critical Jacobi ellipsoid — a victory he shared with Poincaré on 28.05.1901 (§ 3-15-11).

In the same letter, Darwin expressed doubts about Schwarzschild's objection against Poincaré's stability argument for the pear-shaped figure. Poincaré did not harbor such doubts, and in reply, sketched a program designed to decide the stability question, and which formed the basis of their exchange and the related papers (§ 3-15-13). The pursuit of the project required more precise numerical data concerning the physical magnitudes, and the shape of the figures. Poincaré hoped that Darwin's new tools might afford the means to acquire this data, and Darwin presented a strategy for their calculation.

Poincaré promised Darwin that he would work on the problem (§ 3-15-15); he communicated his result in the form of a long letter (later supplemented by an equally long commentary) in which he presented his strategy (§§ 3-15-19, 3-15-20).

The determination of deformations of an equilibrium figure yielding new equilibrium figures involves studying the behavior under deformation of terms entering the equilibrium condition (the energy $W = U + \frac{1}{2}\omega^2 J$ and the moment of inertia J). The normal displacement ζ is developed in a harmonic series (see equation 15.12 above), and the coefficients of the development determine the shape of the new figure. Poincaré expressed these coefficients as A_i and later θ_i in the *Acta* paper, but wrote them as ξ_i in the new paper; we follow the latter convention. The terms W and J are developed in a series with respect to powers of the ξ_i, which reveals the influence that the variables ξ_i determining the shape of the new figure have on W and J. This is not only important for equilibrium but for stability as well, since W and J enter into the stability condition.

The determination of the figure that Poincaré provided in the *Acta* paper is correct to the first order (Poincaré 1885b, 347); ξ_i^2 and higher powers were neglected. Obtaining a higher-order approximation has an effect in terms of harmonic functions, as Darwin observed:

> The pear-shaped figure is a deformation of the critical Jacobian ellipsoid, and to the first order of small quantities it is expressed by the third zonal harmonic with respect to the longest axis of the ellipsoid. In the higher approximation a number of other harmonic terms will arise, and the coefficients of these new terms will be of the second order of small quantities. (Darwin 1903a, 253)

What this means is that while the harmonic series for ζ in the first order reduces to a single term (the coefficient corresponding to $R_{3,0}^{(1)}$ alone are retained), other terms must be considered for a higher-order approximation. Poincaré tried to determine the coefficients of the ξ_i in the development of W and J up to the second order, and found he had to calculate infinitely many elliptic integrals (Poincaré to Darwin, § 3-15-19).

The stability question

Despite his efforts, Poincaré was unable to either prove or disprove the stability of the pear-shaped figure (Poincaré 1902d). He provided the inequality that was satisfied in case of stability but did not pursue a numerical evaluation. After evoking the possibility if evaluating the integrals involved with Weierstrass-Schwarz theory of elliptic functions, Poincaré concluded:

> La détermination de *chacune* des intégrales ne présente [...] aucune difficulté, et le calcul serait en somme facile si ces intégrales n'étaient en nombre infini. (Poincaré 1902d, 368)

He further identified two terms that depend on infinitely many integrals, denoted $\sum \frac{Q_i^2}{2G_i}$ and H', both of which he had mentioned in his exchange with Darwin. [12] Poincaré then took up the difference of the two problematic terms, and observed:

> Heureusement il ne s'agit pas de calculer la valeur exacte de cette quantité, mais de reconnaître si elle satisfait à une certaine inégalité. (Poincaré 1902d, 369)

The problem remains quite difficult. After some pages of preliminary calculations, Poincaré ends his memoir with the following remark:

> Si donc il y a instabilité, c'est-à-dire si l'inégalité précédente n'a pas lieu, il suffira pour le constater de calculer un nombre fini de termes du premier membre. Si au contraire il y a stabilité, on ne pourra s'en assurer qu'en calculant la somme des termes positifs du premier membre qui sont en nombre infini, ou en évaluant une limite supérieure de cette somme.

Did Darwin attempt to carry out this program? In his next paper on the stability of the pear-shaped figure, Darwin explained his motivation as follows:

> At the end of [my previous paper] it was stated that the stability of the figure could not be proved definitely without approximation of a higher order of accuracy. After some correspondence with M. Poincaré during the course of my work, I made an attempt to carry out this further approximation, but found that the expression for a certain portion of the energy entirely foiled me. Meanwhile he had turned his attention to the subject, and he has shown [...] by a method of the greatest ingenuity and skill how the problem may be solved. He has not, however, pursued the arduous task of converting his analytical results into numbers, so that he left the question of the stability of the pear still unanswered.
>
> M. Poincaré was so kind as to allow me to detain his manuscript on its way to the Royal Society for two or three days, and I devoted that time almost entirely to understanding the method of his attack on the key of the position – namely, the method of double layers [...]. (Darwin 1903a, 252)

12. See Poincaré to Darwin (§ 3-15-19). The first term is expressed as $\sum \frac{h'^2}{a'}$ in the letter, while a_1 denotes the problematic portion H_0 of H'.

Darwin was certainly aware of the necessity of calculating infinitely many terms:

> Let S_i^s denote any surface harmonic, so that S_i^s is the same thing as $[\mathfrak{P}_i^s(\mu)$ or $\mathsf{P}_i^s(\mu)] \times [\mathfrak{C}_i^s(\phi)$ or $\mathsf{C}_i^s(\phi)]$. The third zonal harmonic deformation will then be eS_3 or $e\mathfrak{P}_3(\mu)\mathsf{C}_3(\phi)$, where e is of the first order of small quantities. On account of the symmetry of the figure, the new terms cannot involve the sine functions $\mathfrak{S}$ or S, and moreover, the rank s must necessarily be even.
>
> Suppose that the new terms are expressed by $\sum f_i^s S_i^s$ for all values of i from 1 to infinity, and with s equal to $0, 2, 4, \ldots, i$ or $i-1$. Then all the f's are of order e^2, excepting f_3 which is zero. (Darwin 1903a, 253)

Darwin commented on his calculations in a letter to Schwarzschild of June 1, 1902, where he announced his intention to give a talk on the question at the astronomers' meeting of August 1902 in Göttingen:

> I have just completed the proof of the stability in question — not, I regret to say, a rigorous algebraic proof but one which renders the result practically certain. I have determined the coefficients of 8 new harmonic terms of the second order of small quantities in the expression for the pear. In order that there may be stability the sum of the squares of those coefficients each multiplied by a certain quantity must be less than a certain other quantity. Taking 8 harmonics it is decisively less, and the coefficients of the higher harmonics contribute very little to the sum in question. It seems practically impossible that the 8th, 10th, 12th etc. harmonics should present large coefficients in the expression for the pear — on the contrary the evidence shows the coefficients to diminish rapidly as far as the 6th harmonic. Hence I consider the stability assured.
>
> It remains for me to compute the deformation represented by these terms & so to obtain a better figure. This is no small task but I expect to have done it long before the meeting. (Darwin to Schwarzschild, 01.06.1902, Cod. Ms. K. Schwarzschild Briefe 154, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen)

Darwin believed he could determine the stability question without calculating the infinite number of terms relevant to the problem according to Poincaré. [13] Even so, he was quite aware that his considerations fell short of a rigorous proof, and that Liapunov had found the pear-shaped figure to be unstable in 1905.

Part of the motivation for studying pear-shaped figures of equilibrium stemmed from their potential application in the cosmological realm. Poincaré observed that the theory of equilibrium figures of a homogeneous rotating mass of fluid does not directly apply to problems of cosmogony, but both he and Darwin saw a future for their work in this domain. [14] Darwin expressed as much in the conclusion to his second paper:

> Notwithstanding the *caveat* which M. Poincaré enters as to the dangers of applying these results to heterogeneous masses and to cosmogony, I cannot

13. Darwin (1903b, 312) advances a similar argument.

14. On the possible role of pear-shaped figures of equilibrium in understanding the formation of binary stars, see Myers to Poincaré (§ 3-36-1) and Poincaré to Darwin (§ 3-15-11).

restrain myself from joining him in seeing in this almost life-like process a counterpart to at least one form of the birth of double stars, planets, and satellites. (Darwin 1903b, 314)

15.1 Darwin à Poincaré

28 Feb. 1899
NEWNHAM GRANGE—CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
You have, I believe, already received an intimation that the University of Cambridge proposes to celebrate the fiftieth anniversary of Sir George Stokes' tenure of his professorship on the 1st of June next. [15]
The Philosophical Society of Cambridge proposes to commemorate this occasion also by the collection of a special volume of papers on Physical Astronomical and Mathematical subjects. I have been asked by a committee of the Society to inform you that we should feel highly honored if you would be willing to make a contribution to our proposed volume. [16]
I have looked at your criticism of my paper on Periodic orbits, although I have not yet thoroughly mastered it. [17] I entirely admit the justice of your remark that the figure of 8 orbits and the A orbits are not continuous. Indeed I had (thanks to Mr Hough) arrived at the same conclusion from another point of view before I saw your book. [18]
I am trying now to make good the hiatus, but find myself so much interrupted by other work that I am not able to get on as quickly as I should like to do. [19]
I remain, Yours very sincerely,
G. H. Darwin

ALS 4p. Collection particulière, Paris 75017.

15. Poincaré was not part of the French delegation to the Stokes Jubilee, which included Gaston Darboux for the Sorbonne, Alfred Cornu for the École polytechnique, Henri Becquerel for the Paris Academy of Science and the École polytechnique, Émile Borel for the École normale supérieure, and Henri Deslandres for the French Society of physics (Stokes 1900, vii–ix).
16. Poincaré (1899e), on which see Darwin to Poincaré, 25.05.1899 (§ 3-15-4).
17. See Darwin (1897), and Poincaré's evaluation (Poincaré 1899d, 352).
18. Sydney Samuel Hough (1870–1923), assistant to David Gill at the Cape Observatory. See Hough (1901), cf. Darwin's remarks on the occasion of Poincaré's Gold Medal from the Royal Astronomical Society (Darwin (1900, 414), and Barrow-Green (1997, 196).
19. Darwin will write again to Poincaré on the subject of periodic orbits, on 20.03.1899 (§ 3-15-3).

15.2 Darwin à Poincaré

March 3. [18]99
NEWNHAM GRANGE—CAMBRIDGE

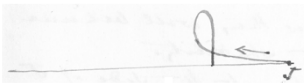
Dear Monsieur Poincaré,
I am delighted to hear that there is a chance of your being willing to contribute to the Stokes volume.
The *title* of your paper should arrive by the middle of May, but the final manuscript need not be in our hands until (at latest) the latter part of September.
The Committee would wish to give you "carte blanche" as to length and subject, and I can assure you that we shall regard any contribution from you as a great honour.[20]
I remain, Yours very sincerely
GH Darwin

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

15.3 Darwin à Poincaré

20.3.99
NEWNHAM GRANGE–CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
I think you will be interested to learn that I have at last discovered (as I believe with confidence) the natural history, so to speak, of the A orbits & the figure-of-8 which I will call A'.[21] Somewhere between $C = 40$ & 39.6 an orbit of ejection which is periodic arises of this form:



As C falls in value the loop diminishes becomes a cusp & then becomes rounded & coalesces with A when both vanish.
For a very slightly smaller value of C another orbit of ejection arises of this form:

In this case also the loop diminishes, becomes a cusp, then rounded & we pass on to the figures-of-8 A' which I have traced.

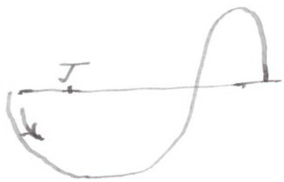
20. Poincaré's manuscript was received 25.09.1899, cf. Poincaré (1899e). See also Darwin to Poincaré, 25.05.1899 (§ 3-15-4).

21. Following up on a previous letter to Poincaré of 28.02.1899 (§ 3-15-1), Darwin returns here to his classification of periodic orbits (1897), which Poincaré considered in the third volume of the *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (Poincaré 1899d, 352).

I missed these families because they have so transitory an existence. I have my idea of how they will behave as to stability.
Now pass to the side of J remote from S & it is obvious that the C orbit ends in an orbit of ejection thus:

For a very slightly smaller value of C a new orbit of ejection arises thus:

(I should have drawn the other half of these.)
This orbit is obviously the parent of a new series of figures-of-8 thus



The quasi-coalescence & disappearance of the figure-of-eight A (or say A') with B may take place through the figure-of-8 terminating in an orbit of ejection, & B with another. But I have not yet the materials for deciding this point. These ideas throw a flood of light on the march of the orbits, but I will not trouble you with more.
I think I shall ask Mittag Leffler to let me have another paper in the *Acta* but I fear it will be some months before I shall be ready.[22]
I remain, Yours sincerely
G. H. Darwin

ALS 4p. Collection particulière, Paris 75017.

22. Darwin published his thoughts only a decade later (Darwin 1909). A few years after Darwin sent this letter to Poincaré, Hough (1901) found a family of figure-of-eight orbits that Darwin had missed (Barrow-Green 1997, 196).

15.4 Darwin à Poincaré

May 25. 1899
NEWNHAM GRANGE–CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
May I ask you to send to Mr H.F. Newall, (Madingley Rise, Cambridge) the title of the paper that [you] are to do us the honour of contributing to the Cambridge Philosophical Society. [23]
As the Society is anxious to have the titles as soon as possible, may I beg that there shall be no unnecessary delay in your answer.
I remain, Yours sincerely
G.H. Darwin

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

15.5 Darwin à Poincaré

Jan. 12. '00
Newnham Grange–Cambridge [a]

Dear Monsieur Poincaré,
It is with much pleasure that I announce to you that the Royal Astronomical Society has today awarded to you its gold medal for your contributions to the astronomical science. You will shortly receive a formal intimation of the same fact from Sir William Huggins, the Foreign Secretary of the Society. [24]
I am especially glad that this event should have occurred during my tenure of the office of President. It will be my duty to present the medal to you at the annual meeting on the second Friday in February, which falls I think on the 9th of that month. [25]
We all much hope that it may be possible for you to be present in person on that occasion.
I remain, Yours very Sincerely
GH Darwin

ALS 4p. Collection particulière, Paris 75017.

23. See Poincaré (1899e). Hugh Frank Newall (1857–1944) supervised the installation at Madingley Rise of a large telescope donated by his father to the University of Cambridge, and subsequently employed it himself.
24. William Huggins (1824–1910).
25. Darwin was president of the Royal Astronomical Society in 1899; his address appeared in the *Monthly Notices* (Darwin 1900).

a. Darwin employed stationery from the Athenæum, and took care to bar the letterhead.

15.6 Poincaré à Darwin

[Entre le 12 et le 30.01.1900]

Mon cher Collègue,
Je suis extrêmement fier de l'honneur que la Société Royale Astronomique a bien voulu me faire et je suis très reconnaissant au Conseil de cette Société. [26]
Permettez-moi de joindre à l'expression de cette reconnaissance mes remerciements pour l'empressement que vous avez mis personnellement à m'annoncer cette nouvelle.
J'ai tout lieu de croire que je pourrai obtenir un congé me permettant d'aller recevoir la distinction qui m'est offerte d'une façon si flatteuse.
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

J'ai renvoyé hier à Cambridge les épreuves corrigées de mon mémoire pour le Jubilée de sir G.G. Stokes. [27]

ALS 2p. CUL-DAR251.4746, Cambridge University Library.

15.7 Darwin à Poincaré

30 January 1900
NEWNHAM GRANGE—CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
I was very glad to hear that you will be able to be present at the R.A.S. on Feb. 9th. [28]
I now write to say that the Society has a dinner in the evening, and that it will give me much pleasure if you will be my guest on that occasion.
I remain, Yours very sincerely
G. H. Darwin

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

26. Le président de la Société royale astronomique George Howard Darwin a annoncé à Poincaré par lettre du 12.01.1901 (§ 3-15-5) que la Société l'avait désigné le même jour comme le lauréat de sa médaille d'or, "pour ses contributions à la science astronomique".

27. Poincaré 1899e.

28. Darwin informed Poincaré by letter on 12.01.1901 (§ 3-15-5) that he had been designated to receive the Gold Medal of the Royal Astronomical Society, and invited him to participate in the award ceremony to be held in London on 09.02.1900. For the award speech, see Darwin (1900).

15.8 Darwin à Poincaré

6 Feb. 1900
NEWNHAM GRANGE—CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
I find that I was wrong in describing the dinner on Friday as a dinner of the Society — it is a dinner of the Astronomical Club, and it is quite small & informal. [29] We do not even put on "Cravate blanche". Nevertheless there are speeches (I am sorry to say) — for we English do not seem able to eat our dinners without speechifying. I hope the weather may be less abominable by Friday than it is now.
Yours very Sincerely
G. H. Darwin

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

15.9 Darwin à Poincaré

May 16.00
NEWNHAM GRANGE—CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
I learn that the University has offered you the degree of Doctor of Sciences and I now write to say that if you propose to come here on June 13th (?) to receive the degree it will give us much pleasure if you will stay with us. If Madame Poincaré would like to accompany you, my wife and I would have much pleasure in receiving her also. [30]
It is so short a time since I had occasion to write to you for a somewhat similar reason that I am almost afraid you will think us Englishmen "bores" but I assure you it is not my fault this time ! [31] I hope at any rate you will forgive us and come with Madame Poincaré.
I remain, Yours very sincerely
G. H. Darwin

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

29. The dinner invitation was extended to Poincaré by Darwin (§ 3-15-5) in connection with the Gold Medal awarded him by the Royal Astronomical Society. For Darwin's award-ceremony speech, see Darwin (1900).

30. Poincaré agreed to accept the degree in person, but declined Darwin's invitation to stay with the Darwins, by letter to Darwin on 22.05.1900 (§ 3-15-10).

31. Darwin refers here to the Gold Medal awarded Poincaré by the Royal Astronomical Society's Gold Medal in London on 9 February 1900, announced by Darwin on 12.01.1900 (§ 3-15-5), and also to the speech he delivered on that occasion (Darwin 1900).

15.10 Darwin à Poincaré

22.V. '00
NEWNHAM GRANGE–CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
I am sorry to hear that you think you must return to London the same night.[32] In case I can induce you to change your mind I may mention that you can be in London by 9.50, leaving here at 8.30.
Trinity College proposes to entertain the recipients of degrees at dinner on that same night. You will no doubt soon receive the invitation.
Pray do not hesitate to change your mind and to stay here, but we shall be sorry not to receive Madame Poincaré also.
Yours very sincerely
G. H. Darwin

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

15.11 Darwin à Poincaré

May 28.01
NEWNHAM GRANGE–CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
I think it will interest you to hear that I have determined the limiting stability of the Jacobian ellipsoid.[33] It occurs when $\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = .14205$. The axes of the ellipsoid are[34]

$$\begin{aligned} a &= 1.8853 \\ b &= \ \ .8152 \\ c &= \ \ .6507 \end{aligned}$$

32. Poincaré responds to Darwin's invitation of 16.05.1900 (§ 3-15-9).

33. One of Poincaré's major results concerning the stability of equilibrium figures is the proof of the fact, asserted but not rigorously proved by Lord Kelvin (1879a, § 778" g), that beyond an upper limit of the angular momentum, Jacobian ellipsoids cease to be stable (Poincaré 1885b, 373). Poincaré proved that there is an upper limit but gave no figures for the critical Jacobian ellipsoid (which is actually the first point of bifurcation of the series). Darwin gave numerical results concerning the bifurcation of the Jacobi series from the Maclaurin series as early as 1886 (Darwin 1886); these earlier numerical results are taken up in his later paper (Darwin 1902b, 326). Darwin cited Kelvin along with Poincaré's *Acta* paper (Poincaré 1885b), but addressed stability only briefly, without determining the limiting stability (Darwin 1886, 328).

34. In the formula, ω denotes angular velocity (rotation around c) and ρ the density of the body.

In the final publication of these results, Darwin gives slightly different values (translated in the present notation): $\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = 0.14200$, $a = 1.885827$, $b = 0.814975$, $c = 0.650659$ (Darwin 1902b, 325). For comparison, Chandrasekhar found $\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = 0.142015$, $a = 1.885641$, $b = 0.815034$, $c = 0.650676$ (Chandrasekhar 1969, 110).

Darwin was apparently unaware that Liapunov had shown $0.1419 < \frac{\omega^2}{2\pi\rho} < 0.1423$ in 1884; see Liapunov (1904, 101) and Liapunov to Poincaré, 12.11.1886 (§ 3-32-3).

— the scale being chosen so that $abc = 1$. I enclose a rough drawing of the section through a and c, together with your figure — the ellipsoid being dotted & the pear being in firm line. [35]

You probably know that Schwarzschild (*Ann. of Munich Ob.* vol. III) expressed a doubt as to your conclusion as to the exchange of stabilities in this case. [36] The reason he assigns

35. The original drawings have not been located, but were likely those reproduced in Poincaré's and Darwin's papers (Figs. 1, 2).

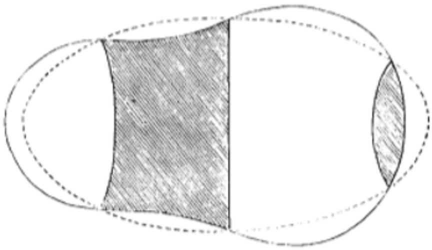


Fig. 1, Poincaré (1885b, 347)

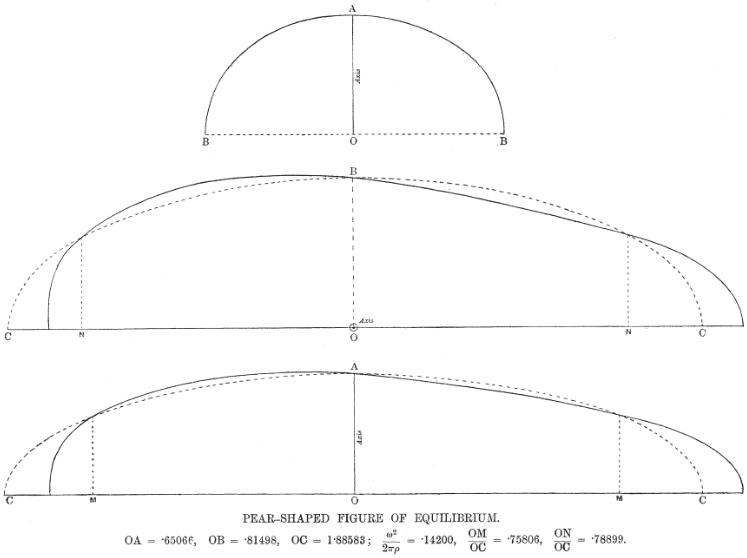


Fig. 2, Darwin (1902b, 329)

Darwin (1902b, 328) stressed that the figure is considerably longer than Poincaré had supposed. Schwarzschild was struck by this result, as he wrote to Darwin "Ihr numerisches Resultat verändert die Anschauung, die man bisher nach Poincaré's Skizze hatte, doch sehr wesentlich" (Schwarzschild to Darwin, 22.04.1902, § 3-48-6). Schwarzschild inserted a figure resembling that of Poincaré in his thesis (Schwarzschild 1896, 46).

36. Poincaré had thought it possible to prove the stability of the pear-shaped figure by an application of the principle of exchange of stabilities (Poincaré 1885b, 377–378). Schwarzschild contested Poincaré's analysis (Schwarzschild 1898, 275), observing that if Poincaré's figure is rotated 180° about the z axis (the axis of rotation in Schwarzschild's setting; take Poincaré's original illustration as a section along the (x, z)-plane), one obtains a figure with the same angular momentum which must be counted as a new figure of equilibrium, since

(p. 45) is that your figures appear in pairs & that if the figure is turned round it does not reproduce itself. Now it seems to me that he is quite wrong & that it does reproduce itself in the only sense which is material. In my notation (wh[ich] will I think be intelligible to you) the normal displacement which gives the figure is $\varepsilon\mathfrak{P}_3(\mu)\mathsf{C}_3(\varphi)$ (a zonal surface harmonic of the third order). The investigation of the coefficient of stability shows that it is equally justifiable to take ε + or −, and the change of sign of ε produces the same result as the turning of the figure about the axis of rotation thro' 180°.[37]
Thus as I understand it Schwarzschild's argument breaks down.[38] I should be very glad if you could let me hear what you think of this. I have several other interesting computations to make & may perhaps come across some other points of interest.
I remain, Yours very sincerely
G. H. Darwin

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

the original figure is not symmetrical with respect to the (y, z)-plane. The coordinate system rotates with the body, such that a fixed point of the surface of the critical Jacobian is subject to different displacements in the two cases. Consequently, there are two branches of pear-shaped figures starting at the point of bifurcation and extending to the same angular momentum value. Furthermore, one of the two branches of the series of Jacobi ellipsoids extends to the same angular momentum value, such that the angular momentum of the pear-shaped figures determines the stable branch of the Jacobi ellipsoids (i.e, the one with angular momentum lower than that of the critical Jacobian).

However, Schwarzschild points out first that the principle of exchange of stabilities applies systematically whenever there are precisely two branches on each side of the point of bifurcation extending to the same angular momentum value (p. 38); and secondly, that the principle applies if and only if a particular coefficient vanishes (p. 40f). The pear-shaped figures belong to the second situation, where the supplementary coefficient is to be studied. Schwarzschild suggested a method involving difficult calculations (p. 45).

Poincaré adopted the viewpoint of Schwarzschild (for whom the stability of the pear-shaped figure is a function of angular momentum) in his response to Darwin (§ 3-15-12) and in his article (Poincaré 1902d, 333).

37. Poincaré (1885b) observed that the first point of bifurcation of the Jacobi series occurs when the stability coefficient corresponding to the third zonal harmonic vanishes. Darwin gave the following intuitive explanation of the fact that harmonics of third order are the first harmonics relevant to the problem of the pear-shaped figure:

> An harmonic of the first order merely denotes a shift of the centre of inertia along one of the three axes; one of the second order denotes a change of ellipticity of the ellipsoid. Since we must keep the centre of inertia at the origin, and since the ellipticity is determined by the consideration that the ellipsoid is a Jacobian, these harmonics need not be considered, and we may begin with those of the third order. (Darwin 1902b, 320)

Here the symbol C_3 differs from the coefficient of stability C_3 encountered in Poincaré (1885b). In Darwin's papers, one finds analogous expressions for the normal displacement δn (which will also be denoted ζ) for an arbitrary harmonic (Darwin 1902a, 508; 1902b, 319).

In the case of the third zonal harmonic, Darwin evaluates the expression by using formulæ for the evaluation of the functions involved, arriving at an expression involving only the cartesian coordinates x, y, z of the point and the long axis c of the critical Jacobian. The role of the quantity ε (which is designated e in the sequel of the correspondence and in Darwin's paper) is explained by Darwin as follows:

> The expression has been arranged so that when $x = y = 0$, $z = c$, we have $\delta n = e$. Hence $+e$ and $-e$ are the normal displacements at the stalk and blunt end of the pear respectively. (Darwin 1902b, 328)

38. A rotation of 180° corresponds to a sign change in the term for the normal displacement, but a fixed point on the surface of the critical Jacobian is subject to different displacements in the two cases, such that the flipped figure is a new figure of equilibrium.

15.12 Poincaré à Darwin

[Entre le 28.05 et le 21.06.1901]

Mon cher collègue,
Je vous remercie de votre lettre et de l'intéressante épure qui l'accompagne.[39] Quant à l'objection de M. Schwarzschild, voici ce que j'en pense.[40]
Faisons croître le moment de rotation que j'appellerai M.[b] Deux hypothèses sont possibles.
Ou bien pour $M < M_0$,[c] nous aurons une seule figure *stable*, à savoir l'ellipsoïde de Jacobi et pour $M > M_0$ trois figures, une instable, l'ellipsoïde, et deux stables (d'ailleurs égales entre elles), les deux figures pyriformes.[41]
Ou bien pour $M < M_0$, nous aurons trois figures d'équilibre, deux pyriformes instables, une stable l'ellipsoïde et pour $M > M_0$ une seule figure instable, l'ellipsoïde, (auquel cas la masse fluide devrait se dissoudre par un cataclysme subit).
Il y a donc à vérifier si pour les figures pyriformes, le moment de rotation est > ou < que M_0. Il semble que votre épure vous donne le moyen de faire cette vérification.[42]
Veuillez agréer, mon cher collègue, l'assurance de ma sincère sympathie et vous charger de transmettre à Madame Darwin mes respectueux hommages.
Poincaré

ALS 3p. CUL-DAR251.4912, Cambridge University Library.

15.13 Darwin à Poincaré

June 6. 1901
NEWNHAM GRANGE — CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
I have been computing the change of moment of inertia in the pear. If x is the axis of rotation the moment of inertia of the layer involves $y^2 + z^2$, and thus is expressible as an harmonic of the second order.[43] Accordingly if the layer is concentrated in surface density on the ellipsoid, its m. of i. is zero, since the harmonic expressive of the layer is of the third order (of course you know this, but think it well to explain myself). The

39. Voir Darwin à Poincaré, 28.05.1901 (§ 3-15-11), et pour la figure, l'annotation de la lettre.
40. Les trois alinéas qui suivent, ainsi que la première phrase de l'avant-dernier alinéa de cette lettre, sont repris par Darwin, à quelques mots près, dans son article (Darwin (1902b, 330).
41. Ici, M_0 est le moment de rotation de l'ellipsoïde de Jacobi de bifurcation (le "Jacobien critique"). Les deux figures piriformes sont celles obtenues l'une de l'autre par une rotation de 180° ; voir à ce sujet Darwin à Poincaré, 28.05.1901 (§ 3-15-11).
42. Poincaré présente ici sa stratégie pour décider de la stabilité de la figure piriforme : comparer, pour une telle figure peu différente du Jacobien critique, les moments de rotation M et M_0 (cf. Poincaré 1902d, 335).
43. Darwin 1902b, 315 employs such an approach.

b. Variante : "... Faisons croître le moment ~~d'inertie~~".
c. Darwin annote le manuscrit : "(the moment of momentum of the Jacobian)".

next approximation is found by concentrating this layer on a surface halfway between the ellipsoid and the true surface. That is to say I distort the layer by half the normal displacement.

Now I think one can see by general considerations that this distortion must give rise to + m. of i. The distortion throughout all the long part of the ellipsoid must necessarily be almost without effect in creating m. of i. because the motion of the matter (whether positive or negative) leaves its distance from the axis of x very nearly unchanged. But the conditions are different at the ends. At the sharp end we have positive matter moved further from x; and at the blunt end negative matter moved nearer to x. Both conspire to generate + moment of inertia (and this I take it disposes of Schwarzschild).[44] The rigorous formula for the moment of inertia computed in the way I have pointed out, is of most tremendous complication when expressed (as I am able to do) in terms of elliptic integrals E, F.[45] But I should be sorry for any one who undertook to compute from this formula. I have however reduced this result to the determin^{n} of certain integrals by quadratures which are not *very* laborious and I have today done the work once and obtain the positive result foreseen. I do not rely on the exact number until the whole is reworked.

There is one thing that rather puzzles me. It seems to me that at the birth of the new figure the angular velocity is stationary; I will not trouble you with my argument but I should much like to know whether you think so too. If it is so, then the numerical value of my moment of inertia (varying as the square of the thickness of the layer) will enable me to say what is the thickness of the layer corresponding to given increment of moment of momentum. In any case the result will only be applicable for a small thickness of layer.

The position of the nodal lines in the sketch I sent you is so near the ends of the ellipsoid that we are unable even to obtain a general idea of future changes in the figure by drawing the case of a very thick layer, for if we draw such an exaggerated figure we find that the blunt end will acquire a hollow or dimple in the middle thus:

which is absurd.[46]

44. See the figure in the notes to (§ 3-15-11), where the x-axis corresponds to the axis labelled OA. In the figure shown here, the x-axis is vertical; cf. the horizontal axis of the figure in Darwin to Poincaré, 12.08.1901 (§ 3-15-23). Darwin will note later (Darwin 1903b, 313) that distortion is greatest at the extremities.

For Darwin, an increase in moment of inertia implies the stability of the pear-shaped figure, and moots thereby the objection raised by Schwarzschild (cf. § 3-15-11).

45. Cf. Darwin (1902b, 313), the elliptic integrals are

$$E = \int_0^\gamma \sqrt{1-\kappa^2 sin^2\psi}\, d\psi \quad \text{and} \quad F = \int_0^\gamma \frac{d\psi}{\sqrt{1-\kappa^2 sin^2\psi}},$$

where γ and κ are given by:

$$\kappa^2 = \frac{1-\beta}{1+\beta}; \qquad \nu_0 = \frac{1}{\kappa \sin\gamma},$$

where β is determined by the axes of the ellipsoid of reference (cf. the introduction), and ν_0 is the parameter of the critical Jacobian (Darwin 1902b, 320). On Darwin's use of elliptic integrals, see (§ 3-15-43).

46. On Darwin's nodal lines, see the chapter introduction. Darwin did not reproduce these lines in the figure accompanying his article (reproduced in the notes to Darwin to Poincaré, 28.05.1901, § 3-15-11). Darwin later echoes this passage as follows:

I have materials for obtaining any number more new figures of equilibrium – all unstable – but is it worth while? You may imagine that the work is heavy.
Yours very sincerely,
G. H. Darwin

ALS 4p. Collection particulière, Paris 75017.

15.14 Poincaré à Darwin

[Entre le 06 et le 21.06.1901]

Mon cher collègue,
Il est clair en effet que ω est stationnaire, mais le calcul du moment d'inertie n'est pas si simple.[47]
En effet, soit J le moment d'inertie vrai de la poire, J_0 le moment d'inertie de l'ellipsoïde, J_1 le moment d'inertie calculé en supposant que le bourrelet soit concentré sur la surface de l'ellipsoïde.
Il est bien vrai que $J > J_1$, il est vrai aussi que $J_1 = J_0$ mais aux quantités près du 2^d ordre seulement ; car la surélévation (épaisseur du bourrelet) est représentée par une harmonique du 3^e ordre (mais en première approximation seulement).[48]
Or la différence $J - J_1$ est elle-même du 2^d ordre.
Je suis donc encore un peu perplexe, et je vous demanderai quelque temps pour réfléchir à la question. Si vous voulez bien y réfléchir de votre côté et me faire part de vos réflexions je vous en serai très reconnaissant.
Votre bien dévoué collègue,
Poincaré

ALS 2p. CUL-DAR251.4913, Cambridge University Library.

> In this first approximation the positions of the nodal lines [. . .] lie so near the ends that it is impossible to construct an exaggerated figure, for if we do so the blunt end acquires a dimple, which is absurd. (Darwin 1902b, 328)

Karl Schwarzschild found the presence of dimples to be a sign of instability:

> Die Bemerkung, dass eine verhältnismässig geringe Deformation bereits ein Grübchen am stumpfen Ende der Birne erzeugt, legt die Vermutung nahe, dass in der Reihe der Birnfiguren, selbst wenn die ersten stabil sind, die Stabilität nicht lange anhalten wird. Wenigstens kann man, wenn ich richtig voraussehe, beweisen, dass eine Figur mit Grübchen nicht stabil sein kann. Oder sollten schon so bald andere ellipsoidal harmonics ausser $\mathfrak{P}_3\mathfrak{Q}_3$ in Betracht kommen, dass in Wirklichkeit das Grübchen gar nicht auftritt? (Schwarzschild to Darwin, 22.04.1902, § 3-48-6)

See also Schwarzschild to Poincaré, 22.04.1902 (§ 3-41-1).

47. Poincaré répond à la lettre de Darwin du 06.06.1901 (§ 3-15-13).
48. Voir Poincaré 1885b, 345.

15.15 Darwin à Poincaré

June 21.01
NEWNHAM GRANGE–CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
I do not see how it is possible to solve the question without carrying the investigation through completely[d] to the second order of small quantities. I had come to this conclusion before hearing from you,[49] but when you said that my figure afforded the means of deciding the question of increase of momentum I thought you must be right, and besides forgot my previous reflections on the subject.[50]
As it is possible to carry the theory of the figure of the earth to the second order of small quantities by means of spherical harmonics, so I think it is possible to proceed to the second order here with ellipsoidal harmonics. I believe I see how it is to be done numerically, proceeding from a specified Jacobian ellipsoid; but I do not see much prospect of doing it analytically. But the arithmetic would be very heavy, since it would involve the determination of a considerable number of integrals by quadratures—integrals theoretically perhaps expressible in Elliptic integrals, but with coefficients of stupendous complication. The fundamental difficulty is thus. Suppose we have an inequality on the ellipsoid represented by (curvilinear normal)

$$\delta n = p.\varepsilon\mathfrak{P}_3(\mu)\mathsf{C}_3(\phi) \quad \left[3^{\text{rd}}\text{zonal}\right]$$

($p \perp$ on tangent plane); then we have to find the mass standing on unit area of the ellipsoid as far as squares of ε.
I have obtained the expression in question. The term in ε is obvious by ellipsoidal analysis — that in ε^2 depends on $p[\mathfrak{P}_3(\mu)\mathsf{C}_3(\phi)]^2$ multiplied by a complicated function of the two coordinates μ, ϕ.
In order to proceed further, this function must be expressed in ellipsoidal harmonics and it will involve harmonics of orders 0, 2, 4, 6... and of even orders of tesserality.[51]
I believe that by quadratures & a sufficient degree of labour I can get out those harmonics – but whether or not I have the patience to do so, is another question.
This result shows that we must start by supposing that the figure of equilibrium consists not only of a 3rd harmonic of amplitude ε (whose square is retained), but also of harmonics of orders 0, 2, 4, 6... & of amplitudes unknown save that they are of the order ε^2.[e] These new harmonics will affect the moment of inertia.
The harmonic 0 is what Kelvin calls a focaloid shell & indicates that the elevation of the 3rd zonal must be computed from a surface confocal to the primitive ellipsoid — otherwise

49. See Poincaré to Darwin, § 3-15-14.
50. See Poincaré to Darwin, § 3-15-12.
51. Darwin (1903a, 253) linked the even-order harmonics to the figure's symmetry.

d. Variant: "~~almost~~ completely".
e. Variant: "save that it is of the ~~second~~ order ε^2."

the mass of the pear will not be equal to that of the ellipsoid.[52] This harmonic then enters in the moment of inertia, as also does that of order 2; the remaining harmonics do not do so.[f 53]

If I assume these difficulties overcome, then I think (also with sufficient labour) I can overcome the remainder.

In order to find the gravitational terms I should proceed thus:

Draw a concentric and *similar* ellipsoid touching the stalk of the pear. It is a Jacobian ellipsoid, but its mass depends on the determination of the exact figure of the pear. Nevertheless I can find the expression for its internal gravity although that expression involves ε.[54]

Consider the shaded pear to consist of negative matter; then by quadratures I can find the energy due to the gravitation of the larger ellipsoid and this shaded matter.

The mutual energy of the layer as far as it depends on the harmonics 0, 2, 4, 6 ... is determinable at once by harmonic analysis. That corresponding to the 3rd zonal is to the first order the same as tho' it were concentrated on the surface. To go to the second order we must first concentrate in surface density on ellipsoid and then deform that surface density — so as to bring it to stand half way between the ellipsoid & the true surface.[55]

This last may be done thus: If we have a layer of surface density with potential $v_{(+)}$ externally and potential $v_{(-)}$ internally, the force acting on an element $d\sigma$ is[56]

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{dv_{(+)}}{dn}+\frac{dv_{(-)}}{dn}\right)\cdot\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dv_{(+)}}{dn}-\frac{dv_{(-)}}{dn}\right)\cdot d\sigma.$$

If the element is carried outwards through a distance $\frac{1}{2}\delta n$, the work done is

$$\frac{1}{16\pi}\left[\left(\frac{dv_{(+)}}{dn}\right)^2-\left(\frac{dv_{(-)}}{dn}\right)^2\right]\delta n\cdot d\sigma$$

Integrating all over the surface one may obtain the whole work done in deformation.

52. The focaloid shell was defined by Thomson (1879a, §494 g) as an infinitely-thin shell bounded by two concentric similar ellipsoidal surfaces. He employed it to prove a theorem attributed to MacLaurin, and used here by Darwin, according to which any two confocal homogeneous solid ellipsoids of equal mass give rise to equal attraction. Clairaut's theory of heterogeneous masses also employed focaloid shells; see the notes to Darwin to Poincaré, 31.07.1901 (§ 3-15-17).

53. Cf. Poincaré to Darwin (§ 3-15-19), where Poincaré shows that ξ_3 (the coefficient of $R^1_{2,0}=\mathfrak{P}_2$ in the notation of Poincaré (1902d), here η) and ξ_4 (the coefficient of $R^1_{2,2}=\mathfrak{P}^2_2$ in Poincaré's notation, here ζ) enter the computation with the second order while the third zonal enters with the first order.

54. On Darwin's solution see Darwin to Poincaré, 12.08.1901 (§ 3-15-23).

55. This is the double layer strategy used later by Poincaré; see Poincaré to Darwin (§ 3-15-25).

56. The second factor involves Poisson's equation (Darwin 1901, 507); the last fraction has been corrected from $dv_{(-1)}/dn$.

f. Variant: "do not do so. ~~Hence if I worked out these two only I could decide the question of the moment of momentum with~~".

In this sketch of procedure I have left a good deal vague, but I think the processes involved are legitimate.
I do not see that any analytical skill could make the processes necessary other than very laborious – unless indeed it were possible to obtain expressions for harmonic functions applicable to the pear-shaped figure.
I am afraid this letter is very ill expressed, but I hope it is intelligible and that you will not detect faults of principle.
I remain, Yours sincerely
G.H. Darwin

ALS 8p. Collection particulière, Paris 75017.

15.16 Poincaré à Darwin

[Vers le mois de juin 1901]

Mon cher Collègue,
Je serai très heureux si vous voulez bien m'envoyer vos deux mémoires le plus tôt possible ; je les examinerai avec soin pour voir où est le point qui nous divise. [57]
Je n'ai plus chez moi de tirage à part de mon mémoire des *Acta ;* mais peut-être Hermann en a-t-il encore, je lui écris pour qu'il vous en envoie un. [58] Malheureusement je ne suis pas sûr qu'il en ait.
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

Je suis maintenant à Lozère (par Palaiseau) — (Seine et Oise)
et à partir du 30 septembre, 63 rue Claude Bernard, à Paris.

ALS 1p. CUL-DAR251.4966, Cambridge University Library.

57. Alors que le point en question est inconnu, s'il s'agit de figures d'équilibre, les deux mémoires dont Poincaré attend des exemplaires seraient Darwin (1886) et (1887).

58. Poincaré 1885b ; la maison d'édition Hermann distribuait le journal suédois *Acta mathematica* à Paris.

15.17 Darwin à Poincaré

July 31 01
NEWNHAM GRANGE–CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,

I have now devised a method which I think overcomes all difficulties in carrying out my proposed work, although it certainly shows that the work will be very heavy.

In order to see how the process works I have applied it to the ellipsoid of revolution. [59] I unfortunately made a mistake in my work and have spent nearly fortnight in discovering where I was wrong. It was in an elementary point with which I need not trouble you, but I passed it by over and over again in going over my work.

If $2e$ is the square of the eccentricity of an ellipsoid of revolution of density ρ, mass M, and semi-major axis a, it is known that the "lost energy" is

$$\frac{3}{5}\frac{M^2}{a}\frac{\sin^{-1}\sqrt{2e}}{\sqrt{2e}} = \frac{3}{5}\frac{M^2}{a}\left(1 + \frac{1}{3}e + \frac{3}{10}e^2 + \frac{5}{14}e^3\right)$$

I want to get the same result by harmonic analysis. [60]

I consider the ellipsoid to be built up by a sphere of radius a and density ρ, and a (shaded) layer of density $-\rho$.

If

$$\sigma_2 = \frac{1}{3} - \mu^2,$$

$$\sigma_4 = \mu^4 - \frac{6}{7}\mu^2 + \frac{3}{5\cdot 7}$$

$$\sigma_6 = \mu^6 - \frac{3\cdot 5}{11}\mu^4 + \frac{5}{11}\mu^2 - \frac{5}{3\cdot 7\cdot 11}$$

where μ is cosine of colatitude.

59. Darwin seeks to determine the energy lost in passing from a sphere to an ellipsoid of revolution, up to e^3, where $2e$ is the square of the eccentricity. He follows a similar procedure to get from the critical Jacobian ellipsoid to the pear-shaped figure.

60. In what follows, Darwin sums energies of the sphere and the layer to find the same expression for lost energy (up to e^3), an approach employed in Darwin (1887, 423).

The equation to the ellipsoid is [61]

$$\frac{r}{a} = 1 - \frac{1}{3}e - \frac{11}{2\cdot 3\cdot 5}e^2 - \frac{103}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}e^3$$
$$+\left(e + \frac{5}{7}e^2 + \frac{9}{2\cdot 7}e^3\right)\sigma_2 + \frac{3}{2}\left(e^2 + \frac{19}{11}e^3\right)\sigma_4 - \frac{5}{2}e^3\sigma_6\cdots \quad \text{(A)}$$

I now form $\left(\frac{r}{a}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{r}{a}\right)^5$ and drop all terms which are of order higher than e^3 or which will vanish when integrated over the sphere. Taking this expression between the limits a and r as given in (A), I find

$$\left[\frac{r^3}{a^3} - \frac{1}{5}\frac{r^5}{a^5}\right]_r^a = \frac{2}{3}e + \frac{28}{3^2\cdot 5}e^2 + \frac{661}{3^2\cdot 5\cdot 7}e^3 - \left(e^2 + \frac{17}{7}e^3\right)(\sigma_2)^2 + e^3(\sigma_2)^3.$$

It is easy to show that

$$\iint d\mu d\phi = 4\pi; \quad \iint (\sigma_2)^2 d\mu d\phi = \tfrac{16\pi}{45}; \quad \iint (\sigma_2)^3 d\mu d\phi = -\tfrac{64\pi}{3^3\cdot 5\cdot 7}.$$

Hence I find

$$\iint \left[\frac{r^3}{a^3} - \frac{1}{5}\frac{r^5}{a^5}\right]_r^a d\mu d\phi = \frac{8\pi}{3}\left(e + \frac{4}{5}e^2 + \frac{7}{10}e^3\right).$$

Now to make use of this.
The lost energy of the sphere, say E_1, is

$$\frac{3}{5}\frac{\left(\frac{4}{3}\pi\rho a^3\right)^2}{a} = \frac{16}{15}\pi^2\rho^2 a^5$$

61. Darwin's equation expresses the deformation of the figure with respect to the original sphere. Observing that $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ for a surface point (x, y, z), we have

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2};$$

thus, $\frac{r}{a}$ is precisely zero for surface points. Darwin builds here on an approach taken by Legendre and Laplace, who considered the layers of the figure as spheroids deviating from the sphere by small first-order quantities (Oppenheimer 1922). The equation of such a spheroid is $r = a(1+ef)$ where r is the Euclidean distance from the origin to a surface point, a is the radius of a sphere with center at the origin, e is a small quantity with negligible square, and f is a function of the polar coordinates θ and ψ developed in a series of spherical functions $Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots$. Supposing a to be the radius of the sphere with volume equal to the volume of the spheroid, one obtains $Y_0 = 0$, and by supposing the center of inertia to lie at the origin of the coordinate system, it is shown that $Y_1 = 0$. Laplace gave an expression for the equilibrium condition in terms of these functions, complicated by the consideration of supplementary forces. For the Earth, however, forces other than centrifugal may be neglected, and since the force expression involves only a spherical function of the second order, P_2, only Y_2 must be retained, and in Y_2, only the coefficient corresponding to $P_2 = \cos^2\theta - \frac{1}{3}$ (the function labeled σ_2 by Darwin). Comparison with astronomical data indicated a need to introduce higher powers of e, motivating Darwin and others to consider more elaborate forms of the equation; see Wiechert (1897), Callandreau (1897c), Darwin (1899).

The lost energy of the sphere and layer, say E_2, is the pot[l] of the sphere multiplied by density of layer and integrated through the layer. Hence it is

$$-\iiint \frac{2}{3}\pi\rho(3a^2 - r^2)\rho r^2 dr d\mu d\phi$$

with the limits of r: a to r (as above).
But

$$\int_r^a \left(3\frac{r^2}{a^3} - \frac{r^4}{a^5}\right) dr = \left[\frac{r^3}{a^3} - \frac{1}{5}\frac{r^5}{a^5}\right]_r^a$$

Hence applying the proceeding result

$$E_1 + E_2 = \frac{16}{15}\pi^2\rho^2 a^5 \left(1 - \frac{5}{3}e - \frac{4}{3}e^2 - \frac{7}{6}e^3\right)$$

Now since [62]

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho a^3\sqrt{1-2e}$$

We have, on division by $1 - 2e$

$$E_1 + E_2 = \frac{3}{5}\frac{M^2}{a}\left(1 + \frac{1}{3}e - \frac{2}{3}e^2 - \frac{5}{2}e^3\right)$$

This result may be obtained more shortly, but I have purposely done it as if I was compelled to integrate.
It remains to find the lost energy of the layer. This I consider in three steps.

1. Concentrate the layer on the sphere and find its lost energy E_3
2. Distort the layer of surface density by carrying it to a position halfway between the sphere and ellipsoid, and let E_4 be the energy lost
3. Expand the surface density until it fills the layer, and let E_5 (essentially negative) be the lost energy.

(1) The equation to the ellipsoid (retaining squares only) may be written [g]

$$\begin{aligned}
\frac{r}{a} &= 1 - e\mu^2 - e^2\left(2\mu^2 - \frac{3}{2}\mu^4\right). \\
\frac{r^3}{a^3} &= 1 - 3\mu^2(e + 2e^2) + \frac{15}{2}e^2\mu^4 \\
&= 1 - e - \frac{1}{2}e^2 + 3\sigma_2\left(e - \frac{1}{7}e^2\right) + \frac{15}{2}e^2\sigma_4 \\
\frac{1}{3}\left[\frac{r^3}{a^3}\right]_a^r &= \frac{1}{3}e + \frac{1}{6}e^2 - \sigma_2\left(e - \frac{1}{7}e^2\right) - \frac{5}{2}e^2\sigma_4
\end{aligned}$$

62. For comparison, Thomson & Tait (1879a, § 776, eq. 7) found $M = \frac{4}{3}\pi\rho a^3\frac{1}{1-2e}$.

g. Variant after first equation: "$\cancel{-e^3(4\mu^2 - 6\mu^4)}$".

The mass which stands on the element $a^2 d\mu d\phi$ is

$$-\int_r^a \rho \frac{r^2}{a^2} dr = -\rho a \left[\frac{1}{3}e + \frac{1}{6}e^2 - \sigma_2 \left(e - \frac{1}{7}e^2 \right) - \frac{5}{2}e^2 \sigma_4 \right]$$

and this is the surface density of the concentration (1). Proceeding in the usual way to find the lost energy

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{16}{15}\pi^2 \rho^2 a^5 \left(\frac{29}{2 \cdot 3 \cdot 5}e^2 + \frac{167}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}e^3 \right) \\ &= \frac{3}{5}\frac{M^2}{a} \left(\frac{29}{2 \cdot 3 \cdot 5}e^2 + \frac{191}{2 \cdot 5 \cdot 7}e^3 \right) \end{aligned}$$

Then

$$E_1 + E_2 + E_3 = \frac{3}{5}\frac{M^2}{a} \left(1 + \frac{1}{3}e + \frac{3}{10}e^2 + \frac{8}{5 \cdot 7}e^3 \right)$$

This is already right up to e^2.
(2) To the first order of small quantities, the surface density of the concentration is

$$\rho a e \left(\sigma_2 - \frac{1}{3} \right)$$

The external and internal potentials are

$$\begin{aligned} V_0 &= 4\pi\rho a^2 e \left(\frac{1}{5}\frac{a^3}{r^3}\sigma_2 - \frac{1}{3}\frac{a}{r} \right) \\ V_i &= 4\pi\rho a^2 e \left(\frac{1}{5}\frac{r^2}{a^2}\sigma_2 \right) \end{aligned}$$

The mean value of $\frac{dV_0}{dr}$ and $\frac{dV_i}{dr}$ $(r = a)$ is then

$$2\pi\rho a e \left(-\frac{1}{5}\sigma_2 + \frac{1}{3} \right)$$

This represents the attraction on an element of the surface which bears density $\rho a e(\sigma_2 - \frac{1}{3})$, and is to be carried a distance $\frac{1}{2}ae(\sigma_2 - \frac{1}{3})$.
Hence

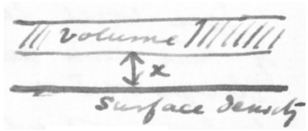
$$\begin{aligned} E_4 &= \iint 2\pi\rho a e \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\sigma_2 \right) \cdot \frac{1}{2}\rho \cdot a^2 e^2 \left(\sigma_2 - \frac{1}{3} \right)^2 a^2 d\mu d\varphi \\ &= \pi\rho^2 a^5 e^3 \iint \mu^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5}\mu^2 \right) d\mu d\varphi \\ &= \frac{4\pi^2\rho^2 a^5 e^3}{5} \left(\frac{1}{7} + \frac{4}{3 \cdot 5} \right) \\ &= \frac{3}{5}\frac{M^2}{a} \left(\frac{43e^3}{4 \cdot 5 \cdot 7} \right) \end{aligned}$$

And

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = \frac{3}{5}\frac{M^2}{a}\left(1 + \frac{1}{3}e + \frac{3}{10}e^2 + \frac{15}{4\cdot 7}e^3\right)$$

(3) Consider a plane surface coated with surface density $2h\rho$, and find the gain of energy in expanding it to be a slab of thickness $2h$ — half being carried one way and half the other.

Imagine the expansion of one half carried out until $h - x$ is filled with density ρ & $h + x$ remains unexpanded. The force per unit area is [63]



$$2\pi\rho(h - x) - 2\pi\rho x - 2\pi\rho h = -4\pi\rho h x.$$

The next element carried up has mass ρdx & is carried thro' a distance x. Hence the loss of energy in the whole process is

$$2\int_0^h 2\pi\rho^2 x^2 dx$$

per unit area or $\frac{1}{3}\pi\rho^2(\text{thickness})^3$.
In the case we are now considering the thickness is $ae(\sigma_2 - \frac{1}{3})$.
Thus

$$\begin{aligned} E_5 &= \frac{1}{3}\pi\rho^2 \iint a^3 e^3 \left(\sigma_2 - \frac{1}{3}\right)^3 a^2 d\mu d\varphi \\ &= -\frac{1}{3}\pi\rho^2 a^5 e^3 \iint \mu^6 d\mu d\varphi \\ &= -\frac{4\pi^2\rho^2 a^5 e^3}{3\cdot 7} \\ &= -\frac{3}{5}\frac{M^2}{a}\left(\frac{5}{4\cdot 7}e^3\right). \end{aligned}$$

Adding we get

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 = \frac{3}{5}\frac{M^2}{a}\left(1 + \frac{1}{3}e + \frac{3}{10}e^2 + \frac{5}{14}e^3\right).$$

This is the correct result.
You will see that the whole of this can be done with Jacobi's ellipsoid & the pear, but if this is somewhat laborious how much more will that be so. [64]
Yours sincerely,
G. H. Darwin

ALS 8p. Collection particulière, Paris 75017.

63. For the right-hand side, read $-4\pi\rho x$.
64. Gharnati (1996, 67, n. 92) recovers Darwin's result starting from MacLaurin's exact formula.

15.18 Darwin à Poincaré

Aug. 3. 1901
NEWNHAM GRANGE–CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,

Since I wrote last I see that the method of my last letter gives less than I hoped for.[65] This I will explain. If

$$r = a_1 \left[1 + e_1 \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right) \right]$$

is the first approx. to the surface under rotation ω, the problem we should like to solve is to find the next approx.

Suppose the next approx. to be

$$r_1 = a_1 \left[1 + e_1 \left(\frac{1}{3} - \mu^2 \right) + f\mathfrak{P}_4(\mu) + g\mathfrak{P}_6(\mu) \right]$$

where f and g are at least of order e_1^2. This is to be solved by making $E + \frac{1}{2}A\omega^2$ stationary, where E is lost energy & A m[oment] of i[nertia].[66] If we concentrate the layers represented by f and g we see that their contributions to E are of order f^2 and g^2 and are negligible *ex hypothesi*; their contributions to A are *nil* as being harmonics of orders 4 & 6. Hence we may as well start by omitting f and g. (I had in fact gone thro' the work and found that they do disappear entirely before I realised the reason of it).

Suppose then the surface to be

$$r = a(1 - e\mu^2)$$

where the e is not the same as the e of my last letter. But we are supposed to be ignorant of the nature of the true figure of equilibrium and therefore we must merely regard e as a parameter whose cube is to be retained.

If we write $M = \frac{4}{3}\pi\rho a_0^3$ as the mass of the body, it is easy to show that

$$a_0^3 = a^3(1 - e + \frac{3}{5}e^2 - \frac{1}{7}e^3);$$

$$\text{whence} \qquad a^5 = a_0^5 \left(1 + \frac{5}{3}e + \frac{11}{3^2}e^2 + \frac{163}{3^4 \cdot 7}e^3 \right), \tag{1}$$

a result needed later.

65. See Darwin to Poincaré, 31.07.1901 (§ 3-15.17).

66. The total energy of the system is $E + \frac{1}{2}A\omega^2$, or in Poincaré's terms, $U + \frac{1}{2}J\omega^2$.

Proceeding as in my last letter,[67]

$$E_1 = \frac{16}{15}\pi^2\rho^2 a^5 \tag{2}$$

$$\begin{aligned} E_2 &= -\frac{2}{3}\pi\rho \iiint (3a^2 - r^2)r^2\rho dr d\mu d\varphi \\ &= -\frac{2\pi\rho^2}{3}a^5 \iint \left[\frac{r^3}{a^3} - \frac{1}{5}\frac{r^5}{a^5}\right]_r^a d\mu d\varphi \\ &= -\frac{2\pi\rho^2}{3}a^5 \iint (2e\mu^2 - e^2\mu^4 - e^3\mu^6) d\mu d\varphi \\ &= \frac{16}{15}\pi^2\rho^2 a^5 \left(-\frac{5}{3}e + \frac{1}{2}e^2 + \frac{5}{2\cdot 7}e^3\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Concentrate the layer of neg. density on the sphere $\underline{a}$ & we get surface density as far as e^2 equal to $\rho a(e\mu^2 - e^2\mu^4)$. Express this in harmonics retaining only harmonics whose coefficients are of order e but developing those coefficients as far as e^2 (you will perceive that this is sufficient) & we get surface density

$$\rho a\left[\frac{1}{3}e - \frac{1}{5}e^2 - \left(e - \frac{6}{7}e^2\right)\left(\frac{1}{3} - \mu^2\right)\right].$$

Find the lost energy of this by the usual method & we get

$$E_3 = \frac{16}{15}\pi^2\rho^2 a^5 \left(\frac{29}{2\cdot 3\cdot 5}e^2 - \frac{129}{3\cdot 5\cdot 7}e^3\right) \tag{4}$$

Exactly as in my last the energy lost in distorting the layer is

$$E_4 = \frac{16}{15}\pi^2\rho^2 a^5 \left(\frac{43}{4\cdot 5\cdot 7}e^3\right) \tag{5}$$

The energy lost in expanding the layer is

$$E_5 = \frac{16}{15}\pi^2\rho^2 a^5 \left(-\frac{5}{4\cdot 7}e^3\right) \tag{6}$$

Adding together (2), (3), (4), (5), (6)

$$E = \frac{16}{15}\pi^2\rho^2 a^5 \left(1 - \frac{5}{3}e + \frac{22}{3\cdot 5}e^2 - \frac{26}{5\cdot 7}e^3\right)$$

Introducing a_0 from (1)

$$E = \frac{16}{15}\pi^2\rho^2 a_0^5 \left(1 - \frac{4}{3^2\cdot 5}e^2 - \frac{136}{3^4\cdot 5\cdot 7}e^3\right) \tag{7}$$

67. Darwin to Poincaré (§ 3-15-17).

The moment of inertia A is only counted as far as e^2. For the sphere

$$A_1 = \frac{8}{15}\pi\rho a^5 = \frac{1}{2\pi\rho}\left(\frac{16}{15}\pi^2\rho^2 a^5\right) \tag{8}$$

For the layer

$$\begin{aligned} A_2 &= -\iiint \rho r^2(1-\mu^2)r^2 dr d\mu d\varphi \\ &= -\frac{1}{5}\rho a^5 \iint \left[\frac{r^3}{a^3}\right]_r^a (1-\mu^2) d\mu d\varphi \\ &= -\frac{1}{5}\rho a^5 e \iint (\mu^2 - (1+2e)\mu^4 + 2e\mu^6) d\mu d\varphi \\ &= \frac{8}{15}\pi\rho a^5\left(-e + \frac{6}{7}e^2\right) \end{aligned} \tag{9}$$

From (8) and (9)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2\pi\rho}\left(\frac{16}{15}\pi^2\rho^2 a^5\right)\left(1 - e + \frac{6}{7}e^2\right) \\ A &= \frac{1}{2\pi\rho}\left(\frac{16}{15}\pi^2\rho^2 a_0^5\right)\left(1 + \frac{2}{3}e + \frac{26}{3^2\cdot 7}e^2\right) \end{aligned} \tag{10}$$

From (7) and (10)

$$\frac{E + \frac{1}{2}A\omega^2}{\frac{16}{15}\pi^2\rho^2 a_0^5} = 1 - \frac{4}{3^2\cdot 5}e^2 - \frac{136}{3^4\cdot 5\cdot 7}e^3 + \frac{\omega^2}{4\pi\rho}\left(1 + \frac{2}{3}e + \frac{26}{3^2\cdot 7}e^2\right)$$

Making this stationary for variations of e

$$\frac{\omega^2}{4\pi\rho}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + \frac{26}{3\cdot 7}e\right) = \frac{8}{3^2\cdot 5}e + \frac{136}{3^3\cdot 5\cdot 7}e^2$$

$$\text{whence} \qquad \frac{\omega^2}{2\pi\rho} = \frac{8}{3\cdot 5}\left(e - \frac{3}{7}e^2\right).$$

This is all that is attainable from this method, but I want to show that it is right & for that purpose I must find what e really means when *we know that the resulting figure is an ellipsoid.* If I write e' for the e of my last letter, I showed that the equation to an ellipsoid was [68]

$$r = a'\left[1 - \frac{1}{3}e' - \frac{11}{2\cdot 3\cdot 5}e'^2 + \left(e' + \frac{5}{7}e'^2\right)\left(\frac{1}{3} - \mu^2\right) + \frac{3}{2}e'^2\sigma_4\right]$$

68. In Darwin to Poincaré, 31.07.1901 (§ 3-15-17), e denoted half the square of ellipsoid eccentricity; see equation (A).

If I put

$$a = a'\left(1 - \frac{9}{2\cdot 5\cdot 7}e'^2\right)$$
$$e = e' + \frac{5}{7}e'^2$$

this may be written

$$r = a\left(1 - e\mu^2 + \frac{3}{2}e^2\sigma_4\right)$$

and this is the form with which I have worked.
If η is the eccentricity of ellipsoid we had $e' = \frac{1}{2}\eta^2$. Hence

$$e = \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{5}{4\cdot 7}\eta^4.$$

Hence

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = \frac{4}{3\cdot 5}\left(\eta^2 + \frac{1}{7}\eta^4\right).$$

Now I have proved (tho' I cannot refer you to any book for the result) that

$$\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = \sqrt{1-\eta^2}\sum_1^\infty \frac{2n-1!\eta^{2n}}{(2n+1)(2n+3)(n-1)!^2 2^{2n-4}}.$$

Taking the first two terms of this series we have[69]

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{2\pi\rho} &= \sqrt{1-\eta^2}\left(\frac{4}{3\cdot 5}\eta^2 + \frac{2\cdot 3}{5\cdot 7}\eta^4\right)\\ &= \frac{4}{3\cdot 5}\eta^2\left(1 - \frac{1}{2}\eta^2\right)\left(1 + \frac{9}{2\cdot 7}\eta^2\right)\\ &= \frac{4}{3\cdot 5}\left(\eta^2 + \frac{1}{7}\eta^4\right).\end{aligned}$$

Thus the result is correct.
It appears however that unless the approximation can be carried as far as e^4 there is no way of determining what meaning is to be attributed to e.
In looking over the investigation, I see that E_1, E_2, E_3 and A can be found for one more power of e,[h] but I do not see how E_4 and E_5 can be found more exactly.

69. Cf. Thomson & Tait's formula (1879a, § 771).

h. Variant: "can be found ~~as far as~~ e^4".

I conclude from this that the application of the similar method to the pear would throw no light on the further approximation to its figure, but would enable us to determine whether or not the pear corresponds to greater or less m[oment] of m[omentum] and so absolutely determine the question of stability. I am not sure whether or not I shall have the patience to carry out the enormous labour of the investigation. I wish I could see my way to more accurate determination of the figure.

The *impasse* in which I find myself is quite unexpected by me, although you very probably foresaw it.

I feel quite ashamed to have troubled you by these enormous letters, and I doubt whether you will have the patience to read them.

I remain, Yours very truly,

G. H. Darwin

ALS 6p. Collection particulière, Paris 75017.

15.19 Poincaré à Darwin

[Entre fin Juillet et début Août 1901] [i]

Mon cher collègue,

J'entre en matière sans plus de préambule.

Je définirai une surface quelconque S par rapport à un ellipsoïde de référence E de la façon suivante.

Soit $d\omega$ un élément de la surface de l'ellipsoïde E ; je mène les trois droites orthogonales des ellipsoïdes homofocaux jusqu'à la rencontre de la surface S ; je détache ainsi un petit volume dv ; soit :

$$dv = l.N.d\omega$$

je développe ensuite N en série harmonique. De cette façon si dans le développement de N il n'y a pas de terme d'ordre 0, le volume de S est égal à celui de E.

Soit E_0 l'ellipsoïde initial, ellipsoïde de Jacobi qui fait la bifurcation avec la série des poires. Je pourrai toujours choisir un ellipsoïde de référence E *de même volume* que E_0 et de telle façon qu'en rapportant S à E, le développement de N ne contienne pas d'harmoniques d'ordre 0, 1 ou 2.

Soient ξ, ξ', ξ'', etc. les coëff. du développement de N, ξ étant en particulier le coëff. de la 3[d] zonal. Soient η et ζ deux variables définissant la forme de E et s'annulant quand E se réduit à E_0. La forme de la surface S sera alors définie par les variables η, ζ, ξ, ξ', ξ'', $\dots$

i. Le MS porte un fragment de calcul d'une main inconnue : $A\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\omega^2}{2}\frac{\partial J}{\partial \xi} = 0$ / $+(?)\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \left(\frac{\omega_0^2}{2} = \dots\right)\dots = 0$

Soit U l'énergie de gravitation, J le moment d'inertie, ω la vitesse angulaire, ω_0 la valeur de ω qui correspond à E_0 ; posons :

$$U + \frac{\omega_0^2}{2} J = W \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon.$$

Les équations d'équilibre s'écriront :

$$\frac{dW}{d\xi} + \varepsilon \frac{dJ}{d\xi} = \frac{dW}{d\eta} + \varepsilon \frac{dJ}{d\eta} = \ldots = 0.$$

Il faut donc développer W et J suivant les puissances de η, ζ, ξ, ξ', ... J'appellerai W_0 et J_0 les termes constants du développement, que je pourrais d'ailleurs laisser de côté. Dans W pas de terme du 1er degré. Les termes du 2d degré se réduisent à des carrés :

$$a\xi^2, b\eta^2, c\zeta^2, a'\xi'^2, \ldots$$

a est nul (coëff. de stabilité nul).
Par symétrie il n'y a pas de terme en ξ^3 ; mais il y a un terme en ξ^4 que j'écrirai $a_1\xi^4$, il y a aussi des termes en $\xi^2\eta$, $\xi^2\zeta$; je puis donc écrire :

$$W = W_0 + b\eta^2 + c\zeta^2 + \sum a'\xi'^2 + a_1\xi^4 + h\xi^2\eta + k\xi^2\zeta + R,$$

R étant un ensemble de termes qui comme nous le verrons ne joueront aucun rôle.
Passons à J. Les seuls termes du 1er degré sont $\beta\eta$ et $\gamma\zeta$; le terme en ξ^2 est important aussi, il n'y a pas de terme en $\xi\eta$, $\xi\zeta$; je puis donc écrire :

$$J = J_0 + \beta\eta + \gamma\zeta + \alpha\xi^2 + P,$$

P étant un ensemble de termes qui ne joueront aucun rôle.
Les équations deviennent alors :

$$4a_1\xi^3 + 2h\xi\eta + 2k\xi\zeta + \frac{dR}{d\xi} + \varepsilon\left(2\alpha\xi + \frac{dP}{d\xi}\right) = 0$$

Comme $\frac{dP}{d\xi}$ est au moins du 2d ordre, $\frac{dR}{d\xi}$ du 3e ordre, cette éq. nous apprend que ε est du 2d ordre. Il en résulte que η est du même ordre que $\varepsilon\frac{dJ}{d\eta}$, c'est-à-dire du 2d ordre, ξ' du 2d ordre etc.
P contenant en facteur soit ξ^3, soit $\xi^2\eta$, soit $\xi\eta^2$, soit ξ'^2, soit $\xi'\eta$, soit $\xi\xi'$, est du 3e ordre et $\frac{dP}{d\xi}$ du 2d ordre.
R contient $\xi^2\xi'$, $\xi\xi'^2$, ξ'^3, $\eta\xi'^2$, $\eta^2\xi'$, etc. $\frac{dR}{d\xi}$ est donc du 4e ordre, et l'éq. qui donne ε peut se réduire à :

$$\alpha\varepsilon + 2a_1\xi^2 + h\eta + k\zeta = 0 \tag{1}$$

L'éq.

$$\frac{dW}{d\eta} + \varepsilon \frac{dJ}{d\eta} = 0$$

donne de même :

$$2b\eta + h\xi^2 + \frac{dR}{d\eta} + \varepsilon\left(\beta + \frac{dP}{d\eta}\right) = 0$$

qui se réduit à :

$$2b\eta + h\xi^2 + \beta\varepsilon = 0 \tag{2}$$

De même

$$2c\zeta + k\xi^2 + \gamma\varepsilon = 0 \tag{3}$$

Non je me trompe ; je puis négliger dans $\frac{dR}{d\xi}$ les termes du 4e ordre (en comptant ξ du 1er ordre, ξ', η, ζ du 2d ordre) et par conséquent dans R les termes du 5e ordre. Mais nous avons encore dans R des termes en $\xi^2\xi'$ qui sont du 4e ordre et dont il faut tenir compte. J'écrirai donc :

$$R = \sum h'\xi^2\xi' + R'$$

R' étant du 5e ordre.
Dans $\frac{dP}{d\xi}$ je puis négliger les termes du 2d ordre, par conséquent dans P ceux du 3e. Or P est du 3e ordre.
L'éq. (1) ainsi corrigée devient :

$$\alpha\varepsilon + 2a_1\xi^2 + h\eta + k\zeta + \sum h'\xi' = 0 \tag{1bis}$$

Aux éq. (2) et (3) rien à changer car $\frac{dR'}{d\eta}$ est du 3e ordre, $\frac{dR}{d\eta} = \frac{dR'}{d\eta}$.
Mais il faut ajouter l'éq.

$$\frac{dW}{d\xi'} + \varepsilon\frac{dJ}{d\xi'} = 0$$

qui donne

$$2a'\xi' + h'\xi^2 = 0 \tag{4}$$

L'éq. (1bis) devient alors :

$$\alpha\varepsilon + 2a_1\xi^2 + h\eta + k\zeta - \xi^2\sum\frac{h'^2}{2a'} = 0 \tag{1ter}$$

Nous tirerons ε, η et ζ en fonction de ξ^2 du système (1ter), (2), (3).
On trouve ensuite :

$$\omega J - \omega_0 J_0 = \omega_0(\beta\eta + \gamma\zeta + \alpha\xi^2) + \frac{\varepsilon}{\omega_0}J_0$$

Le calcul de β, γ, b, c, h, k ne présente aucune difficulté ; celui de α n'en présente pas de très grande.
C'est surtout sur le calcul de a_1 et de $\sum\frac{h'^2}{a'}$ que nous devons insister.

Calcul de a_1

Je décompose la masse attirante en trois parties. 1° ellipsoïde, 2° la simple couche, c'est-à-dire le bourrelet supposé ramené à la surface de l'ellipsoïde (en suivant les lignes trajectoires orthog. des surfaces homofocales $\mu = const$, $\nu = const$), 3° la couche supplém. dont l'attraction est égale à celle du bourrelet moins celle de la simple couche.
Alors a_1 se décomposera de 4 termes :

1° terme dû à l'action mutuelle de l'ellips. et de la couche suppl.
2° [terme dû] à la force centrifuge.
3° [terme dû] à l'action mutuelle de la simple couche et de la couche suppl.
4° [terme dû] à l'action de la couche suppl. sur elle même,

Pour le 1er terme, soit V le potentiel de l'ellipsoïde, V_0 sa valeur (μ et ν étant le même) à la surface de l'ellipsoïde, $d\tau$ l'élément de volume. Le 1er terme provient de

$$\int (V - V_0) d\tau$$

Or $d\tau$ c'est à un facteur constant près

$$d\rho d\mu d\nu(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2) = H d\rho d\mu d\nu$$

J'appelle ρ_0 la valeur de ρ qui correspond à notre ellips.
Je pose $\rho = \rho_0 + \sigma$ et je développe suivant les puissances de σ :

$$(V - V_0)H = K_0 + K_1\sigma + K_2\sigma^2 + \cdots$$

Le calcul des coëff. du dévelop. ne serait pas très difficile. La valeur de σ correspondant à l'épaisseur de la couche sera σ_0. On serait ramené finalement à une quadrature simple $\iint d\mu d\nu A\sigma^4$; où σ serait proportionnelle à l'épaisseur de la poire (3d zônal harmonique) et où A serait une fonction assez simple de μ et de ν dépendant des 3 1ers coëff. K_0, K_1, K_2, K_3. Le 2d terme se ramènerait sans difficulté à une quadrature analogue.
Le calcul du 3e serait tout à fait analogue à celui du 1er seulement V représenterait le potentiel de la simple couche au lieu de celui de l'ellips.
Le 4e terme pourrait se calculer par le procédé que vous indiquez.
Nous pouvons réduire notre couche supplém. à une *double-couche* dont la densité est prop. à σ^2. Si u est le potentiel de *cette double couche*, ce que nous avons à calculer dépend de

$$\int \frac{du}{dn}\sigma^2 d\omega$$

$d\omega$ étant l'élément de surface et $\frac{du}{dn}$ l'attraction normale due à cette double couche.
Supposons que σ^2 ait été développé en série harmonique

$$\sigma^2 = \sum AMN$$

On aura à un facteur constant près $4r\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$ ou quelque chose comme cela :

$$\frac{du}{dn} = \sum \frac{AR'S'}{2n+1} lMN$$

d'où

$$\int \sigma^2 \frac{du}{dn} d\omega = \sum A^2 \frac{R'S'}{2n+1}$$

mais le procédé de la quadrature mécanique doit être plus rapide que celui de la série harmonique.

Calcul de $\sum \frac{h'^2}{a'}$

Pour calculer les coëff. h', voici ce qu'il faudrait faire ; supposons deux bourrelets, le 1er d'épaisseur σ prop. à la 3d zonal, le 2d d'épaisseur

$$\sigma' = \sum \xi' l M N$$

Il faut en négligeant ξ^2 calculer l'accroissement du potentiel quand on ajoute ce 2d bourrelet. C'est encore

$$\int V d\tau'$$

$d\tau'$ élément de volume du 2d bourrelet, V potentiel avant l'addition du 2d bourrelet. Mais V se décompose en 3 parties : 1° ellipsoïde 2° simple couche 3° couche supplémentaire. Soit :

$$V = V' + V'' + V'''$$

Les expressions de V' et de V'' sont bien connues ; quant à V''' c'est le potentiel u de notre double couche dont nous avons parlé plus haut.
Je développerai V' et V'' suivant les puissances de $\rho - \rho_0$; j'aurai alors

$$\int V d\tau' = \int \sigma' d\omega \left[\frac{d^2 V'}{d\rho^2} \sigma^2 + \frac{dV''}{d\rho} \sigma^2 + u \right]$$

Il importe de préciser ici que je prends u du côté *extérieur* à la double couche.
Posons :

$$\frac{d^2 V'}{d\rho^2} \sigma^2 + \frac{dV''}{d\rho} \sigma^2 + u = \xi^2 \varphi$$

et développons φ en série harmonique :

$$\varphi = \sum BMN.$$

Soit $\int l M_i^2 N_i^2 d\omega = \Omega_i$.
Alors :

$$\int V d\tau' = \xi^2 \sum \xi' \Omega B.$$

Donc : $h' = \Omega B$.
Ce dont j'ai besoin c'est de $\sum \frac{h'^2}{a'}$.

Or a' à un facteur constant près c'est : $\Omega_i\left(\frac{R_1S_1}{3}-\frac{R_iS_i}{2n+1}\right)$.

$$\sum\frac{h'^2}{a'}=\sum\frac{B^2\Omega}{\frac{R_1S_1}{3}-\frac{R_iS_i}{2n+1}}$$

Posons :

$$\psi=l\sum\frac{BMN}{\frac{R_1S_1}{3}-\frac{R_iS_i}{2n+1}}=l\sum CMN$$

où

$$C=\frac{B^i}{\frac{R_1S_1}{3}-\frac{R_iS_i}{2n+1}}$$

Le potentiel d'une simple couche de densité ψ est à un facteur constant près :

$$\varpi=\sum CMN\frac{R_iS_i}{2n+1}$$

d'où l'éq. puisque

$$\left(\frac{R_1S_1}{3}\right)=gl$$

$$g\psi-\varpi=\varphi$$

ou quelque chose comme cela.
Je crois que cette éq. peut aider à déterminer ψ par approxim. successives. Si nous avons ψ alors

$$\sum\frac{h'^2}{a'}=\int\psi\varphi d\omega.$$

Tout cela est bien vague et les calculs restent fort longs, mais je réfléchirai de temps en temps à la question et je vous ferai part du résultat de mes réflexions. J'ai peut être fait des fautes de calcul surtout dans les coëff. Vous les vérifierez aisément.
Pardon de vous avoir écrit une si longue lettre et croyez à mon sincère dévouement.
Poincaré

ALS 11p. CUL-DAR251.4915, Cambridge University Library.

15.20 Poincaré à Darwin

[Entre le 3 et le 8 août 1901]

Mon cher collègue,
J'ai reçu vos deux lettres[70] que j'ai lues avec le plus grand intérêt ; je vais les étudier avec plus de détail et je vous dirai dans quelques jours les nouvelles réflexions qu'elles m'auront suggérées.

70. Il s'agit des lettres de Darwin à Poincaré du 31.07.1909 (§ 3-15-17), et du 03.08.1901 (§ 3-15-18). La dernière lettre de Poincaré à Darwin (§ 3-15-19) s'est croisée avec ces deux lettres de Darwin.

Mais pour le moment il y a un point qui me frappe.
Il me semble qu'il manque encore quelque chose pour calculer le m[oment] of m[omentum] de la poire.
Je ne me rappelle plus bien les notations que j'ai employées dans ma dernière lettre, mais il me semble que j'avais trouvé une série qui s'introduisait dans l'expression de ce m[oment] of m[omentum] et qui était de la forme suivante

$$\sum \frac{h_i^2}{S_i} \tag{1}$$

les h_i étant les coëfficients du développement de σ^2 (σ épaisseur de la couche) suivant les harmoniques d'ordre i, et S_i étant le coëff. de stabilité correspondant.[71]
Outre cette série (1) s'introduisaient d'autres séries plus simples tout à fait équivalentes à ce que vous appelez E_1, E_2, E_3, E_4, etc.
Je vois donc dans vos formules l'équivalent de ces dernières séries mais je ne vois pas celui de la série (1) qui est celle dont le calcul est le plus délicat.
Or je ne vois pas bien comment vous pouvez éviter l'introduction de cette série (1).
Je ne suis pas sûr de me bien faire comprendre, mais peut-être en vous reportant à ma dernière lettre,[72] verrez-vous ce que je veux dire.
Veuillez croire à mes sentiments les plus dévoués et vous charger de transmettre à Madame Darwin mes respectueux hommages.
Poincaré

Jusqu'au 15 septembre à Arromanches (Calvados).

ALS 3p. CUL-DAR251.4911, Cambridge University Library.

15.21 Darwin à Poincaré

Aug. 8.01
NEWNHAM GRANGE–CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
I am glad you have found my letters worthy of attention.[73] I feel more & more confident of my correctness. There is [a] portion of your letter which I could not follow & therefore I am not clear of the physical meaning of your h'.[74] I feel no doubt that I have included all the sources of energy & moment of inertia and therefore I believe your h' is included. The h' has its counterpart in the problem I have solved & the result is correct in that case. How can it be that I have omitted [it] in the pear problem?

71. Il s'agit de la série $\sum \frac{h'^2}{a'}$ de la lettre de Poincaré (§ 3-15-19), ou $\sum \frac{Q_i}{2G_i}$ dans la notation de la version publiée, somme dont l'évaluation dépend d'une infinité d'intégrales (Poincaré 1902d, 368).
72. Voir Poincaré à Darwin (§ 3-15-19).
73. See Poincaré to Darwin (§ 3-15-20), where Poincaré acknowledges Darwin's two letters to Poincaré, of 31.07.1901 (§ 3-15-17) and 03.08.1901 (§ 3-15-18).
74. See Poincaré to Darwin (§ 3-15-19).

I find it very hard to look at the problem through your eyes, as I feel as urgent a necessity to continually keep the physical meaning before me, as you (I fancy) feel it a relief to dismiss it from your mind & betake yourself to analysis.
Nevertheless I have no doubt that you will arrive at the truth, & I feel pretty confident you will agree with me.
I find that it is unnecessary to regard the shift in the centre of inertia of the pear because the terms involved are of the fourth order.
I have gone a long way towards the determination of the mass of the layer – which corresponds to the determination of a in terms in a_0 – and I have no words to describe the immensity of the task.
I have not made an exact estimate but I think there will be 20 or 30 integrals to evaluate by quadratures. The integrals are all of this type

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\theta d\theta}{(1-k^2\sin^2 y\sin^2\theta)^p\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

and there is another group of the type

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n}\phi d\phi}{(1+k'^2\tan^2 y\cos^2\phi)^p\sqrt{1-k'^2\cos^2\phi}}$$

These will have to be found for $n = 0, 1, 2, 3, 4$ combined with $p = 0, 1, 2, 3$. It would seem that there are then 40 integrals of this kind.
There are others which I suspect will fall into the same type but I have not got so far yet.
Have I patience for the task? I suppose I shall not feel contented until I have done it – and that is the only reason I have for thinking I shall persevere.
I shall be much interested to hear what you think, altho' as I have said we look at this thing from different points of view. Shall I return your original letter.
Yours sincerely,
G. H. Darwin

ALS 4p. Collection particulière, Paris.

15.22 Poincaré à Darwin

[Entre le 8 et le 12.08.1901]
M. Poincaré, Arromanches (Calvados)

Mon cher collègue,
Je n'ai pas pris copie des lettres que je vous ai adressées[75] et les quelques notes que j'avais à ce sujet sont restées à Lozère.
Il en résulte que je n'ai plus qu'un souvenir assez vague des notations que j'ai employées moi-même et des calculs qui sont quelquefois assez compliqués.

75. Voir Poincaré à Darwin (§§ 3-15-19, 3-15-20).

Si vous avez conservé mon avant-dernière lettre, celle qui est assez longue et contient de longs calculs, pourriez-vous me l'envoyer ici ; j'en ferais prendre copie et je vous la renverrais aussitôt.[76] Je pourrais alors la comparer aux vôtres et voir si nous sommes réellement en désaccord, ainsi qu'il me semble à première vue.

Je vous écrirais ensuite plus en détail avec un petit commentaire de ladite lettre en insistant sur la signification physique de chaque terme, et sur la comparaison entre les notations que vous employez et les miennes.[77]

En ce qui concerne les intégrales elliptiques, si elles correspondent à une même valeur de modules, il me semble qu'il y a entre elles des relations de récurrence bien connues qui peuvent en faciliter le calcul.

Quant à la première d'entre elles,[78] d'où les autres se déduisent par récurrence je vous recommanderais les formules données par Schwarz d'après Weierstrass.

Votre bien dévoué collègue,

Poincaré

ALS 3p. CUL-DAR251.4909, Cambridge University Library.

15.23 Darwin à Poincaré

Aug. 12. 01
NEWNHAM GRANGE–CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,

I enclose your former letter.[79] I do not understand your "double couche".

With regard to the integrals they are obviously all reducible to elliptic integrals but the coeffts become complicated. In applying them it is necessary to separate the variables θ and φ & this leads to a terrible complication. I have worked for a long time at the mass of the layer to cubes of small quantities. I found that I could not get it simpler than in a form involving 44 integrals occurring in pairs each of which will involve E, F, Π. I dare say I am very clumsy at this work but I have given up that attempt & am now arranging the work quite otherwise but less accurate. It will remain very heavy but within the limits of patience.

I am still confident of my correctness & my confidence is largely due to the fact that the problem I have solved is done correctly & the analogy is perfect.

This is my procedure.

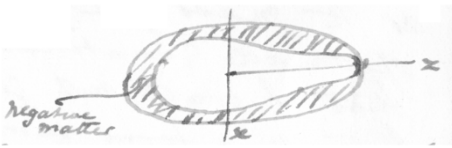
76. Voir Poincaré à Darwin (§ 3-15-19), renvoyée par Darwin avec sa lettre du 12.08.1901 (§ 3-15-23).

77. Voir Poincaré à Darwin (§ 3-15-25).

78. C'est-à-dire, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\theta d\theta}{(1-k^2\sin^2 y\sin^2\theta)^p\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$, voir Darwin à Poincaré, 08.08.1901 (§ 3-15-21).

79. Poincaré had asked Darwin to return his letter (§ 3-15-19), of which he had no copy; see Poincaré to Darwin (§ 3-15-22).

Let ω^2 be sq. of ang. vel. of the critical Jacobian and $\omega^2 + \varpi^2$ that of the pear. Define the pear as an ellipsoid, touching the stalk of the pear, similar to the critical Jacobian, with a layer of negative matter $-\rho$ lying on it.



Let ω^2 be sq. of ang. vel. of the critical Jacobian and $\omega^2 + \varpi^2$ that of the pear. Define the pear as an ellipsoid, touching the stalk of the pear, similar to the critical Jacobian, with a layer of negative matter $-\rho$ lying on it.
Let d be distance of center of inertia of pear from origin.
Let $\int_e dv$, $\int_\ell dv$, denote integration thro' ellipsoid & thro' layer and $\int_{e-\ell} dv$ integration thro' the pear.
The "lost" energy is

$$E = \frac{1}{2}\int_{e-\ell} V_{e-\ell}\rho dv + \frac{1}{2}(\omega^2 + \varpi^2)\int_{e-\ell}[y^2 + (z-d)^2]dv$$

Now[j]

$$\frac{1}{2}\int_{e-\ell} V_{e-\ell}\rho dv = \frac{1}{2}\int_e V_e \rho dv - \int_\ell V_\ell \rho dv + \frac{1}{2}\int_\ell V_\ell \rho dv$$

$$\int_{e-\ell}\rho[y^2 + (z-d)^2]dv = \int_e \rho(y^2+z^2)dv - \int_\ell \rho(y^2+z^2)dv - \int_{e-\ell}(2zd - d^2)\rho dv$$

But

$$\int_{e-\ell} z\rho dv = Md, \qquad \int_{e-\ell}\rho dv = M.$$

Therefore

$$\int_{e-\ell}(2zd - d^2)\rho dv = Md^2$$

Hence

$$\begin{aligned} E = {} & \frac{1}{2}\int_e V_e\rho dv + \frac{1}{2}(\omega^2)\int_e (y^2+z^2)\rho dv \\ & - \int_l \left[V_e + \frac{1}{2}\omega^2(y^2+z^2)\right]\rho dv + \frac{1}{2}\int_\ell V_\ell \rho dv \\ & + \frac{1}{2}\varpi^2 \int_{e-\ell}(y^2+z^2)\rho dv - \frac{1}{2}Md^2(\omega^2+\varpi^2) \end{aligned}$$

d is clearly at least of second order & d^2 is of fourth order & negligible.[k]
Suppose that the volume of the pear is equal to $\frac{4}{3}\pi\rho k_0^3 abc$, where

$$a = \frac{\cos y}{\kappa \sin y}, \qquad b = \frac{\sqrt{1 - \kappa^2\sin^2 y}}{\kappa \sin y}, \qquad c = \frac{1}{\kappa \sin y}$$

j. We insert ρ on the left-hand side and in the final term on the right-hand side of the first equation.

k. Variante: "…fourth order & negligible. ~~The first two terms in E are stationary because the ellipsoid is a Jacobian~~".

Then y and κ have definite numerical values depending on the eccentricities of the principal sections of the critical Jacobian Ellipsoid, so that a, b, c have known numerical values.
Then it is easy to prove that

$$\frac{1}{2}\int_e \rho V_e dv + \frac{1}{2}\omega^2 \int_e \rho(y^2+z^2)dv$$
$$= \frac{8}{15}\pi^2\rho^2 a^3 b^3 c^3 \cdot k^5 \left[\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u+a^2 \cdot u+b^2 \cdot u+c^2}} + \frac{b^2+c^2}{abc}\cdot\frac{\omega^2}{4\pi\rho}\right]$$

In this expression k is such that kc is equal to the distance from the origin at centre of the ellipsoid to the end of the stalk of the pear, and it is therefore a function of the unknown parameter or parameters which define the pear. The only variable in this expression is k, all the other quantities including ω having definite numerical values.
I do not assert that the critical Jacobian is the ellipsoid which most nearly resembles the pear, but I assert that any additional harmonic terms of the second degree must have coefficients of the second order in reference to the parameter which defines the pear.
The pear will also require harmonics of the 1st and 4th degrees to be fully represented, but these harmonics have coefficients of at least the second order, and in the energy only of the fourth order.
We have (as in the case of the Maclaurin ellipsoid the general principle that in developing the energy we need only regard terms of the first order, but the coefficients of those terms must be developed as far as cubes of small quantities in the expression for the energy.
The whole energy *as far as material* is then:

$$E = \frac{8}{15}\pi^2\rho^2 a^3 b^3 c^3 .k^5 \left[\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u+a^2.u+b^2.u+c^2}} + \frac{b^2+c^2}{abc}\cdot\frac{\omega^2}{4\pi\rho}\right]$$

(Energy of ellipsoid with rotation ω within itself)

$$-\int_l \left(V_e + \frac{1}{2}\omega^2(y^2+z^2)\right)\rho dv$$ (energy of ellipsoid with rotation ω and layer)

$$+\frac{1}{2}\int_l V_l \rho dv$$ (energy of layer within itself)

$$+\frac{1}{2}\overline{\omega}^2 \int_{e-l} \rho(y^2+z^2)dv$$ (additional kinetic energy of pear due to change of rotation)

All these quantities are expressible in terms of e and of k, and by expressing k in terms of k_0 we get the whole of E expressed [in] terms of e.
Only terms of first order are retained but those terms are developed as far as e^3.
By differentiating with respect to e we shall get ϖ^2 in terms of e.
In the case of Maclaurin's ellipsoid of which I have given the solution, ω is zero so that the terms become:

1 Energy of sphere with itself
2 Energy of sphere with layer

3 Energy of layer with itself
4 Kinetic energy of ellipsoid.
Pray excuse the untidiness of this letter.
It will interest me much to hear what your opinion is.
Yours very Sincerely.
G. H. Darwin

ALS 6p. Collection particulière, Paris 75017.

15.24 Poincaré à Darwin

[Après le 12.08.1901]

Mon cher collègue,
J'ai l'honneur de vous renvoyer ci-joint la lettre que vous avez eu la bonté de me communiquer et dont j'ai fait prendre copie.[80]
Je vous enverrai d'ici à quelques jours le commentaire que je vous ai promis avec la comparaison des notations.
Une question cependant :
Qu'est-ce au juste que vous appelez e, dans votre dernière lettre.
Votre bien dévoué confrère,
Poincaré

ALS 1p. CUL-DAR251.4910, Cambridge University Library.

15.25 Poincaré à Darwin

[Entre le 12 et le 27.08.1901]

Mon cher collègue,
Je commence le commentaire annoncé.[81]
D'abord le mot *double-couche*. Je considère deux surfaces, attirantes simples très peu différentes l'une de l'autre, et de telle façon que les masses de deux éléments correspondants des deux surfaces soient égales et de signe contraire.
C'est ce que j'appelle une *double couche*. Les propriétés de ces doubles couches ont été étudiées par plusieurs auteurs et spécialement par C. Neumann.[82]

Considérons alors l'action de notre couche supplémentaire très mince ; mais non infiniment mince comprise entre les deux surfaces limite AB et $A'B'$.

80. Voir Poincaré à Darwin (§ 3-15-22), où Poincaré demande à Darwin de lui renvoyer sa lettre (§ 3-15-19) afin d'en prendre copie.
81. Voir Poincaré à Darwin (§ 3-15-22).
82. Carl Neumann (1832–1925).

Comme 1re approx. je suppose toute la masse concentrée sur AB, c'est ce que j'appelle la *simple couche*. Comme 2de approx. je la suppose concentrée sur $A''B''$ à moitié chemin entre AB et $A'B'$, c'est ce que vous faites également.
Il y a donc un terme correctif qui est la différence de l'attraction des deux surfaces AB et $A''B''$, c'est ce que j'appelle la *double couche*.
Maintenant pourquoi dis-je que la densité de cette double couche est prop. à σ ?
σ c'est la distance des deux surfaces AB, $A'B'$.
La densité d'une double couche est par définition, le produit de la distance des 2 surfaces attirantes par la densité sur l'une d'elles.
Cette définition se justifie, parce que si nous doublons cette distance et que la densité sur chacune des surfaces attirantes devienne 2 fois plus petite, l'effet de la double couche ne change pas. Or la distance des 2 surfaces AB et $A''B''$ est prop. à σ ; la densité sur la surface AB est prop. à σ. Donc C.Q.F.D.
Donc je reprends le commentaire.
Je partage la couche en trois parties de la façon suivante :
J'appellerai poire approchée, une figure obtenue en portant sur les normales à un ellipsoïde des quantités prop. à la 3d *zonal harmonic* (ou plutôt je compte les longueurs non sur les normales, mais sur les lignes de courbure des hyperboloïdes homofocaux à l'ellips. lesquelles lignes sont normales à l'ellips. et je prends les longueurs de façon que les volumes dv soient prop. à la 3d *zonal.*)
Alors la poire réelle différera de la poire approchée de quantités du 2d ordre.
Soit alors E_0 l'ellipsoïde de Jacobi de bifurcation, E l'ellipsoïde qui se rapproche le plus de la poire réelle, P_0 la poire approchée qui se rapproche le plus de la poire réelle, P la poire réelle.
Je divise la couche comprise entre E_0 et P en trois parties :

1re couche entre E_0 et E
2e couche entre E et P_0
3e couche entre P_0 et P

l'épaisseur de la 1re et de la 3e couches est du 2d ordre, celle de la 2e couche du 1er ordre.
Les quantités η et ζ qui définissent l'épaisseur de la 1re couche sont donc du 2d ordre de même que les quantités ξ' qui définissent l'épaisseur de la 3e couche. Quant à ξ qui définit l'épaisseur de la 2e couche et qui correspond, *je crois*, à ce que vous appelez e ; elle est du 1er ordre.
Nous avons alors W qui représente l'énergie totale pour la vitesse angulaire ω_0 ; elle se compose de l'énergie de gravitation U *(lost energy)* et de l'énergie cinétique $\frac{\omega_0^2}{2}J$.
J'ai développé ainsi :

$$W = W_0 + b\eta^2 + c\zeta^2 + \sum a'\xi'^2 + a_1\xi^4 + h\xi^2\eta + k\xi^2\zeta + \sum h'\xi^2\xi'.$$

Le développement est poussé jusqu'au 4e ordre.
Voici la signification de chaque terme :

1° W_0 énergie totale de E_0.
2° Les termes du 1er degré sont nuls parce que E_0 est une figure d'équilibre.
3° $b\eta^2 + c\zeta^2$ (4e ordre) différence entre l'énergie de E et celle de E_0.

4° $\sum a'\xi'^2$ (4e ordre) différence entre l'énergie de P et celle de P_0.

5° $a_1\xi^4$ (4e ordre) différence entre l'énergie de P_0 et celle de E_0 en supposant que l'épaisseur de la 1re et [de] la 3e couche[s] devenant nulle, celle de la 2e couche reste la même.

6° $h\xi^2\eta + k\xi^2\zeta + a_1\xi^4$ (4e ordre) différence entre l'énergie de P_0 et celle de E en supposant l'épaisseur de la 3e couche nulle.

Les termes $h\xi^2\eta + k\xi^2\zeta$ comprennent :

1° l'énergie relative de gravitation de la 2e couche par rapport à la 1re.

2° l'accroissement de l'énergie cinétique de la 2e couche dû à l'accroissement de son moment d'inertie dû lui-même à la présence de la 1re couche ; la 1re couche étant en effet supposée *sous* la 2de, cette 2e se trouve pour ainsi dire poussée plus loin de l'axe de rotation par l'interposition de la 1re couche.

7° $\sum h'\xi^2\xi' + a_1\xi^4$ (4e ordre) différence entre l'énergie de P_0 et celle de E (ou de P) en supposant la 1re couche nulle de sorte que $\sum h'\xi^2\xi'$ est l'énergie relative de gravitation de la 2e couche par rapport à la 3e.

Je n'ai pas ici à m'occuper de la modification du moment d'inertie de la 2de couche, qui peut être due à la présence de la 3e couche, parce que je suppose cette 3e couche *sur* la 2de. Maintenant pourquoi est-ce que je mets la 3e couche *dessus* et la 1re *dessous* c'est ce qu'on comprendra mieux plus loin.
En résumé la différence entre l'énergie de P_0 et celle de E est :

$$a_1\xi^4 + h\xi^2\eta + k\xi^2\zeta + \sum h'\xi^2\xi'.$$

On remarquera :

1° L'absence des termes en ξ^2 due à ce que pour l'ellipsoïde E_0 le coeff. de stabilité correspondant doit s'annuler.

2° L'absence des termes en ξ^3 due à la symétrie ; l'énergie ne doit pas changer quand on change ξ en $-\xi$.

3° L'absence des termes en $\xi\eta$, $\xi\zeta$, $\xi\xi'$ etc. ; elle tient à ce que dans les termes du 2d degré, l'intégrale

$$\int lMNM_1N_1d\omega$$

étant nulle, les coeff. des termes rectangles disparaissent.

Dans l'expression de J, comme J entre avec le facteur ε je puis m'arrêter au 2d ordre et écrire :

$$J = J_0 + \beta\eta + \gamma\zeta + \alpha\xi^2.$$

J_0 est le moment d'inertie de E_0.

$\beta\eta + \gamma\zeta$ est la différence des moments de E et de E_0, ou le moment d'inertie de la 1re couche,

$\alpha\xi^2$ est le moment d'inertie de la 2de couche.

Le moment d'inertie de la 3e couche est nul ; il faudrait tenir compte des termes en ξ' ; mais comme $y^2 + z^2$ ne contient que des harmoniques d'ordre 0 et 2, le moment correspondant s'annulerait.

Un peu plus loin j'arrive au calcul de a_1, et je pose

$$a_1 = a_1' + a_1'' + a_1''' + a_1^{\text{iv}};$$

a_1' est dû à l'action mutuelle de l'ellips[oïde] E et de la couche supplémentaire.

Voici ce que j'appelle la couche supplémentaire, ce n'est pas tout à fait la même chose que la double couche.

C'est la différence entre l'attraction de la couche réelle d'épaisseur petite mais finie, comprise entre les deux surfaces AB et $A'B'$ et l'attraction de cette même couche supposée concentrée sur la surface AB.

Ce n'est pas tout à fait la même chose que la *double couche*, la différence est du 3e ordre.

a_1'' est dû à la force centrifuge.

a_1''' à l'action mutuelle de la simple couche et de la couche supplémentaire.

a_1^{iv} à l'action de la couche supplémentaire (qui ici peut être réduite à la double couche) sur elle même.

Comparons avec votre expression de E.[83] Votre E (qui dans ma notation serait $W + \varepsilon J$), vous le décomposez en 4 parties :

1° *Energy of ellipsoïde with rotation ω with itself.* C'est : $W_0 + b\eta^2 + c\zeta^2$.

2° *Energy of ellipsoïd with rotation ω with layer.* C'est $a_1'\xi^4 + a_1''\xi^4 + h\xi^2\eta + k\xi^2\zeta$.

3° *Energy of layer with itself.* C'est : $a_1'''\xi^4 + a_1^{\text{iv}}\xi^4 + \sum h'\xi^2\xi'$

4° *Additional Kinetic Energy* C'est εJ.

À ce compte, nous retrouverions tous les mêmes termes ; il est vrai que vous ne prenez pas le même ellipsoïde E que moi ; mais cela ne fait rien.

Mais il me semble qu'il y a certains termes dont vous entendez ne pas tenir compte, par exemple $\sum h'\xi^2\xi'$. Vous dites : *Only terms of first order are retained, but those terms are developed as far as e^3.*[84]

Je comprends que ce que vous appelez *terms of first order*, ce sont ceux qui donnent des termes du 2d ordre dans W (que vous appelez E).

Dois-je alors entendre que vous laisserez de côté le terme $\sum h'\xi^2\xi'$ parce qu'il est du 4e ordre, mais que vous conserverez le terme $a_1\xi^4$ qui est aussi du 4e ordre parce que vous le considérerez comme provenant de termes du 1er ordre, dont le coefficient aurait été développé jusqu'à e^3.

J'avoue que je ne comprends pas très bien pourquoi vous négligez un terme et pas l'autre, et si vous ne négligez pas le terme $\sum h'\xi^2\xi'$ comment vous calculez ξ'.

C'est de là que provient notre désaccord.

Je voudrais que vous me disiez si ce désaccord est réel ou si j'ai mal compris votre pensée.

J'avais écrit tout le commencement de [cette] lettre depuis longtemps et je voulais le compléter par quelques considérations sur le calcul des coefficients.

Mais je vois que ce serait très long, d'autant que je me demande maintenant si je n'aurais pas avantage à mettre ma 1re couche sur la 2de et à la confondre avec la 3e.

83. Voir Darwin à Poincaré, 12.08.1901 (§ 3-15-23).

84. Voir Darwin à Poincaré, 12.08.1901 (§ 3-15-23).

Je me décide donc à vous envoyer cette lettre telle quelle et je commence la rédaction d'un petit mémoire que je vous enverrai comme papier d'affaires.
Veuillez en attendant me dire si j'ai été plus clair cette fois ou s'il y a encore des points qui vous semblent obscurs. Je chercherai alors à les éclaircir.
Votre bien dévoué collègue,
Poincaré

ALS 12p. CUL-DAR251.4914, Cambridge University Library.

15.26 Darwin à Poincaré

Aug. 25.01
NEWNHAM GRANGE–CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
Since I last wrote I have continued to work at my subject & have met with unexpected success. The most troublesome integrals disappear automatically and a number of others can be obtained rigorously without elliptic integrals. I have now arranged the work in a very convenient form & have started a professional computer at the integrals. The work will not be very long. It would be tedious though not difficult to express them all in E and F.
I find also that, by proper interpretation of the symbols and change of third harmonic to second, this result is applicable to this initial Jacobian considered as a deformation of an ellipsoid of revolution. I expect to have the result in a day or two, and if it is correct it seems to me absolutely impossible that I can be wrong in the problem of the pear.
It has been a very troublesome piece of analysis. I found it convenient to join part of my E_2 to E_1, then to join the other part to E_3; to join E_5 with part of E_4. The remaining part of E_4 is deducible by means of E_3. All this was not discovered until I had made many trials & failures.
I look forward to your letter with much interest.
Yours sincerely,
G. H. Darwin

ALS 3p. Collection particulière, Paris 75017.

15.27 Darwin à Poincaré (fragment)

Aug. 27. 1901
NEWNHAM GRANGE–CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
I have your letter and although I have not yet studied it as much as it deserves I hasten to write to you. [85] I quite understand the double layer now. [86] I see it involves the use of what

85. Poincaré to Darwin, ca. 13.08.1901 (§ 3-15-25).
86. Darwin refers here to Poincaré's "double couche".

we call a "doublet" layer of surface density. I have used the same kind of idea in working out my result without using the word.
I see now where our disagreement comes in and it makes me no less confident in my correctness. In fact the very key of my method consists in the neglect of those terms and I believe it to be perfectly justifiable. [87] In the simple problem of the sphere and ellipsoid which I sent you in the first solution I wrote out the equation to the ellipsoid explicitly in harmonics and had a certain function of e as the coefficient of the fourth harmonic. [88] That coefficient corresponds to your ξ'. [89] In a second letter I applied the same method on the supposition that this result was unknown and I think I wrote the coefficient as f. [90] All I was supposed to know was that f is of order e^2 at least. I worked the whole through retaining f (and g for the sixth harmonic) and the analysis was pretty long. (I did not send this). I was surprised when I got to the end to find that f and g disappeared. I then looked round to find why they disappeared and found, as I believe, the reason. f being of order e^2 the energy with itself & with the sphere is proportional to f^2 and therefore to e^4, and negligible *ex hypothesi* (so also for g).
It only remains to consider the energy corresponding to f in combination with the layer. Now f being of order e^2 and the layer of order e, it follows that their mutual energy is of order e^3. Hence we may regard the layer as concentrated. Since the layer & the f term are of different orders of harmonics their mutual energy vanishes.
Hence f does not come in at all in the E terms. Also it does not enter in the moment of inertia since it is a harmonic of the fourth order. [91] The same considerations *mutatis mutandis* apply to the pear.
I had written thus far when I returned to your letters again and I think I see that you are developing to one term higher than I do. At no stage do I attempt to retain fourth powers of e. In my final expression I have a single term dependent on e^3 in E, the term in e^2 vanishing because of the bifurcation, and a single term dependent on e^2 in the moment of inertia say. [92] $Ce^3 + \frac{\varpi^2}{4\pi\rho} De^2$ for the whole, where the actual angular (velocity)^2 of the pear is $\omega^2 + \varpi^2$. Making this f$^{\text{n}}$ stationary I have:

$$3Ce^2 + 2\frac{\varpi^2}{4\pi\rho} De = 0$$

one root is $e = 0$, leading back to Jacobian. [93] The other is

$$\frac{\varpi^2}{4\pi\rho} = -\frac{3}{2}\frac{C}{D}e$$

This is what I started out to get.

87. Darwin came to agree with Poincaré's view; see Darwin to Poincaré, 01.09.1901 (§ 3-15-31.
88. Darwin did not send these detailed formulæ; see Darwin to Poincaré, 31.07.1901 (§ 3-15-17).
89. By ξ' Poincaré denotes an infinity of different coefficients, including the coefficient of the fourth harmonic $\mathfrak{P}_4(\mu)$.
90. Darwin to Poincaré, 03.08.1901 (§ 3-15-18.
91. See Darwin to Poincaré, 06.06.1901 (§ 3-15-13).
92. Cf. the annotation of Poincaré to Darwin (§ 3-15-19).
93. Here e is proportional to the thickness of the layer distinguishing the pear from the Jacobian ellipsoid.

I do not obtain any higher approx. to the shape of the pear. I think you will do so — if the work is carried out.
Does this clear up our difficulties at all?
If you write your paper should you like to let it appear in the *Phil. Trans.* along with mine?[94] I think it would be convenient in that way and I should like it to be so very much. I hope to get my work finished in the autumn.

AL 4p. Collection particulière, Paris 75017.

15.28 Poincaré à Darwin

[Après le 25.08.1901]

Mon cher Collègue,
Ce qui m'étonne dans votre lettre, c'est que je croyais avoir démontré que de tous les coëfficients de stabilité des harmoniques du 3e degré, le seul qui puisse s'annuler pour un ellipsoïde de Jacobi est celui du third zonal harmonic.[95]
Je crois qu'il y aurait lieu de vérifier – ou bien ai-je mal compris ce que vous m'avez dit.
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 1p. CUL-DAR251.4966, Cambridge University Library.

15.29 Poincaré à Darwin

[Après le 28.08.1901]

Mon cher collègue,
Merci de votre lettre ; mais je ne crois pas que vous ayez raison de vous arrêter au 3e ordre.[96]
Voici en effet ce qui va se passer :
Vous conservez dans l'énergie :

$$Ce^3 + \frac{\varpi^2}{4\pi\rho} De^2$$

d'où vous tirez :

$$\frac{\varpi^2}{4\pi\rho} = -\frac{3}{2}\frac{C}{D}e.$$

Mais dans le cas de la poire, C va être nul, donc ϖ^2 de l'ordre de e^2.
D'autre part

$$J = J_0 + De^2.$$

94. Poincaré agreed; see Darwin (1902b), and Poincaré (1902d).
95. Voir Darwin à Poincaré, 27.08.1901 (§ 3-15-27).
96. Poincaré répond à la lettre de Darwin du 27.08.1901 (§ 3-15-27).

Donc

$$\sqrt{\omega^2 + \varpi^2}\,J - \omega J_0$$

sera de l'ordre de e^2 ; si nous voulons savoir le signe de cette expression, il faut que nous calculions ϖ^2 jusqu'à e^2 et par suite E jusqu'à e^4.
Quant au travail que j'ai commencé, je le joindrai volontiers au vôtre si je l'achève jusqu'au bout. [97]
Sinon, je vous enverrai ce que j'en aurai écrit à titre d'indications.
Votre bien dévoué collègue,
Poincaré

ALS 2p. CUL-DAR251.4916, Cambridge University Library.

15.30 Darwin à Poincaré

Sep. 1. 01
NEWNHAM GRANGE – CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
In order to save you trouble I hasten to make confession. [98] My work is right but insufficient. It is necessary to include 4th powers of e so that you are right. I see this in the following way. If I change the sign of e, I change the stalk into the blunt end of the pear & vice versa. This cannot change the value of E and hence e^3 must be absent. I found this to be the case with the transition from the Maclaurin to the Jacobian Ellipsoid, but I was delayed by (my usual) small algebraic mistake which prevented the e^3 term from vanishing. In this case the change of sign of e changes the azimuth of the Jacobian and the same result follows. But in the case of the sphere and Maclaurin the change of sign of e changes oblate into prolate ellipsoid and therefore E is not the same in the two cases.
I must admit that at present I do not see how to calculate the term in e^4 in my way. Your method will probably indicate it to me. But the calculation of the e^3 term was so troublesome that I suppose the e^4 term will be enormously worse. I do not think I can attempt it now.
I had written thus far when I received your letter in which you point out the same thing. I am sorry to have given you so much trouble.
I shall be much interested to see what you write.
I remain, Yours very sincerely,
G. H. Darwin

ALS 3p. Collection particulière, Paris 75017.

97. Darwin a proposé de faire paraître son mémoire et celui de Poincaré dans le même numéro des *Philosophical Transactions* ; voir Darwin à Poincaré, 27.08.1901 (§ 3-15-27).
98. Voir (§ 3-15-29).

15.31 Poincaré à Darwin

[Avant le 08.09.1901]

Mon cher Collègue,
J'ai continué à m'occuper du sujet qui vous intéresse. J'ai rencontré d'abord une difficulté qui m'a étonné. L'énergie de la double couche sur elle même n'est pas du 4e ordre comme je le croyais naïvement, mais du 3e ordre. Bien entendu, dans le cas de la poire, cela se réduit au 4e ordre, mais il s'introduit ainsi de nouveaux termes en $\xi^2\xi'$.
Je suis venu à bout de cette difficulté puis j'ai interrompu mon travail que je reprendrai dans une quinzaine de jours.
Je rencontrerai alors une autre difficulté. Les formules sont analytiquement différentes pour les parties où la poire dépasse l'ellipsoïde et pour les parties où la poire est en dessous.
Cependant je pense que chacune des deux formules est applicable aux deux cas; chaque terme de l'une des formules est différent du terme correspondant de l'autre formule. Mais je suppose qu'en faisant la somme, il y aura compensation.
Mais il faut que je le vérifie. Quand mes formules seront sur pied, je verrai combien il y aura d'intégrales elliptiques à calculer. Mais j'espère que vu la forme de notre ellipsoïde très allongé ces intégrales pourront être remplacées par des intégrales circulaires avec une approximation suffisante pour notre objet.
Votre bien dévoué,
Poincaré

ALS 3p. CUL-DAR251.4994, Cambridge University Library.

15.32 Darwin à Poincaré

Sep. 8. 01
NEWNHAM GRANGE–CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
I am interested to hear of the progress you have made. [99]
The difficulty you refer to as to the difference between the potentials of the ellipsoid outside & inside is the reason why I adopted the artifice of enveloping the whole pear in an external *Jacobian* ellipsoid. [100] I attempted in the case of the sphere to use different formulæ for the external & internal parts and met with failure. By making the ellipsoid of reference a Jacobian, the potential is of the form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

I suspect that you will be driven to the same course.

99. Poincaré reported his progress by letter to Darwin in early September, 1901 (§ 3-15-31).
100. See Darwin to Poincaré, 12.08.1901 (§ 3-15-23, and Darwin (1903a, 309).

I have determined to send in my paper to the R.S. as I find I have finished it as far as it goes. My reason for doing so is that I fear that as soon as our term begins I shall not have time to go on with the approximation (to be suggested by you), and I think if it ever comes it will be quite enough to stand by itself. [101]

I do not remember whether I told you that I have got the next six coefficients of stability, and find that they all vanish for Jacobians which would not perceptibly differ from the one already drawn.

Three of the figures are remarkable (as you will easily see) from the fact that the northern & southern quasi-hemispheres are different. [102]

The next one to vanish is one in which the mean axis of the Jacobian is sharpened at one end & bluntened at the other. I am reminded of Roche's result of the two figures of equilibrium under the action of a distant force. [103]

The presentation of my paper now will make no difference as to the "reading" of yours along with mine at the end of November, but it hastens the formalities of reference to reporters & order for printing. [104] I am glad to get it off my mind as I am going away for three weeks — letters will however be forwarded.

Will you some time give me a reference to the investigations about double layers by Neumann (I think you said). [105] I have not read about it.

Yours very sincerely,

G. H. Darwin

ALS 4p. Collection particulière, Paris 75017.

101. Darwin (1902b, received 21.10.1901), determined the axes of the critical Jacobian, on which see Darwin to Poincaré, 28.05.1901 (§ 3-15-11). Darwin went on to publish a putative demonstration of the stability of the pear-shaped figure on 19.06.1902 (Darwin 1903a), which Jeans (1915) and Cartan (1928) both found to be flawed, as noted by Lévy (1952, 625–626).

102. See Poincaré's reply (§ 3-15-33), where the symmetries of Darwin's figures are shown to conflict with the idea of a bifurcation figure. Darwin refers not to the six coefficients corresponding to zonal harmonics for degrees 4 to 9, shown to vanish by Poincaré (1885b, 321), but to the six coefficients corresponding to harmonics $\mathfrak{P}_3^s$, P_3^s of degree 3 and of orders $s = 1, 2, 3$. See also Darwin to Poincaré, 12.10.1901 (§ 3-15-35).

103. Roche (1849) showed that for a small satellite there are two possible figures of equilibrium that approximate each other when approaching a certain distance from a central body; see Darwin (1887, 414; 1906, 161), Schwarzschild (1896, 46); Chandrasekhar (1969, 12).

104. Both papers were presented on 21.11.1901.

105. Neumann 1877; see Poincaré to Darwin §§ (3-15-25, 3-15-33).

15.33 Poincaré à Darwin

[Après le 08.09.1901]

Mon cher Collègue,
La difficulté dont je vous avais parlé a disparu.[106] Comme je le prévoyais on peut employer *indifféremment* les formules des potentiels extérieurs ou celles des potentiels intérieurs. Peu importe que la poire soit toute entière extérieure à l'ellipsoïde, ou toute entière intérieure, ou en partie extérieure et en partie intérieure. Il y a bien pour chaque terme une différence, mais quand on fait la somme de tous les termes, ces différences se détruisent. Il n'est donc pas nécessaire de prendre un ellipsoïde de référence tout entier extérieur à la poire. Cela m'a été très utile, parce que cela m'a permis de corriger plusieurs erreurs.
Vous ne m'aviez pas parlé encore de ces six coefficients de stabilité que vous avez déterminés, je serais bien heureux d'avoir quelques détails à ce sujet. Divers points m'échappent d[ans] ce que vous m'en dites.[107]
Comment peut-il se faire que ces figures n'aient pas deux plans de symétrie si ce sont des ellipsoïdes de bifurcation ? D'après ce que vous me dites il faudrait pour que mon mémoire peut être joint au votre que je vous l'envoie vers la fin de novembre. Je crois que je le ferai, quoique sans doute il ne soit pas complet à ce moment. Mais je le compléterais au moment où vous publieriez votre second mémoire.
La théorie de la double couche a été donnée par *Carl Neumann* dans un volume intitulé : Le potentiel logarithmique et le potentiel newtonien ou quelque chose comme cela et qui a été publié *chez Teubner à Leipzig* vers 1880.[108]
Veuillez agréer l'assurance de mes sentiments sincèrement affectueux, et vous charger à présenter à Madame Darwin mes respectueux hommages.
Poincaré

ALS 3p. CUL-DAR251.4993, Cambridge University Library.

15.34 Poincaré à Darwin

[Avant le 12.10.1901]

Mon cher Collègue,
Soient P et P' deux des fonctions P_i^s ou $\mathfrak{P}_i^s$ soient Q et Q' les fonctions Q correspondantes, K et K' les coëff. de stabilité correspondants (j'emploie ces notations par ce que je ne sais pas faire les lettres gothiques). Soit R le radical

$$\sqrt{(\nu^2-1)\left(\nu^2-\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)}.$$

106. Voir Poincaré à Darwin (§ 3-15-31).
107. Voir Darwin à Poincaré, 08.09.1901 (§ 3-15-32).
108. Neumann 1877.

Vous trouvez : [109]

$$K - K' = \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{d\nu \left[P^2(\nu)P'^2(\nu_0) - P^2(\nu_0)P'^2(\nu)\right]}{P^2(\nu)P'^2(\nu)R}$$

et vous ajoutez que tous les éléments de l'intégrale doivent être de même signe ou en d'autres termes que le rapport P/P' doit toujours être croissant ou toujours décroissant. Pourquoi ? Je ne vois aucune raison pour cela.

S'il en était toujours ainsi cela serait encore vrai pour $P = \mathsf{P}_1^1$, mais alors notre intégrale se réduit à $-K'$, de sorte que le coefficient de stabilité K' ne pourrait jamais s'annuler.

C'est en effet ce qui arrive pour quelques unes des fonctions P' à savoir pour toutes celles qui contiennent P_1^1 en facteur, parce que justement le rapport $\frac{P'}{\mathsf{P}_1^1}$ est alors toujours croissant, et justement les coëff. de stabilité correspondants ne peuvent s'annuler.

Votre erreur est donc manifeste. Maintenant il doit y avoir aussi une erreur dans les calculs numériques. Celle-là je ne puis la retrouver, n'ayant pas les détails du calcul. Mais j'ai commencé à vérifier si l'ellipsoïde dont vous donnez les axes est bien le Jacobien critique. Seulement le calcul et surtout la vérification me prendront un certain temps parce que je [fin du fragment]

AL fragment, 2p. CUL-DAR251.4992, Cambridge University Library.

15.35 Darwin à Poincaré

Oct. 12.01
NEWNHAM GRANGE–CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré

I have no doubt you are substantially right, [110] and I cannot now recall the argument which made me think as I did. Is not it at least partially true? At any rate I have made the first calculation of my coeff^{ts} (other than $\mathfrak{K}_3$) for $y = 75°$, $\kappa = \sin 81°5'$ and find

$\mathfrak{K}_3^1 = .130$
$\mathbf{K}_3^1 = .224$
$\mathfrak{K}_3^2 = .460$
$\mathbf{K}_3^2 = .465$
$\mathfrak{K}_3^3 = .604$
$\mathbf{K}_3^3 = .614$

I shall go on and compute for $\kappa = \sin 81°4'$ – for the Jacobian is $\kappa = \sin 81°4.4'$. In this way I have an independent calculation & verification.

I have found an error in my calculation of $\mathbf{K}_3^1$ for $y = 69°50$, $\kappa = \sin 73°56'$. It sh^d be .299 & not .236. This does not disturb the order in which the K's are arranged.

If it would be of any help to you I will send you my comp^n of the critical Jacobian.

Having struggled so much with arithmetic and realised its extreme difficulty, it is a comfort to me to hear you confess yourself a bad calculator. [111]

109. Darwin 1902b, 322.
110. Poincaré had recently charged Darwin with error (§ 3-15-34).
111. See Poincaré to Darwin (§ 3-15-34).

Yours sincerely,
G. H. Darwin

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

15.36 Poincaré à Darwin

[Après le 12.10.1901]

Mon cher Collègue,
Comme votre lettre m'a montré que vous aviez trouvé la cause de l'erreur commise dans votre calcul et que cette cause n'entache pas la détermination des axes du Jacobien critique, j'ai jugé inutile de poursuivre la vérification que j'avais commencée. [112]
Quant à vos raisonnements, j'espère que ma dernière lettre vous a fait comprendre quel en était le point faible. [113]
Dans le cas où ce que je vous ai dit à ce sujet ne vous satisferait pas complètement, je reste à votre disposition.
Dans le cas au contraire où vous seriez tout à fait satisfait, je vous renverrais immédiatement votre manuscrit. Autrement je le garderais encore quelques jours afin de pouvoir répondre aux demandes d'explications que vous pourriez m'adresser.
Votre bien dévoué,
Poincaré

ALS 2p. CUL-DAR251.4963, Cambridge University Library.

15.37 Poincaré à Darwin

[Avant 19 Octobre 1901]

Mon cher Collègue,
Pour les 4 premiers points ainsi que pour le 6ᵉ vous avez bien reproduit exactement ma pensée. [114] Pour le 5ᵉ ce n'est pas tout à fait cela. Ce que j'ai démontré c'est que

$$P_i^s Q_i^t - P_i^t Q_i^s \quad \text{ou} \quad \mathfrak{P}_i^s \mathfrak{Q}_i^t - \mathfrak{P}_i^t \mathfrak{Q}_i^s$$

ne peuvent jamais s'annuler, mais il faut pour cela que les indices inférieurs i soient les mêmes pour les deux fonctions ; dans le cas où i n'est pas égal à j, je ne sais rien.
Cela permet de ranger les coëff. relatifs aux fonctions du 3ᵉ ordre divisibles, **P** ou indivisibles $\mathfrak{P}$, mais pas de comparer les coëff. du 3ᵉ ordre avec ceux du 4ᵉ.
Je crois que je puis vous renvoyer votre manuscrit dont vous devez avoir besoin pour y faire les corrections nécessaires.

112. Voir Darwin à Poincaré, 12.10.1901 (§ 3-15-35).
113. Voir Poincaré à Darwin (§ 3-15-34).
114. Ces points numérotés ne figurent pas dans les lettres conservées de Darwin.

J'ai presque terminé mon travail, vous me direz quelle formalité je dois remplir pour l'envoyer.
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 2p. CUL-DAR251.4961, Cambridge University Library.

15.38 Darwin à Poincaré

Oct. 19.01.
NEWNHAM GRANGE–CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
I send you a copy of the *Ellipsoidal Harmonics* with nearly if not all the mistakes & misprints corrected.[115]
I am very glad to hear y^r^ paper is nearly finished.[116] As an F.R.S. you of course present y^r^ paper *in propriâ personâ* (of course you need not be there in the body), but if you will allow it to pass thro' my hands I should have an opportunity of glancing through it. I suppose it will be "read" on the same day as mine.[117] The reading of such papers is generally a very short affair but if I have had the paper I sh^d^ be able to say a few words as to its object & scope.
It is necessary to send an abstract (for the *proceedings*) which may range from a dozen lines to 3 or 4 pages as the author chooses.[118] If you find it too tiresome to write an abstract I will try what I can do, but author's abstract w^d^ naturally be much more satisfactory. My own paper has now gone back purged, I think, of its sins — for which y^r^ last letter I think gives me absolution.
Yours Sincerely,
G. H. Darwin

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

15.39 Poincaré à Darwin

[Entre le 19 et le 22.10.1901]

Mon cher Collègue,
Merci de vouloir bien vous charger de la présentation. Je vous envoie le mémoire sous pli recommandé, j'y joins un « abstract » comme vous me l'avez demandé.[119]

AL 1p. CUL-DAR251.4962, Cambridge University Library.

115. Darwin 1902a.
116. See Poincaré to Darwin (§ 3-15-37).
117. The papers by Darwin and Poincaré were presented to the Royal Society on 21.11.1901.
118. Poincaré 1901d.
119. Par lettre du 19.10.1901 (§ 3-15-38), Darwin a offert de faire une brève présentation du mémoire de Poincaré (1902d) devant la Société royale, et l'a informé du besoin de lui communiquer un résumé pour publication dans les *Proceedings of the Royal Society* (Poincaré 1901d).

15.40 Darwin à Poincaré

Oct. 22.01
NEWNHAM GRANGE–CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
Your M.S. has arrived.[120] I shall venture to annotate it a little in red ink with instructions to the printers in English as I think it may save much trouble in the proofs. Of course I have experience of their ways which you cannot have.
I think it might be useful if I append a note in my own name to explain the identities of your R's and my $\mathfrak{P}$ and **P**. It has taken me nearly half an hour to make it out & I may as well save others the trouble. In doing this however I have discovered two things. I am unable to find any R_0 in the *Acta,* but I gather from your M.S. that it must denote $\mathfrak{P}_0(v)$ a constant or unity.
Secondly in y^r explanation you do not really follow y^r notation of the *Acta*.[121] You write there $R_{n,i}^{(k)}$ and n is clearly the degree of the harmonic and i its order, because you refer to its becoming

$$A(\rho^2 - e^2)^{\frac{1}{2}i} D^{i+n} (p^2 - e^2)^n$$

in the case of the spheroid. Hence where in y^r M.S. you write $R'_{0,2}$ and $R'_{0,3}$ you mean $R'_{2,0}$ and $R'_{3,0}$. Accordingly I propose (with your consent) to correct this.[122] I then obtain the following for your new R's.

$$R_1 = \mathfrak{P}_0(v), \qquad R_2 = \mathfrak{P}_1^1(v),$$
$$R_3 = \mathfrak{P}_2(v), \qquad R_4 = \mathfrak{P}_2^2(v),$$
$$R_4 = \mathfrak{P}_3(v),$$

Of course if in any case you dislike the mode of printing which I shall suggest it will be open to you to correct it in proof.
I do not think our printers have any type for your $\backsim$ except one like this $\backsim$ which has been used by some writers to denote a difference without regard to sign. On the other hand we have $\propto$ which has been used as equivalent to "varies as" & this is your meaning. I suggest therefore $\propto$ to replace $\backsim$.
Our printers always make such a thing as $\frac{\xi}{2}$ look very ugly, & so I write $\frac{1}{2}\xi$. This moreover saves the compositor much trouble. I have suggested this in many places.
I am afraid the French will be very badly set up & so I will look over a first proof before sending it on to you. I will write again if anything occurs to me. I have not yet had time to master your method. I am besides very busy for some days to come.
Yours sincerely,
G. H. Darwin

ALS 4p. Collection particulière, Paris.

120. Poincaré a annoncé l'envoi de son mémoire par lettre (§ 3-15-39).
121. In the published memoir, Poincaré notes that he and Darwin do not employ the same notation, and that he employs a notation different from that employed in his *Acta* paper (1902d, 335–336).
122. Darwin's note was inserted in Poincaré's paper (Poincaré 1902d, 336).

15.41 Poincaré à Darwin

[Après le 22.10.1901]

Mon cher Collègue,
J'approuve toutes les modifications que vous proposez et je m'en rapporte entièrement à vous pour toutes ces questions, car vous connaissez mieux que moi les habitudes des imprimeurs anglais.[123] En effet

$$R_0 = \mathfrak{P}_0(\nu) = \text{ const.}$$

Pour R_{ni}^k il y a en effet une permutation d'indices ; mais cette permutation a déjà été faite dans le mémoire des *Acta* lui-même où j'écris R_{0n}^1 au lieu de R_{n0}^1 dans les derniers chapitres ; il faudrait peut-être ajouter quelques lignes pour expliquer cela.
Votre tableau de correspondance est d'ailleurs exact.
Je vous remercie beaucoup pour toute la peine que vous avez prise.
Votre bien dévoué,
Poincaré

ALS 2p. CUL-DAR251.4964, Cambridge University Library.

15.42 Darwin à Poincaré

Jan. 14.02
NEWNHAM GRANGE–CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
I have made a preliminary correction of your proof sheets & have removed at least the worst of the misprints.[124] A revise will be sent to you soon together with your M.S. I venture to draw your attention to one point in the treatment of the "double layer," because it puzzled me. Your standard is where the layer is external to the ellipsoid and you take

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'} - 1 = k\ell.$$

That is to say that if k were positive and ℓ positive and $d\sigma'$ outside $d\sigma'$ would be less than $d\sigma$. But it is clear that $d\sigma'$ must be greater than $d\sigma$ and so k is negative if ℓ is measured outwards. In order to be sure that I understood your formula I worked out independently the case of a sphere of radius a charged with surface density $-\delta$, with a stratum superposed extending to radius $a(1+e)$ of density ρ. δ is connected with ρ by the equation

$$\delta = \frac{1}{3}\rho a[(1+e)^3 - 1].$$

123. Darwin a suggéré quelques modifications de notation, et l'inclusion d'une note dans le mémoire de Poincaré afin de préciser les rapports entre leurs systèmes de notation respectifs ; voir Darwin à Poincaré, 22.10.1901 (§ 3-15-40).

124. The proofs are those of Poincaré (1902d).

The formula in your paper gives the right result if k is -2, which is just what I thought it should be.
Is it worth while to change the sign of k all through to prevent a similar doubt in others.
I have gone someway in my own working of the question, which of course follows yours pretty nearly, but not quite. I have got out two of the integrals, but there are many more. I am afraid I must suspend work at it for the present.
I should much like some copies of your paper now in the press. The Society gives you 100 separate copies – is it possible that you will be so generous as to spare some of them for me.
I was very glad to hear of the award to you of a medal by the R.S. I was unfortunately unable to come to the meeting & dinner.[125]
I remain, Yours sincerely,
G. H. Darwin

ALS 4p. Collection particulière, Paris 75017.

15.43 Darwin à Poincaré

May 15. 1902
NEWNHAM GRANGE–CAMBRIDGE

Dear Monsieur Poincaré,
I am drawing very near to the end of the arithmetic of the 'Pear', and in the course of it a point has turned up on which I should be glad of confirmation.
If we refer to the critical Jacobian I find

$$\begin{aligned} &\frac{1}{5}R_3S_3 = .4933 = \text{ my } \mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_2 \quad \text{(second zonal)} \\ \frac{1}{3}R_2S_2 = &\frac{1}{7}R_5S_5 = .3517 \\ [\text{or } \mathbf{P}_1^1\mathbf{Q}_1^1 = &\mathfrak{P}_3\mathfrak{Q}_3 = .3517] \end{aligned}$$

Also

$$\frac{1}{5}R_4S_4 = .2153 = \text{ my } \mathfrak{P}_2^2\mathfrak{Q}_2^2 \quad \text{(second sectorial)}$$

(I use the R, S in the senses defined in foot note to *Roy. Soc.* paper p. 336.)
Thus for the second zonal

$$\frac{1}{3}R_2S_2 - \frac{1}{5}R_3S_3$$

is negative. It follows that my function E (see Pear-shaped Figure) is a minimax being a max$^{\mathrm{m}}$ for all deformations except the second zonal, and a max$^{\mathrm{m}}$ for the second zonal.

125. Poincaré was awarded the first Sylvester Medal, on the history of which see G. Cantor (2004) and I. Grattan-Guinness (1993).

I have however verified that the function

$$\overline{U} = -\frac{1}{2}\int \frac{dm_1 dm_2}{D_{12}} + \frac{1}{2}A\omega^2$$

is an absolute minimum, for it is certainly a minimum for all deformations except the second zonal – *moment of momentum being kept constant*—and for the second zonal the increment of $\overline{U}$ due to the moment of inertia is such as to outweigh the diminution due to the negative value of

$$\frac{1}{3}R_2S_2 - \frac{1}{5}R_3S_3.$$

In other words

$$\frac{1}{3}R_2S_2 - \frac{1}{2n+1}R_nS_n$$

is not the complete coefficient of stability for deformations of the second order.

I do not see this point referred to explicitly in your papers, but in the *Royal Society* paper (p. 362) [126] the signs in the expression

$$y_0 - \frac{Q_3y_3}{2G_3} - \frac{Q_4y_4}{2G_4}$$

seem to me to show that I am correct, since I agree with them when I use these values of R_2S_2, R_3S_3.

I am sure that I am right in my values of $\mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{P}_2^2\mathfrak{Q}_2^2$, since I have computed from the rigorous formulæ and entirely independently from the approximate formulæ of my paper on "Harmonics". [127] The two values of $\mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_2$ agree within about 1 percent, and of $\mathfrak{P}_2^2\mathfrak{Q}_2^2$ within about 3 percent.

The great trouble I have had is that my formulæ for the integrals tend to give the results as the differences between two very large numbers. I suspect that the same difficulty would occur in your more elegant treatment – for I think that I have arrived at nearly the same way of splitting the integrals into elementary integrals. I do not understand Weierstrasse's method enough to trust myself in using it. [128]

I hope this letter will not give you much trouble.

I remain, Yours Sincerely,

G. H. Darwin

P. S. On looking back I am not sure whether I have used the suffixes to your R, S in the same sense as you do, but I think you will understand my point. I use notation of *Roy. Soc.* paper and not of the *Acta.*

ALS 4p. Collection particulière, Paris 75017.

126. Poincaré 1902d, 362; Lévy 1952, 191.
127. Darwin 1902a, 488.
128. Karl Weierstrass (1815–1897).

15.44 Poincaré à Darwin

Lozère 18 Mai 1902

Mon cher Collègue,
Je suis tout à fait d'accord avec vous au sujet du signe de

$$\frac{1}{3}R_2S_2 - \frac{1}{5}R_3S_3, \qquad \frac{1}{3}R_2S_2 - \frac{1}{5}R_4S_4.$$

J'ai signalé et discuté le fait dans le mémoire des *Acta,* dans le § intitulé je crois Stabilité des Ellipsoïdes. [129]
J'ai montré pourquoi un Jacobien ne serait pas stable s'il était entraîné par un axe de rotation fixe comme dans l'expérience de Plateau par exemple et pourquoi il serait stable au contraire s'il était isolé dans l'espace.
J'ai fait une allusion au même fait dans le mémoire des *Roy. Soc. Papers,* [130] en déterminant le signe de certaines quantités telles que

$$\gamma_0 - \frac{Q_3\gamma_3}{2G_3} - \frac{Q_4\gamma_4}{2G_4}.$$

J'ai reçu vos mémoires sur la Tidal Friction et je vous en remercie beaucoup. [131]
Veuillez je vous prie, transmettre à Madame Darwin mes respectueux hommages.
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 2p. CUL-DAR251.4911, Cambridge University Library.

15.45 Poincaré à Darwin

[Entre 1907 et 1909]

Mon cher ami,
Je n'ose pas me prononcer entre Liapounof et vous, parce qu'il faudrait lire Liapounof et que je n'ai pas ce courage.
J'ai bien entre les mains un mémoire intitulé Problème Général de la Stabilité du Mouvement daté de 1892 Kharkow et traduit par Davaux. [132] Mais je n'y vois pas de calcul numérique ; est-ce bien de celui-là qu'il s'agit ? J'en doute. [133]
Votre ami dévoué,
Poincaré

ALS 2p. CUL-DAR251.2022, Cambridge University Library.

129. Poincaré 1885b, §14.
130. Poincaré 1902d.
131. Au sujet des marées Darwin a publié plusieurs mémoires, réédités dans le deuxième volume de ses *Scientific Papers* (Darwin 1908).
132. Liapunov 1907.
133. Liapunov (1905) a contesté le calcul de Darwin, ayant trouvé par sa propre méthode que l'équilibre des figures piriformes en rotation est instable. Darwin a publié une réponse à Liapunov (Darwin 1910, 391), dans lequel il a renoncé à refaire ses calculs. Par la suite, le résultat de Liapunov a été retrouvé par James Jeans (1915) et Élie Cartan (1928).

15.46 Poincaré à Darwin

PARIS, LE [13.11.1908][134]
UNIVERSITÉ DE PARIS — FACULTÉ DES SCIENCES – MÉCANIQUE CÉLESTE
63, rue Claude Bernard

Mon cher Collègue,
Je serais bien heureux si vous vouliez bien consentir à faire partie d'un comité d'honneur pour l'érection d'un monument à Laplace. Nous ne vous demanderions pas une minute de votre temps.
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 1p. CUL-DAR251.2023, Cambridge University Library.

15.47 Poincaré à Darwin

[Vers 1911]

Mon cher ami,
Merci de l'envoi de vos œuvres complètes ; je les avais déjà en détail mais c'est bien plus commode à consulter comme cela. [135]
Votre bien dévoué,
Poincaré

ALS 1p. CUL-DAR251.2024, Cambridge University Library.

134. Poincaré a envoyé une lettre identique à plusieurs scientifiques, dont W. Foerster (§ 3-18-2), G. Mittag-Leffler (§ 1-1-237), et S. Newcomb (§ 3-37-7).

135. Darwin 1907. Les quatre premiers volumes des *Scientific Papers* de Darwin ont paru entre 1907 et 1911. Le cinquième et dernier volume a été publié en 1916 par les soins de F.J.M. Strattan et J. Jackson.

Chapitre 16

Henri Deslandres

Henri Deslandres (1853–1948) a fait ses études à l'École polytechnique, promotion de 1873, et à sa sortie a choisi le génie militaire, où il est resté pendant huit ans. En 1882 il a démissionné de l'armée pour s'approcher de son ancien professeur de physique Alfred Cornu. Il soutint une thèse en 1888 à la Faculté des sciences de Paris, sur les bandes ultra-violets des métalloïdes avec une faible dispersion (Deslandres 1888). L'année suivante, Deslandres fut engagé par l'Amiral Mouchez à l'Observatoire de Paris comme aide astronome, afin d'organiser un service de spectroscopie. Il est devenu astronome titulaire à l'Observatoire de Meudon en 1897, et directeur en 1908, succédant à Jules Janssen. En 1902, il fut élu membre de l'Académie des sciences de Paris, section d'astronomie. Il devint directeur de l'Observatoire de Paris lors de la fusion administrative des observatoires de Paris et de Meudon en 1927, qui coïncidait avec le départ en retraite de Baillaud. Deslandres a lui-même pris sa retraite en 1928.

Deslandres a mesuré la vitesse radiale des planètes et des étoiles, ainsi que la vitesse de rotation d'Uranus, Jupiter, Saturne et ses anneaux. Ses travaux d'observation de l'atmosphère solaire ont été cités parmi les contributions couronnées par la médaille Bruce en 1921 (Véron 2006 ; Le Gars 2007 ; Michard 1971).

La seule lettre dont nous disposons de Deslandres à Poincaré concerne un article d'Ernest Esclangon (§ 3-16-1), que Deslandres a communiqué à Poincaré pour insertion dans le *Bulletin astronomique*. Esclangon fut alors professeur adjoint de mathématiques à la Faculté des sciences de Bordeaux et astronome adjoint à l'Observatoire de Bordeaux ; en 1929 il a succédé à Deslandres à la direction de l'Observatoire de Paris.

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_16

16.1 Deslandres à Poincaré

MEUDON LE 8 Dec. 1911
OBSERVATOIRE D'ASTRONOMIE PHYSIQUE DE PARIS
SIS PARC DE MEUDON — SEINE-&-OISE

Mon cher Poincaré,
Je t'adresse ci-joint un article destiné au *Bulletin astronomique*, et qui m'est adressé par M. Esclangon de Bordeaux. [1]
Je pense que tu estimeras, comme moi, l'article digne d'être inséré.
Cordialement,
H. Deslandres

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

1. Esclangon 1912. Ancien élève de l'École normale supérieure, Ernest Esclangon (1876–1954), a suivi les cours de Poincaré à la Sorbonne. Il a soutenu une thèse sur les fonctions quasi-périodiques à la Faculté des sciences de Paris en 1904, devant un jury composé de Poincaré, Paul Appell, et Paul Painlevé (Esclangon 1904a, 1904b).

Chapitre 17

Hervé Faye

Hervé Faye (1814–1902) est entré à l'École polytechnique en 1832, mais fut exclu en 1834 pour cause d'absence. En 1842 Faye entra à l'Observatoire de Paris en tant qu'élève ; il démissionna en 1852, pour devenir professeur de géodésie à l'École polytechnique. Faye démissionna de ce dernier poste en 1854, pour devenir professeur de mathématiques pures et appliquées à la Faculté des sciences de Nancy, et recteur de l'Académie de Nancy. En 1873, Faye fut nommé professeur d'astronomie et de géodésie à l'École polytechnique, où Poincaré a suivi son enseignement (Faye 1873). Faye fut nommé ministre de l'Instruction publique des cultes et des beaux-arts en 1877.

Faye étudia le mouvement propre des étoiles et mit au point une lunette zénithale et un collimateur zénithal, alors que les deux cents notes qu'il a publiées dans les *Comptes rendus* de l'Académie des sciences sont surtout des travaux théoriques. Élu à l'Académie des sciences de Paris en 1847, Faye devint membre du Bureau des longitudes en 1862. Avec Poincaré, il fit partie de la Commission de l'Académie des sciences chargée de l'évaluation scientifique de l'expédition géodésique au Pérou. Sur la vie et les travaux de Faye, voir le *DSB* (Kovalevsky 1971), Véron (2006), et Boistel et al., eds. (2014).

On doit à Faye (1884) une théorie de l'origine des mondes ; Poincaré l'a comparé favorablement à la théorie de Laplace (Poincaré 1911a, § 4). En 1886, Faye proposa une formule pour rendre compte de la variation de la fréquence d'oscillation des pendules situés aux différents endroits du globe, qui prenait en compte une variation de la densité de la croûte terrestre (Faye 1886a). Poincaré en a fait mention dans une conférence à l'Académie des sciences en 1900, ce qui a provoqué la lettre que nous publions ici (§ 3-17-1). Deux ans plus tard, lorsque Poincaré rédigea la notice nécrologique de Faye pour le *Bulletin de la Société astronomique de France*, il a rappelé la "formule frappante" de Faye, ainsi que sa théorie solaire qui fut "universellement adoptée", et sa théorie cosmogonique (Poincaré 1902e).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_17

17.1 Faye à Poincaré

Paris 27 octobre 1900

Cher et illustre Confrère,

J'ai été bien frappé d'entendre raconter par un des invités de la Grande Chancellerie, l'éloge que vous avez bien voulu faire d'un de mes travaux à l'occasion de l'Arc du Pérou. [1] J'ai bien regretté de ne pouvoir assister moi-même à cette Séance Publique, empêché que j'étais par le désir d'aller le soir même à la réunion du Grand Chancelier et l'impossibilité de m'absenter deux fois dans la même journée. [2]

J'ai reçu depuis, d'autres personnes dont l'opinion a pour moi beaucoup de valeur, l'assurance des bons sentiments que vous avez bien voulu exprimer pour moi en public en cette occasion.

Agréez donc mon cher Collègue mes biens vifs remerciements avec tous mes sentiments dévoués.

h. faye [a]

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

---

1. La Grande Chancellerie est la demeure du Chancelier de France ainsi que du corps des officiers dont se compose la chancellerie (le Chancelier, le Garde des Sceaux et les autres officiers de la Légion).

Il s'agit de la mesure d'arc que les officiers du Service géographique de l'armée s'apprêtent à réaliser en Équateur (1901–1908). Dans son rapport du 23.07.1900, Poincaré rappelle qu'une formule de Faye s'accorde avec les observations du pendule réalisées lors des opérations géodésiques. En effet, ces mesures donnent, à cette époque, des résultats toujours trop faibles sur les continents et trop forts sur les îles. Selon Faye (1886a, 1886b, 1886c, 1886d), tout se passe comme si les masses continentales n'existaient pas : les mers étant une cause de refroidissement, le globe se serait refroidit plus vite sous les mers. La croûte solide serait donc plus épaisse sous les océans que sous les continents ; c'est ainsi que se seraient formées sous les continents des sortes de cloches où les gaz se seraient accumulés au-dessus de la masse liquide interne. Ces vides compenseraient alors l'effet de l'attraction de la masse continentale, résultat confirmé par certaines mesures réalisées à l'époque dans les Alpes et l'Himalaya. Lors de la nouvelle mesure d'un arc de méridien en Équateur, les savants français voulaient constater ce qui se passait dans les Andes (Poincaré 1900c). En janvier 1901, Poincaré prendra de nouveau en considération la formule de Faye, ainsi que celle de Bouguer, pour les lecteurs du *Bulletin astronomique* (Poincaré 1901c).

2. Il s'agit du général de division Léopold Davout, duc d'Auestaedt (1829–1904). Le Grand Chancelier de la Légion d'honneur est choisi parmi les Grands Croix par le Président de la République, et a la charge de tous les problèmes liés aux décorations en France. Il est assisté d'un conseil réunissant des membres divers de la Légion, civil et militaires, à partir du grade de Commandeur.

a. La signature et le corps de la lettre ne sont pas de la même main.

Chapitre 18

Camille Flammarion

Nicolas Camille Flammarion (1842–1925) est entré en 1858 comme élève-astronome à l'Observatoire de Paris, alors sous la direction d'Urbain Le Verrier (C. Flammarion 1911, 138). Il est renvoyé par ce dernier, ou il quitta lui-même son poste, selon le récit, suite à la publication d'un ouvrage intitulé *La pluralité des mondes habités* (C. Flammarion 1862), mais le directeur du bureau des calculs de l'Observatoire, Charles-Eugène Delaunay l'a réengagé comme calculateur au Bureau des longitudes (C. Flammarion 1911, 211, 218 ; De La Cotardière & Fuentes, 1994, 66).

Flammarion a publié un grand nombre d'ouvrages, surtout des vulgarisations de l'astronomie, publiées, à partir de 1879, par la maison d'édition de son frère cadet Ernest. Avec le soutien de Le Verrier, et la collaboration d'une vingtaine d'astronomes en Europe et aux États-Unis, Flammarion a rédigé à partir de 1873 son *Catalogue des étoiles doubles et multiples en mouvement relatif certain* (C. Flammarion 1878). Le succès commercial de ses livres d'astronomie populaire lui a permis de construire en 1883 un observatoire à Juvisy-sur-Orge.

Poincaré appréciait les livres de Flammarion, et lors des conférences il rappelait parfois l'un de ses personnages, "Lumen, l'homme de Flammarion". Inventé en 1866, Lumen fut une âme capable de se déplacer avec une vitesse supérieure à celle de la lumière (C. Flammarion 1873 ; Poincaré 1907a, 1910).

En 1887, Flammarion fut membre fondateur et premier président de la Société astronomique de France, et secrétaire général lorsque Poincaré assurait la fonction de vice-président en 1900, puis celle de président en 1901–1902. Il a dirigé pendant toute sa vie le bulletin mensuel de la Société, *L'Astronomie*.

Lorsque Poincaré a obtenu le prix du Roi Oscar II de Suède en 1889 pour son travail sur le problème des trois corps, Flammarion a salué son "triomphe" avec une notice dans *L'Astronomie* (C. Flammarion 1889). Or, l'essentiel de la notice de Flammarion a été rédigé par Poincaré lui-même, selon le manuscrit découvert par L. Rollet aux archives départementales de l'Essonne (§ 3-48-2).

C'est en tant que rédacteur en chef de *L'Astronomie* que Flammarion a reçu une lettre de Poincaré en 1904, qu'il a publiée sous le titre "La Terre tourne-t-elle ?" en avril,

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_18

1904, et dont le texte est réédité et annoté ici (§ 3-18-2).

Peu après la mort de Poincaré, Flammarion a relaté une discussion qu'il a eu avec ce dernier à propos de l'existence du monde phénoménal, pendant laquelle Poincaré aurait soutenu une position idéaliste (C. Flammarion 1912a, 1912b).

Sur la vie de Flammarion, voir ses *Mémoires* (C. Flammarion 1911), le *DSB* (Servajean 1972), et l'ouvrage de De La Cotardière & Fuentes (1994).

18.1 Poincaré à C. Flammarion

[Vers le mois de juillet 1889] [1]

Monsieur,
Je trouve à mon retour de la campagne les numéros tant de *l'Astronomie* que du *Manuel de l'Instruction Primaire.* [2] Je vous remercie beaucoup tant de votre article que de votre envoi. [3]
Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.
Poincaré

ALS 1p. 1 MI/542 Fonds Camille Flammarion, Archives départementales de l'Essonne, France.

1. Le manuscrit porte une annotation de main inconnue : "10LC 1889-88".

2. En 1882, C. Flammarion a lancé *L'Astronomie : Revue d'astronomie populaire*, publiée par la maison d'édition Gauthier-Villars à Paris. Le *Manuel général de l'instruction primaire : journal hebdomadaire des instituteurs* a été publié par la maison d'édition Hachette à Paris.

3. Voir Flammarion 1889. Le texte de l'article, au sujet du concours du Roi Oscar II de Suède remporté par Poincaré, a été rédigé en partie par Poincaré lui-même, comme en témoigne l'autographe (AD 4p) découvert par L. Rollet (en même temps que cette lettre) aux Archives départementales de l'Essonne. Pour la transcription du manuscrit de Poincaré, voir § 3-48-2.

18.2 Poincaré à C. Flammarion

[Vers le mois d'avril 1904][4]

Mon cher collègue,
Je commence à être un peu agacé de tout le bruit qu'une partie de la presse fait autour de quelques phrases tirées d'un de mes ouvrages — et des opinions ridicules qu'elle me prête.[5]
Les articles auxquels ces phrases sont empruntées ont paru dans une *Revue de métaphysique ;* j'y parlais un langage qui était bien compris des lecteurs habituels de cette Revue. La plus souvent citée a été écrite au cours d'une polémique avec M. Le Roy, dont le principal incident a été une discussion à la Société Philosophique de France. M. Le Roy avait dit : "Le fait scientifique est *créé* par le savant".[6] Et on lui avait demandé : Précisez, qu'entendez-vous par un fait ? Un fait, avait-il répondu, c'est par exemple, la rotation de la Terre. Et, c'est alors qu'était venue la réplique : Non, un fait, par définition, c'est ce qui peut être constaté par une expérience directe, c'est le résultat *brut* de cette expérience. À ce compte, la rotation de la Terre n'est pas un fait.
En disant : "Ces deux phrases, la Terre tourne, et il est commode de supposer que la Terre tourne, n'ont qu'un seul et même sens", je parlais le langage de la métaphysique moderne. Dans le même langage, on dit couramment "Les deux phrases, le monde extérieur existe et il est commode de supposer que le monde extérieur existe, n'ont qu'un seul et même sens."
La rotation de la Terre est donc certaine, précisément dans la même mesure que l'existence des objets extérieurs.
Je pense qu'il y a là de quoi rassurer ceux qui auraient pu être effrayés par un langage inaccoutumé. Quant aux conséquences qu'on a voulu en tirer, il est inutile de montrer combien elles sont absurdes. Ce que j'ai dit ne saurait justifier les persécutions exercées contre Galilée, d'abord, parce qu'on ne doit jamais persécuter même l'erreur, ensuite

4. Le contenu de cette lettre est transcrit d'après la version publiée (Poincaré 1904a). Flammarion s'identifie comme le destinataire de la lettre de Poincaré dans sa préface :

> La terre tourne-t-elle ?
>
> Un certain nombre de journaux de France et de l'étranger ayant continué à publier des articles sous ce titre, et à prétendre que M. Poincaré doute du mouvement de rotation de notre planète, malgré l'article publié ici même par M. Flammarion, et à en prendre acte pour mette en suspicion les vérités les mieux démontrées de l'astronomie moderne, l'éminent professeur de la Faculté des Sciences a pensé qu'il aiderait à détruire la légende que l'on cherche à créer en écrivant la lettre suivant à M. Flammarion.
>
> Comme nous l'avons dit (*Bulletin* de mars, p. 118), c'est étrangement outrepasser sa discussion métaphysique sur "le mouvement relatif et le mouvement absolu" que de faire supposer au public que notre grand mathématicien doute — et puisse douter un seul instant — des mouvements de la Terre, car il est de ceux dont les travaux ont le mieux prouvé ces mouvements.
>
> Voici la lettre de M. Poincaré :
>
> (C. Flammarion, *Bull. Soc. astron. France* 18, 1904, 206)

L'article mentionné dans cette préface est celui de Flammarion (1904).

5. Au sujet de la controverse sur le sens des propos de Poincaré, voir Mawhin (1996, 2004).

6. Pour une présentation de ce point de vue nominaliste, voir Le Roy (1901).

parce que même au point de vue métaphysique, il n'est pas *faux* que la Terre tourne, de sorte que Galilée n'a pu commettre d'erreur.
Cela ne voudrait pas dire non plus qu'on peut enseigner impunément que la Terre ne tourne pas, quand cela ne serait que parce que la croyance à cette rotation est un instrument aussi indispensable à celui qui veut penser savamment, que l'est le chemin de fer, par exemple, à celui qui veut voyager vite.
Quant aux preuves de cette rotation, elles sont trop connues pour que j'insiste. Si la Terre ne tournait pas sur elle-même, il faudrait admettre que les étoiles décrivent en 24 heures une circonférence immense que la lumière mettrait des siècles à parcourir.
Maintenant, ceux qui regardent la métaphysique comme démodée depuis Auguste Comte, me diront qu'il ne peut y avoir de métaphysique moderne. Mais la négation de toute métaphysique, c'est encore une métaphysique, et c'est précisément là ce que j'appelle la métaphysique moderne.
Pardon de ce bavardage, et tout à vous.
Poincaré

PD 2p. Poincaré (1904a, 216–217).

Chapitre 19

Wilhelm Julius Foerster

Wilhelm Julius Foerster (1832–1921) a fait ses études à Breslau et, à partir de 1850, à l'Université de Berlin, où il a rencontré Encke, avant d'aller à Bonn, où il a suivi l'enseignement d'Argelander entre 1852 et 1854. En 1855 Foerster est entré à l'Observatoire de Berlin en tant que deuxième assistant ; en 1863 il fut promu premier assistant, et a.o. professeur d'astronomie à l'Université de Berlin. Il fut nommé directeur lorsque Encke s'est retiré en 1865, et professeur d'astronomie à l'Université de Berlin. Il fut co-fondateur de l'Observatoire astrophysique de Potsdam, directeur de l'Institut impérial des poids et mesures (*Kaiserliche Normal Eichungskommission*), membre du Bureau international des poids et mesures et du Bureau central de géographie prussien (*Zentraldirektorium des Vermessungswesens*). Convaincu que l'état constitue l'unique moyen de développer les études technologiques de précision, Foerster assura le contact avec le monde militaire dans la création du Physikalisch-technische Reichsanstalt (Cahan 1989, 24–26).

Foerster a fondé le journal de vulgarisation d'astronomie *Urania* en 1888, et il a lancé le *Vereinigung von Freunden der Astronomie und Kosmischen Physik* en 1891. Membre depuis 1892 de la Société allemande pour une culture éthique (*Deutschen Gesellschaft für ethische Kultur,*) et de la Société allemande de paix (*Deutsche Friedensgesellschaft,*) Foerster s'est inscrit dans l'opposition aux courants nationalistes.

Foerster s'est retiré de la direction de l'Observatoire de Berlin en 1904, mais il a continué à faire cours pendant quelques années à l'Université de Berlin, où il a enseigné pendant soixante ans. En 1909, il fut élu correspondant pour l'étranger au Bureau des longitudes, en remplacement de l'amiral Calheiros de Graça. [1] Sur la vie et les travaux de Foerster, voir Bauschinger (1921).

Les deux lettres de Poincaré à Foerster que nous publions ici furent rédigées entre 1906 et 1908.

1. Décret du 15.05.1909 de Gaston Doumergue, F17 13570, Archives nationales françaises ; Poincaré à Doumergue, 12.05.1909 (§ 3-47-30).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_19

19.1 Poincaré à Foerster

[Vers 1906] [2]

Mon cher Collègue,
J'ai bien tardé à vous remercier du magnifique volume (*l'Univers et l'Humanité*) que vous avez bien voulu m'envoyer. [3] Je le trouve en revenant de la campagne. Je lirai avec plaisir ces pages sorties d'une plume comme la vôtre.
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 1p. Darmstaedter H 1879, Staatsbibliothek zu Berlin – Preußischer Kulturbesitz.

19.2 Poincaré à Foerster

Paris, le 13/11/1908 [a]
Université de Paris – Faculté des Sciences – Mécanique céleste [4]

Mon cher Collègue,
Je serais bien heureux si vous vouliez bien consentir à faire partie d'un comité d'honneur pour l'érection d'un monument à Laplace. Nous ne vous demanderions pas une minute de votre temps.
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 1p. Darmstaedter H 1879, Staatsbibliothek zu Berlin – Preußischer Kulturbesitz.

2. Le manuscrit comporte une annotation de main inconnue : "Brief des grossen Mathematikers Poincaré an Prof. W. Foerster (1906)".

3. Voir Krämer (1904), traduit de l'allemand (Krämer 1902) par Alfred Schalk de la Faverie. Foerster a contribué à l'ouvrage, avec L. Beushausen, M. d'Eyth et d'autres.

4. Une lettre identique à celle-ci a été envoyée à G. H. Darwin (§ 3-15-46), G. Mittag-Leffler (§ 1-1-237), et S. Newcomb (§ 3-37-7). Poincaré a présidé le comité d'initiative dont l'objet fut d'ériger un monument à l'honneur de Laplace (*CRAS* 149, 1909, p. 1026). Le comité atteindra son objectif le 03.07.1932 (Nabonnand 1999, § 1-1-237, note 2).

a. Le manuscrit comporte deux annotations de deux mains inconnues, dont une indique qu'il s'agit d'une lettre de Poincaré à Foerster : "Brief des grossen franzoisischen Mathematikers Poincaré an Prof. W. Foerster Charlottenburg". L'autre annotation est vraisemblablement de Foerster : "Umgehend Zugesaft, 15/11/08, F".

Chapitre 20

Maurice Fouché

Maurice Fouché (1855–1929) a fait ses études secondaires au lycée Saint-Louis à Paris avant d'entrer à l'École polytechnique en 1873. De 1875 à 1881 il fut aide-astronome à l'Observatoire de Paris. Son directeur, Ernest Mouchez (1821–1892) s'est plaint de son manque de zèle auprès du ministre, et l'a fait renvoyer pour faute grave en 1881. Fouché a entrepris alors une carrière d'enseignant de mathématiques dans une succession de lycées parisiens. Entre 1885 et 1905, il a publié une quinzaine d'articles en géométrie analytique, mécanique rationnelle, et arithmétique, et il est devenu répétiteur de géométrie à l'École polytechnique en 1905, puis examinateur d'admission l'année d'après. Il a collaboré à la revue l'*Astronomie* de Camille Flammarion sous le pseudonyme de Philippe Gérigny (Véron 2006).

La lettre de Fouché que nous publions ici (§ 3-20-1) félicite son ancien camarade Poincaré à l'occasion de son élection à l'Académie des sciences de Paris en 1887.

20.1 Fouché à Poincaré

Paris, le 23 février 1887

Mon cher camarade,
J'apprends, un peu tardivement ta nomination à l'Académie des Sciences. Permets moi pourtant de t'en féliciter bien sincèrement.[1] C'est un honneur qui t'était bien dû et qui ne m'a pas étonné ; mais il me semble qu'il en rejaillit quelque chose sur l'École Polytechnique et sur notre promotion, et je suis heureux de me rappeler les deux années que j'ai passées avec toi, dans l'intimité de l'École, à une époque où, tout en appréciant ta supériorité, nous ne songions encore ni à l'Institut, ni aux distinctions du même genre.
Ton camarade dévoué,
M. Fouché

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

1. Poincaré devint membre de l'Académie des sciences, section de géométrie, le 31 janvier 1887.

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_20

Chapitre 21

Hugo Gyldén

Johan August Hugo Gyldén naît à Helsinki le 29 mai 1841 dans une famille lettrée. Son père est professeur de littérature grecque à l'université de Helsinki. Gyldén reçoit dans son enfance une solide éducation classique mais poursuit finalement des études de mathématiques et d'astronomie. Il les termine auprès de Hansen, à Gotha, où il s'initie à la théorie des perturbations. En 1862, il est docent à l'université de Helsinki, avant de rejoindre l'observatoire de Poulkowo où il s'initie aux techniques de l'astronomie d'observation. Astronome-adjoint en 1863, astronome titulaire en 1865, Gyldén reste à Poulkowo jusqu'en 1871, date à laquelle il est appelé à devenir le directeur de l'observatoire de Stockholm. Il y restera jusqu'à sa mort le 10 novembre 1896 (Callandreau 1897b).

Les travaux de Gyldén touchent de nombreux domaines de la mécanique céleste ; en particulier, il s'est intéressé à la question des perturbations des petites planètes pour laquelle il développe sa théorie des orbites absolues et intermédiaires, en révisant des méthodes d'approximation. Avec sa théorie, Gyldén a réalisé "le rêve de l'Académie des Sciences", selon Charles Hermite, elle représentait même "le progrès le plus important qui eut été obtenu depuis Laplace dans la Mécanique Céleste." [1] Certaines méthodes de Gyldén devaient être mises en défaut par l'analyse de Poincaré, au moment du concours du roi de Suède. À cette occasion, Hermite s'est exprimé sur le résultat de Poincaré :

> Quel étonnant génie de Poincaré d'avoir, comme vous le dites, débrouillé les travaux de Mr. Gyldén, et malheureusement d'avoir ruiné et démoli son édifice analytique. (Hermite à Mittag-Leffler, 13.03.1889 ; Hermite 1985, 169)

Pour autant, Poincaré rend hommage dans le premier tome des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* aux travaux de Gyldén :

> Mais le savant qui a rendu à cette branche de l'Astronomie les services les plus éminents est sans contredit M. Gyldén. Son œuvre touche à toutes les parties de la Mécanique céleste, et il utilise avec habileté toutes les ressources de l'Analyse moderne. M. Gyldén est parvenu à faire disparaître entièrement

1. Charles Hermite, rapport de soutenance de la thèse d'Henri Andoyer, 28.07.1886, transcrit dans Gispert (1991, 341).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_21

> de ses développements tous les termes séculaires qui avait tant gêné ses devanciers. (Poincaré 1892b, 3)

Dans le deuxième tome, Poincaré propose un “mode d’exposition” de la théorie des orbites intermédiaires différent de celui de Gyldén (Poincaré 1893). La lettre de 1892 est une réponse de Gyldén à l’envoi du premier tome des *Méthodes nouvelles*.

Gyldén était lié avec Gösta Mittag-Leffler et avait contribué entre autres au lancement des *Acta Mathematica*. La seconde lettre concerne l’adresse envoyée par les mathématiciens européens à l’occasion du cinquantième anniversaire de Mittag-Leffler pour soutenir les *Acta* (Nabonnand 1999, § 1-1-133).

21.1 Gyldén à Poincaré

Stockholm, 1892 Mai 2

Monsieur !
Je suis bien en retard avec mes remerciements que je vous dois, tant de l’envoi de plusieurs ouvrages de la plus haute importance, que de votre bonne opinion de ces quelques résultats que j’ai réussi à obtenir en travaillant une longue suite d’années. Les recevez maintenant, honoré Monsieur, avec l’assurance de ma plus haute estime de vos découvertes, si ingénieuses, sur le champ de la mécanique céleste.
N’ayant plus à ma disposition un exemplaire complet des montres[2] de mon mémoire *nouvelles recherches*, je me permets de vous remettre les montres dès le commencement du second chapitre. La première partie fut imprimée dans le Tome XV des *Acta Mathematica*. Quand l’impression sera achevée, je me permettrai de vous envoyer un nouvel exemplaire complet.[3]
Veuillez agréer, Monsieur, l’assurance des sentiments de la plus haute estime de votre dévoué
Hugo Gyldén

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

2. Il faut comprendre “épreuves”.
3. À la place de “montres”, lire “épreuves” ; Gyldén remet à Poincaré les épreuves de son mémoire qui paraîtra dans les *Acta mathematica* (Gyldén 1893a), qui fait suite à celui paru dans le Tome 15 (Gyldén 1891).

21.2 Poincaré à Gyldén

[Vers 1896]

Mon cher Collègue,
Vous recevrez prochainement les circulaires relatives au projet d'adresse à M. Mittag-Leffler. [4]
Vous remarquerez que les pays scandinaves ne sont pas représentés dans le Comité. Cela d'ailleurs s'explique aisément. La manifestation projetée en faveur de M. Mittag-Leffler se trouve être une manifestation en faveur des *Acta*.
Les organisateurs ne pouvaient par conséquent s'adresser aux membres du comité de rédaction des *Acta*, et ce comité comprend précisément les plus autorisés des savants scandinaves.
Veuillez agréer, mon cher Collègue, l'assurance de ma considération la plus distinguée.
Poincaré

ALS 2p. Hugo Gyldén Archives, Center for History of Science, Royal Swedish Academy of Sciences.

4. Poincaré fait allusion aux manifestations de soutien adressées à Gösta Mittag-Leffler et aux *Acta mathematica* à l'occasion du cinquantième anniversaire de Mittag-Leffler.

Chapitre 22

Maurice Hamy

Maurice Hamy (1861–1936) a fait ses études en mathématiques et en physique à la Faculté des sciences de Paris, et en 1884 il fut nommé élève astronome à l'Observatoire de Paris. Après avoir soutenu une thèse à la Faculté des sciences de Paris sur la figure des corps célestes (1887), Hamy fut nommé aide astronome en 1887, et astronome adjoint en 1893, avant d'obtenir le Prix Lalande de l'Académie des sciences de Paris en 1895. Suite au départ de l'Observatoire de Paris en 1897 d'Henri Deslandres à l'Observatoire de Meudon, le directeur de l'Observatoire de Paris, Maurice Lœwy a chargé Hamy à réorganiser le service d'astronomie physique. Après le décès du beau-frère de Hamy, l'astronome Octave Callandreau, Hamy est devenu astronome titulaire en 1904.

Répétiteur de physique à l'École polytechnique à partir de 1902, Hamy fut élu à l'Académie des sciences de Paris (section d'astronomie) en 1908, et il est devenu membre du Bureau des longitudes en 1916 (Lévy 1972 ; Véron 2006 ; Le Gars 2007).

La lettre de Hamy à Poincaré que nous publions ici (§ 3-22-2), a dû accompagner un manuscrit que Hamy voulait faire paraître dans le *Bulletin astronomique*, à propos d'une technique d'amortissement de vibrations d'un bain de mercure (Hamy 1897, 1898). Les mesures méridiennes se faisaient à travers l'observation de la surface d'un bain de mercure, une technique sensible aux vibrations du sol, surtout en ville. Dans sa *Notice sommaire* sur ses travaux (1902), Hamy note que sa contribution a été motivée par Lœwy :

> Sur la demande de M. Lœwy, j'ai cherché à réaliser un système de bain à couche épaisse, insensible aux trépidations du sol. L'étude analytique de différents dispositifs m'a fait voir qu'en suspendant une cuvette, de forme convenable et suffisamment lourde, à des ressorts susceptibles de subir un grand allongement, il est possible, sous certaines conditions d'amortissement, de réduire, dans des proportions considérables et pratiquement complètes, les effets de l'instabilité du sol. L'expérience à vérifié ces conséquences de la théorie à tel point que les observations du nadir, dans les opérations de la détermination de la différence de longitude entre Paris et Greenwich, ont été faites avec des bains de mercure à couche épaisse de mon système [...]. (Hamy 1902, 12–13)

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_22

Le sujet de l'article de Hamy devait intéresser Poincaré à deux titres aux moins : en tant que rédacteur en chef du *Bulletin astronomique*, et membre du Bureau des longitudes.[1] Par ailleurs, quelques années plus tard, dans le cadre des expériences de Victor Crémieu, Poincaré a fait lui-même la théorie d'un instrument de mesure : la balance quadrifilaire (Walter 2007, § 2-17-19).

22.1 Hamy à Poincaré

Paris, le 2 février 1898

À Monsieur Poincaré, membre de l'Institut

Monsieur,
J'ai l'honneur de vous adresser mon article sur le bain de mercure à couche épaisse.[2] J'ai beaucoup tardé à vous le faire parvenir, contrairement à ma promesse. Des occupations, sur lesquelles je ne comptais pas il y a deux mois, sont survenues et m'ont empêché de le rédiger plus tot.
Je vous prie, Monsieur, d'agréer, avec mes excuses, l'expression de mes sentiments très respectueux.
M. Hamy

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

1. À propos des opérations liées à la mesure de la différence de longitude entre Paris et Greenwich, voir la correspondance entre Poincaré et William Christie.

2. Hamy 1898. Sur ce même sujet, Maurice Lœwy a présenté une note de Hamy à l'Académie des sciences de Paris le 15 novembre 1897 (Hamy 1897).

Chapitre 23

Spiru C. Haret

Spiru Haret naît le 15 février 1851 à Iasi (Roumanie). Entre 1869 et 1874, il suit une formation en mathématiques et physique à l'université de Bucarest, puis à partir de 1874, il poursuit ses études de mathématiques et physique à la Sorbonne. En 1878, il soutient une thèse "Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires" (Haret 1885), dans laquelle il met en évidence, dans les développements des grands axes des orbites des planètes, l'existence d'un terme séculaire de degré 3. Ce résultat surprenant infirmait celui de Poisson. [1] Chez Poincaré, Haret a pu contribuer à ses doutes quant à l'avenir des anciennes méthodes, qui sont à l'origine de sa théorie qualitative. [2]

La Faculté des sciences de Grenoble cherche alors à recruter Haret, mais il retourne en Roumanie pour occuper la chaire de mécanique rationnelle à la Faculté des sciences de Bucarest. [3] Haret s'investit administrativement et politiquement dans le développement de l'instruction publique et fut à plusieurs reprises Ministre de l'éducation publique. Il fonde l'Observatoire de Bucarest dont Nicolae Coculesco sera le premier directeur.

Durant sa carrière universitaire et politique, Haret avait abandonné la recherche. Au moment de sa retraite, en 1910, il publie *La mécanique sociale* (Haret 1910), dans lequel il tente d'appliquer les mathématiques à l'étude des phénomènes sociaux. La publication de cet ouvrage est l'occasion de l'échange épistolaire entre Haret et Poincaré.

Haret disparaît quelques mois seulement après Poincaré, mais pas avant de faire son éloge devant l'Académie Roumaine, de l'homme Henri Poincaré et de son "œuvre colossale." [4]

1. Mioc & Stavinschi 2001.
2. Poincaré 1921, 105 ; Gilain 1991.
3. Diacu & Holmes 1996, 145.
4. Voir l'extrait de l'éloge traduit du roumain, dans Stavinschi (2004).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_23

23.1 Haret à Poincaré

$\frac{18}{31}$ I [1]912 [5]

M. Henri Poincaré, Membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne

Monsieur,

Veuillez m'excuser de ce que, n'ayant pas l'honneur d'être connu de vous autrement que par l'envoi, il y a un an, de mon ouvrage sur la *Mécanique Sociale*, je viens vous entretenir un moment sur un sujet qui, à mon avis, intéresse les sciences à un haut point. [6]

Vous êtes un grand mathématicien, et en même temps un grand philosophe. En cette double qualité, je pense qu'il est impossible que vous n'ayez pas été frappé, comme moi, par l'ignorance dont très souvent des savants [a] distingués, mais qui ne sont pas mathématiciens, des principes et des méthodes mathématiques. [7] Or depuis quelques temps ces principes et ces méthodes tendent à pénétrer dans des domaines où, il n'y a pas longtemps, on considérait leur intrusion comme une impossibilité, si ce n'est comme une absurdité. Il en suit que souvent dans l'établissement de nouvelles théories, intéressantes au moins par leurs tendances, si ce n'est encore par leurs résultats acquis, on voit surgir des discussions oiseuses qui n'auraient pas lieu, si ceux qui y prennent part étaient mieux au courant des principes et des méthodes mathématiques.

Je crois qu'une bonne partie de cet inconvénient disparaîtrait si on mettait à la portée de ces savants un livre qui contienne l'exposition de ces méthodes et de ces principes entièrement dégagée [b] de tout appareil technique, mais écrit de telle sorte qu'il se mette au niveau des connaissances et de la manière de voir des savants qui ne font pas des mathématiques l'objet habituel de leurs études.

Pour faire un pareil livre, il faut un homme de grande autorité qui soit un grand mathématicien, doublé d'un philosophe. Je ne verrais, dans le monde savant contemporain, que deux personnes qui répondent à [c] ces conditions : c'est vous et M. Émile Picard.

C'est pourquoi je me permets de soumettre cette idée à votre haute appréciation. Si, comme moi, vous pensez que la chose en vaut la peine, pour vous ce serait un jeu de mettre au service de la science un pareil livre, soit que vous vous en chargiez vous-même dans vos moments disponibles, soit que M. Picard veuille bien s'en charger, [d] soit que un de vos nombreux brillants étudiants s'en acquitte, en profitant de vos conseils et sous votre direction.

Vous êtes le maître, Monsieur, de juger de l'opportunité de cette proposition, et de lui donner la suite que vous jugerez convenable. Dans tous les cas, veuillez croire que, si

5. Sur les relations entre Poincaré et Haret, voir M. Stavinschi (2004).
6. Haret 1910.
7. Lire : "En cette double qualité, je pense qu'il est impossible que vous n'ayez pas été frappé, comme moi, par l'ignorance dont [font preuve] très souvent des savants distingués [–] mais qui ne sont pas mathématiciens [–] des principes et des méthodes mathématiques."

a. Variante : "des savants ~~très~~ distingués".
b. Variante : "entièrement ~~dépourvue~~".
c. Variante : "qui répondent à ~~cette double~~".
d. Il s'agit d'un rajout en marge.

je me suis permis de vous adresser ces lignes, ce n'est que dans le désir de rendre un service à la science, en attirant votre attention sur un travail qui ne ferait qu'augmenter votre gloire scientifique, déjà si grande.
Veuillez en même temps agréer, Monsieur, l'expression des sentiments de haute considération et d'estime que je vous conserve.

ADft 2p. Fonds Spiru C. Haret, Archives nationales historiques centrales de la Roumanie.

23.2 Poincaré à Haret

[Vers le mois de février 1912]
UNIVERSITÉ DE PARIS — FACULTÉ DES SCIENCES — MÉCANIQUE CÉLESTE

Monsieur,
Une commission que j'ai présidée s'est réunie il y a quelques mois afin d'étudier les questions relatives aux applications des mathématiques à la Biologie, à la Sociologie etc. Elle a décidé qu'il y avait lieu de rédiger un petit volume destiné à initier rapidement les adeptes de ces sciences à celles des méthodes mathématiques qui peuvent leur être utiles. La rédaction en a été confiée à un jeune homme, qui je l'espère, s'en tirera bien et qui se soumettra d'ailleurs au contrôle de la Commission. [8]
Je suis heureux de la circonstance qui me met en rapport avec vous dont le nom m'est depuis longtemps connu puisque j'ai assisté à votre soutenance. [9]

8. Poincaré fait peut-être allusion au livre d'Émile Borel, *Le Hasard* (1914), où l'on trouve un chapitre consacré à l'application des lois du hasard aux sciences sociologiques et biologiques.

9. Haret avait soutenu sa thèse en 1878 (Haret 1885) sur la question de la stabilité dans le problème des trois corps. Poincaré fait allusion dans ses *Leçons de mécanique céleste* au résultat de Haret, en rappelant le théorème de l'invariabilité des grands axes, selon lequel les développements des grands axes ne contiennent pas de termes séculaires, pourvu qu'on néglige les carrés des masses, et l'extension due à Poisson, qui prenait en compte les carrés des masses, et négligait les cubes. Poincaré continue son récit (1905b, 308) :

> Après la découverte de Poisson, on crut longtemps que le théorème était général et que, après l'avoir démontré d'abord pour la première approximation, puis pour la seconde, on ne tarderait pas à le démontrer également pour les approximations suivantes. De grands efforts furent faits dans ce sens et, naturellement, ils furent infructeux.
>
> En 1876, M. Spiru-Haretu montra l'existence de termes en $\mu^3 t$ et ce résultat causa un grand étonnement, bien que dès cette époque, quelques personnes en aient soupçonné la raison. Il n'a plus aujourd'hui rien qui puisse nous surprendre.

Il est vraisemblable que dans ce passage Poincaré pense à la thèse de Haret (1878), ou à la note dans laquelle Haret annonce son résultat (Haret 1877). Quant à Haret, il se souviendra plus tard (1912, 57–58) que son résultat était connu de Poincaré :

> En laissant de côté beaucoup d'autres mémoires, tous inspirés de la même puissante originalité, je dois mentionner son célèbre mémoire de 1889 sur la stabilité du système solaire [. . .]. La question était ancienne, car déjà en 1773, *Laplace* avait annoncé que, si l'on se bornait seulement à la première puissance des masses, les grands axes des orbites planétaires n'ont pas de variations séculaires. Cette question a également occupé *Lagrange*, *Poisson* et *Liouville*. Mais elle présentait de si grandes difficultés, que la propriété de l'invariabilité des grands axes ne pût être démontrée qu'en tenant compte des carrés des masses. On pensait toutefois, par analogie, que cette propriété était générale, supposition qu'on a prouvé ne pas être fondée quand j'ai réussi à démontrer que l'invariabilité des

Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 2p. Fonds Spiru C. Haret, Archives nationales historiques centrales de la Roumanie.

axes, et par conséquent la stabilité séculaire des systèmes planétaires, ne subsiste plus si l'on tient compte des cubes des masses. En partant de là, *Poincaré* écrivit son splendide mémoire dans lequel il généralise le résultat ainsi obtenu, et démontre, par conséquent pour tous les cas, l'existence de perturbations séculaires des axes.

On voit que l'intérêt de Poincaré pour le problème des trois corps remonte à l'époque où il était encore étudiant à l'École des Mines.

Bien que la démonstration de Haret soit incomplète, ce résultat était considéré comme une étape significative concernant la question de la stabilité du système solaire et était souvent cité. Ainsi, dans le premier tome de son *Traité de mécanique céleste*, Tisserand (1889b, 402) cite la thèse de Haret en en indiquant les limites :

> Dans une Thèse soutenue à la Sorbonne en 1878, M. Spiru C. Haretu a suivi la voie que j'avais indiquée ; il a repris, en outre, une ancienne démonstration dans laquelle Poisson croyait avoir prouvé que les grands axes n'ont pas d'inégalités séculaire du troisième ordre par rapport aux masses, quand on a égard seulement aux variations des éléments de la planète troublée. M. Haretu arrive à montrer que les grands axes ont des inégalités séculaires du troisième ordre par rapport aux masses ; mais il n'a pas cherché à se faire une idée de la grandeur de ces inégalités.

Dans son *Mémoire sur la stabilité du système solaire*, Eginitis (1889) rappelle les contributions de Poisson, Lagrange, Tisserand et Haret. Il signale (p. H4) à la suite de Tisserand que si Haret "a trouvé un terme du troisième ordre proportionnel au temps", il "n'a pas cherché à se rendre compte de sa grandeur, ni à donner son expression analytique" :

> Il est donc très intéressant, pour l'Astronomie théorique ainsi que pour l'avenir même du système planétaire, de chercher s'il y a desinégalités séculaires des grands axes, de déterminer leur nature et de calculer leur effet.
>
> En étudiant les inégalités du troisième ordre des grands axes, nous avons trouvé des termes séculaires dont nous allons donner l'expression analytique.

A. Gaillot, dans ses *Additions à la théorie du mouvement de Saturne de Le Verrier* indique que ses résultats, à la suite de ceux de Le Verrier, confirment ceux de Haret :

> On sait, cela ayant été démontré, d'abord par Poisson, et ensuite par Tisserand, qu'il n'existe pas de variations séculaires du grand axe, et par conséquent du moyen mouvement, dépendant des carrés ou des produits deux à deux des masses planétaires.
>
> Mais, dans une Thèse pour le Doctorat, soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris et reproduite dans le Tome XVIII des *Annales de l'Observatoire*, M. Haretu a signalé, dans les variations du grand axes, l'existence de termes séculaires du troisième ordre par rapport aux masses.
>
> Nous avons vérifié que, malgré une grave omission dans la seconde partie du travail, les conclusions de M. Haretu sont exactes, en ce sens qu'il existe réellement des variations séculaires du grand axe ayant l'origine qu'il a indiquée. (Gaillot 1904, 155)

Pour plus de précisions techniques, on peut consulter J. Meffroy (1958), T. Ratiu (1985), et Á. Pál (1991).

Chapitre 24

Philippe Hatt

Philippe Eugène Hatt (1840–1915) a été formé au Service hydrographique de la Marine. La première mission de Hatt a eu lieu en 1861, lorsqu'il a accompagné Anatole Bouquet de la Grye à Alexandrie. En 1865, il fut envoyé en Cochinchine pour réaliser diverses missions de reconnaissance des côtes, lors de l'annexion française du territoire compris entre le cours du Cambodge et le golfe de Siam. Ces explorations servent également les savants. Dans la baie de Gahn-Ray Hatt prépare toutes les dispositions nécessaires pour observer, avec les astronomes Edouard Stéphan (1837–1923), Georges Rayet (1839–1906) et Félix Tisserand, l'éclipse totale du Soleil du 18 août 1868. Parmi les autres missions scientifiques de Hatt, citons les observations du passage de Vénus en 1874 à l'île Campbell, et en 1882 à Chubert.

Hatt s'est consacré en outre à l'étude hydrographique des côtes françaises, et à l'étude des marées. En 1897, Hatt fut élu à l'Académie des sciences de Paris, section de géographie et navigation. Il est mort à Guindalos en 1915 (Renaud 1917 ; Académie des sciences 1968, 258).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_24

24.1 Hatt à Poincaré

3 Mai 1907
Guindalos par Pau (Basses Pyrénées)

Mon cher Confrère,
Je suis engagé vis à vis de mon camarade de Lapparent à qui j'ai promis ma voix dans le cas où je pourrais assister au vote du 13 mai. [1]
Il m'est donc impossible, à mon grand regret, de manifester autrement que d'une manière platonique la sympathie que j'ai pour vous, sans arrière pensée ni réserve, il est presque inutile de vous l'affirmer. D'ailleurs il est probable maintenant que l'état de ma santé m'obligera à rester neutre.
Croyez, mon cher Confrère, à mes sentiments bien dévoués.
Ph. Hatt

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

1. Il s'agit de l'élection du secrétaire perpétuel pour les sciences physiques, en remplacement de Marcelin Berthelot, qui oppose Albert de Lapparent et Poincaré ; voir les notes de la lettre de Poincaré à H. Becquerel du 10.05.1907 (Walter 2007, § 2-4-12).

Chapitre 25

Friedrich Robert Helmert

Friedrich Robert Helmert (1843–1917) s'est inscrit à l'École polytechnique de Dresde en 1859, et a été embauché par son professeur de géodésie, August Nagel, pour entreprendre des travaux géodésiques qui ont mené à une thèse soutenue à l'Université de Leipzig en 1868 sur les mesures géodésiques. L'année suivante, Helmert fut engagé à l'Observatoire de Hamburg, et en 1870, il a enseigné la géodésie à la *Technische Hochschule* d'Aix la Chapelle, avant d'être nommé professeur en 1872. En 1886, Helmert fut nommé directeur par intérim de l'Institut géodésique de Prusse, et l'année d'après, professeur de géodésie à l'Université de Berlin, et directeur de l'Institut géodésique.

Parmi les contributions de Helmert en géodésie, son traité sur les théories mathématiques et physique de la géodésie (Helmert 1880, 1884) est considéré par Fischer (1972) comme son chef d'œuvre, alors que Sheynin (1995) place les contributions de Helmert à la théorie des erreurs dans la préhistoire des statistiques mathématiques. Helmert soutenait la méthode qu'il appelait *astronomisches Nivellement* pour la détermination du géoïde, dans laquelle on se sert des déviations d'un fil à plomb du vertical (défini par la droite orthogonale à la surface d'un ellipsoïde de révolution associé au lieu) afin de déterminer le méridien.

La lettre que nous publions ici est la réponse de Helmert à l'article de Poincaré sur les mesures de gravité et la géodésie (Poincaré 1901c). À ce sujet, voir aussi Callandreau (1901a), Lallemand à Poincaré, 25.10.1900 (§ 3-28-2), et le rapport rédigé par Poincaré "sur la Lettre de M. Helmert" (§ 3-47-20).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_25

25.1 Helmert à Poincaré

POTSDAM, DEN 1. März 1901
KGL. GEODÄTISCHES INSTITUT — DER DIRECTEUR

Monsieur H. Poincaré à Paris

Hochgeehrter Herr!
Gestatten Sie mir als dem Meistbetheiligten zu Ihrer Abhandlung „Les mesures de gravité et la géodésie“ mit der Sie die Geodäsie beschenkt haben, ein paar Bemerkungen.[1]
1) Sie wissen wohl schon, dass Stokes 1849 ebenfalls gezeigt hat, wie man die Anomalien des Geoïds aus g finden kann.[2] Ich habe seine Entwicklung auch in meinen *Theorien*, II, p. 249–253, gegeben.[3] Die Endformel stimmt genau mit Ihrer Formel (1) p. 30. Beiläufig bemerke ich, dass in $\mathcal{G}(\varrho)$ anstatt $\frac{3\varrho}{2}$ stehen muss 3ϱ; das ist nur ein Druckfehler.
Pizzetti hat eine ganz andere Entwicklung gegeben in den *Atti della R. Acc. di Torino*, 1896.[4]
2) Die Fortsetzung der Meeresfläche, welche Sie p. 6 als *continuation analytique* bezeichen,[5] ist meines Erachtens für die Erde nicht brauchbar, da die Erdkruste nicht homogen ist :

1. Poincaré 1901c.
2. Stokes 1849.
3. Helmert 1884.
4. Pizzetti 1896.
5. Helmert se réfère au passage suivant :

> … il est aisé de constater que la surface des mers et celle du géoïde G_1 sont définies par des équations dont les premiers membres sont des fonctions analytiques *entièrement différentes*.
>
> Faisons, par exemple, une hypothèse aussi simple que possible. Le noyau solide de la planète a la forme d'un ellipsoïde et sa densité est constante. Il n'y a pas de rotation. Le noyau est partiellement recouvert par une masse liquide, qui joue le rôle de nos mers, mais *dont la densité est négligeable*.
>
> Il est aisé alors de définir le géoïde G_1 qui prolonge la surface de cette mer sous la partie du noyau solide qui n'est pas recouverte ; on constate alors que la surface G_1 est un ellipsoïde tandis que la surface de la mer est une surface transcendante.
>
> J'appellerai donc G_2 le géoïde qui est la continuation *analytique* de la surface des mers au-dessous des continents. (Poincaré 1901c, 6)

Denkt man sich nämlich in einem homogenen Continent eine Massenstörung $\pm m$, die Kugelförmig ist, so giebt das in $W_{\text{innerhalb}} \equiv W_a$ ein Glied $\pm\frac{m}{r}$, welcher bei der analytischen Fortsetzung von W_a nach innen in C, dem Mittelpunkt von M, $\pm\infty$ wird.
Folglich wird W_a innerhalb der Continentalplatte oft $\pm\infty$ und es giebt Fälle, wo g null wird. Die verlängerten Niveauflächen sind daher z. Th. von der Form:

3) p. 9 2° La valeur de gravité, affectée des corrections de Faye et de Bouguer etc.[6] Dies ist nicht richtig. Denn wenn ich die Continente *ganz* abräume, so wird die Correction von g wesentlich grösser als nach Bouguer. Die Meeresfläche bleibt aber auch keine Niveaufläche. Diese Reductionsweise 2° hat nur einen Sinn, wenn man die von mir eingeführten ideellen Störungsmassen in Meeresniveau bestimmen will: „Schwerkraft im Hochgebirge" p. 40.[7]
Mit der grössten Hochachtung, Ihr ergebener
Helmert

ALS 3p. Collection particulière, Paris 75017.

6. Helmert invoque le passage suivant de l'article de Poincaré :

> 2° La valeur de la gravité, affectée des corrections de Faye et de Bouguer, c'est ce que serait la pesanteur à la surface du géoïde, les masses continentales étant rasées ; c'est ce que j'appellerai g''. (Poincaré 1901c, 9)

7. Helmert 1890.

Chapitre 26

George William Hill

George William Hill (1838–1914) a appris les mathématiques et la mécanique céleste à *Rutgers College*, auprès du mathématicien Theodore Strong, ami du traducteur de la *Mécanique céleste* de Laplace, Nathaniel Bowditch. Strong (1790–1869) lui a fait connaître l'œuvre de l'école mathématique française, dont le *Traité du calcul différentiel et intégral* de Lacroix, le *Traité de mécanique* de Poisson, la *Mécanique analytique* de Lagrange, et les *Fonctions elliptiques* de Legendre, entre autres (Woodward 1914). En 1859, Hill a obtenu le diplôme de *Bachelor of Arts* à Rutgers, et peu après, il est entré au bureau du *Nautical Almanac*, où il sera employé jusqu'à sa retraite, d'abord à Cambridge puis, à partir de 1867, à Washington, D.C.

La théorie de la lune a attiré l'attention de Hill dans les années 1870, alors qu'on disposait de deux méthodes de calcul : celle de Hansen, plutôt numérique et celle de Delaunay, plus algébrique. Hill s'est convaincu que ces deux méthodes étaient inadéquates, et en 1877–1878, il en a proposé une troisième, qui s'est montrée, avec les apports de Ernest W. Brown à partir des années 1890, supérieure à ses prédécesseurs, jusqu'à remplacer en 1922 la méthode de Hansen utilisée pour les almanachs.

Hill aurait aimé parfaire sa propre théorie, mais il n'a pas eu le temps de le faire. Lorsque Simon Newcomb a pris la direction du *Nautical Almanac* en 1877, il a confié a Hill les tâches de refonte de la théorie de Jupiter et de Saturne, dans un projet ambitieux de réfection des tables de toutes les planètes, ainsi que la refonte des tables lunaires, selon la méthode de Hansen. Ces travaux ont absorbé les efforts de Hill jusqu'à sa retraite en 1892.

Hill a obtenu la médaille d'or de la *Royal Astronomical Society* en 1887, le prix Damoiseau de l'Institut de France en 1898, et la médaille Bruce de l'*Astronomical Society of the Pacific* in 1909. Il a présidé l'*American Mathematical Society* en 1895–1896, et a enseigné la mécanique céleste à *Columbia University* entre 1898 et 1901.

Poincaré estimait les contributions de Hill, qu'il a présentées dans son introduction aux *Collected Papers* de ce dernier (Poincaré 1905a). Deux contributions en particulier ont retenu l'attention de Poincaré. D'abord, dans son calcul de la périgée lunaire, Hill a rencontré un déterminant d'ordre infini, qu'il a réussi à résoudre. Par conséquent, Hill a

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_26

non seulement simplifié les calculs par rapport à la méthode de Delaunay, son exemple a incité Poincaré à reprendre son analyse, dans un article qui lancera une vague de développements à propos des déterminants infinis (Poincaré 1900d ; Bernkopf 1968). Ensuite, le travail de Hill sur une solution périodique du problème des trois corps (terre-lune-soleil) a été, comme l'a remarqué Poincaré, "le premier exemple d'une solution périodique du problème des 3 corps," alors que ces solutions périodiques "ont pris une importance tout à fait capitale en Mécanique Céleste"(Poincaré 1905a, XII).

La correspondance entre Hill et Poincaré comprend une seule lettre, envoyée par Hill en remerciement pour le premier tome des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Poincaré avait noté qu'une des affirmations de Hill sur les orbites de lunes était inexactes ; Hill a reconnu son erreur. [1]

26.1 Hill à Poincaré

1892 Jan. 20
Nautical Almanac Office — Washington D.C.

M. H. Poincaré — Membre de l'Institut — Professeur à la Faculté des Sciences — Paris, France

Cher Monsieur :
J'ai reçu l'exemplaire de Tom. I de votre *"Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste"* que vous avez été aussi bon que d'envoyer. [2] Acceptez mes remerciements.
Relativement à votre critique de ma affirmation de la lune de lunaison maximum (pp. 104–109), vous avez raison j'admets. [3] Il m'échappa que la rotation des axes des coordonnées

1. À propos de la théorie lunaire dite de Hill-Brown, voir C. Wilson (2010), et sur l'influence de Hill sur Poincaré, voir Nauenberg & Charpentier (2006). Pour des survols de la vie de Hill, voir Moulton (1914) et Brown (1916).

2. Poincaré 1892b.

3. Dans ses *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Poincaré s'intéresse aux "recherches de M. Hill sur la lune" par rapport aux solutions périodiques. Il reprend l'étude de Hill du problème des trois corps lorsque la masse d'un des corps (C) est très grande par rapport à celle des deux autres corps et que la distance entre le corps le plus massique (C) et un des autres corps (A) est très grande :

> Si, en même temps, on rapporte la masse B à deux axes mobiles, à savoir un axe $A\xi$ coïncidant avec AC et à un axe $A\eta$ perpendiculaire au premier, les équations du mouvement deviendront comme M. Hill l'a démontré,
>
> $$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{\mu}{r^3} - 3n^2\right)\xi = 0 \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} - 2n\frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{\mu}{r^3}\right)\eta = 0 \, ; \end{array} \right. \tag{1}$$
>
> n désigne la vitesse angulaire de C.
> Les solutions de la première sorte subsistent encore dans ce cas et ce sont celles dont M. Hill a reconnu le premier l'existence, ainsi qe l'ai dit plus haut. [. . .]
> Les équations (1) admettent une intégrale qui s'écrit
>
> $$\frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - \frac{\mu}{r} - \frac{3}{2}n^2\xi^2 = C.$$
>
> (Poincaré 1892b, 104–105, avec correction d'une coquille, $\mu/2 \to \mu/r$)

rendît le mouvement de l'élongation rétrograde pendant que la lune maintînt un mouvement direct en espace. En faisant la quadrature mécanique à partir de l'axe de x, je me trompe en s'attendant la quadrature symétrique toujours à la *première* intersection de la courbe avec l'axe de y. Evidemment, il faut quelquefois de prolonger la courbe à l'intersection deuxième.
Je note que votre équation de p. 105 il faut de lire $1/C$ à la place de C pour que les re-

---

Hill étudie alors numériquement les variations de la trajectoire périodique en fonction de C.

> The method of employing numerical values, from the outset, in the equation of condition, determining the a_i, is far less laborious than the literal development of these coefficient in powers of a parameter. (Hill 1878, 245)

La forme de la trajectoire "rappelle grossièrement celle d'une ellipse dont le grand axe serait l'axe des η". Lorsque C augmente, l'excentricité augmente et Hill montre que pour une certaine valeur C_0 de C, la courbe présente deux points de rebroussement situés sur l'axe des η. Hill dénomme cette orbite "Moon of maximum lunation" :

> Any information regarding the motion of satellites having long periods of revolution about their primaries will doubtless be welcome, as the series given by previous investigators are inadequate for showing anything in this direction. Hence this chapter will be terminated by a table of the more salient properties of the class of satellites having the radius at a minimum in syzygies and at a maximum in quadratures. For this end I have selected, besides the earth's moon, taken for the sake of comparison, the moons of 10, 9, 8, ..., 3 lunations in the periods of their primaries, and also what may be called the moon of maximum lunation, as, of the class of satellites under discussion, exhibiting the complete round of phases, it has the longest lunation. (Hill 1878, 250)

Hill termine son article par une série de courbes construites point par point représentant la trajectoire de la lune terrestre, des lunes présentant quatre et trois lunaisons ainsi que celle de lune de lunaison maximum :

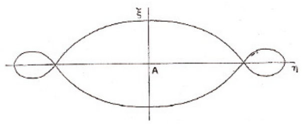
> The moons in the first lines of the table have paths which approach the ellipse quite closely, but the paths of the moons of the last lines exhibit considerable deviation from this curve, while the orbit of the moon of maximum lunation has sharp cusps at the points of quadrature. (Hill 1878, 260)

Hill affirme sans démonstration ni même justification qu'au-delà de la valeur critique C_0, les solutions périodiques n'existent plus, ou du moins se réduisent à des oscillations qui n'intersectent pas l'axe η des quadratures :

> Whether this class of satellites is properly to be prolonged beyond this moon, can only be decided by further employment of mechanical quadratures. But it is at least certain that the orbits, if they do exist, do not intersect the line of quadratures, and that the moons describing them would make oscillations to and fro, never departing as much as 90° from the point of conjunction or of opposition. (Hill 1878, 259)

Poincaré montre que "la classe de satellites découverte par M. Hill peut être prolongée au-delà de la Lune de lunaison maximum" (Poincaré 1892b, 108) et il étudie la forme de l'orbite de la lune au-delà de la valeur critique :

> La trajectoire relative pour $C > C_0$ présente donc la forme représentée par la figure ci-contre.
> Dans le cours d'une période, la masse B se trouve six fois en quadrature, car sa trajectoire relative coupe l'axe des η en deux points doubles et en deux points simples.



> Ainsi M. Hill se trompe en supposant que cette sorte de satellites ne seraient jamais en quadrature ; *il y aurait, au contraire, trois quadratures entre deux syzygies consécutives.* (Poincaré 1892b, 109)

Une figure analogue a été publiée par W. Thomson (1892). Pour une étude de cette orbite voir Wintner (1928) et Szebehely (1967, chap. 10).

marques suivantes relatives à C s'appliquent.
Les brillantes additions que vous avez contribué à la mécanique céleste causent en moi un vif regret d'avoir négligé pour aussi long un temps les recherches de cette sorte. Cependant j'ai été industrieux dans une autre direction.[4]
En terminant, permettez moi de vous remercier pour votre bienfaisant intérêt en mes contributions à la théorie lunaire et pour la flatteuse mention vous en avez faite dans vos écritures.
Agréez, Monsieur, etc. — Votre serviteur dévoué,
G.W. Hill

ALS 3p. Collection particulière, Paris 75017.

4. Hill n'a rien publié en mécanique céleste entre 1880 et 1895. Durant cette période, il suivait le programme de travail proposé par Simon Newcomb, de reconsidérer l'ensemble des mouvements des planètes du système solaire, et a fini par perfectionner les théories de Saturne et de Jupiter (Hill 1890). Hill a pris sa retraite en 1892, et a repris alors ses études théoriques, ce qui aboutira à plusieurs articles sur le problème des trois corps et sur la théorie de Delaunay (Hill 1895, 1900, 1902).

Chapitre 27

Jules Janssen

Pierre Jules César Janssen (1824–1907) a obtenu les licences de mathématiques et de physique à la Faculté des sciences de Paris, et un poste de professeur suppléant au lycée Charlemagne en 1853. À partir de 1862, Janssen étudia les raies telluriques du spectre solaire (Hentschel 2002, 102).

En 1874, le gouvernement a voté l'établissement d'un observatoire d'astronomie physique et Janssen, chargé de le diriger, a choisi de l'installer à Meudon. Janssen réalisa alors un atlas de photographies solaires avec des clichés obtenus à l'Observatoire d'astronomie physique de Meudon et au sommet du Mont Blanc, avec le concours financier de Bischoffsheim, d'Eiffel et de Roland Bonaparte.

La réputation scientifique de Janssen fut construite autour de ses études de la constitution physique du Soleil, qui impliquent l'analyse spectrale et la photographie. Janssen fut également l'inventeur d'instruments, dont le revolver photographique employé lors du passage de Vénus en 1874.

Membre de plusieurs sociétés savantes (dont la Société de photographie), Janssen fut élu membre étranger de la Société royale de Londres en 1872 et, l'année suivante, membre de l'Académie des sciences de Paris, section d'astronomie. En 1873, il fut élu membre géographe du Bureau des longitudes, et devint membre astronome en 1875. Janssen fut président de l'Académie des sciences pour l'année 1887 et du Bureau des longitudes pour l'année 1895.

Sur la vie et les travaux de Janssen, voir le *DSB* (Lévy 1973), les *Œuvres* de Janssen (Dehérain 1929), Bigourdan (1908), Hentschel (2002), et Launay (2008, 2011).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_27

27.1 Poincaré à Janssen

[1895] [1]

Monsieur le Président et très honoré Confrère,
Je ne pourrai me joindre à vous pour aller à l'Elysée ; c'est l'heure de mon cours ; veuillez m'excuser.
Veuillez agréer l'assurance de mes sentiments bien sincèrement dévoués,
Poincaré

ALS 1p. MS 4136.445, Bibliothèque de l'Institut de France.

27.2 Poincaré à Janssen

[1895]

Monsieur le Président,
Je ne pourrai assister à la visite du Bureau au Ministre, car c'est précisément l'heure de mon cours.
Veuillez agréer, Monsieur le Président et très honoré Confrère, l'assurance de ma considération la plus distinguée et de mes sentiments les plus dévoués,
Poincaré

ALS 1p. MS 4136.446, Bibliothèque de l'Institut.

1. Janssen fut Président du Bureau des longitudes en 1895.

27.3 Poincaré à Janssen

[Fin juin, entre 1896 et 1898]

Mon cher maître,
Nous avons reçu vers le 1er Juin une lettre de Schneider le constructeur de Vienne qui semble déjà trouver le temps long après son argent et qui rappelle qu'il a confié l'instrument au Colonel Von Sterneck qui s'est chargé du réglage de l'emballage et de l'expédition.[2] J'ai alors écrit à M. Schneider et à M. Von Sterneck pour les avertir que nous n'avions pas reçu le pendule. Ces deux lettres n'ont reçu aucune réponse ; mais il est arrivé le 15 Juin une enveloppe contenant le prospectus d'une agence en douane de Vienne avec deux petites clefs et des indications d'où il résultait que ces deux clefs étaient celles des deux caisses contenant l'instrument et ses accessoires.
Depuis aucune nouvelle.
Mais l'enveloppe et les clefs ont été mises à la poste le 13 Juin ; je me demande si on les a mises à la poste en même temps qu'on mettait les caisses elles-mêmes, à la petite vitesse ; dans ce cas nous ne recevrions pas les paquets avant quinze jours environ.
Veuillez agréer, mon cher maître, l'assurance de ma respectueuse considération,
Poincaré

ALS 3p. MS 4136.444, Bibliothèque de l'Institut de France.

2. Il s'agit du pendule à demi-seconde construit par Von Sterneck, officier autrichien. Sterneck s'est rendu au Bureau central de l'Association géodésique internationale (Potsdam) en juillet 1892, afin de réaliser des observations et d'apporter des améliorations dans la construction de son appareil. L'appareil servit pour la détermination de l'intensité de la pesanteur d'environ 200 stations géodésiques russes et de 21 stations étrangères. Les observations de Sterneck réalisées pour le nivellement de précision dans les Alpes ont été empruntées par Helmert afin d'améliorer l'estimation de la forme du géoïde ; voir Helmert (1894) et Poincaré (§ 3-47-20).

Chapitre 28

Jean Pierre Charles Lallemand

Jean Pierre Charles Lallemand (1857–1938) entra à l'École polytechnique en 1874, et à sa sortie il a choisi l'École des Mines. Il commença sa carrière comme secrétaire du Conseil général des Mines. En 1880, il fut rattaché à la Commission interministérielle du ministère des transports publics, créée en 1878 par Charles de Freycinet (1828–1923). À cette époque le gouvernement menait un grand programme de travaux publics : la construction de canaux, de routes, et de voies ferrées, et des études hydrauliques de tout genre. Ces travaux faisaient appel à une connaissance précise du relief du sol, et des crédits importants furent alloués à la réalisation du nivellement d'ensemble du pays.

Avec la triangulation, qui fixe la position des points du sol en projection horizontale, le nivellement, qui en détermine les altitudes, est l'une des deux branches essentielles de la géodésie. Auparavant, le nivellement avait été exécuté concurremment avec la triangulation, au moyen de visées longues de plusieurs kilomètres. Il arrive que la réfraction atmosphérique courbe les rayons dans le plan vertical, rendant la précision des mesures insuffisante. La commission dont Lallemand fit partie fut chargée de donner une base commune aux travaux réalisés par une méthode de nivellement, dite "nivellement géométrique", développée depuis le début du XIXe siècle (Graber 2006). La commission devait également entretenir et améliorer le réseau existant. En 1881, Lallemand fut nommé secrétaire du comité d'exécution de la même commission. Sous son impulsion, de nouvelles méthodes furent mises au point, les instruments et les repères furent perfectionnés, et les calculs furent modernisés. En 1884, Lallemand organisa et dirigea le nouveau Service du nivellement général de la France. Lallemand conserva cette direction pendant quarante-quatre ans, jusqu'à sa retraite en 1928.

Élu en 1910 à l'Académie des sciences de Paris, section de géographie et navigation, Lallemand présida l'Académie en 1926. Il devint membre du Bureau des longitudes en 1917, et présida l'Union géodésique et géophysique internationale entre 1919 et 1933 (Vignal 1938).

Des deux lettres envoyées par Lallemand à Poincaré que nous publions ici, la première (§ 3-28-1) concerne la réfection des plans cadastraux. En 1891, une commission fut constituée au ministère des finances pour réaliser une réfection du cadastre. Lallemand en

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_28

fut membre et dirigea également un service technique du cadastre, créé en même temps, et rattaché à la Direction générale des contributions directes. Dans ce cadre, Lallemand fit emploi de la photographie pour obtenir rapidement des plans économiques et précis du territoire, par groupement et réduction des plans parcellaires. Il perfectionna les instruments et créa un cercle azimutal à microscopes permettant à l'observateur de faire toutes les mesures angulaires sans se déplacer autour de l'instrument.

La deuxième lettre de Lallemand à Poincaré (§ 3-28-2) concerne les contributions de Lallemand au progrès de l'art des nivellements : l'étude de nouveaux modèles de repères, la modernisation des calculs, la création des procédés graphiques de calcul propres à résoudre automatiquement les opérations compliquées (et qui formeront, grâce à Maurice d'Ocagne, la Nomographie, une technique de calcul utilisant des systèmes de courbes qui généralisent les anciens abaques), et la mise en évidence, à côtés des erreurs accidentelles, des erreurs systématiques des nivellements. Lallemand améliora également le mode de détermination du niveau moyen de la mer par l'invention d'un nouveau instrument. En France, le niveau moyen de la mer fut celui observé à Marseille, dans un endroit rocheux et particulièrement stable. De 1884, Lallemand y fit installer un marégraphe totalisateur qui trace la courbe de la hauteur de la mer à chaque instant et fournit le niveau moyen pour un intervalle de temps quelconque. Par la suite, Lallemand installa un autre instrument, le médimarémètre, beaucoup plus simple et moins coûteux par rapport à son installation, sa surveillance et son entretien. Son principe de base fut l'amortissement des oscillations liquides transmises à travers une cloison poreuse. À la fin de sa lettre, Lallemand rappelle avoir montré que le niveau de la mer est à peu près le même tout au long du littoral français, contrairement à une opinion en vogue.

28.1 Lallemand à Poincaré

PARIS, LE 1 Juin 1896[1]
66, BOULEVARD Émile Augier[a]
MINISTÈRE DES TRAVAUX PUBLICS — NIVELLEMENT GÉNÉRAL DE LA FRANCE
BUREAU 35, RUE CAPRON

L'INGÉNIEUR EN CHEF DES MINES, DIRECTEUR DU SERVICE DU NIVELLEMENT GÉNÉRAL DE LA FRANCE,
À MONSIEUR Poincaré, Membre de l'Institut

Mon Cher ami,
Je t'envoie ci-joint la note résumant ma communication au Bureau des Longitudes sur le nouveau plan cadastral de Neuilly-Plaisance.[2]

1. Une note (TD, 3p.) que nous ne publions pas ici accompagne la lettre, intitulée "Note sur le nouveau plan cadastral de la Commune de Neuilly-Plaisance (Seine-et-Oise)."

2. Ch. Lallemand, *Note sur le nouveau plan cadastral de la Commune de Neuilly-Plaisance (Seine-et-Oise)*, TD 3p, Registres des séances du Bureau des longitudes, 1896, Paris. Par rapport aux anciens plans cadastraux, le plan de Lallemand, à l'échelle du 1000^{e} pour le parcellaire et du 5000^{e} pour le général, présente

a. Le manuscrit porte une adresse barrée : "~~3~~, Boulevard ~~Flandrin prolongé~~".

Tout à toi,
Ch. Lallemand

ALS 1p. Registre des séances 1896, Bureau des longitudes, Paris.

28.2 Lallemand à Poincaré

PARIS, LE 25 octobre 1900
66, BOULEVARD ÉMILE-AUGIER
MINISTÈRE DES TRAVAUX PUBLICS — NIVELLEMENT GÉNÉRAL DE LA FRANCE
BUREAU : 35, RUE CAPRON

L'INGÉNIEUR EN CHEF DES MINES, DIRECTEUR DU NIVELLEMENT GÉNÉRAL DE LA FRANCE,
À MONSIEUR H. Poincaré, Membre de l'Institut

Mon cher ami,
Je lis, dans un journal, que tu dois faire très prochainement à l'Institut une Communication, ou un discours sur la "*Géodésie française*". Pour le cas où tu croirais devoir dire un mot d'une des branches de la géodésie actuelle, le nivellement géométrique de précision, dont le créateur, Bourdalouë, est un français, veux-tu me permettre de te signaler particulièrement deux ou trois améliorations ou résultats que la France peut incontestablement revendiquer, savoir :
1° : L'introduction effective et pratique, dans les résultats des nivellements, de corrections destinées à tenir compte de la variation normale de la pesanteur. Wiltstein et Helmert avaient bien posé, dès 1879, dans les "*Astronomische Nachrichten*," le principe de ces corrections ; mais personne n'en a tenu compte avant que nous n'eussions, en 1884, trouvé un moyen graphique très simple et très commode de calculer ces corrections. À notre exemple, depuis cette époque, la correction orthométrique est partout appliquée aux nivellements de précision.
J'ai inséré, dans les *Procès-verbaux de l'Association géodésique* de 1887 une note assez étendue sur cette question ;
2° : Le "médimarémètre", que j'ai présenté cette même année à l'Académie et l'Association géodésique, qui est aujourd'hui en service sur presque toutes les mers du globe et qui a permis une détermination économique et sûre du niveau moyen de la mer ;
3° : La démonstration faite par moi en 1890, de l'uniformité de niveau des mers baignant l'Europe.[3] Cette démonstration, à l'époque, allait tellement à l'encontre des idées reçues que M. Maurice Lévy, en la présentant à l'Académie des Sciences, croyait devoir faire des réserves formelles et que la Conférence de Fribourg de l'Association géodésique (1890)

diverses améliorations parmi lesquelles : le rattachement, pour une petite triangulation spéciale, à la grande triangulation de l'Etat-major et, pour le plan au 5000^{e}, des courbes de niveau appuyées sur les cheminements du Nivellement général de la France. Lallemand précise les instruments utilisés pour réaliser les mesures angulaires et de base ainsi que les erreurs relatives, et les instruments utilisés pour la gravure et l'impression. Il décrit enfin la manière dont le travail a été exécuté dans ses différentes étapes depuis les observations sur le terrain jusqu'à la gravure, ainsi que les dépenses d'ensemble.

3. Lallemand 1890.

confiait au bureau central de Berlin le soin de vérifier mes calculs.[4] L'année suivante, en 1891, M. Helmert nous apportait à Florence un mémoire très complet,[(1)] confirmant tout à fait mes résultats sans toutefois y faire qu'une faible allusion, de sorte que, depuis lors, en Allemagne, le mérite de cette découverte est universellement attribué à l'Institut géodésique prussien.
Tu voudras bien, j'espère, excuser cette trop longue lettre.
Bien cordialement à toi,
Ch. Lallemand

(1) "Die Mittelwasser der Europa umspülenden Meere" von Dr. Börsch. Berlin 1891.[5]

ALS 3p. Collection particulière, Paris 75017.

4. Maurice Lévy (1838–1910) fut élu en 1883 à l'Académie des sciences de Paris dans la section de mécanique ; il présida l'Académie en 1900. Lévy fit savoir qu'il gardait une distance critique par rapport aux propos de Lallemand :

> En présentant cette Note, M. Maurice Lévy n'entend pas prendre parti dans la question mais seulement soumettre à la discussion les chiffres et les observations de l'auteur. (Lallemand 1890)

5. Börsch 1891.

Chapitre 29

Albert-Auguste Cochon de Lapparent

Albert-Auguste Cochon de Lapparent (1839–1908) est issu d'une noble famille vendéenne. Son grand-père (première promotion de l'École polytechnique, 1794) et son père furent polytechniciens ; de Lapparent fut admis à l'École polytechnique en 1858, et il en est sorti majeur de sa promotion. Il est entré à l'École des mines et il en est sorti encore premier en 1864. Après des voyages en Allemagne et en Italie, de Lapparent est rentré en France, pour devenir conservateur-adjoint à l'École des mines où, à la demande d'Achille Delesse, il pris en charge la rédaction de la *Revue de géologie*. Il conserve cette tâche pendant quinze ans, et acquiert une connaissance approfondie en géologie. À partir de 1865 et jusqu'en 1875, il a suivi le dessin de six cartes au 80.000^{e} du Bassin parisien. En 1867, il fut rapporteur à l'Exposition universelle de Paris (poids et mesures), et par la suite il est nommé secrétaire et rapporteur d'une Commission chargée d'étudier un projet de tunnel sous la Manche.

Fervent catholique, il est nommé en 1876 à la chaire de géologie et minéralogie de l'Université Catholique (devenue plus tard Institut Catholique) qui venait d'être créée à Paris. De Lapparent y a établi une importante collection des minéraux, des roches et des fossiles. Il fut l'auteur d'ouvrages de géologie, de minéralogie, et d'apologétique.

De Lapparent fut nommé président de la Société géologique de France en 1880 et 1900, de la Société minéralogique de France en 1885. Élu membre en 1897 l'Académie des sciences de Paris, section de minéralogie, il devint, en 1907, Secrétaire perpétuel pour les sciences physiques (Cailleux 1973).

La correspondance entre de Lapparent et Poincaré que nous publions ici concerne la candidature de ce dernier au poste de Secrétaire perpétuel pour les sciences physiques en remplacement de Marcelin Bertrand (Walter 2007). Alors qu'il devait remporter le scrutin par une faible majorité des voix, Poincaré préféra retirer sa candidature, au profit de celle de Cochon de Lapparent.

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_29

29.1 De Lapparent à Poincaré

Paris, 22 mai 1907

Cher Confrère,
Je n'ai pas attendu votre appel pour me mettre en campagne, surtout depuis que j'ai connu la malencontreuse candidature suscitée par Paul Bourget.
La semaine dernière, tant au Correspondant qu'à la sortie de la messe de l'Institut, j'avais fortement endoctriné le Marquis de Vogüé, M. Lamy et M. Thureau Dangin. Avant hier j'écrivais à ce sujet au Cardinal Mathieu, et hier j'en ai entretenu M. Vandal.
Demain j'aurai soin d'être à l'Institut au moment de l'arrivée des Quarante, pour entreprendre MM. Bazin, d'Haussonville et Masson, M. de Mun et M. Costa de Beauregard. Enfin, comme je dois dîner samedi chez Thureau Dangin, j'y ferai un nouvel effort de manière à n'avoir rien négligé avant mon départ pour Vienne (je partirai seulement lundi soir à 7h20).
J'espère encore qu'on ajournera la satisfaction réclamée par l'ambitieuse *Revue des Deux Mondes*. En tout cas, vous pouvez être sûr que tout ce qui dépendra de moi sera fait par votre dévoué confrère
A. de Lapparent

J'aime à croire que les relations de Lorraine devraient vous assurer le concours de MM. Mezières et Gebhart. Quant à Sully Prudhomme, que j'ai trouvé si lamentablement impotent quand hier il a traversé notre salle, comme il a été mon condisciple en spéciales, je vais lui écrire dès ce matin.

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

29.2 De Lapparent à Poincaré

Paris, mercredi soir [22.05.1907]

Cher confrère,
Désireux de vous donner satisfaction le plus tôt possible, non seulement j'ai écrit aujourd'hui des lettres pressantes à Sully Prudhomme et à M. de Mun ; mais, après le Conseil rectoral de mon Université, j'ai passé à la Société d'Agriculture, où je savais trouver le M^is de Vogüé. [1] Il a paru très impressionné par mes raisons et je crois que vous pourrez compter sur lui. Ensuite j'ai passé au Correspondant, où M. Lamy s'est montré tout aussi favorablement impressionné.
En dehors des raisons de personne et de principe que je fais valoir, je ne manque pas de rappeler à mes amis que, si mon élection a pu produire ce bon effet d'harmonie et d'approbation presque unanime qu'elle a rencontré, c'est à cause de votre désistement, et que ceux qui me portent intérêt doivent vous en savoir grand gré.

1. L'université en question est l'Université Catholique, devenue par la suite l'Institut Catholique de Paris. Depuis 1900, Lapparent était membre de la Société nationale et centrale d'agriculture de France.

M. Lamy m'a conseillé d'aller voir Émile Ollivier, non pour le conquérir, puisqu'il vous est tout acquis : mais parce qu'il croit qu'après m'avoir entendu, M. Ollivier sera encore plus chaud et mieux armé pour vous défendre. [2]
Je ne manquerai pas de faire cette visite. En attendant, demain, à deux heures, je monterai la garde à la porte des Quarante. [3]
Vous le voyez, l'impression est beaucoup plus réconfortante !
Bien à vous,
A. de Lapparent

ALS. Collection particulière, Paris 75017.

29.3 De Lapparent à Poincaré

PARIS, LE 23 mai 1907
INSTITUT DE FRANCE — ACADÉMIE DES SCIENCES

LE SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE emploie ce papier antique et vénérable pour mieux montrer à son cher confrère qu'il a rempli sa promesse en *assiègeant* aujourd'hui, de deux à trois heures sans désemparer, les électeurs de M. Barboux. [4]
Sully Prudhomme, M. Costa de Beauregard, M. Vandal, M. Masson, M. Bazin, ont été tour à tour l'objet de mes chaleureuses démonstrations. Je ne cite pas M. d'Haussonville, parce qu'hélas sa qualité de membre du Comité de rédaction de la *Revue des Deux Mondes* l'inféode à une autre cause. En revanche, Sully Prudhomme vous est tout acquis.
Enfin, j'ai dit tout ce que j'avais à dire et occupé, avant le départ pour Vienne, toutes les positions où je croyais pouvoir m'installer. [5]
Bien à vous,
A. de Lapparent

2. Avocat, orateur parlementaire et publiciste, Emile Ollivier (1825–1913) était premier ministre lorsqu'il s'est présenté à l'Académie française. Appuyé par Adolphe Thiers (1797–1877), Ollivier fut élu le 7 avril 1870 au fauteuil 7. En 1906 il fut le doyen de l'Académie.
3. Autrement dit, l'entrée de l'Académie Française.
4. Henri Barboux (1834–1910), élu en 1907 au fauteuil 28.
5. L'association des sociétés scientifiques se réunit à Vienne.

Chapitre 30

Aimé Laussedat

Aimé Laussedat (1819–1907) a suivi les cours préparatoires au lycée Louis le Grand et fut admis, en 1838, à l'École normale supérieure et à l'École polytechnique. Il a opté pour Polytechnique, d'où il est sorti en 1840 et entré dans le génie militaire. Il s'affirma dans les domaines de la géodésie, de la topographie et de la cartographie. En 1851, sur l'intervention du général J. B. Vaillant (1794–1872), Laussedat est nommé répétiteur de Hervé Faye du cours d'astronomie et géodésie à l'École polytechnique. En parallèle, Laussedat fut chargé du cours de lever et nivellement dans les écoles du génie. Suite au départ de Faye à Nancy, Laussedat fut nommé professeur d'astronomie et de géodésie à l'École polytechnique, ou il fit cours jusqu'à sa démission en 1871, pour reprendre son poste de commandant du génie. Dans ce cadre, il est chargé du piquetage de la frontière franco-allemande issue de la guerre de 1870. En 1873, il est nommé professeur de géométrie appliquée aux arts au Conservatoire des arts et métiers. Dès 1879, il est devenu directeur des études à l'École polytechnique, fonction qu'il a quitté deux ans plus tard pour devenir le directeur du Conservatoire des arts et métiers. Il assura cette direction pendant vingt ans et meurt en 1907.

Les principales innovations techniques de Laussedat concernent les domaines de l'astronomie (suivi photographique d'éclipse, emploi du télégraphe et d'instruments méridiens de petite dimension), de la géodésie (mesure des bases), de la cartographie et de la topographie.

Laussedat a été membre puis président du conseil de perfectionnement de l'Observatoire de Paris (1879), membre du Bureau des longitudes, du Bureau international des poids et mesures, du conseil supérieur de l'instruction publique (1884), des comités d'installation et des jurys des grands expositions universelles (Paris 1879, Anvers 1885, Paris 1889, Chicago 1893, Paris 1900). Il est devenu membre de l'Académie des sciences de Paris en tant qu'Académicien libre en 1894 (Académie des sciences 1968, 321).

Les trois lettres que nous publions ici concernent la publication d'un article de Poincaré dans le *Journal de l'École polytechnique* (Poincaré 1881b, 1882b). Au moment de l'échange, Poincaré est chargé du cours d'Analyse mathématique à la Faculté des sciences de Caen, et Laussedat est directeur des études à l'École polytechnique, fonction qui le fait

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_30

destinataire des manuscrits soumis pour publication dans le *Journal*.

Sur la vie et les travaux de Laussedat, voir le *DSB* (Biswas & Biswas 1973) et Véron (2006), et sur son activité au Conservatoire, voir Schiavon (2014b, § 4).

30.1 Laussedat à Poincaré

~~PARIS~~, LE 28 août 1880
Yzeure près Moulins (Allier)
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Monsieur Poincarré, ingénieur des mines, professeur à la faculté de Caen, Officier stagiaire au Mont-Valérien

Mon cher camarade,
J'ai reçu votre lettre et votre mémoire et je m'empresse de vous faire savoir que le numéro du *journal de l'École* qui est sous presse pour paraître en janvier ou en février prochain est complet. Votre mémoire ne pourra donc pas y être publié et devra être renvoyé au numéro suivant. [1] Je vous le retournerai si vous le désirez ou je le garderai jusqu'à ma rentrée à Paris à la fin de septembre. Je suis tout naturellement disposé à accepter votre travail pour notre recueil. Vous avez fait vos preuves et le patronage de M. Hermite suffirait assurément pour me couvrir. Cependant, l'usage est de soumettre les mémoires présentés à la direction des études à l'un des membres du corps enseignant les plus autorisés et je ne dois point déroger à cette régle. Comme tout le monde est en vacances jusqu'à la mi-octobre, voyez ce que je dois faire de votre travail d'ici à cette époque et avisez-moi, quand vous aurez pris un parti.
Agréez, mon cher camarade, l'assurance de mes sentiments affectueux.
Le directeur des études
A. Laussedat

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

30.2 Laussedat à Poincaré

PARIS, LE 1er août 1881
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Monsieur Poincaré, ingénieur des ponts et chaussées, professeur à la faculté de Caen (Calvados)

Mon cher camarade,
Votre mémoire sur les formes cubiques ternaires et quaternaires qui devait paraître dans le 50e cahier du *journal de l'École* est un peu trop long pour pouvoir y être inséré ; je suis obligé de le renvoyer au 51e cahier mais je vous offre, au lieu de 13 feuilles d'impression

1. Voir Poincaré 1881b, 1882b.

qu'il exigerait une place dans le 50e cahier pour un mémoire que vous tiendrez à faire paraître sans retard et qui ne comprendrait pas plus de 6 à 7 feuilles, c'est-à-dire qui aurait une étendue moitié moindre que celui que j'ai entre les mains. [2]
M. Gauthier-Villars m'assure que vous avez certainement la matière d'un semblable mémoire et c'est à son instigation que je vous fait cette proposition en vous priant de me répondre dans le courant de cette semaine.
Agréez, mon cher camarade, l'assurance de mes sentiments affectueux.
Le directeur des études,
A. Laussedat

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

30.3 Laussedat à Poincaré

PARIS LE 3 août 1881
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Monsieur H. Poincarré, ingr. des Ponts et chaussées, professeur à la faculté de Caen.

Mon cher camarade,
J'ai vérifié que la 1re partie de votre mémoire, la partie algébrique s'arrêtant à la page 47 sur les 86 pages dont il se compose, formerait, en effet, les 6 ou 7 feuilles dont nous disposons dans le 50e cahier qui est sous presse. Je préviens M. Gauthier-Villars de cette solution ; vo[us] aurez seulement à fournir un second titre, à annoncer la suite de votre mémoire à la fin du chapitre V et à modifier légèrement la rédaction du commencement du chapitre VI. [3]
Recevez, mon cher camarade, l'assurance de mes sentiments affectueux.
Le Directeur des Études.
A. Laussedat

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

2. Voir Poincaré 1881b, 1882b.
3. Voir Poincaré 1881b, 1882b.

Chapitre 31

Auguste Lebeuf

Auguste Lebeuf (1859–1929) a fait ses études à Dijon, où il a obtenu la licence ès sciences mathématiques, et à Besançon, où il a obtenu la licence ès sciences physiques en 1883. En 1884, il fut nommé élève astronome à l'Observatoire de Paris, où il a travaillé sous la direction de Tisserand, Wolf, Gaillot et Périgaud. Lebeuf est devenu aide-astronome à l'Observatoire de Besançon en 1887. Affecté au service méridien, Lebeuf a poursuivi ses études, et a soutenu une thèse "Sur une nouvelle démonstration des polynômes Hansen-Tisserand" (Lebeuf 1897, 1902) à la Faculté des sciences de Paris devant un jury composé d'Appell, Poincaré, et Puiseux. Il est nommé maître de conférences d'astronomie à l'Université de Montpellier en 1898, et cinq ans plus tard, il est revenu à Besançon en tant que directeur de l'Observatoire national astronomique, météorologique et chronométrique de Besançon, et professeur d'astronomie à l'Université.

Lebeuf fut membre de la Société mathématique de France, la Société française de physique, la Société astronomique de France, la Société météorologique de France, et le Cercle mathématique de Palerme (Guccia 1908, 50). Il a été élu Correspondant de l'Académie des sciences de Paris (section d'astronomie) le 25 mars, 1913 (Académie des sciences 1968, 324). Sur la carrière de Lebeuf, voir Véron (2006), et Saint-Martin (2008).

La correspondance que nous publions ici entre Lebeuf et Poincaré commence en 1899. Jusqu'en 1902, elle concerne l'édition des *Œuvres* de Laplace, Volumes 13 et 14 (Secrétaires perpétuels 1904, 1912), un travail qui sera reconnu par le prix Le Conte de l'Académie des sciences de Paris en 1909 (Gauja 1917, 305). À partir de 1907, les lettres de Lebeuf servent à communiquer des éphémérides pour publication dans le *Bulletin astronomique*.

À l'occasion du décès de Poincaré, Lebeuf a écrit une notice dans laquelle il a comparé Poincaré à Laplace. Par rapport à la compréhension de son travail par ses contemporains, ce dernier avait bénéficié de circonstances "beaucoup plus propices" que Poincaré, a-t-il écrit :

> Si [Poincaré] a pu rencontrer des auditeurs assez fervents pour la rédaction d'un grand nombre de leçons magistrales, il n'a pas eu, comme Laplace, le concours fidèle et dévoué d'un "citoyen Bouvard" qui mit en nombre la

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_31

presque totalité de formules de la *Mécanique céleste*, et il ne lui a pas été donné, comme à son illustre prédécesseur, de pouvoir clôturer son œuvre par une grandiose *Exposition du Système du Monde,* accessible à tous et fixant les connaissances humaines à l'aurore du XX^{e} siècle. (Lebeuf 1913, 668)

31.1 Lebeuf à Poincaré

Montpellier, le 16 avril 1899

Monsieur et Cher Maître,
J'ai mis à profit surtout les vacances de Pâques pour examiner les Mémoires de Laplace. [1]
Je vous transmets les n° 00, 7. J'ai été fatigué par la grippe ou le défaut d'acclimatation et cela m'a encore gêné.
À partir du mois de Juin, je pourrai consacrer beaucoup plus de temps à ce travail et de Juillet à Novembre, en particulier, je m'y livrerai à peu près exclusivement.
Je vous prie de me faire envoyer la copie à mesure de la production ; je me mettrai ainsi mieux à même de connaître tous les volumes de la *C[onnaissance] des Temps* ou autres publications indispensables et que je pourrai trouver ici.
J'ai mis sur une feuille à part les remarques et corrections du Mémoire 00.
Je pense qu'il est utile, d'indiquer par un renvoi, les Mémoires auxquels il faut se reporter pour les explications, ainsi que je l'ai fait par ex : à la page 2.
Je vous prie respectueusement, Monsieur et cher Maître, d'agréer les plus sympathiques hommages de votre très humble et très obligé
A. Lebeuf
À partir du 22 avril :
43, rue de l'Université

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

31.2 Lebeuf à Poincaré

Montpellier, le 12 Juin 1899

Monsieur et Cher Maître,
La bibliothèque de l'Université ne possède pas les *Annales du Bureau des Longitudes,* fondées après la suppression des Additions à la *C[onnaissance] des Temps.*
Je crois que le Bureau des Longitudes fait don de cette importante publication, ainsi que de la *Connaissance des Temps* et de l'*Annuaire* à un certain nombre d'Universités ou Observatoires.
Je vous prierais donc, si la chose est possible, de faire admettre la Bibliothèque Universitaire de Montpellier parmi les établissements auxquels le Bureau des Longitudes envoie toutes ses publications.

1. Lebeuf collabore à l'édition des *Œuvres* de Laplace, sous l'égide de l'Académie des sciences de Paris.

Le Conseil de l'Université est ici bien disposé envers les études astronomiques ; il a voté les fonds nécessaires pour aller observer l'éclipse de soleil du 28 Mai 1900 en Espagne (projet fait en commun avec M. Baillaud de Toulouse).[2] La libéralité du Bureau des Longitudes serait accueillie comme une marque d'approbation pour les efforts tentés en faveur de l'Astronomie.
Personnellement, cela me faciliterait la tâche d'organiser la partie astronomique de la Bibliothèque et à ce titre je vous prie d'excuser ma demande et de l'agréer, si elle est acceptable.
Je pense vous envoyer plus rapidement le Mémoire n°30, *C[onnaissance] des T[emps]* 1811, p 429–450, mais les vérifications numériques m'ont absorbé assez de temps et j'ai rencontré en particulier page 447, ligne 4 à ligne 21 un alinéa un peu obscur et renfermant des erreurs. Celles-ci seraient sans doute facilement expliquées avec *l'Histoire de l'Astronomie Chinoise* de P. Gaubil.[3] J'espère la trouver à la Bibliothèque de la Ville à la rentrée, 1er Octobre, et aussitôt ce point éclairé je vous transmettrai le Mémoire.
M. Gauthier-Villars m'a envoyé la *C[onnaissance] des T[emps]* sauf 1790 et 1820.
Je vous prie respectueusement, Monsieur et bien cher Maître, d'agréer les plus sympathiques hommages de votre très humble et très dévoué
A. Lebeuf

ALS 4p. Collection particulière, Paris 75017.

31.3 Lebeuf à Poincaré

Montpellier, le 5 Octobre 1900
43 rue de l'Université

Monsieur et Cher Maître,
Je vous transmets, vu et corrigé, le manuscrit n°33.
Il est reproduit, parfois textuellement, au Tome VII, Calcul des Probabilités, Livre II, Chap IV, page 327 à ... Pour en faciliter l'intelligence aux lecteurs, je le rappelle par un renvoi en tête du manuscrit.
À la page 330 du Tome VII, il y a une erreur d'impression. Dans la valeur de C_I il faut mettre $Sm^{(i)}n^{(i)}$ en facteur et lire :[4]

$$C_I = -Sm^{(i)}n^{(i)}[Sn^{(i)}p^{(i)}Sm^{(i)}q^{(i)} + Sm^{(i)}p^{(i)}Sn^{(i)}q^{(i)}]$$

au lieu de

$$C_I = -Sm^{(i)}n^{(i)}Sn^{(i)}p^{(i)}Sm^{(i)}q^{(i)} + Sm^{(i)}p^{(i)}Sn^{(i)}q^{(i)}.$$

La notation employée dans ce manuscrit en rend l'écriture et la vérification assez délicate ; l'imprimeur devra en tenir compte.

2. Benjamin Baillaud. Voir le rapport de Bigourdan (1900b).
3. Laplace (1809, 429) s'est servi des observations chinoises extraites des *Lettres édifiantes, de l'histoire de l'astronomie chinoise du savant P. Gaubil.*
4. Il s'agit de corriger l'expression pour ***G*** dans Laplace (1847, 330).

Je vous prie, Monsieur et Cher Maître, d'agréer l'hommage de ma respectueuse sympathie.
Votre
A. Lebeuf

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

31.4 Lebeuf à Poincaré

Montpellier, le 19 Octobre 1900

Monsieur et Cher Maître,
Je vous ai envoyé hier le manuscrit n°39 "Sur les Comètes".[5] Ce Mémoire a été l'objet de commentaires de Gauss, Schiaparelli, Seeliger et d'un grand travail de M. L. Fabry (1).[6] Il m'a semblé utile de faire connaître au moins ce dernier aux lecteurs, renvoi page 1 ; toutes les particularités du calcul de Laplace y sont discutées.
Le Mémoire n°39 appartient à la *C[onnaissance] des T[emps]* 1816, il doit suivre le Mémoire 33bis *C[onnaissance] des T[emps]* 1815 à l'impression ; je l'ai indiqué au crayon à l'imprimeur.
Le manuscrit que je vais corriger *C[onnaissance] des T[emps]* 1818 porte le n°34 et il aurait pu y avoir interversion.
Je vous prie respectueusement, Monsieur & Cher Maître, d'agréer l'hommage de mes meilleurs sentiments.
Votre très obligé
A. Lebeuf

P.S. Dans la liste des Mémoires qui doivent composer le T. VIII M. Tisserand mentionne Sur le Flux et le reflux de la Mer, *C[onnaissance] des T[emps]* 1818, pages 354–361 puis il note en marge que ce Mémoire a été inséré au T. XII [pages 473 …]. Il n'y a pas identité absolue entre les deux textes. Le Mémoire de la *C[onnaissance] des T[emps]* de 1818 semble écrit le premier, il a du être ensuite complété par des calculs pour être imprimé tel qu'il figure au Tome XII.
(1) Thèse, Marseille, 1893.

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

5. Laplace (1813), rééd. Secrétaires perpétuels (1904, 88–97).
6. Louis Fabry 1893.

31.5 Lebeuf à Poincaré

Montpellier, le 23 Novembre 1900

Monsieur et Cher Maître,
Je vous transmets les deux Mémoires 34–34bis *Connaissance des Temps* 1818.
Ils forment la partie essentielle du 1er supplément à la *Théorie Analytique des Probabilités* T. VII page 497 à 520. Certains passages sont littéralement identiques.
Le Manuscrit actuel est un travail daté de septembre 1815, le 1er supplément du Tome VII est de 1816, il procède donc bien du précédent. Toutefois il ne renferme pas le passage relatif à la discussion des mesures du Pendule par Mathieu, pages 25–28 du manuscrit ou 375–377 de la *Connaissance des Temps* 1818.
Il y a de très légères différences entre les valeurs numériques des deux Mémoires. Elles proviennent de la révision par Bouvard des nombres du supplément (celui-ci renferme encore une erreur d'imprimerie, page 517, où on lit 1519920, pour 151992,0).[7]
Le Mémoire de la *C. des T.* 1818 rapproché du Supplément du Tome VII montre comment Laplace travaillait.
Je vous prie, Monsieur & Cher Maître, d'agréer les respectueux hommages de votre très obligé
A. Lebeuf

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

31.6 Lebeuf à Poincaré

MONTPELLIER, LE 14 Mars 1901
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
FACULTÉ DES SCIENCES — MATHÉMATIQUES

Monsieur et Cher Maître,
Je vous transmets le Mémoire n°38 Sur la longueur du Pendule à secondes, *C. des T.* 1820, ainsi que l'Addition à ce Mémoire insérée également dans la *C. des T.* 1820.[8]
1° J'ai remplacé la notation

$$\frac{dd\phi}{dt^2} \quad \frac{ddX}{dt^2} \quad \frac{ddx}{dt^2} \quad \cdots$$

par

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} \quad \frac{d^2X}{dt^2} \quad \frac{d^2x}{dt^2} \quad \cdots$$

2° Parmi les rectifications effectuées, je vous signalerai :
I° page *C. des T.* 278 Mémoire 21 ligne 12. $\bar{K}'' = -\bar{K}'\frac{L}{h}$ au lieu de $\bar{K}'' = -\bar{K}'\frac{q}{h}$.
Il en résulte qu'il faut lire :

7. Alexis Bouvard (1767–1843).
8. Laplace 1818b.

page *C. des T.* 279 Mémoire 22 ligne 7. $\frac{L(q-L)}{h}K' \cos \bar{n}t$ au lieu de $\frac{q(q-L)}{h}K' \cos \bar{n}t$, et même page, $\frac{L(q-L)}{h}$ au lieu de $\frac{q(q-L)}{h}$.
II°. page 278 *C. des T.* dernière ligne, il me semble également qu'il faut lire : $\bar{\bar{K}}' = -\frac{i}{2}K'$ au lieu de $\bar{\bar{K}}' = \frac{i}{2}K'$.
Je signale seulement ces corrections parce qu'elles répondent à des calculs où Laplace dit "on aura à fort peu près" et qu'il est facile de s'induire en erreur sur les termes à conserver et à négliger.
La *C. des T.* 1820 renferme encore un Mémoire p. 422–440 sur le Calcul des Probabilités qui est reproduit presque intégralement au T. VII supplément. Je vais relever les parties communes ainsi que les différences essentielles et vous transmettre le Mémoire afin que vous décidiez. [9]
Je vous prie, Monsieur et bien cher Maître, d'agréer l'hommage de respectueuse sympathie de votre très humble et très obligé,
A. Lebeuf

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

31.7 Lebeuf à Poincaré

Montpellier, le 3 Avril 1901
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
FACULTÉ DES SCIENCES, MATHÉMATIQUES

Monsieur et Cher Maître,
Le Mémoire n°41 : Application du Calcul des Probabilités aux opérations géodésiques : lu le 4 août 1817 à l'Académie des Sciences est reproduit avec des compléments et explications dans le 2e supplément à la *théorie Analytique des Probabilités* T. VII, p. 531 (avec la date : Février 1818). [10]
Les explications préliminaires qui précèdent les calculs sont à peu près identiques dans les deux Mémoires.
Les calculs, au début, sont également identiques puis ils diffèrent, de temps à autre, étant plus complets et plus développés au supplément. Il est visible que le Mémoire de la *Connaissance des Temps 1820*, est une première rédaction, mise plus au point au Tome VII. Dans les formules d'intégration, il faudrait par exemple un double ou triple signe tel qu'au supplément ; je n'ai cependant pas fait de correction parce qu'il n'y a pas d'erreur possible et qu'il me semble utile de faire connaître exactement Laplace.
Comme il est assez difficile aux lecteurs de se procurer les anciennes *Connaissance des Temps* et qu'il est très instructif de suivre la pensée de l'Auteur sur un sujet qu'il affectionnait tant, vous déciderez peut-être qu'il faut imprimer le Mémoire. J'ai indiqué

9. Le mémoire de 1818 n'a pas été reproduit une deuxième fois ; voir la remarque du Volume 13 des *Œuvres de Laplace* (Secrétaires perpétuels 1904, 143).
10. Ce mémoire de 1818 n'a pas été reproduit une deuxième fois ; voir la remarque du Volume 13 des *Œuvres de Laplace* (Secrétaires perpétuels 1904, 143), et Lebeuf à Poincaré, 14.03.1901 (§ 3-31-6).

par une note finale la parenté avec le supplément du T. VII. En corrigeant les épreuves, j'ajouterais les signes si vous le jugiez nécessaire.
Dans la *Connaissance des Temps* de 1822, on trouvera aussi un court Mémoire reproduit alors à peu près textuellement dans le 1er paragraphe du 3ème Supplément au T. VII p. 581.
Je vous prie, Monsieur et bien cher Maître, d'agréer l'hommage des meilleurs sentiments de votre très humble et très obligé
A. Lebeuf

ALS 3p. Collection particulière, Paris 75017.

31.8 Lebeuf à Poincaré

MONTPELLIER, LE 10 Avril 1901
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER — FACULTÉ DES SCIENCES — MATHÉMATIQUES

Monsieur et Cher Maître,
Les Mémoires de la *Connaissance des Temps* formant bien souvent une première rédaction, je serais amené après chaque correction à vous signaler les analogies ou répétitions avec les *Œuvres* déjà parues. Il me semble donc utile de vous donner de suite le tableau d'ensemble pour les Mémoires compris dans les *Connaissance des Temps* de 1820 à 1830.
De 1820 à 1827, Laplace fait paraître le Tome V de la *Mécanique Céleste,* une dernière Édition de la *Théorie Analytique des Probabilités*, Tome VII et des Mémoires dans les "*Mémoires de l'Académie des Sciences*" insérés au Tome XII.
Les reproductions plus ou moins complètes, des Mémoires de la *Connaissance des Temps* pour l'époque considérée se trouvent donc dans les Tomes V, VII et XII.
Je signale d'abord entre les T. V et XII l'analogie très grande entre les Mémoires sur la Figure de la Terre. Elle est identique à celle qui existe entre le Mémoire 41 que je vous ai transmis dernièrement et le 2e supplément au T. VII.
En outre un Mémoire sur la Figure de la Terre, *Connaissance des Temps,* 1822, p. 284–290 est déjà dans le Tome XII p. 459–469. Aussi est-il retranché par M. Tisserand de la liste des Mémoires devant composer le T. XIII.
Le tableau ci-joint renferme toutes les indications nécessaires pour les Comparaisons.
J'ajoute dans un autre ordre d'idées que les Mémoires :
1824, p. 314–316, Sur la Détermination des Orbites des Comètes,
1829, p. 301–302, Sur un moyen de détruire les effets de la Capillarité
devraient être complétés par les Mémoires de Bouvard renfermant les applications numériques des formules de Laplace établies dans :
1824, p. 316–320, De l'orbite de la 2e Comète 1805
1829, p. 303–308, Tables Nouvelles des Dépressions du Mercure dans le Baromètre dues à la Capillarité. [11]

11. Alexis Bouvard (1767–1843), membre de l'Académie des sciences de Paris, et directeur de l'Observatoire de Paris.

Vous voudrez bien me dire, à l'occasion, si vous approuvez cette addition. [12]
Je vous prie, Monsieur & bien Cher Maître, d'agréer l'hommage de respectueuse sympathie de votre très humble et très obligé,
A. Lebeuf

ALS 3p. Collection particulière, Paris 75017.

31.9 Lebeuf à Poincaré

Montpellier, le 9 Mai 1901

Monsieur et Cher Maître,
Les divergences entre le Mémoire 41, 1820, et le 2e supplément T. V. portent exclusivement sur la rédaction. [13]
Voici les principales suppressions ou additions :
I. Préliminaires précédant les Calculs, T. V. page 534. L'alinéa commençant à : "Les formules dont je viens de parler ..." et se terminant par ces mots : "toutes les données des Observations." ne figure pas dans 41, 1820, et a dû être ajouté pour signaler l'emploi avantageux du cercle répétiteur.
En échange, l'alinéa commençant par ces mots : "J'ose espérer que ces recherches ..." page 425 de la *C[onnaissance] des T[emps]* 1820 n'est pas reproduit dans le Tome V.
II. Dans le Mémoire 41 les Calculs sont exposés en 5 paragraphes ou nos, en 4 seulement dans le 2e supplément.
Soient les 4 premiers nos de 41 *C. d. T.* 1820, pages 425 à 434, ils sont reproduits dans le Tome V avec les nos 1. 2. 3 de la page 535 à 548. Rien du Mémoire 41 n'est omis dans le T. V et dans ce dernier il y a une *addition* relative au rayon osculateur. Le passage ajouté débute ainsi page 543, "La longueur de l'arc mesuré ..." et se termine page 545 au n° 3.
Le n° 5 du Mémoire 41, page 434, 1820 et le n° 4, 2e supplément, p. 548, semblent différer un peu plus. Mais cela provient en partie de la notation.
Dans le Mémoire 41, 1820, l'erreur α est supposée corrigée de la quantité : q^T. Dans le T. V, q est remplacée par $i + \frac{1}{3}$; c'est une amélioration parce que la lettre q a déjà reçu différentes significations telles que au début

$$\left.\begin{array}{ll} \text{p. } 426 & \\ \text{et p. } 430 & \text{éq. } 0 \end{array}\right\} \quad 1820$$

Dans l'un et l'autre paragraphe, Laplace établit que pour avoir la probabilité d'erreur la plus rapidement décroissante il faut prendre $q = \frac{1}{3}$ ou $i = 0$.

12. Tous ces mémoires de Laplace ont été réédités au Volume 13 des *Œuvres de Laplace* (Secrétaires perpétuels 1904).
13. Comme Lebeuf l'a expliqué à Poincaré dans ses lettres du 14.03.1901 (§ 3-31-6), et du 03.04.1901 (§ 3-31-7), le Mémoire n° 41, Application du calcul des probabilités aux opérations géodésiques (Laplace 1818a), a été réédité avec des compléments dans les *Œuvres de Laplace*, Volume 7 (Secrétaires perpétuels 1847, 569).

Les divergences consistent donc ici dans un petit changement de notation et dans un développement plus grand des formules et résultats du T. V.
En résumé, le Mémoire 41, 1820 est reproduit amélioré et amplifié dans le 2e supplément.
La réimpression n'aurait guère d'autre résultat que de faciliter la comparaison des idées successives de Laplace. Pour les lecteurs intéressés à cette étude, il suffira sans doute de les renvoyer à la *Connaissance des Temps* de 1820.
Je vous prie, Monsieur et bien Cher Maître, d'agréer les respectueux hommages de votre très humble et très obligé
A. Lebeuf

ALS 3p. Collection particulière, Paris 75017.

31.10 Lebeuf à Poincaré

Montpellier, le 17 Mai 1901

Monsieur et Cher Maître,
Je vous transmets vérifié, le Mémoire n°43 *C[onnaissance] des T[emps]* 1821 p. 242–259.[14]
Il n'y a pas d'incorrection à signaler. De plus, une suite de renvois à la *Mécanique Céleste* indique complètement l'origine des principales équations ainsi que les comparaisons à faire.
Ce Mémoire n'est pas reproduit dans les publications antérieures, il doit toutefois être rapproché du Chapitre III, Livre XI, Tome V, p. 66 De l'axe de rotation de la Terre écrit en 1823.
En outre, dans le Tome XII p. 453 Laplace énonce textuellement le théorème qu'il établit dans la première partie du Mémoire 43. Le renvoi de la page 3 du Manuscrit prévient le lecteur.
Je vous prie respectueusement, Monsieur et bien Cher Maître, d'agréer l'hommage des meilleurs sentiments de votre très humble et très obligé
A. Lebeuf

ALS 2p. Collection particulière, Paris.

31.11 Lebeuf à Poincaré

Montpellier, le 22 Juin 1901
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
FACULTÉ DES SCIENCES, MATHÉMATIQUES

Monsieur et Cher Maître,
Je vous transmets corrigés les Mémoires manuscrits n°44 - 54 - 53.

14. Laplace (1819, rééd. par les Secrétaires perpétuels (1904, 144–164).

Les Mémoires 44 - 53 ont le même objet : exposer sommairement les résultats acquis par Laplace dans l'étude de la Figure de la Terre et la pesanteur à sa surface, 1818.
Ensuite, suivant sa méthode de travail, Laplace publie en 1819 un Mémoire aux développements analytiques complets sur les questions indiquées dans 44 et 54. C'est le Mémoire sur la Figure de la Terre inséré au Tome XII p. 415 et suivantes. Le même sujet est également reproduit au Tome V p. 29 à 39 (analogies au T. XII p. 416 à 426).
Je pense néanmoins que la publication actuelle des Mémoires 44–54 est utile et forme l'introduction naturelle au Mémoire du T. XII.
Le Mémoire 53 devrait être imprimé après 54 parce que le sujet en est entièrement différent. Ce Mémoire complète la théorie de Jupiter & Saturne. Il peut être regardé comme original en ce sens qu'il n'a pas été suivi de publication plus étendue ainsi que Laplace avait coutume de le faire.
Je vous prie respectueusement, Monsieur et Cher Maître, d'agréer l'hommage des meilleurs sentiments de votre très obligé
A. Lebeuf

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

31.12 Lebeuf à Poincaré

St Nazaire en Royans, Drôme, le 17 Août 1901
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
FACULTÉ DES SCIENCES, MATHÉMATIQUES

Monsieur et Cher Maître,
Je vous transmets corrigés, les manuscrits n° 56 et 49 *C. des T.* année 1823. [15] Dans le n° 56 Laplace reprend le calcul des inégalités lunaires dues à l'aplatissement terrestre et confirme les résultats déjà obtenus : Tome III, Livre VII, Chapitre II & Supplément. Tome XII, Mémoire sur la Théorie de la Lune p. 257. Ce Mémoire, n° 56, doit être imprimé car il n'est pas reproduit dans les écrits de l'époque, par exemple au Tome V, Livre XVI, année 1824. [16]
Laplace paraît attacher beaucoup d'importance à la détermination de l'aplatissement terrestre à l'aide de la Théorie de la Lune. Monsieur Tisserand nous avait aussi signalé cette idée dans son cours. Je n'ai pas ici sous les yeux son *Traité de Mécanique Céleste* et je ne sais pas présentement ce qui a été fait dans cette voie. Peut-être y aurait-il là l'occasion d'un travail utile.
Le n° 49 est une sorte de rapport sur deux pièces présentées à l'Académie en 1820 sur un sujet proposé par elle. Quelques lignes au Tome V, Livre XVI, page 407 mentionnent ce

15. Voir, pour le manuscrit 49, Laplace (1820b), et sa réédition avec la modification soumise ici par Lebeuf à Poincaré, dans les *Œuvres de Laplace*, Volume 13 (Secrétaires perpétuels 1904, 198–204). Pour le manuscrit 56, voir Laplace (1820c), et sa réédition (S. P. 1904, 189–197).

16. Lebeuf signalera à Poincaré que cette remarque est inexacte ; voir Lebeuf à Poincaré, 04.10.1901 (§ 3-31-14).

concours et les noms des auteurs : Damoiseau, Carlini et Plana. [17]
Ce Mémoire n° 49 doit être publié en entier.
Je vous prie respectueusement, Monsieur et Cher Maître, d'agréer l'hommage des meilleurs sentiments de votre très humble et très obligé
A. Lebeuf

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

31.13 Lebeuf à Poincaré

Montpellier, le 14 7bre 1901
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
FACULTÉ DES SCIENCES, MATHÉMATIQUES

Monsieur et Cher Maître,
Je vous transmets, corrigés, les manuscrits n° 59, 48 et 48 bis *C. des T.* 1823–1820.
1° n° 59. Le n° 59, Mémoire sur l'Inégalité lunaire à longue période dépendante de la différence des deux hémisphères terrestres, est un travail de première approximation que Laplace a repris ultérieurement (1824) et dont il a fait le Chap. III du Livre XVI, Tome V, page 424. [18]
Les très grands coefficients provenant de l'intégration sont de la forme

$$\frac{A}{2(3f-2g-c)} \times \frac{B}{2(3f-2g-c)};$$

Dans la première approximation, n° 59, Laplace ne considère que ces termes.
Dans le 2e calcul, $2(3f-2g-c)$ qui est "fort petit" est corrigé par le terme

$$-\frac{g}{4}m^2\gamma^2$$

ou

$$-\frac{5}{4}e^2(1-c^2)$$

Finalement, dans le 1er calcul, Laplace trouve que l'inégalité en longitude est moindre que $0'',0163\cos(3fv-2gv-cv)$ *C. des T.* 1823, p. 239. tandis que dans le second "on trouve que l'expression de Sv donnée par la formule (6) et au dessous de $\frac{1}{1000}$ de seconde".

17. *Œuvres de Laplace*, Volume 5 (Secrétaires perpétuels 1882, 407). Il s'agit de Marie-Charles-Théodore Damoiseau de Monfort (1768–1846), Francesco Carlini (1783–1862) astronome royal à Milan, et son collaborateur Giovanni Plana (1781–1864), astronome royal à Turin. À la suggestion de Laplace, l'Académie a annoncé un concours en 1818 afin de promouvoir l'établissement de tables lunaires à la base unique de la théorie de la gravitation newtonienne. Deux mémoires ont été reçus, l'un par le Baron Damoiseau, et l'autre par Carlini et Plana. La commission de l'Académie comprenait Poisson et Laplace ; elle a jugé les deux mémoires comme étant de mérite égal, et l'Académie a décerné un prix entier à chaque mémoire en 1820. Laplace a fait publier son analyse des deux mémoires dans la *Connaissance des temps*, et Lebeuf propose à Poincaré de rééditer ce texte dans les *Œuvres de Laplace*.

18. Secrétaires perpétuels 1882, 424).

Tome V page 438.
Le Mémoire du Tome V est ainsi plus développé et plus complet que celui de la *C. des T.* de 1823. Il semble toutefois qu'il y a grand intérêt à publier ce dernier car la lecture, associée à la précédente, met en relief le procédé fondamental de Laplace et de la *Mécanique Céleste,* c'est à dire la résolution d'un problème par la méthode des approximations successives. Le renvoi placé à la suite prévient le lecteur.
Dans le calcul numérique on doit, pour obtenir le coefficient $0'', 0163 \cos\dots$ prendre (valeur donnée au T. V) au lieu de $\frac{1}{100}$ et lire

$$1'', 12\kappa \cos(3fv - 2gv - cv), \qquad \text{valeur exacte,}$$

au lieu de

$$1'', 2\kappa \cos(3fv - 2gv - cv) \qquad \text{p. 238.}$$

Alors on obtient

$$0'', 0160 \cos(3fv - 2gv - cv)$$

au lieu de 0",0163 $\cos(3fv - 2gv - cv)$ p. 239.
Je pense que l'on peut effectuer ces petites substitutions qui ne touchent point aux conclusions de Laplace.
Voici les incorrections typographiques relevées dans le Tome V.

		Lire :	au lieu de :
p.428	ligne 5 en remontant	$\frac{g}{2}\frac{e\gamma^2 \sin(3fv-2gv-cv+2\theta+\varpi)}{3f-2g-c}$	$\frac{g}{2}e\gamma^2 \sin(3fv - 2gv - cv + 2\theta + \varpi)$
" 432	" 9 id	$-\frac{3K}{h^6}\gamma \cos(3fv - 2gv + \theta)$	$-\frac{3}{h^6}\gamma \cos(3fv - 2gv + \theta)$
" 436	en marge	(6)	(8)
" 438	" 13 en remontant	$\gamma =$	$\lambda =$
" 438	" 7 id	$D = 0,01655101$	$D = 0,016655101$

2° n° 48. On peut distinguer dans le Mémoire 48, le préambule p. 245–249, *C. des T.* 1823, et l'exposé analytique p. 249-257. Le préambule est reproduit dans l'historique du Livre XI, Chap. 1, Tome V, p. 24 à 28. Quelques passages sont textuels, d'autres résument la question de manière à former un tout homogène avec les matières composant la première partie du Chapitre I. L'exposé analytique est reproduit textuellement au Tome V, L. XI, Chap. IV. Les très petites modifications apportées au chapitre IV constituent des éclaircissements au texte de la *C. des T.* 1823. Voici la concordance entre les deux Mémoires :

C. des T. 1823 pages	Tome V, Livre XI, Ch. IV pages	
249–250	82–83	textuel
250	83–84	différences portant sur la méthode d'intégration
250–253	84–88	textuel
...	88–91	Mémoire 48bis, textuel
253–256	91–94	textuel
256–257	94–96	quelques compléments, texte plus explicite au T. V

3° n° 48bis. Le Mémoire : Additions au Mémoire précédent ou 48bis est fondu dans le Chapitre IV et reproduit textuellement aux pages 88–91.
En résumé, la fin du Chapitre I et le Chapitre IV du Tome V sont la reproduction à peu près intégrale des mémoires publiés d'abord dans la *C. des T.* de 1823. Vous estimez sans doute qu'il n'y a pas lieu de les faire publier à nouveau et qu'il suffira de les faire connaître aux lecteurs par leurs titres joints aux manuscrits.
Voici maintenant les anomalies typographiques relevées à cette occasion dans le Tome V.

		Tome V Lire :	au lieu de :
page 27	ligne 19 en descendant	$\frac{1''}{380}$	$\frac{1''}{300}$
" 89	" 5 id	$\int\left(q^{1(0)}\frac{d^2q^{1(1)}}{dr^2}-q^{1(1)}\frac{d^2q^{1(0)}}{dr^2}\right)dr$	$\int\left(\frac{q^{1(0)}d^2q^{1(1)}}{dr}-\frac{q^{1(1)}d^2q^{1(0)}}{dr}\right)$
" 87	" 7 id	$\frac{d^2q^{1(0)}}{dr^2}$ et $\frac{d^2q^{1(1)}}{dr^2}$	$\frac{d^2q^{1(0)}}{dr}$ et $\frac{d^2q^{1(1)}}{dr}$
" 91	" 2	$\dfrac{c^{-n^st}\,\frac{q^{1(s)}}{r}\int q^{1(s)}dr\left[rU^{(i)}-\frac{r^{i+1}Y^{1(i)}}{a^i\left(1+\frac{i}{af}\right)}\right]}{\int q^{1(s)2}dr}$	$\cdots\int\cdots\left[rU^{(i)}-\frac{r^{i+1}Y^{1(i)}}{a^{(i)}\left(1+\frac{i}{af}\right)}\right.$
" 91	" 8	$Q^{(i)}+\frac{r^i}{a^i}\frac{Y^{1(i)}}{1+\frac{i}{af}}$	$Q^i+\frac{r^{(i)}}{a^{(i)}}\frac{Y^{1(i)}}{1+\frac{i}{af}}.$

Dans ces deux formules, i est un exposant pour a et r et non un indice. Je vous prie, Monsieur et bien Cher Maître, d'agréer le respectueux hommage des meilleurs sentiments de votre très humble et très obligé
A. Lebeuf

Au Pouzin, Ardèche jusqu'au 30 7bre

ALS 6p. Collection particulière, Paris 75017.

31.14 Lebeuf à Poincaré

Le Pouzin, Ardèche, le 4 Octobre 1901
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER — FACULTÉ DES SCIENCES — MATHÉMATIQUES

Monsieur et Cher Maître,
Je vous transmets corrigés, les Mémoires n°50 et 60 qui terminent les publications de Laplace insérées dans la *C. des T.* de 1823.
Ces Mémoires sont à imprimer. Comme dans tout ce qui paraît dans la *C. des T.*, Laplace s'en est inspiré pour des Mémoires plus complets que l'on retrouve soit au Tome V, soit au Tome XII.
Voici quelques rapprochements :
1° n°50. Sur la Densité Moyenne de la Terre :
1° L'historique au Chapitre 1, Liv[re] XI, Tome V en reproduit le ton général en quelques mots et page 17 un court passage : « Les expériences du pendule … », *C. des T.* 1829 p. 329.

2° Le préambule de l'Addition au Mémoire sur la Figure de la Terre, Tome XII, p. 459 en procède également et l'on y retrouve ce passage textuel : « Si l'on imagine un fluide très rare … », *C. des T.* 1829 p. 329. On voit par là que l'Addition au Mémoire sur la Figure de la Terre publié en 1820 dans les Mémoires de l'Académie des Sciences est composé avec le présent Mémoire et la totalité du Mémoire Sur la Figure de la Terre paru dans la *C. des T.* de 1822.
2° n°60. Éclaircissement sur les Mémoires précédents …
Ce Mémoire comprend :
1° Dans sa partie analytique un Complément au Mémoire n°56 : Sur les Inégalités Lunaires dues à l'aplatissement de la Terre, *C. des T.* 1823 p. 219. Laplace y montre comment certains termes se détruisent dans le mouvement en longitude et quelle correction il faut ajouter à l'inégalité en latitude.
À la page 333, *C. des T.* 1823, ligne 3 en remontant ou page 3 du Manuscrit on lit,

On trouve à fort peu près, *par le n° cité*,

il faudrait alors se reporter au n°3 qui donne la forme du développement de $\underline{s}$ tandis qu'en se reportant au n°14 on a l'expression même de B_1^0, $B_1'^0$

$$B_1^0 = \frac{3}{8}m + \frac{15}{64}m^2 + \cdots$$
$$B_1'^0 = \frac{3}{8}m + \frac{24}{64}m^2 + \cdots$$

J'ai alors substitué à

par le n° cité : par le n°14, Livre VII.

Je vous prierai d'approuver cette petite modification.[19]
2° Dans la 2e partie de ce Mémoire, Laplace répond aux observations de Plana et Carlini et justifie les conclusions de la Commission de l'Académie pour le concours de 1820.[20]
La fin du Chapitre 1, Livre XVI, Tome V résume en termes généraux les conclusions de ce Mémoire qui n'est pas reproduit autre part.
Je relève maintenant une erreur commise à l'envoi du n°56. Je vous le dis dans ma lettre : « Ce Mémoire doit être imprimé car il n'est pas reproduit dans les écrits de l'époque par ex. du T. V L. XVI année 1824 ».[21] C'est inexact. Le Livre XVI dont le titre : « Des inégalités lunaires dépendantes de la partie elliptique du rayon terrestre » p. 438–444 donne les résultats analytiques du Mémoire 56 en deuxième approximation. Mais il n'en semble pas moins utile de publier ce Mémoire, qui referme en outre quelques remarques non reproduites au Livre XVI.

19. Voir Laplace (1820a, 333), et sa réédition avec la modification soumise ici à Poincaré par Lebeuf, dans les *Œuvres de Laplace*, Volume 13 (Secrétaires perpétuels 1904, 223).

20. À propos de ce concours, voir l'annotation de la lettre de Lebeuf à Poincaré du 17.08.1901 (§ 3-31-13). Plana et Carlini ont contesté quelques points de l'analyse de Laplace (1820b), et ce dernier a fait publier une réponse (Laplace 1820a). Pour une présentation détaillée de leurs différends, et des transcriptions d'une partie de leur échange, voir Tagliaferri & Tucci (1999).

21. Voir Lebeuf à Poincaré, 14.09.1901 (§ 3-31-13).

Je vous prie, Monsieur et bien Cher Maître, d'agréer l'hommage respectueux des meilleurs sentiments de votre très humble et très obligé
A. Lebeuf

ALS 4p. Collection particulière, Paris 75017.

31.15 Lebeuf à Poincaré

Montpellier, le 15 Mars 1902
Université de Montpellier
Faculté des Sciences — Mathématiques

Monsieur et Cher Maître,
Je vous transmets, vu et corrigé, le Mémoire n°62, *Connaissance des Temps* 1824, année 1821.
Laplace expose habituellement, dans cette période, la première ébauche de ses recherches dans la *Connaissance des Temps.* Il reprend ensuite son sujet, développe la rédaction et il en résulte, soit un Livre de la *Mécanique Céleste,* soit un Mémoire qui paraîtra dans les *Mémoires de l'Institut.*
Le Mémoire n°62, un des plus importants qui soient insérés dans la *Connaissance des Temps,* est l'origine d'une partie des Livres XV et XVI de la *Mécanique Céleste,* Tome V.
Les équations différentielles de la Variation des éléments du mouvement elliptique, obtenues simultanément par Laplace et Lagrange en 1808 ont été exposées en supplément du Tome III. En 1821, Laplace établit les mêmes équations avec une notation légèrement modifiée, puis il en fait des applications aux inégalités lunaires ; c'est le mémoire actuel.
En 1824 il publie les Livres XV et XVI. Dans l'historique de chacun d'eux se retrouvent, développées, les idées générales du n°62 et les équations différentielles sont reproduites textuellement. Voici la correspondance :

Tome V	n°62
p. 367–373	p. 274–280

Le Chapitre III du Livre XVI page 424 et suivantes et ensuite le développement des § IV & V de 62, questions déjà traitées dans la *Connaissance des Temps* de 1823 et figurant également au Tome III.
En résumé on a déjà dans les Tomes III et V une grande partie du présent Mémoire sauf les § II et III, que je n'ai pas retrouvés encore.
Il me semble cependant qu'il est utile de publier intégralement ce Mémoire, malgré les répétitions qui s'en suivront, à cause des résultats inédits, § II et III, et aussi pour que le Lecteur soit complètement initié sur l'origine des Mémoires de Laplace et sa façon de procéder.
J'ai rencontré un assez grand nombre d'inexactitudes qui doivent être toutes attribuées à un oubli dans la correction des épreuves de la *Connaissance des Temps.* Ces inexactitudes portent en effet sur des *signes,* des *exposants,* des *facteurs omis* et se vérifient le plus souvent par comparaison avec la formule suivante ce qui met bien en évidence le caractère de l'erreur.

Les calculs numériques sont exacts. À la fin du Mémoire, Laplace dit que l'inégalité est insensible et au dessous de 1/100 de seconde, il aurait pu dire 1/1000 de seconde car le facteur

$$\frac{e\gamma^2 H}{3f \cdot 2g \cdot c} = 0'', 0000225.$$

(Aussi au Tome V, page 498 Laplace dit que l'inégalité est au dessous de 1/1000 de seconde).
En reprenant les calculs, j'ai constaté que je n'avais pas corrigé une petite inexactitude du Mémoire n°59, *C. des T.* 1823. A la fin, au lieu de :

$$0", 0163 \cos(3fv - 2gv - cv)$$

il faut lire :

$$0", 00163 \cos(3fv - 2gv - cv)$$

Je ferai cette rectification à la correction des épreuves.
J'ai été un peu retardé cette hiver dans la révision de Laplace, par des coliques hépatiques. Je vais mieux maintenant et j'espère que la correction des Mémoires sera désormais plus rapide.
Je vous prie d'agréer, Monsieur et bien cher Maître, d'agréer l'hommage respectueux des meilleurs sentiments de votre très humble et très obligé,
A. Lebeuf

ALS 4p. Collection particulière, Paris 75017.

31.16 Lebeuf à Poincaré

Montpellier, le 24 Avril 1902
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
FACULTÉ DES SCIENCES – MATHÉMATIQUES

Monsieur et Cher Maître,
Je vous transmets corrigés, les deux groupes de Mémoires :
I. 63 & 63bis *C. des T.* 1824.
II. 51, 1824, 55a, b, c, 1825, & 57, 1825
Voici les remarques essentielles pour chacun d'eux :
I. M. 63, « Sur la détermination de l'orbite des Comètes », p. 314-316.
M. 63bis, « De l'orbite de la seconde comète de 1805 », p. 316-320 par Bouvard.
Le Mémoire 63 est une courte addition aux Mémoires de 1780, Tome X, et de la rédaction finale du Livre II, Tome I. Il résulte des recherches de Laplace sur la combinaison des équations en nombre supérieur à celui des inconnues. Il m'a semblé utile de le compléter par l'application numérique qu'en a fait Bouvard. C'est pourquoi j'ai copié et ajouté son Mémoire sous le numéro 63bis. Si vous approuvez cette addition, je vous prierai de vouloir bien signer le bon à imprimer pour ce Mémoire supplémentaire.

Le Livre XV du « Mouvement des Planètes et des Comètes », 1824, Tome V contient une allusion aux Mémoires 63, 63bis page 336, historique, et une nouvelle application de la méthode proposée dans 63, à la page 381 et suivantes.
II. Les Mémoires 51, 55 (a, b, c) & 57, 1821-1822, « Sur la théories des fluides élastiques et la vitesse du son », ont servi à Laplace pour composer le Livre XII, avril 1823, du Tome V. Quelques uns y sont reproduits à peu près textuellement.
Voici d'abord les parties communes entre ces Mémoires et le Livre XII :
1° 51. 1824. « Sur l'attraction des sphères et sur la répulsion des fluides élastiques », p. 328–343.
Les deux premiers paragraphes p. 328–338, sont insérés à peu près textuellement au Livre XII, Ch. II, p. 113–124 ; Le 3e paragraphe p. 338–343, ne se retrouve pas sous sa forme primitive au Livre XII.
2° 55(a) 1825 « Développement de la Théorie des fluides élastiques et applications de cette théorie à la vitesse du son » p. 219–227.
Avec d'assez nombreuses modifications dans la rédaction, ce Mémoire se retrouve à la fin du Chapitre II et au commencement du Chapitre III, Livre XII.
3° 55(b) 1825. « Continuation du Mémoire précédent sur le développement de la théorie des fluides élastiques », p. 302–323.
Les pages 302 à 321 sont insérées textuellement, ou avec des compléments, au Livre XII, p. 135–160.
Les pages 322-323 ont servi à former l'historique du Livre XII et s'y retrouvent par fragments.
par ex. :

page 322	p. 104-105 du Tome V
– 323	p. 112 "

4° 55(c) 1825. « Addition au Mémoire sur la théorie des Fluides », p. 386-387. Ce Mémoire n'est guère que la répétition des réflexions ajoutées au précédent 55(b). La plus grande partie figure au Livre XII p. 104-105, textuel.
5° 57. 1825 « Sur la vitesse du son », p. 371-372. Les résultats de cette Note sont condensés au Livre XII, p. 141. Ce Mémoire a du être écrit par Laplace à la suite des expériences qu'il fit proposer au Bureau des Longitudes sur la vitesse du son. C'est en le lisant que l'on trouve l'explication des petites différences entre certains nombres de la *Connaissance des Temps* de 1825 et le Livre XII. Voici ces divergences :
1° Le Mémoire 55(b) p. 306 donne :
$\frac{C}{C_1} = 1.37244$ déduit d'*une seule observation* et cette valeur est conservée dans la suite.
Or Laplace calcule l'expression $\left(\frac{P'}{P}\right)^{\frac{C_1}{C}}$ et obtient

$$\left(\frac{P'}{P}\right)^{\frac{C_1}{C}} = 1.249,$$

Ce résultat n'est exacte qu'avec $\frac{C}{C_1} = 1.3748$. Mais $\frac{C}{C_1} = 1.3748$ est donné d'après le Mémoire 57, p. 372 comme la *moyenne de 4 observations*. Il a donc été substitué à 1.37244 dans le Livre XII où tous les résultats numériques sont d'accord, et dans le Mémoire 55(b) la correction n'a été faite que dans la valeur finale de

$$\left(\frac{P'}{P}\right)^{\frac{C_1}{C}}. \qquad \left[\left(\frac{P'}{P}\right)^{\frac{1}{1.37244}} = 1.250\right].$$

2° À la page 226, Mémoire 55(a), il est dit que la vitesse du son tirée de la formule de Newton, $\sqrt{2h\epsilon}$, égale $282^{\mathrm{m}},4$ à la température de 6° et que la formule $\sqrt{4h\epsilon}$ donnerait la valeur trop forte $399,4 = \sqrt{2} \times 282^{\mathrm{m}},4$.
Au Livre XII p. 135, Laplace donne $282^{\mathrm{m}},4$ à la température 7°5 pour la vitesse ou $\sqrt{2h\epsilon}$ et $400^{\mathrm{m}},4$ pour $\sqrt{4h\epsilon}$. Or à la page 371, du Mémoire 57, on lit que la vitesse du son par la formule Newtonienne est $279^{\mathrm{m}},3$ … à 0° puis 287,5 … à 15°9.
La moyenne $283^{\mathrm{m}},4$ à 7°5 environ, explique donc l'origine de ce nombre substitué au Livre XII à 282,4.
Mais le calcul $\sqrt{4h\epsilon} = 399,4$ a été effectué avec la valeur $\sqrt{2h\epsilon} = 282,4$ et Laplace ayant ajouté 1^{m} à $282^{\mathrm{m}},4$ a ajouté aussi un mètre à $399^{\mathrm{m}},4$ d'où $400,4 = \sqrt{4h\epsilon}$ tandis qu'il faut en réalité 400,8 puisque $\sqrt{2} \times 283,4 = 400,8$.
La correction faite sur le nombre 282,4 de la *Connaissance des Temps* de 1825 n'a donc pas été faite complètement dans le Livre XII où l'on devrait lire $283^{\mathrm{m}},4$ et $400^{\mathrm{m}},8$ au lieu de 400,4.
La comparaison des Mémoires de la *Connaissance des Temps* et de la rédaction finale de la Mécanique Céleste fait donc connaître les formes successives de la pensée de Laplace dans l'étude d'une question.
Pour résumer, il me semble qu'il conviendrait de publier les Mémoires 51, 55(a) et 57, et de mentionner seulement, avec les renvois au Tome V, les Mémoires 55(b) et 55(c).
Il y aurait bien une répétition presque textuelle avec une partie du Mémoire 51, mais cet inconvénient serait compensé par l'avantage de donner au Lecteur l'ensemble complet des matériaux dont le Livre XII est devenu la rédaction définitive.
Je joins donc aux Mémoires 55(b) et 55(c), l'énoncé du titre et le renvoi au Tome V, que vous voudrez bien approuver, si vous admettez cette manière de voir.
Je signale en terminant deux petites incorrections typographiques au Tome V p. 145 à 149 où il faut substituer dY à dy et 1° $\frac{d^2Z'}{dt^2}$ à $\frac{d^2Z}{dt^2}$ 2° dP' et $\sqrt{P'}$ à dP & $\sqrt{P}$.
Je vous prie, Monsieur & Cher Maître, d'agréer l'hommage respectueux des meilleurs sentiments de votre très humble et très obligé
A. Lebeuf

ALS 8p. Collection particulière, Paris 75017.

31.17 Lebeuf à Poincaré

Montpellier, le 10 Mai 1902
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
FACULTÉ DES SCIENCES, MATHÉMATIQUES

Monsieur et Cher Maître,
Je vous transmets, vu, le seul Mémoire, n°58, publié dans la *Connaissance des Temps* de 1826 « De l'action de la Lune sur l'atmosphère ». Ce Mémoire est inséré textuellement au Tome V, Livre XIII, sauf l'alinéa du début : « J'ai donné dans le 4e Livre et ... ».
Voici les concordances :
1826 : p. 308–311 T. V p. 184–188 Ch. I
Considérations générales :
1826 : p. 311–317 T. V p. 262–268 Ch. VII
Calculs :
1826 : fin de la page 317 T. V p. 188
La *Connaissance des Temps* porte la date 1823, le Livre XIII, Février 1824, et on voit que le Tome V contient la reproduction du n°58.
À la fin du Mémoire p. 315—16—17, 1826 et 267–268, Tome V, dans la recherche de la probabilité avec laquelle les observations représentent le flux lunaire, il y a de *très petites* différences qui doivent provenir d'un calcul de révision. Laplace a ainsi prévu son Mémoire avant de l'insérer au Livre XIII.
J'ai suivi la formation des équations, il n'y a rien à reprendre. Voici toutefois une particularité que je ne m'explique pas. Les deux équations entre x et y dans 1820, p. 314 :
Il semble qu'après les substitutions numériques on devrait avoir : somme des coef$^{\text{ts}}$ de $x+$ s. des coef$^{\text{ts}}$ de $y = 16$, et on a : $x \cdot 10.18716$, $y \cdot 4.51927$, d'où $S = 14.70643$.
Si vous pensez qu'il soit utile d'expliquer cette anomalie, je le ferai.
Vous estimerez sans doute qu'il suffit de mentionner ce Mémoire, avec les renvois au Tome V. Je joins donc une feuille avec le titre et les indications nécessaires que vous voudrez bien approuver.[22]
Au Tome V, je signalerai une erreur de signe, au bas de la page 265, où il faut lire : $F_0 = -0,168$ au lieu de +0,168.
Je vous prie, Monsieur et cher Maître, d'agréer les respectueux hommages de votre très humble et très obligé
A. Lebeuf

ALS 3p. Collection particulière, Paris 75017.

22. Le mémoire de Laplace (1823) n'a pas été réédité dans les *Œuvres de Laplace*, Volume 13, ayant été réédité au Volume 5 ; voir les renvois du Volume 13 (Secrétaires perpétuels 1904, 306).

31.18 Lebeuf à Poincaré

Montpellier, le 21 Juin 1902
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
FACULTÉ DES SCIENCES, MATHÉMATIQUES

Monsieur et Cher Maître,
Je vous transmets, vu et corrigé, le seul Mémoire de la *Connaissance des Temps* de 1827 inscrit sous la rubrique Y.
Ce Mémoire n'est pas reproduit ou mentionné au Tome V où le Livre XIV est consacré à la précession. Le Livre XIV porte la date : Juillet 1824, la *Connaissance des Temps* de 1827, 1824 également. Le Mémoire Y a été vraisemblablement écrit après le Livre XIV et a dû être inspiré par la lecture de l'*Astronomie* de Schubert (Édition française St Pétersbourg 1822).
Voici les corrections principales ; elles portent sur les nombres ou les résultats numériques.
1° Époque de l'Obliquité : Laplace dit pages 236–237 de la *C. des Temps,* « l'Obliquité de l'écliptique au commencement de l'année 1801 » et « en faisant donc l'obliquité de l'écliptique égale à 23°27'57".0 au commencement de 1801 ».
Or les tables astronomiques de Delambre Soleil Table V donnent : « l'obliquité moyenne 23°27'57".0 qui avait lieu en 1800 » et Schubert Tome I, page 104, reproduit d'après Delambre : « l'époque de l'obliquité moyenne est de 23°27'57".0 pour l'an 1800 ». Il semble donc d'après cela qu'on doive considérer 1801 comme écrit, par inadvertance, au lieu de 1800 ou même comme une incorrection typographique. J'ai remplacé 1801 par 1800 dans le manuscrit.
2° Dans la formule corrective de l'Obliquité qu'il faut ajouter, d'après Schubert, il y a une erreur. Il faut lire $+1522''.68 \sin t.43, 2280$ p. 236 ligne 2 en remontant au lieu de 1512",68 …. Schubert, Tome III, page 512.
Les calculs qui ont été effectués ensuite sont d'ailleurs faits avec le vrai nombre 1522",68. Les produits des coefficients pour sont exactes à 0",01 ou 0",02 près sauf le nombre 554",65 qu'il faut remplacer par 551",61.
Au lieu du nombre 12'.46".65 p. 237 ligne 13, il faut 12'.49".63, nombre avec lequel les résultats ultérieurs ont été obtenus. Avec les vérifications des produits on doit lire 12'.49".60, nombre mis en Manuscrit.
De même il faut 2111",56 au lieu de 2111",58. Laplace détermine ensuite les limites entre lesquelles l'obliquité varie. Il trouve ± 1°.33'.45" p. 237 ligne 5 en remontant. En refaisant 2 fois les calculs une fois avec les logarithmes, une fois avec la Table des Carrés de Barlow j'ai obtenu ± 1°.22'.34.8 ± 1°.22'.34".6 d'où en nombre rond ± 1°.22'.35". que j'ai substitué à 1°.33'45".
Je vous prierai d'approuver toutes ces rectifications effectuées au Manuscrit. Je n'ai pas ajouté de renvoi pour prévenir le Lecteur comme je l'ai rencontré dans d'autres volumes. Je le ferai si vous le croyez utile. [23]

23. La réédition du mémoire de Laplace (1824) dans le Volume 13 des *Œuvres de Laplace* ne comporte pas de tels renvois (Secrétaires perpétuels 1904, 307–311).

Je vous prie, Monsieur et bien Cher Maître, d'agréer les respectueux hommages de votre très humble et très obligé
A. Lebeuf

ALS 4p. Collection particulière, Paris 75017.

31.19 Lebeuf à Poincaré

Montpellier, le 6 Août 1902
Université de Montpellier
Faculté des Sciences — Mathématiques

Monsieur et Cher Maître,
Je vous transmets, vérifiées, les feuilles 23, 26, 27 et 28.
La feuille 23 contient les rectifications indiquées et n'a plus besoin de retouche.
Il conviendrait de demander une deuxième épreuve pour les feuilles 26, 27 et 28. Il y a en effet à substituer γ à y et $\frac{\partial V}{\partial v}$ à $\left(\frac{dV}{dv}\right)$ un assez grand nombre de fois et les opérations peuvent amener d'autres erreurs.
Dans la *Connaissance des Temps* de 1829, les Mémoires sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne et sur divers points de la *Mécanique Céleste* p. 236–251 sont une sorte de réponse à un Mémoire de Plana : « Mémoire sur différents points relatifs à la théorie des perturbations des planètes exposée dans la *Mécanique Céleste* » publié en 1825 au Tome II de la Royal Astronomical Society de Londres p. 325–412.
À leur tour, ces Mémoires de la *Connaissance des Temps* provoquèrent une nouvelle publication de Plana.
Sur le Mémoire de Laplace intitulé Sur les 2 grandes inégalités de Jupiter et de Saturne dans les Mémoires de l'Académie de Turin T. XXXI 1827, p. 377–399.
Il semble indispensable d'avoir connaissance de ces Mémoires pour bien comprendre et vérifier ceux de Laplace. Je les ai demandé à Monsieur [nom illisible] à l'Observatoire de Paris. J'espère qu'il voudra bien me les envoyer sans trop de retard.
Je vous prie, Monsieur et bien cher Maître, d'agréer les respectueux hommages de votre très humble et très obligé
A. Lebeuf

ALS 3p. Collection particulière, Paris 75017.

31.20 Lebeuf à Poincaré

MONTPELLIER, LE 10 Septembre 1902
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
FACULTÉ DES SCIENCES, MATHÉMATIQUES

Monsieur et Cher Maître,
Je vous transmets 1° Le Mémoire vérifié n°69 inséré dans la *Connaissance des Temps* de 1830;[24] 2° les feuilles, 2e épreuve , 26, 27 et 28; 3° la première partie de la liste des Mémoires à publier à la suite de ceux de la *Connaissance des Temps*; 4° le rapport que j'ai fait sur l'observation de l'éclipse totale de Soleil le 28 Mai 1900 et dont je vous prie d'agréer le respectueux hommage.

I. Le Mémoire n°69 « Sur le flux et le reflux lunaire atmosphérique » est le dernier Mémoire inséré dans la *Connaissance des Temps*. Il est la suite du Livre XIII et du Mémoire de la *Connaissance des Temps* de 1826 n°58. Le sujet est météorologique, mais on croirait plutôt que Laplace a surtout voulu profiter de l'occasion offerte pour appliquer ses formules du Calcul des Probabilités.
Voici les principales corrections provenant à peu près exclusivement de ce fait que le manuscrit ou les épreuves n'ont pas été relus au cours de l'impression dans la *Connaissance des Temps*.
Après avoir donné les variations par groupe de 3 mois (p. 5 *C. des T.*; 7, du Manuscrit) Laplace écrit pour la moyenne annuelle , puis plus tard page 15 *C. des T.*; 29 du Manuscrit il écrira et fera les calculs en partant de cette valeur. Comme on a bien pour la moyenne annuelle, j'ai rectifié en mettant partout ce nombre.
À la même page 5 *C. des T.*; 8, du Manuscrit, on lit pour les équations fondamentales :

$$4R\sin\lambda = x \qquad 4R\cos\lambda = y.$$

Il faut

$$4R\sin 2\lambda = x \qquad 4R\cos 2\lambda = y.$$

À la page 16, *C. des T.*; 30, Manuscrit, on lit[25]

$$\frac{\bar{k}}{4\bar{k}''} = 33\frac{k}{4k''} = 33\cdot 0,42884 = 12,8652,$$

il faut

$$\frac{\bar{k}}{4\bar{k}''} = 30\frac{k}{4k''} = 30\cdot 0,42884 = 12,8652,$$

et l'on voit manifestement que 33 est écrit par erreur puisque le calcul est effectué avec 30.
Mais à la formule suivante

$$T^2 = (0,177)^2\cdot 24\cdot 12,8652$$

24. Laplace (1827), réédité dans Secrétaires perpétuels (1904, 342–358).
25. Voir la réédition par les Secrétaires perpétuels, 1904, 356.

Le nombre 30 a été cette fois substitué par erreur à 33 ; ($24 = 30 \times \frac{4}{5}$). Effectivement on a, en bas de la page 15, *C. des T.* dernière ligne, les relations exactes

$$T = 0,177h; h^2 = 33 \cdot \frac{\bar{k}}{4\bar{k}''}\frac{4}{5}.$$

d'où

$$T^2 = (0,177)^2 33 \times \frac{4}{5} \times 30 \cdot 0,42884 = (0,177)^2 \cdot 26,4 \cdot 12,8652$$

et c'est cette valeur qui doit être employée pour calculer

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_T^\infty dt c^{-t^2}.$$

Le résultat,

$$0,0000015815 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_T^\infty dt c^{-t^2}.$$

ne me semble pas exact, ce qui d'ailleurs peut aussi provenir d'une faute d'impression et n'altère en rien les conclusions ultérieures.
En refaisant les calculs avec

$$T^2 = (0,177)^2 \cdot 26,4 \cdot 12,8652 = 10,640625$$

J'ai obtenu, par le développement en série et le développement en fractions continues, les valeurs suivantes :

	D^t Série	D^t Fractions Continues
I	0,0000020689	0,0000020689
II	0,0000019717	0,0000019678
III	0,0000019854	0,0000019829

En se bornant à cette approximation, suffisante pour le but à atteindre, l'on peut dire que l'on a ainsi à fort peu près :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_T^\infty dt C^{-t^2} = 0,000001984.$$

J'ai pensé que l'on pourrait substituer ce dernier nombre à 0,0000015815 dans le manuscrit.[26]

II. Les nouvelles épreuves des feuilles 26 - 27 - 28 ne renferment plus que quelques corrections faciles à exécuter, par exemple la lettre s à ajouter et un mot « par » à supprimer page 206, alinéa 2. On lit la phrase :

> Si l'on nomme v, comme dans le Livre VII, le mouvement sidéral de cet astre sur l'écliptique et par fv sa longitude vraie ...

26. Le nombre calculé par Lebeuf a été substitué à celui de Laplace (1827) dans la réédition de ce mémoire (Secrétaires perpétuels 1904, 356).

Le mot « par » aurait dû être supprimé dans la *Connaissance des Temps* de 1823 et on doit lire :

> Si l'on nomme V comme dans le Livre VII, le mouvement sidéral de cet astre sur l'écliptique et $f\,v$ sa longitude vraie ...

Ces remarques faites, les épreuves sont satisfaisantes.

III. Les Mémoires insérés dans la *Connaissance des Temps*, étaient épuisés avec le n°69. Voici les Recueils français dans lesquels se trouvent les Mémoires devant terminer le Tome XIII.[27]

1° *Journal de l'École Polytechnique*

2° *Journal de Physique*

3° *Bulletin de la Société Philomathique*

4° *Annales de Chimie*

5° *Journal des Marées*

Je crois que le Catalogue des Mémoires Laplace, n°1 - 69, qui m'a été envoyé sous le nom Catalogue Bigourdan ou la copie du *« Catalogue of scientific papers 1800–1863 »* de la « Royal Society of London », Tome III, 1869, renferme quelques inexactitudes.
Ainsi le n°21 « Supplément à la théorie de l'action capillaire » *Journal de Physique* LXV 1807, pages 88-96, est une analyse faite par Biot du « Supplément au X^e^ Livre du *Traité de Mécanique Céleste* » ; ce n'est pas un mémoire de Laplace. Le n°13, « Sur les Marées » *Bulletin de la Société Philomathique,* est également une analyse. Je vous donnerai donc seulement aujourd'hui la liste des Mémoires appartenant au *Journal de l'École Polytechnique.*
Ils sont originaux et ne figurent pas dans les Volumes déjà parus. Ils forment d'ailleurs, avec 214 pages, les deux tiers de ce qui doit compléter le Tome XIII et correspondent exactement aux indications de la note Tisserand sur la composition du Volume en cours d'impression.
Après vérification, je vous transmettrai la liste relative au *Journal de Physique,* au *Bulletin de la Société Philomatique,* etc.
Je vous prierai de vouloir bien demander à Monsieur Gauthier-Villars de m'envoyer aussi tôt que possible la copie des Mémoires du *Journal de l'École Polytechnique.*
Je suis, Monsieur et bien cher Maître, votre très humble et très obligé,
A. Lebeuf

ALS 7p. Collection particulière, Paris 75017.

27. Le treizième volume des *Œuvres de Laplace* (Secrétaires perpétuels 1904) renferme uniquement des mémoires publiés dans la *Connaissance des temps*. Les mémoires issus d'autre revues ont été réédités dans le quatorzième volume (Secrétaires perpétuels 1912).

31.21 Lebeuf à Poincaré

MONTPELLIER, LE 29 Août 1902
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
FACULTÉ DES SCIENCES — MATHÉMATIQUES

Monsieur et Cher Maître,
Je vous transmets, vus et vérifiés, les Mémoires insérés dans la *Connaissance des Temps* pour l'année 1829 : n° 66, 67, 68 et 68 bis.
n° 66 et 67 :
En 1825, Plana fit paraître au T. II des *Mémoires de la Société Royale de Londres* p. 325–412, sous le titre « Mémoires sur différents points relatifs à la Théorie des perturbations des planètes exposée dans la M. Céleste ».
Ce travail important avait pour but de compléter certains calculs ou de discuter quelques relations énoncées par Laplace. Dans les Mémoires 66 et 67 ce dernier justifie les résultats et les méthodes.
Voici une courte analyse et la correspondance qui existe entre les deux groupes de Mémoires.
Le Mémoire de Plana est divisé en 5 chapitres.
Le 1er Réflexions sur un passage qu'on lit à la page 278 du 1er Volume de la *M. Céleste* (*Œuvres* p. 302 lignes 9–14) p. 326–351 est consacré à la discussion du choix des constantes à introduire dans le calcul des éléments elliptiques et se termine par l'examen des formules relatives au dernier satellite de Saturne. Laplace répond seulement à cette dernière partie de l'argumentation dans le § 1 du n°67 duquel je ne vois rien à redire.
Le Chapitre II
Rectifications des formules données dans la page 166 du 3e Volume (174 des *Œuvres*) de la *M. Céleste* pour estimer l'action des étoiles sur la variation séculaire des éléments du système solaire.
p. 351–358 reprend les formules du Chapitre XVIII, signalées d'ailleurs comme fautives.
Dans le § III du n° 67 Laplace ne répond pas directement à Plana, il se contente de rectifier l'erreur matérielle

$$r = a\,(1 + e\cos(v - \varpi))$$

au lieu de

$$r = a\,(1 - e\cos(v - \varpi))$$

et ne considère que les variations ∂r, ∂v, ∂s, négligeant ∂e, $\partial\varpi$, ... qu'il avait calculés à l'origine et que Plana a déterminé dans le Ch. II.
Il me semble que les calculs de Laplace dans ce § III 67, *C. des T.* 249–251 sont eux-mêmes erronés dans les coefficients numériques. Je les ai refaits deux fois et les ai joints au Manuscrit. Je vous prierai de les contrôler et d'approuver les rectifications apportées au Mémoire. Il y a une simple erreur matérielle qui ne dénature point la pensée de Laplace et l'on peut substituer des nombres exacts aux siens sans note spéciale.
Le Chapitre III
Rectification de la formule donnée dans la page 31 du 3e Volume de la *M. Céleste,* (*Œuvres,* p. 31–33) pour calculer l'inégalité périodique de Mercure due à l'action de

la Terre dépendante de l'argument $nt - 4n't$; nt étant le moyen mouvement de Mercure et $n't$ celui de la Terre.
p. 358–368 contient les développements de cette inégalité en tenant compte des erreurs du 3e ordre qui s'abaisseront au 2e par dérivations. Laplace avait dit que cette considération importait peu (*Œuvres,* T. III, p. 33). Il justifie la méthode en quelques mots qui composent le § II du n°67, *C. des T.* p. 249.
Finalement, Plana après la mise en nombre avait reconnu, p. 368, que le coefficient de l'inégalité calculé par lui « diffère fort peu de celui qui est rapporté à la page 98 du 3e Volume (*Œuvres,* p. 103) ».
Le Chapitre IV (pour titre)
Rectification des résultats donnés dans les pages 130 et 140 du 3e Volume de la *M. Céleste* (*Œuv.,* p. 136 & 147) pour avoir égard au carré de la forme perturbatrice dans le calcul du coefficient de la grande inégalité de Jupiter et Saturne.
p. 368–406. Laplace ayant appliqué au calcul de l'inégalité de Jupiter et Saturne la relation approchée (*Œuvres,* T. I, p. 360)

$$m\sqrt{a}\zeta = m'\sqrt{a'}\zeta' = 0,$$

Plana veut mettre en évidence l'insuffisance de cette formule quand il s'agit du 2e ordre.

> « J'ai en conséquence, dit-il, p. 370, examiné sévèrement le principe souvent employé par M. de Laplace (Voyez 1er Volume de la *M. Céleste* p. 333 (*Œuv.* p. 360)) qui lie les perturbations réciproques des moyens mouvements ζ et ζ' de 2 planètes m, m' par l'équation
>
> $$\zeta' = -\frac{m}{m'}\sqrt{\frac{a}{a'}}\zeta$$
>
> et j'ai reconnu qu'il cessait d'être applicable aux termes de l'ordre du carré de la forme perturbatrice dont il est ici question ... ».

Plana calcule donc individuellement les valeurs de l'inégalité pour chaque planète. Il obtient

$$\begin{aligned} &\text{Jupiter, p. 397.} \quad \zeta = -1'', 9200 \sin[5n't - 2nt] + 5'', 5575 \cos[5n't - 2nt] \\ &\text{Saturne, p. 405,} \quad \zeta' = -25'', 1036 \sin[5n't - 2nt] - 12'', 8932 \cos[5n't - 2nt] \end{aligned}$$

et il constate que la relation simple de Laplace n'est pas satisfaite.
Dans le Mémoire 66, *C. des T.* p. 236–244, Laplace reprend les calculs et la méthode qui l'ont conduit à la formule précédente ; il la retrouve un peu modifiée ; il obtient en effet (Z) p. 242 *C. des T.*

$$\frac{m}{m'}\sqrt{\frac{a}{a'}}\zeta + \zeta' + (m - m')\zeta' = 0.$$

En y substituant alors les valeurs ζ, ζ' de Plana, il constate le désaccord et dit :

> « Il me paraît donc que les valeurs de ζ, ζ' déterminées par ce savant géomètre ont besoin de correction » p. 243 *C. des T.*

Or précisément les résultats numériques de Plana étaient entièrement erronés par suite d'un changement de ligne dans la fonction δR employée. Plana en fut averti par de Pontécoulant, lettre du 23 Mars 1829, p. 3–4 du Mémoire.
Note sur le calcul de la parité du coefficient de la grande inégalité de Jupiter et Saturne qui dépend du carré de la force perturbatrice, lue le 12 Avril 1829, Tomes XXXIV et XXXV des *Mémoires de l'Académie de Turin*, 1830–1831.
En dehors de la faute de signe énoncée plus haut, de Pontécoulant dit encore dans sa lettre « Il est résulté de cet examen qu'il m'est démontré que quelques inexactitudes se sont glissées dans vos opérations numériques ». Je n'ai pas refait tous les calculs numériques de Plana comme de Pontécoulant, mais voici ce que j'avais trouvé :
Dans la *Connaissance des Temps* p. 243, au lieu de

$$\zeta = -1'', 9200 \sin[5n't - 2nt] + 5'', 5575 \cos[5n't - 2nt]$$

on a imprimé

$$\zeta = -1'', 2200 \sin[\qquad] + 3'', 5575 \cos[\qquad];$$

en effectuant la multiplication par le facteur $\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}$ je ne pouvais obtenir

$$\zeta' = 4'', 6537 \sin[\qquad] - 10'', 6998 \cos[\qquad] + \text{ Terme de Laplace,}$$

tel qu'on le trouve à la page 243 de Laplace ou dans Plana, page 397. [28]
C'est alors que j'ai prié M. [nom illisible] de me communiquer les mémoires de Plana. [29]
Je constatai l'erreur d'impression dans le Mémoire de Laplace et en même temps je trouvai que Plana avait écrit −10",6998 au lieu de −13",4702, et −12",8932 au lieu de −12",9229, de sorte que dans le Mémoire de Laplace il y aurait eu à rectifier chacun de ces coefficients ainsi que 10",555 provenant de 10",6998.
Ceci évidemment n'altérait pas les conclusions mais indiquait chez Plana des erreurs de calcul numérique dans des opérations extrêmement simples et pouvait faire concevoir des doutes pour les résultats d'opérations plus compliquées.
Dans une note que je vous prierai d'examiner et d'approuver s'il y a lieu, je donne les valeurs de ζ et ζ' rectifiées par Plana lui même et je reprends le calcul de Laplace. [30] Le résultat vérifie cette fois, à peu près, la formule de Laplace et Plana dans le 2e Mémoire cité, reconnaît qu'elle est très approchée et il cherche à l'améliorer. Je pense que le lecteur qui s'intéressera à la question trouvera des renseignements suffisants dans la note annexée à la page 16 du Manuscrit. Je n'ai malheureusement pas entre les mains le Mémoire de Plana : Note sur un Mémoire de Laplace ayant pour titre Sur 2 grandes inégalités de Jupiter et de Saturne, Turin, *Mémoires de l'Académie*, T. XXXI, 1827, ni ceux de Poisson insérés dans la *Connaissance des Temps* de 1831 et 1832 et que je signale dans la note

28. Laplace (1826, 243) ; Secrétaires perpétuels (1904, 320). Le terme de Laplace qu'omet Lebeuf est $\left(\frac{1}{3512} - \frac{1}{1070}\right) \cdot \zeta'$.

29. Le nom est illisible, mais il s'agit sans doute du bibliothèquaire de l'Observatoire de Paris mentionné par Lebeuf dans sa lettre du 06.08.1902 (§ 3-31-19).

30. La note de Lebeuf a été insérée dans les *Œuvres de Laplace*, Volume 13 (Secrétaires perpétuels 1904, 321–322).

précitée. Toutefois j'ai pu en prendre communication par des analyses contenues dans le *Bulletin* du Baron de Férussac et par là j'ai pu croire qu'il y avait intérêt immédiat à les faire connaître au lecteur.[31]
Ainsi Poisson défend les méthodes de Laplace et voici ce que dit Plana :

> « De la je conclus que le rapport des deux perturbations ζ et ζ' dépendantes du carré de la force perturbatrice est loin de pouvoir être exprimé par la formule très simple que M. Laplace donne dans la page 8 de son Mémoire (formule (Z)) et je pense qu'il est avantageux de calculer directement chacune de ces perturbations ainsi que je l'ai pratiqué dans mon Mémoire publié dans le 2e Volume de la *Société Astronomique de Londres* p. 369–406. Il est possible que mes résultats définitifs ne soient pas tout à fait exacts malgré les efforts que j'ai faits pour éviter les erreurs matérielles dans un calcul aussi pénible, mais il me paraît démontré que l'objection élevée par M. Laplace contre mes coefficients numériques ne repose pas sur une base assez solide pour porter les géomètres et les astronomes à les croire irrévocablement fautif... » (Férussac, *Bulletin*, Sect. 1, Tome 8, p. 240)

D'autres remarques suivent sur les Mémoires de Laplace 66 et 67, qui paraissent également très intéressantes. Toutes ses conclusions sont ensuite détruites par la découverte de de Pontécoulant et il est curieux de pouvoir faire le rapprochement des opinions successives de Plana.
Enfin, le Chapitre V p. 406–412 Réflexion sur le Supplément à la théorie de Jupiter et Saturne publié dans le 4e Volume de la *M. Céleste* p. 327–344 (*Œuvres* p. 328–345), n'a pas été commenté par Laplace.
nos68 68bis.
Sur les Mémoires 68, 68bis il n'y a rien de particulier à signaler les ayant déjà examinés à propos du Mémoire analogue contenu dans la *Connaissance des Temps* de 1812.
Je vous prie, Monsieur et bien cher Maître, d'excuser la longueur de mes explications et d'agréer le respectueux hommage des meilleurs sentiments de votre très humble et très obligé,
A. Lebeuf

ALS 11p. Collection particulière, Paris 75017.

31. André Étienne d'Audebert de Férussac (1786–1836) a fondé le *Bulletin général et universel des annonces et des nouvelles scientifiques* en 1823.

31.22 Lebeuf à Poincaré

MONTPELLIER, LE 9 Octobre 1902
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
FACULTÉ DES SCIENCES — MATHÉMATIQUES

Monsieur et Cher Maître,
Je vous transmets corrigés : 1° les manuscrits des Mémoires 3 & 5 du *Journal de l'École Polytechnique,* 2° l'épreuve de la feuille 31.
I. Les Mémoires 3 et 5 dont le second est un complément du premier sont relatifs au plan du maximum des aires.
n°3 V^e Cahier p. 155–159,
n°5 VI^e Cahier p. 343–344.
Ce sont deux Mémoires non reproduits ailleurs, mais dont les résultats se retrouvent, suivant les besoins de la rédaction, dans la *Mécanique Céleste,* Tome I, page 63 ... ; page 129 ... page 141 ... page 181 ... page 339 ; au Tome VI, et au Tome XI p. 69 ... ; 548.
Les formules sont exactes, mais page 158, au 7–8 du Manuscrit, il me semble qu'il faut écrire :

$$\frac{X_1' dy_1' - y_1' dx_1'}{dt} = \frac{2\pi}{k} \cos\lambda' \sqrt{a'(1-e'^2)}$$

puis

$$C = \frac{2\pi}{k} m \sum m' \cos\lambda' \sqrt{a'(1-e'^2)}$$

au lieu de

$$\frac{X_1' dy_1' - y_1' dx_1'}{dt} = 2\pi \cos\lambda' \sqrt{a'(1-e'^2)}$$

C'est à dire qu'il faut ajouter le facteur $\frac{1}{k}$ comme on le voit au Tome I page 129 ; k ayant pour expression, $\frac{2\pi}{\sqrt{f(1+m)}}$. Il doit y avoir là un oubli typographique de même que dans l'expression de $\cos\theta$, dernière formule, on lit pour $\cos\gamma'$ pour $\cos\lambda'$.
Dans le renvoi à l'*Exposition du Système du Monde,* qui termine le Mémoire, Laplace indique le Chapitre III, Livre IV. [32] Aujourd'hui dans les *Œuvres,* le passage signalé est au Chapitre II, ainsi que dans l'édition de la Bibliothèque Universitaire, 1843–1847.
II. L'épreuve de la feuille 31 ne contient que des corrections faciles à exécuter, sans ambiguïté, en petit nombre d'ailleurs. À la page 243, au bas, pour la symétrie des formules, le typographe a laissé des blancs qui pourraient laisser croire à un défaut d'impression. Je vous prierai, si vous partagez cette idée, d'en demander la réduction.
Il me semble qu'il n'est nécessaire d'exiger une nouvelle épreuve de cette feuille.
Je vous prie, Monsieur et Cher Maître, d'agréer l'hommage respectueux des meilleurs sentiments de votre très humble et très obligé
A. Lebeuf

ALS 4p. Collection particulière, Paris 75017.

32. Laplace 1795.

31.23 Lebeuf à Poincaré

MONTPELLIER, LE 27 Octobre 1902
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
FACULTÉ DES SCIENCES — MATHÉMATIQUES

Monsieur et Cher Maître,
Je vous transmets, vérifiées, les 6 premières leçons faites à l'École Normale en 1795 et faisant partie du Mémoire n° 8. Le texte est très correct. Laplace a ajouté en outre quelques Notes d'éclaircissement ; j'ai cru bon d'ajouter à la suite de chacune d'elles : Note de l'Auteur. [33]
J'ai en outre rétabli en tête de chaque leçon le programme que l'on trouve au Tome II dans la table des VII^{e} à VIII^{e} Cahiers.
Dans la 5^{e} leçon, pages 47–48, au sujet des équations binômes, Laplace dit que l'on peut les résoudre algébriquement quand $n \leq 10$; puis il ajoute, en Note, que Gauss a résolu le problème pour un degré quelconque.
Or en 1771, Vandermonde avait donné la solution de $x^{11} - 1 = 0$. [34]
À la page 48, Laplace citait le Mémoire de ce dernier sans mentionner sa solution, j'ai pensé qu'il était utile de rappeler au Lecteur la découverte de Vandermonde en employant les termes mêmes de Lagrange : *Œuvres,* Tome 8, pages 355–360. [35] Dans la 5^{e} Edition de son *Algèbre,* p. 465–466 Lefébure de Fourcy signale également cette solution de Vandermonde. [36]
Dans la Note de la page 47, Laplace fait allusion à l'ouvrage de Gauss intitulé *Disquisitiones Arithmeticæ,* traduit en français sous le nom de *Recherches Arithmétiques.* Cet ouvrage est assez connu ; j'ai pensé qu'il n'était pas nécessaire d'en donner le titre. [37]
Je vous prie, Monsieur et Cher Maître, d'agréer le respectueux hommage des meilleurs sentiments de votre très humble et très obligé
A. Lebeuf

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

33. Ces leçons de Laplace figurent dans le 14^{e} tome des *Œuvres complètes de Laplace* (Secrétaires perpétuels 1912). Lebeuf y a fait insérer des remarques de Laplace en tant que notes de bas de page, et une autre de lui-même à propos de Vandermonde, en bas de la page 55.
34. Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796) fut membre de l'Académie des sciences de Paris.
35. Serret 1879.
36. Lefébure de Fourcy 1845.
37. Gauss 1801, 1807 ; Secrétaires perpétuels, dirs., 1912, 54. Sur la réception de l'ouvrage des *Disquisitiones Arithmeticæ*, voir Goldstein et al. (2007).

31.24 Poincaré à Lebeuf

[12.04.1907][38]

Cher Monsieur,
Je crois que la disposition que vous proposez est bonne. On pourra insérer le mémoire en 2 fois.[39]
Votre bien dévoué,
Poincaré

ALS 1p. Collection particulière, Clermont-Ferrand.

31.25 Lebeuf à Poincaré

BESANÇON, LE 17 Février 1908[a]
UNIVERSITÉ DE BESANÇON — OBSERVATOIRE NATIONAL DE BESANÇON
CABINET DU DIRECTEUR — TÉLÉPHONE : 3.69

Monsieur et Cher Maître,
J'ai plaisir à vous transmettre l'Éphéméride de la planète 383 calculée par M. L. Perrot.

Je vous serais très obligé si vous vouliez bien le faire paraître dans l'un des premiers n° du *Bulletin Astronomique.*[40]
J'espère faire calculer à MM. Chofardet et Perrot les éphémérides de quelques planètes intéressantes puis de les faire continuer dans cette voie pour des orbites soit de comètes, soit de planètes.[41]
Veuillez recevoir, Monsieur et Cher Maître, l'hommage respectueux de mes meilleurs sentiments.
A. Lebeuf

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

38. L'enveloppe porte un tampon postal du 12.04.1907 ; elle est adressée par Poincaré à "Monsieur Lebeuf, Directeur de l'Observatoire, Besançon, Doubs." Elle porte également une annotation au crayon de main inconnue : "R[éponse] à lettre du 11.4.07. Reçu le 13.4.07".

39. Il s'agit peut-être du rapport sur les observations faites à Cisternia (Espagne) pendant l'éclipse totale du Soleil du 30.08.1905, mentionné par Lebeuf et Chofardet (1907). Cependant, aucun rapport sur ce sujet n'a été publié par Lebeuf dans le *Bulletin astronomique*.

40. En 1908, une seule éphéméride de Louis Perrot sera publiée dans le *Bulletin astronomique*, numéro d'avril. Elle concerne la planète 387 Aquitania (Perrot 1908).

41. Paul Chofardet, astronome à l'observatoire de Besançon, publiera son éphéméride de la planète 354 Eleonora dans le numéro d'avril. Chofardet et Perrot publieront chacun une éphéméride de petite planète en juillet 1909 ; voir Lebeuf à Poincaré, 24.03.1909 (§ 3-31-26).

a. Le manuscrit comprend deux pages de calculs de Poincaré, sans rapport avec l'éphéméride de Perrot.

31.26 Lebeuf à Poincaré

BESANÇON, LE 24 Mars 1909
UNIVERSITÉ DE BESANÇON — OBSERVATOIRE NATIONAL DE BESANÇON
CABINET DU DIRECTEUR

Monsieur H. Poincaré — Membre de l'Institut, Paris

Monsieur,
J'ai l'honneur de vous adresser ci-joint deux éphémérides de petites planètes calculées par MM. Chofardet et Perrot, et vous demandez de bien vouloir les faire paraître dans le prochain numéro du *Bulletin astronomique*.[42]
Avec mes remerciements anticipés, veuillez agréer, Monsieur, l'hommage de mon plus profond respect.
A. Lebeuf

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

31.27 Lebeuf à Poincaré

[Vers le mois de janvier 1910]

Monsieur et bien cher Maître,
Je suis toujours profondément confus et ému de la haute distinction que l'Académie m'a décerné ; comme il n'y a pas d'autres motifs que votre extrême bienveillance et celle des principaux membres de l'Académie et que je suis d'ailleurs déjà amplement récompensé par la sympathique confiance des Horlogers Bisontins, je vous en exprime cordialement ma vive reconnaissance et ma sincère gratitude.[43]
Il ne me sera guère possible d'accorder plus de temps aux choses de l'Observatoire mais il serait bien facile sans doute de faire mieux, je souhaite qu'il en soit désormais ainsi pour justifier et répondre à vos espérances.
La Chronométrie continue à progresser pour le nombre, les dépôts ont augmenté de 40 pendant l'année courante, et par la qualité des chronomètres. Il y a peu de temps encore, on ne comptait pas les Médailles d'or avant le 1er Janvier, car elles se présentaient généralement à la fin des Concours au printemps. Actuellement nous en possédons déjà 35, dont la meilleure avec 261 points l'emporte déjà sur la Coupe de l'année 1908–1909. C'est de très bon augure pour le Concours actuel prenant fin au 30 Avril prochain. L'esprit de la Fabrique est bas et malgré la faiblesse de l'enseignement professionnel qui ne fournit presque rien à l'Horlogerie locale le recrutement des jeunes Régleurs se fait par entraînement des Concours de l'Observatoire, mais, malheureusement pour le pays, avec des Suisses. Il faut dire toutefois que les éléments français et suisses sont très mélangés dans

42. Il s'agit vraisemblablement des éphémérides publiées dans le numéro de juillet 1909 ; voir Chofardet (1909) et Perrot (1909).

43. Lebeuf a reçu un prix de la Fondation Le Conte d'un montant de 2000 francs, attribué par l'Académie des sciences de Paris en 1909, "pour ses travaux chronométrique et astronomique, ainsi que pour sa participation à la publication des Œuvres de Laplace" (Gauja 1917, 305).

la région, des deux côtés du Jura, et qu'il faut souvent moins regarder la nationalité que la valeur des hommes. Quand on examine de très près les choses, on voit que les deux pays sont à peu près également bien partagés. Mais où la Suisse l'emporte franchement, c'est par les écoles d'Horlogerie. Nous ne possédons rien d'équivalent. Vous voudrez bien excuser l'insistance monotone que j'apporte aux questions chronométriques. Mais je suis obligé constamment pour faire ressortir la valeur de la fabrique d'Horlogerie, éclairer le public et appeler fortement son attention sur les besoins qu'il peut aujourd'hui satisfaire à Besançon. Il ne suffit pas qu'on fasse ici d'excellents chronomètres, il faut encore que le public les achète et rende ainsi justice aux efforts des fabricants & régleurs. Actuellement le rendement commercial de la chronométrie est bon, le bulletin est bien demandé et enlevé sitôt les épreuves achevées. Il en découle une émulation de bon aloi dans la Fabrique et une élévation marquée dans la technique horlogère. L'esprit commerçant est moins mercantile et conçoit mieux l'effort désintéressé vers le beau et l'idéal.

En fin d'année, pour le 1er Janvier, nous avons toujours un afflux de chronomètres auxquels il faut délivrer sans retard les bulletins de marche. Ainsi notre installation sismique en a un peu souffert, l'appareil Mainka-Bosch, de Strasbourg à enregistrement continu sur papier au noir de fumée ne fonctionnera que dans quelques jours.[44] Nous avons également le sismographe de Paulin-Kilian, de Grenoble, prêté par M. André de l'Observatoire de Lyon.[45] Cette appareil est plutôt un sismoscope, il n'enregistre rien et indique très vaguement la direction du mouvement sismique. Il est en marche depuis le 21 Xbre mais n'a encore rien signalé. Nous avons apporté un soin très méticuleux dans l'aménagement de la salle où sont placés les instruments. J'espère que notre installation sera très correcte, aura l'approbation des sismologues professionnels et répondra au vœu de l'Académie qui nous a fait avoir la première mise de fond, 3000 frs, pour l'organisation.

Nous avons également fait l'acquisition d'un photomètre construit par M. Gautier sur les données de M. Nordmann.[46] Cet appareil est placé sur l'équatorial coudé, mais il ne sera guère utilisé cet hiver parce que l'équatorial est peu maniable par le froid. Nous nous proposons simplement, pour débuter, d'étudier l'éclat et la grandeur des petites planètes.

Dans nos instants de loisir, je fais calculer des éphémérides de recherche et on constate trop souvent que l'ignorance de la grandeur de l'astre empêche sa redécouverte et son observation. Il y a d'ailleurs une sorte d'anarchie qui va sans cesse grandissant en tout ce qui touche aux petites planètes, aussi je crois que la Photométrie peut y rendre quelques services. Je n'insisterai pas sur les autres questions qui nous préoccupent ayant déjà trop abusé de votre patience, je dirai seulement que je voudrais bien, après l'édition des Tables de Laplace, en faire une sorte d'analyse guidant le lecteur. Je paierais ainsi la dette contractée envers l'Académie.

Je vous prie, Monsieur & bien Cher Maître, d'agréer pour vous, pour Madame Poincaré

44. Carl Mainka (1873–1943) a collaboré avec l'entreprise J. & A. Bosch de Strasbourg, fabricant d'instruments sismiques.

45. Wilfrid Kilian (1862–1925) fut professeur de géologie et de minéralogie à la Faculté des sciences de Grenoble. Charles André (1842–1912) fut professeur d'astronomie à la Faculté des sciences de Lyon, et directeur de l'Observatoire de Lyon.

46. L'atelier parisien de Paul Gautier (1842–1909) a construit plusieurs instruments conçus par Charles Nordmann (1881–1940), astronome adjoint à l'Observatoire de Paris.

et toute votre famille, mes vœux les plus sincères pour 1910 et de croire à l'affectueuse reconnaissance de votre
A. Lebeuf

ALS 8p. Collection particulière, Paris 75017.

Chapitre 32

Aleksandr Mikhailovich Liapunov

Aleksandr Mikhailovich Liapunov (1857–1918), né à Yaroslavl, a fait des études à la Faculté de physique et de mathématique de Saint-Pétersbourg. Il fut nommé chargé de cours à l'Université de Kharkov en 1884, et professeur en 1893. En 1901, Liapunov fut élu à l'Académie des sciences russe à Saint-Pétersbourg, et il quitta Kharkov en 1902. L'épouse de Liapunov attrapa la tuberculose, suite à laquelle Liapunov accepta un poste à Odessa en 1917. Sa femme mourut un an plus tard, et le jour même, Liapunov mit fin à sa vie.

Autour de 1882, Pafnouti Tchebychev a dirigé Liapunov vers la recherche de « nouvelles formes d'équilibre qui diffèrent légèrement de la forme ellipsoïdale » (Liapunov 1904, 13). Liapunov s'est inspiré également des travaux de Liouville et de Riemann sur les figures d'équilibre (Lützen 1984, 125). Il a trouvé des figures infiniment voisines de l'ellipsoïde de Jacobi critique, dont les figures piriformes de Poincaré. La thèse de maîtrise de Liapunov (1884) devait être consacrée à l'exposition de ces résultats, mais Liapunov n'a pas réussi à démontrer l'existence des nouvelles figures en toute rigueur. Il décida, par conséquent, de consacrer son travail plutôt à une étude approfondie de la stabilité des figures connues.

Les propositions à ce sujet de Thomson & Tait, énoncées sans démonstration dans leur *Treatise*, ont pu motiver les travaux de Poincaré et Darwin (Thomson & Tait 1879a, § 778"(i)). Quant à Liapunov, il affirma avoir rédigé son mémoire avant d'avoir lu ce livre (Liapunov 1904, 6). Le travail de Liapunov s'est organisé autour du projet de démonstration du principe de stabilité de Thomson avec des méthodes inspirées de celles de Dirichlet (1846). Liapunov précisa son objectif ainsi :

> Dans ce travail, j'étudie la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation, dont les molécules s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton, en partant d'un principe représentant une généralisation du principe connu de Lagrange, d'après lequel l'étude de la

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_32

> stabilité se ramène à la recherche du minimum du potentiel. (Liapunov 1904, 5)

Dans ce cadre, Liapunov donna une définition nouvelle du concept de stabilité qu'il crut, au moins au départ, appropriée pour éviter certaines difficultés dans la démonstration.

En ce qui concerne les figures *non-ellipsoïdales* d'équilibre, Liapunov annonça une conjecture concernant l'existence de telles figures infiniment voisines de figures d'équilibre ellipsoïdales qui vérifient la condition d'équilibre au moins en première approximation.

La correspondance entre Liapunov et Poincaré a eu lieu suite à la lecture par Liapunov de deux notes de Poincaré sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation (Poincaré 1885c, 1885d). Poincaré a répondu à Liapunov (§ 3-32-2) en lui promettant de lui faire parvenir un exemplaire de son mémoire sur ce même sujet, qui devait paraître dans les *Acta mathematica* (Poincaré 1885b). Leur correspondance s'est arrêtée alors pendant douze mois, avant de reprendre fin 1886, avec un échange de points de vue à propos de leurs résultats et méthodes respectifs.

À l'issu de cet échange, Poincaré (1887) publia une démonstration simplifiée d'un des théorèmes de Liapunov, en suivant une analogie en électrostatique. Quant à Liapunov, il est revenu à la question de l'existence des figures piriformes. Dans une note ajoutée à la traduction française de son mémoire, il observa que le problème des figures d'équilibre infiniment voisines des figures ellipsoïdales

> … fut proposé à l'auteur en 1882 par Tchebychef, et l'auteur a énoncé les résultats auxquels il est arrivé en cherchant à le résoudre, en une thèse, à la fin du présent travail. Dans le Mémoire connu, qui parut en 1885 dans les *Acta mathematica*, M. Poincaré est arrivé aux mêmes résultats, sans connaître les recherches de l'auteur. Toutefois la question des nouvelles figures d'équilibre, peu différentes des figures ellipsoïdales, ne peut encore être considérée comme résolue ; car le calcul n'a donné qu'une première approximation, et cela seulement au point de vue formel. Donc, rien ne prouve que les nouvelles figures d'équilibre existent réellement. Après 20 années écoulées depuis l'époque où le présent travail fut publié, l'auteur a repris la question, dont il s'occupe en ce moment. Il a réussi à trouver une méthode qui permet de pousser l'approximation, dans cette question difficile, aussi loin qu'on veut, et bientôt il se propose de publier les résultats de ses recherches. (Liapunov 1904, 13)

Dans sa thèse de doctorat, en revanche, Liapunov (1892) a tourné son attention vers une autre partie de la mécanique céleste : l'étude de la stabilité du mouvement. Malgré de nombreux comptes-rendus et analyses à leur sujet, les travaux de Liapunov n'ont pas trouvé de lecteurs en dehors de la Russie avant d'être traduits au début du vingtième siècle (Liapunov 1904, 1907).

32.1 Liapunov à Poincaré

Kharkow. 9 Octobre 1885 [1]

Monsieur,

J'ai l'honneur de m'adresser à Vous à cause de Vos deux Notes intéressantes, insérées dans les tomes C et CI (N°N° 16 et 4) des „*Comptes rendus*". [2] La question que Vous y traitez est celle dont je m'occupe il y a quelque temps, et c'est à la fin de l'année passée que j'ai publié en russe un travail* qui contient quelques résultats, donnés dans Vos Notes. [3] En croyant qu'il Vous serait peut être intéressant de voir ce travail, je prends la liberté d'en Vous présenter un exemplaire. À la fin du livre vous verrez quatre conclusions dont la dernière traduite en français est ainsi conçue :

„Pour chaque valeur du nombre entier n, plus grande que 2, on peut trouver parmi les ellipsoïdes de Jacobi au moins un, et parmi ceux de Maclaurin précisément $\mathcal{E}\left(\frac{n+2}{2}\right)$, qui soient infiniment voisins aux certaines surfaces algébriques d'ordre n pour lesquelles se trouve accomplie *dans la première approximation* la condition d'équilibre." [4] Les surfaces algébriques dont j'y parle sont précisément celles qui appartiennent aux séries linéaires de figures d'équilibre que Vous avez trouvées. Mais je ne vois pas, comment on peut démontrer que ces figures satisfont réellement à la condition d'équilibre. La méthode des approximations successives n'est pas, je le crois, propre à donner cette démonstration.

Vous m'obligerez infiniment si Vous voulez bien de me donner quelques renseignements sur ce sujet ou de m'indiquer le lieu où je pourrais trouver les éléments d'une pareille démonstration.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma parfaite considération et de mon profond respect.

A. Liapounoff,

professeur-agrégé de l'université de Kharkow (Russie méridionale).

* Sous le titre : „Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation."

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017. Publiée par Smirnov & Youchkevitch (1987, 3).

1. Le 21.10.1885, selon le calendrier grégorien.
2. Poincaré (1885c, 1885d) annonce une partie des résultats de son mémoire des *Acta mathematica* (Poincaré 1885b) à propos de l'existence de nouvelles figures d'équilibre non-ellipsoïdales, et quelques résultats concernant la stabilité.
3. Liapunov 1884, et la traduction française, Liapunov 1904.
4. La traduction de Liapunov diffère de celle faite par Davaux :

> Etant donné un entier n quelconque, surpassant 2, on peut trouver $E\frac{n}{2}+2$ surfaces algébriques d'ordre n infiniment voisines de celles des figures ellipsoïdales d'équilibre et vérifiant, à une première approximation, la condition d'équilibre. Parmi les figures délimitées par ces surfaces, *une* est infiniment voisine d'un ellipsoïde de Jacobi, et les $E\frac{n}{2}+1$ autres sont infiniment voisines des ellipsoïdes de Maclaurin. (Liapunov 1904, 116)

32.2 Poincaré à Liapunov

[29.10.1885][5]
rue Gay Lussac 66 — Paris

Monsieur,

Je vous remercie beaucoup de l'envoi de votre mémoire ; je n'ai pu le lire à cause de mon ignorance de la langue russe, mais j'ai vu par une analyse que M. Radau a eu la bonté de m'en faire que vous m'aviez devancé sur un certain nombre de points.

Vous me demandez comment on peut démontrer l'existence des figures d'équilibre qui ne sont qu'approximativement des surfaces algébriques. Comme vous le dites fort bien, la méthode des approximations successives n'est pas applicable, car *la deuxième approximation*, qui d'ailleurs ne nous apprendrait rien de plus que la première, *se heurterait à des difficultés presque inextricables*.

J'ai donc dû suivre une voie toute différente analogue à celle que j'ai employée dans ma note sur certaines solutions particulières du problème des trois corps.[6] À vrai dire, la démonstration n'est pas complète. J'ai été obligé d'admettre le postulat suivant qu'il serait peut-être difficile de démontrer mais qui, je crois, ne saurait être mis sérieusement en doute.

Si une masse fluide est en équilibre stable sous l'action de certaines forces et s'il survient des forces perturbatrices soumises à un potentiel εV (je suppose que V est une fonction donnée de x, y, z et que ε soit une constante arbitraire) on peut prendre ε assez petit, pour que la masse fluide soit encore susceptible d'une figure d'équilibre stable et que cette figure diffère aussi peu qu'on voudra de la primitive.

Ce théorème serait évident s'il s'agissait d'un système de points discrets, mais en ce qui concerne une masse fluide, il soulève un certain nombre de difficultés relatives à l'usage de l'infini et qui sont peut être plus intéressantes pour l'analyste que pour le mécanicien.

Je ne doute pas qu'on ne puisse les surmonter un jour, mais je ne l'ai pas fait encore.

J'oubliais de dire que je suppose la fonction V analytique et qu'il s'agit de l'équilibre absolu et non de l'équilibre relatif et de la stabilité cinétique.

Mon mémoire est imprimé dans les *Acta Mathematica* et paraîtra dans les fascicules 3 et 4 du Tome 7.[7] Aussitôt que j'aurai reçu les tirages à part, je vous en enverrai un exemplaire. Vous auriez alors l'obligeance de le lire et de me faire connaître ses ressemblances et ses différences avec le vôtre en ce qui concerne les résultats et les méthodes. Je rédigerais d'après vos indications une note où je vous rendrais justice et qui serait imprimée dans les *Acta*.[8]

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

5. Le manuscrit porte une annotation de main inconnue : "29 окт. 1885."

6. Poincaré 1883a, 1884a. L'analogie consiste en l'application d'un théorème de Kronecker ; voir Kronecker (1869) et Poincaré (1885b, 268). Comme le note Smirnov (1987, note 15), Picard met en valeur l'approche de Liapunov dans son rapport en vue de son élection au poste de Correspondant de l'Académie des sciences.

7. Poincaré 1885b.

8. Poincaré n'a pas publié de telle note, comme l'ont remarqué Smirnov & Youchkevitch (1987, note 12).

Poincaré

ALS 4p. Archives of the Russian Academy of Science, St. Petersburg branch. Publiée par Smirnov & Youchkevitch (1987, 4).

32.3 Liapunov à Poincaré

30 XI 1886[9]
Kharkow, l'Université

Monsieur,
Je vous prie de m'excuser de n'avoir pas encore répondu à votre aimable lettre.[10] J'ai voulu vous écrire après avoir lu votre mémoire, mais des circonstances qui ne dépendaient pas de moi ne m'ont pas permies de le lire que ces derniers jours.
Permettez-moi avant tout de vous remercier de vos réponses sur mes questions. Votre démonstration de l'existence de nouveaux figures d'équilibre est très ingénieuse, mais l'absence d'une démonstration rigoureuse du postulat sur lequel elle est fondée laisse à désirer une démonstration directe, qui serait fondée par exemple sur des méthodes analogues à celles qu'on emploie pour la séparation des racines des équations. Le dernier temps je m'occupe de cette question, mais je dois avouer que jusqu'à présent toutes mes tentatives dans cette direction restent sans succès.
Vous me demandez de vous écrire sur les ressemblances et les différences de mon mémoire avec le vôtre. Après avoir lu votre mémoire dans les *„Acta mathematica"*, je viens à la conclusion que vous embrassez la question d'une manière beaucoup plus générale et que vous la traitez plus profondément que je ne le fait dans le mien. Mon mémoire est consacré principalement à la question de la stabilité et ce n'est qu'en passant que j'y mentionne la possibilité d'infinité de figures d'équilibre différentes des figures ellipsoïdales, puisque je n'ai [pas] eu le moyen de démontrer leur existence. Du reste, je n'y recherche que la stabilité séculaire et je n'y parle rien de la stabilité ordinaire ; aussi mon mémoire ne contiens pas le chapitre sur les mouvements infiniment petits qui se trouve dans le vôtre. Le principe sur lequel est fondée toute ma discussion de la stabilité est celui du minimum de l'énergie totale que M. Thomson et M. Tait ont annoncé dans la nouvelle édition de leur *„Treatise on natural philosophy"*.[11] Je démontre ce principe dans le chapitre premier de mon mémoire par une méthode analogue à celle que M. Lejeune-Dirichlet avait employé pour démontrer le principe de Lagrange relatif à la stabilité de l'équilibre absolu des systèmes au nombre fini de coordonnées.[12] Mais j'aurais fait peut-être mieux, si je le laissais sans démonstration, parce que malgré mes efforts de donner

9. Il est possible que Liapunov ait voulu écrire "30 X 1886", ou le 12.11.1886 selon le calendrier grégorien.

10. Voir Poincaré à Liapunov, 29.10.1885 (§ 3-32-2).

11. Liapunov (1904, 8) cite le passage suivant : "When the energy with given moment of momentum is either a minimum or a maximum, the kinetic equilibrium is clearly stable, if the liquid is perfectly inviscid. It seems probable that it is essentially unstable, when the energy is a minimax ; but we do not know that this proposition has been ever proved" (Thomson & Tait 1879a, § 778" (j)).

12. Dirichlet 1846.

une définition de la stabilité, quoiqu'un peu artificielle, ma démonstration est restée peu rigoureuse. À présent je me suis même persuadé qu'on ne peut pas en donner une démonstration rigoureuse, quoiqu'on n'a pas de raisons suffisantes pour douter de la vérité du principe.
Vous voyez ainsi que l'objet principal de mon mémoire se distingue de celui du vôtre. Cependant en ce qui concerne les questions communes à nos mémoires, on aperçoit leur grande ressemblance non seulement dans les résultats mais aussi dans les méthodes. La plus grande ressemblance a lieu entre le chapitre sur les fonctions de Lamé, qui se trouve dans mon mémoire, et les §§ du vôtre où vous traitez le même sujet. [13] Mais vous y déduisez aussi des propriétés nécessaires des fonctions sphériques, en les regardant comme un cas limite des fonctions de Lamé, ce qui donne à votre discussion un caractère plus unique ; [14] tandis que moi je considère les propriétés des fonctions sphériques séparément dans le chapitre consacré à la stabilité des ellipsoïdes de révolution. [15]
Enfin, quant aux résultats peu nombreux qui se trouvent dans mon mémoire et ne se trouvent pas dans le vôtre, ils se réduisent à ce qui suit :

I. Dans le chapitre sur la stabilité des ellipsoïdes de révolution je considère, outre le cas général relatif aux perturbations, deux suppositions particulières : 1) quand la surface du liquide reste dans le mouvement perturbé une surface de révolution, et 2) quand l'ellipsoïde d'inertie de la masse liquide reste un ellipsoïde de révolution. Et je trouve que dans la première supposition la limite supérieure des excentricités des ellipsoïdes de révolution séculairement stables est égale au nombre 0,9979896 ..., et dans la seconde — au nombre 0,89 ... (pages 49–53 de mon mémoire). [16]

II. Dans le chapitre sur la stabilité des ellipsoïdes de Jacobi, je démontre le théorème dont vous parlez sur les pages 343 et 344 de votre mémoire, à savoir que l'équation qu'on obtient en égalant au zéro celui des coefficients de stabilité qui s'annule le premier ne peut être satisfaite que d'une seule manière. Dans mon système des dénominations ceux des coefficients de stabilité qui peuvent s'annuler sont dénotés par T_{2m+1}^m, où m est l'ordre des fonctions de Lamé correspondantes. [17] L'équation mentionnée est donc $T_7^3 = 0$,

13. Liapunov (1904, 63) ; Poincaré (1885b, 299).

14. Poincaré (1885b, 309) étudie les racines de l'équation $R_{n,i}^{(k)} = 0$ au cas particulier $b^2 = c^2$, b et c étant deux axes de l'ellipsoïde.

15. Liapunov 1904, 42.

16. Les valeurs indiquées ne correspondent pas exactement aux valeurs qui se trouvent dans la version française (Liapunov 1904, 61–63) de son mémoire de master, où la limite supérieure du cas 1) est le nombre 0,985225 ..., tandis que la limite correspondante au cas 2) doit être comprise entre 0,895 et 0,9.

17. De manière générale, Liapunov (1904, 87) définit :

$$T_i^m = \frac{1}{3}\mathbf{E}_1^1(R)\mathbf{F}_1^1(R) - \frac{1}{2m+1}\mathbf{E}_i^m(R)\mathbf{F}_i^m(R).$$

Ici, m correspond au degré total n chez Poincaré, les fonctions $\mathbf{E}$ correspondent aux fonctions R de Poincaré, et les fonctions $\mathbf{F}$ aux fonctions S correspondantes (voir § 3-15 pour plus de précision). La signification de i, cependant, est différente ; chez Liapunov, i est liée au nombre de racines de l'équation $\mathbf{E}_i^m(x) = 0$ situées dans un certain intervalle (Liapunov 1904, 72). En résumé, le coefficient T_i^m correspond au coefficient de stabilité et sa discussion se trouve sur les pages 85–88 de mon mémoire.[18] En ce qui concerne l'équation générale $T^m_{2m+1} = 0$, je ne démontre pas le théorème analogue ; sur les pages 95 et 96 je montre seulement qu'elle peut être satisfaite au moins d'une manière, quoique je ne doute pas, aussi bien que vous, qu'elle ne peut l'être que d'une seule manière.[19]

III. Sur les pages 88–94 je m'occupe de la résolution numérique de l'équation $T^3_7 = 0$, ce qui revient à [la] résolution des deux équations $A = 0$ et $B = 0$ (p. 90) à deux inconnues s et t, où s et t ont la même signification que dans les mémoires de Meyer et de Liouville (cette seconde équation n'est autre que $T^2_4 = 0$ qui doit être satisfaite pour tous les ellipsoïdes de Jacobi).[20] Ainsi j'obtiens le résultat suivant : les excentricités de l'ellipsoïde limite pour des ellipsoïdes de Jacobi séculairement stables sont comprises : l'une entre les limites 0,6016 et 0,6025 et l'autre entre les limites 0,9380 et 0,9387. La vitesse angulaire correspondante est comprise entre les limites : $\sqrt{2\pi f\varrho}\sqrt{0,1419}$ et $\sqrt{2\pi f\varrho}\sqrt{0,1423}$ (où f est la constante de l'attraction et ϱ la densité du liquide).[21]

IV. La conclusion sur la stabilité des ellipsoïdes limites (pour des ellipsoïdes stables) ne me semblait pas évidente. Mais la discussion de la stabilité de ces ellipsoïdes présente en général des difficultés du même ordre que la recherche de la deuxième approximation pour des figures d'équilibre infiniment voisines des figures ellipsoïdales, car il est indispensable pour cela de former la variation du potentiel au moins du quatrième ordre. Cette difficulté n'a pas lieu relativement à l'ellipsoïde de révolution de Jacobi (qui est un ellipsoïde limite pour des ellipsoïdes de révolution séculairement stables), par ce qu'on sait l'expression précise du potentiel de l'ellipsoïde à trois axes. Le chapitre dernier de

de Poincaré (1885b, 321) de la forme

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_{i'} S_{i'}}{2n+1}.$$

En particulier, T^3_7 est le coefficient qui correspond à la fonction $R^1_{3,0}$, la "third zonal harmonic".

À propos du théorème de Poincaré, Liapunov s'intéressa aux équations

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_2 S_2}{5} = \frac{R_i S_i}{2n+1},$$

auxquelles Poincaré fit allusion :

> [Ces équations] ne peuvent donc être satisfaites si R_i n'est pas égal à $R^1_{0,n}$, et si $R_i = R^1_{0,n}$, nous avons vu qu'elles peuvent toujours l'être.
>
> Il resterait à établir qu'elles ne peuvent l'être que d'une seule manière.
>
> Bien que diverses raisons me fassent penser qu'il en est probablement ainsi, je n'ai pu encore le démontrer rigoureusement. Il y aurait surtout intérêt à établir cette proposition en ce qui concerne la plus simple de toutes les fonctions $R^1_{0,n}$, c'est à dire en ce qui concerne $R^1_{0,3}$ [...]. Il faudrait pour cela des calculs qui seraient sans doute fort longs, mais qui ne seraient pas inextricables. (Poincaré 1885b, 343)

En effet, Liapunov démontre non seulement que l'équation $T^3_7 = 0$ a une racine, mais aussi qu'elle n'en a qu'une seule (Liapunov 1904, 93).

18. Liapunov 1904, 93.
19. Liapunov 1904, 103.
20. Voir Meyer (1842), Liouville (1834), et Lützen (1984, 125).
21. Liapunov 1904, 99–101. On peut comparer la valeur $\frac{\omega^2}{2\pi\rho} = 0,14205$ indiquée par Darwin dans sa lettre à Poincaré du 28.05.1901 (§ 3-15-11).

mon mémoire est consacré à la discussion de la stabilité de cet ellipsoïde, et j'y trouve que c'est une figure d'équilibre stable.

Voilà tout ce qui distingue mon mémoire relativement au vôtre.
Permettez-moi de vous témoigner enfin, que la lecture de votre mémoire était pour moi très intéressante et instructive, et de vous remercier de la note sur mon mémoire qui est parue dans le *Bulletin Astronomique* et qui est rédigée, je crois, d'après vos indications. Je vous prie aussi d'exprimer ma reconnaissance à M. Radau qui a eu la bonté de vous traduire mon mémoire.[22]
Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma parfaite considération et de mon profond respect.
A. Liapounoff

ALS 12p. Collection particulière, Paris 75017. Publiée par Smirnov & Youchkevitch (1987, 5–7).

32.4 Poincaré à Liapunov

[26.11.1886][23]

Monsieur,
Je vous remercie beaucoup de votre lettre.[24] Quand je verrai M. Tisserand, je lui demanderai s'il veut bien en insérer un extrait dans le *Bulletin Astronomique*. Je crois que cela pourrait intéresser les lecteurs français. Voulez-vous le permettre ?
Dans l'analyse que M. Radau a faite de votre travail, plusieurs points m'ont paru obscurs.[25]
Serait-ce abuser de votre obligeance que de vous demander à ce sujet quelques explications. Que dois-je entendre par cette nouvelle définition de la stabilité qu'après une perturbation suffisamment petite le liquide doit s'écarter aussi peu qu'on voudra de la figure d'équilibre au moins aussi longtemps qu'il ne se produit pas, à la surface, de saillies sous forme de filets ou de lames, quelque minces qu'on les suppose, en d'autres termes tant qu'il n'y a pas de rides. Qu'est-ce que c'est que ces saillies, ces filets, ces lames et ces rides ?
Je ne comprends pas non plus très bien votre première conclusion.
D'ailleurs, si vous voulez bien le permettre nous reparlerons plus en détail de toutes ces questions.
Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.
Poincaré

ALS. Archives of the Russian Academy of Science, St. Petersburg branch. Publiée par Smirnov & Youchkevitch (1987, 7–8).

22. Rodolphe Radau a rédigé la note sur le mémoire de Liapunov (Radau 1885).
23. Le manuscrit porte une annotation de main inconnue : "26 ноябрь 1886."
24. Liapunov à Poincaré, 12.11.1886 (§ 3-32-3).
25. Radau 1885.

32.5 Liapunov à Poincaré

Kharkow $18\frac{19}{\mathrm{XI}}86$[26]

Monsieur,
Je vous remercie beaucoup de votre proposition d'insérer un extrait de ma lettre dans le *Bulletin Astronomique*.
Vous me demandez sur quelques points de ma définition de la stabilité. Pour répondre, je dois entrer dans quelques détails sur ce sujet.
Je m'avais proposé de démontrer le principe de Thomson en s'appuyant seulement sur l'équation de l'énergie, ou du moins de déduire de cette équation toutes les conséquences possibles relatives à la stabilité.[27]
Soit $d\tau$ et $d\tau'$ deux éléments du volume du liquide, r leur distance mutuelle, S le moment d'inertie de la masse liquide autour de l'axe des z, que je mène par son centre de gravité parallèlement à l'axe de rotation du liquide dans le mouvement non perturbé, J le moment de la quantité du mouvement (non perturbé), et T la force vive du liquide dans le mouvement relatif convenablement défini. Alors, en choisissant convenablement l'unité de densité, l'équation de l'énergie prendra la forme

$$T + \Pi = \text{Const.} \tag{1}$$

où

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(\frac{J^2}{S} - \iint \frac{d\tau d\tau'}{r}\right),$$

l'intégration étant étendue au volume entier du liquide.[28] Le problème se ramène ainsi à la démonstration (en s'appuyant seulement sur l'équation (1)) que le minimum de Π (dans les conditions $\int d\tau = \text{Const.}$, $\int x d\tau = \int y d\tau = 0$) correspond à la figure d'équilibre stable.
Avant tout, il fallait décider ce qu'on doit concevoir ici sous le terme „minimum“. Or il est facile de se convaincre que Π ne peut être un minimum dans ce sens, qu'il serait *plus petit que pour toute autre* figure ayant le même volume et le même centre de gravité (le minimum dans le sens mentionné n'a lieu que pour la sphère quand $J = 0$). C'est cela que j'avais affirmé dans ma première conclusion (dont vous me demandez aussi).[29] Le minimum de Π ne peut donc avoir lieu que par rapport aux figures infiniment voisines. Mais tant qu'on n'a pas donné l'explication de ce qu'on doit entendre par l'expression „infiniment voisin“, il est évident qu'on ne peut rien démontrer.
Pour fixer les idées bornons-nous au cas le plus simple, celui quand la figure d'équilibre est une figure de révolution. La déformation quelconque de la surface du liquide peut être

26. Par le calendrier grégorien, le 01.12.1886.

27. Quant à ce projet de démonstration, voir la lettre de Liapunov à Poincaré du 12.11.1886 (§ 3-32-3). Dans ce qui suit, Liapunov explique en détail, reprenant les traits essentiels du chapitre premier de son mémoire (Liapunov 1904, 20), comment il s'est persuadé que pour élaborer une telle démonstration il faut modifier la conception de stabilité dans le sens indiqué.

28. Une variante de cette expression pour Π, remplaçant la vitesse angulaire $\frac{J}{S}$ par une expression compliquée de la composante ω_z, se trouve dans le mémoire de Liapunov (1904, 20).

29. Voir les notes de la lettre de Poincaré à Liapunov (§ 3-32-4).

définie alors par des distances normales de ses points de la surface d'équilibre. Soit ε la plus grande de ces distances. J'avais adopté que dans le cas de Π minimum la valeur de Π est plus petite que pour toute autre figure (ayant le même volume et le même centre de gravité que la figure d'équilibre), *pour laquelle ε ne dépasse pas une certaine limite E assez petite et qu'on peut toujours assigner.*[30] Je consens que cette définition du minimum est très volontaire. Maintenant je doute même de sa vérité, et c'est pourquoi je trouve ma démonstration du principe, qui est fondé sur cette définition, peu rigoureuse, comme je vous l'avais déjà écrit.[31]
Outre la quantité ε, je considère aussi le volume qui est compris entre la surface du liquide après la déformation et sa surface d'équilibre. Soit Δ ce volume. Il est évident qu'on peut toujours trouver des déformations telles que, Δ restant aussi petit qu'on voudra, ε sera aussi grand qu'on voudra. *Tous les déformations de ce genre je les avais désignées par l'expression peu précise des saillies.* D'autre part, il est évident que pour chaque valeur donnée de ϵ on peut toujours choisir Δ suffisamment petit pour que l'accroissement correspondant de Π soit aussi petit qu'on voudra.
Cela posé, l'équation (1) n'exigeant pas que l'accroissement positif des Π soit assez petit, il ne s'en suivra pas même dans le cas de Π minimum (et quelques petites que soient les perturbations), que ε ne puisse aller en augmentant. Mais ε étant plus grand que E, Π pourra aller en diminuant, et conséquamment la figure du liquide peut s'écarter de plus en plus de la figure d'équilibre. Ainsi, on ne peut rien démontrer en s'appuyant seulement sur l'équation (1), si on n'exclut pas tous ces perturbations qui s'accompagnent des saillies assez minces. Mais pour la possibilité d'une pareille exclusion il faut être en état de poser certaines conditions pour des perturbations initiales. Cela étant très difficile, j'avais préféré de modifier un peu la définition de la stabilité, et cette modification se réduit à ce qu'on doit regarder la figure d'équilibre comme stable même dans le cas, quand après les perturbations infiniment petites, la figure du liquide peut s'écarter de plus en plus de la figure d'équilibre, *si cet écartement ne se fait que par le moyen des déformations qui s'accompagnent des saillies infiniment minces.*[32]
Si cette explication, Monsieur, ne vous semble pas suffisante, et si vous voulez bien continuer notre correspondance, je suis à votre disposition.
Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.
A. Liapounoff

ALS 8p. Collection particulière, Paris 75017. Publiée par Smirnov & Youchkevitch (1987, 8–10).

30. Liapunov arrive à cette définition du minimum à la page 24 de son mémoire (Liapunov 1904).

31. Liapunov n'a pas pu éclaircir cette difficulté dans l'intervalle de temps entre sa lettre et la parution de la traduction française de son mémoire. Ceci est clair du fait qu'il ajoute à cette traduction une note allant tout à fait dans la même direction :

> On voit que ce point n'est pas établi. L'auteur l'admet comme une conséquence de la notion du minimum ; mais on doit avouer que, dans la question considérée, cette notion est assez obscure. (Liapunov 1904, 24)

32. Liapunov explique comment il est arrivé à cette nouvelle définition de la stabilité dans l'introduction à son mémoire (Liapunov 1904, 9). Il observe que pour un liquide on ne peut adopter sans modification la conception usuelle de stabilité d'un système de points isolés en mécanique.

32.6 Poincaré à Liapunov

[15.12.1886][33]

Monsieur,
Merci de votre lettre. Puisque vous m'autorisez à la faire insérer en partie dans le *Bulletin Astronomique*, je vais en parler à M. Tisserand.[34]
Vos explications me satisfont complètement. Je vois que la difficulté que vous avez rencontrée est précisément la même à laquelle je me suis heurté. Mais il me semble qu'elle se présente déjà dans le cas de la sphère ($I = 0$).
Supposons que l'on communique à la sphère une perturbation très petite ; elle correspondra à une addition d'énergie très petite. Imaginons, et rien n'empêche de le supposer, qu'au bout d'un certain temps, toute cette énergie additionnelle se soit transformée en force vive et se soit concentrée toute entière dans une petite portion de matière μ. Cette masse μ pouvant être très petite, sa vitesse pourra être très grande bien que la force vive soit très petite. Elle pourra donc être assez grande pour que la masse μ se détache complètement de la sphère et s'en aille à l'infini.
Le théorème de l'énergie ne suffit donc pas en toute rigueur pour montrer qu'une perturbation initiale très petite de la sphère n'en altérera pas la figure d'une façon sensible.
Votre bien dévoué,
Poincaré

ALS 2p. Archives of the Russian Academy of Science, St. Petersburg branch. Publiée par Smirnov & Youchkevitch (1987, 10).

33. Le manuscrit porte une annotation de main inconnue : "15 декабр. 1886."
34. Voir Liapunov à Poincaré (§ 3-32-5). La lettre de Liapunov n'a pas été publiée dans le journal de Tisserand.

Chapitre 33

Anders Lindstedt

Anders Lindstedt naît le 27 juin 1854 dans un village près de Falun dans la province de Dalécarlie au centre de la Suède. Il étudie à l'université de Lund où il passe une thèse en astronomie en 1877 (Lindstedt 1877). Il est alors embauché à l'université de Lund comme assistant, poste qu'il conserve jusqu'à ce qu'il obtienne un poste d'observateur-astronome à l'université de Dorpat alors en Russie (actuellement, Tartu en Lituanie). Il devient professeur de mathématiques appliquées dans cette même université en 1883. En 1886, il rejoint l'université technique de Stockholm, la *Kungliga Tekniska högskolan* (KTH) comme professeur de mathématiques et de mécanique appliquée. Lindstedt restera jusqu'en 1909 à la KTH dont il sera le recteur entre 1902 et 1909. En arrivant à Stockholm, Lindstedt commence à s'intéresser aux mathématiques actuarielles et participe à plusieurs commissions gouvernementales concernant la question des retraites, de la sécurité sociale et du droit des assurances. Il démissionne de l'université en 1909 pour occuper des postes de responsabilités dans divers organismes d'assurances sociales. Il meurt le 16 mai 1939. [1]

L'activité de Lindstedt comme astronome est surtout pratique. Il publie entre 1877 et 1882 des résultats de mesures concernant les méridiens et la planète Mars. Son activité en mécanique céleste est circonscrite à la période 1882–1886 pendant laquelle il publie dans une série de notes concernant une méthode de développement en séries trigonométriques des solutions de certaines équations différentielles qui ne contiennent pas de terme séculaire. La question des termes séculaires était particulièrement cruciale en mécanique céleste car liée à la question de la stabilité du système solaire. La méthode de Lindstedt associée aux idées de Gyldén représente pour Poincaré une avancée significative dans cette direction :

> Grâce aux efforts de [Gyldén et Lindstedt], la difficulté provenant des termes séculaires peut être regardée comme définitivement vaincue et les procédés nouveaux suffiront probablement pendant fort longtemps encore aux besoins de la pratique. (Poincaré 1892b, 3)

1. Sur la vie de Lindstedt, voir le *Journal of the Institute of Actuaries* 70 (1939), 269.

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_33

La publication de sa méthode avait amené Lindstedt à correspondre avec des astronomes et des mathématiciens français dont Hermite, Tisserand, Callandreau et Poincaré. Au début des années 1880, alors qu'il rédige les articles définitifs de sa théorie des fonctions fuchsiennes et ceux consacrés à la théorie qualitative des équations différentielles, Poincaré s'intéresse à la question de la convergence des séries. Il publie à ce sujet deux notes en 1882 consacrées l'une à l'intégration des équations différentielles par les séries (Poincaré 1882e) et l'autre à la convergence des séries trigonométriques (Poincaré 1882d). Dans ses deux notes, Poincaré évoque les applications que ses réflexions sont supposées avoir en mécanique céleste bien que, jusqu'alors, il n'ait pas encore contribué explicitement à ce champ. La mécanique céleste et le problème des trois corps semblent avoir intéressé très tôt Poincaré puisqu'il assiste en 1878 encore étudiant à la soutenance de thèse de Haret. Dans la première note, Poincaré montre que l'on peut toujours se ramener par un changement de variables au cas où les séries sont convergentes pour toutes les valeurs de la variable. Dans la seconde note, Poincaré montre qu'une série trigonométrique simplement convergente peut ne pas être bornée et il en conclut que, même si sa remarque n'a pas d'importance du point de vue *pratique* en mécanique céleste, "il est impossible d'accepter certaines conséquences *théoriques* que l'on serait tenté de tirer de [la convergence de certains développements trigonométriques]" (Poincaré 1882d, 768). Dans les notes suivantes, Poincaré insistera d'une part sur le fait que la convergence d'un développement peut ne pas être suffisante pour prouver la stabilité d'un système et d'autre part, que la divergence d'une série ne signifie pas son inutilité. Il introduit ainsi la notion de "séries asymptotiques", séries dont le terme général décroît d'abord très rapidement et qui sont pourtant divergentes. Ces séries restent utiles pour des approximations qui selon les cas sont valables pour "un intervalle de temps limité" ou "pour toutes les valeurs du temps". Poincaré (1886a) poursuivra ses réflexions sur les différents types de convergence dans le champs de la mécanique céleste mais aussi dans celui de l'analyse générale des équations différentielles. Dans sa notice, il explique sa démarche ainsi :

> Dans quelles conditions ces séries divergentes peuvent-elles être utilisées avec succès ? C'est ce que j'ai cherché à éclaircir. J'ai montré dans quelles limites, cet emploi est légitime, comme l'est, pour citer un exemple célèbre, celui de la série de Stirling et j'ai fait voir que les règles du calcul de ces séries sont les mêmes que celles de séries ordinaires.
>
> J'ai justifié ainsi l'emploi que font les astronomes de ce genre de développements ; et en particulier des développements trigonométriques. (Poincaré 1921, 107)

La correspondance avec Lindstedt s'oriente très vite vers deux thèmes : les conditions d'application de la méthode de Lindstedt et la convergence des développements obtenus. Poincaré (1886b) démontrera assez rapidement qu'il n'y a aucune restriction à l'application de la méthode de Lindstedt, comme il l'explique dans sa notice :

> Dans cette dernière méthode, un artifice ingénieux permet à chaque approximation de faire disparaître les termes séculaires qui peuvent s'être introduits. Il est aisé de voir que cet artifice réussira toujours s'il n'y a qu'un terme à faire disparaître ; mais il n'en serait plus de même s'il s'était introduit à la fois

> deux termes séculaires. Il est facile de vérifier d'ailleurs que, dans les premières approximations, on n'a à se débarrasser que d'un seul terme ; mais on peut se demander s'il doit en être toujours ainsi. Un examen superficiel pourrait faire croire le contraire, et même M. Lindstedt était disposé à penser que sa méthode ne réussirait que s'il n'y avait entre les arguments aucune relation linéaire.
>
> Je suis parvenu à démontrer que le terme séculaire qui peut apparaître à chaque approximation est toujours unique et que, par conséquent, la méthode de M. Lindstedt est toujours applicable. (Poincaré 1921, 108)

Une des conclusions de l'article de Poincaré (1890a), *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* est que les séries de Lindstedt ne peuvent être uniformément convergentes pour toutes les valeurs initiales du problème. L'argument de Poincaré est d'ordre qualitatif. Après avoir exhibé un nouveau type de solutions asymptotiques, c'est-à-dire des solutions qui convergent, lorsque t tend vers $\pm\infty$, vers des solutions périodiques, Poincaré montre que la convergence uniforme des développements de Lindstedt pour toutes les valeurs initiales entraîne l'absence de solutions asymptotiques.[2]

2. La méthode de Lindstedt et la convergence de ses développements sont étudiées dans les chapitres 9 et 13 des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (Poincaré 1893).

33.1 Poincaré à Lindstedt

Paris, le 14 Août 1883
rue Gay-Lussac 66

Monsieur,
Je vous remercie beaucoup des brochures que vous avez eu la bonté de m'envoyer il y a environ un mois ; je les ai lues avec le plus grand intérêt ; les méthodes que vous exposez, me semblent les meilleures qui aient été proposées jusqu'ici pour la solution du problème des trois corps. [3]
Toutefois il est un point de détail sur lequel je ne saurais partager votre opinion. Parlant de l'équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x(\beta \cos \lambda t - n^2)$$

Vous dites que l'intégrale ne contiendra de termes séculaires que dans le cas où

$$m \pm \lambda \text{ est multiple de } \quad n.$$

Moi, je trouve au contraire que ces termes séculaires se présenteront lorsque m est un multiple exact de λ, et ne se présenteront que dans ce cas. [4]
Encore faut-il remarquer que même dans ce cas, l'équation en question admet une intégrale particulière dépouillée de termes séculaires.

3. Lindstedt a publié en 1882 et 1883 plusieurs articles concernant le problème des trois corps (Lindstedt 1883c) et la question de l'intégration des équations différentielles de la théorie des perturbations (Lindstedt 1883a, 1882b, 1882a, 1883d) dans lesquels il développait sa théorie des développements en série trigonométrique des solutions de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \Psi_0 + \Psi_1 x + \Psi_2 x^2 + \dots$$

Dans son mémoire publié à l'Académie des sciences de St-Pétersbourg (Lindstedt 1883a), il étudie deux exemples. Le premier considère le cas où les coefficients Ψ sont des constantes, et le second concerne l'équation dont il est question au début de la correspondance entre Poincaré et Lindstedt :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (n^2 - 2\beta \cos(\lambda t + b))x = 0.$$

L'objectif de Lindstedt est de proposer une méthode directe pour obtenir des développements trigonométriques des solutions de ces équations :

> Astronomisch zu reden besteht die Aufgabe hier einerseits darin zu untersuchen, unter welchen Bedingungen eine für alle endlichen Werthe von t konvergente Darstellung von x durch eine trigonometrische Reihe mit reellem Argument möglich ist, und andererseits darin das Integral wirklich aufzustellen ….
>
> Ich will zunächst eine direkte Integrationsmethode angeben, die deshalb von Interesse zu sein scheint, weil bisher keine solche bekannt war, und weil sie sich ausserdem auf sehr elementare, analytische Hülfsmittel gründet. In praktischer Hinsicht dürfte dieselbe dagegen wohl kaum einen Werth haben. (Lindstedt 1883a, 3)

À l'époque du début de la correspondance avec Lindstedt, Poincaré commençait à s'intéresser à ces questions depuis une année (Poincaré 1882d, 1883a).

4. Il faut lire “lorsque $m \pm n$ est un multiple exact de λ”. Poincaré montrera plus tard (§ 3-33-4) que dans ce cas il n'y a pas de terme séculaire.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.
Poincaré

ALS 2p. Bibliothèque de l'Observatoire de Paris.

Lindstedt introduit l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (n^2 - 2\beta\cos(\lambda t + b))x = 0 \tag{1}$$

en rappelant que Gyldén réduit l'estimation de l'évection à la résolution d'une suite d'équations de ce type et qu'elle joue aussi un rôle important dans la théorie des vibrations d'une membrane (Lindstedt 1883a, 10–11).

La méthode de Lindstedt consiste à écrire la solution générale sous la forme d'une série :

$$x = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \mu_i \cos(\omega + i(\lambda t + b)) \tag{2}$$

où

$$\omega = n(1-\sigma)t + \pi \quad \text{et} \quad \sigma = -\frac{\beta^2}{n^2(\lambda^2 - 4n^2)}.$$

Lindstedt introduit pour des raisons de commodité d'écriture le paramètre $m = n(1-\sigma)$, tel que $\omega = mt + \pi$. Il conclut que les inconnues du problème sont alors les coefficients μ et le paramètre m. En introduisant la série (2) dans l'équation différentielle (1), il obtient des équations de récurrence sur les μ_i

$$\mu_i(n^2 - (m + i\lambda)^2) = \beta(\mu_{i-1} + \mu_{i+1})$$

et une estimation de m qui développée au 3e ordre par rapport à β permet de déterminer une première valeur approchée :

$$m = n(1 + \frac{\beta^2}{n^2(\lambda^2 - 4n^2)}.$$

En introduisant cette valeur approchée dans les équations de récurrence, Lindstedt améliore l'approximation de m. Le processus peut être itéré mais Lindstedt précise qu'en général, la seconde approximation est suffisante. Il n'y a de problème que lorsque la première estimation de m n'est pas définissable :

> In den allermeisten Fällen der Störungstheorie wird die zweite Berechnung ausreichen. Nur in gewissen Fällen, vor allen Dingen wenn λ sich von $2n$ nur um Grössen erster Ordnung unterscheidet, ist es damit nicht genug. Alsdann wird nämlich, wie man sofort übersieht, der angegebene erste Werth von m nur bis auf Grössen zweiter Ordnung genau, und während weiter im allgemeinen Falle ein Coefficient μ_i oder μ_{-1} von der Ordnung i ist, so wird dagegen in dem erwähnten Fall μ_{-1} von der nullten Ordnung, was gerade einem elementären Gliede entspricht. Es ist weiter zu bemerken, dass das Auftreten eines sekulären Gliedes in diesem Falle wohl möglich, aber nicht wahrscheinlich ist.
>
> Da nämlich $m = n(1-\sigma)$ ist, so sieht man, dass nur wenn entweder
>
> $$\lambda = \frac{n\sigma}{i} = \frac{1}{i}(n - m)$$
>
> oder
>
> $$\lambda = -\frac{2n}{i} + \frac{n\sigma}{i} = -\frac{1}{i}(n + m)$$
>
> μ_i unendlich gross wird, was eben das Vorkommen eines sekulären Gliedes charakterisirt. (Lindstedt 1883a, 13)

33.2 Lindstedt à Poincaré

Dorpat den 20 August 1883

Sehr geehrter Herr Professor!
Für Ihren Brief vom 14 Aug. bin ich Ihnen besonders dankbar. Es kann einem Anfänger, wie ich es bin, nur höchst angenehm sein, dass ein so distinguirter Mathematiker wie Sie, seine Methoden wenigstens der Beachtung werth finden.
Indessen ist eine Passage in meiner Abhandlung, und zwar, wie mir scheint, eine sehr wichtige, der Sie ihre Zustimmung versagen.
Bei der Behandlung der Diff.Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \{n^2 - 2\beta \cos \lambda t\}.x = 0 \tag{1}$$

habe ich behauptet, dass sekulare Glieder auch dann nicht zum Vorschein kommen, wenn λ einen solchen Werth haben würde, dass das Integral nur ein Argument enthalte, und nicht, wie im allgemeinen Falle, zwei solche. Ich habe behauptet, dass wenn λ gleich einem Vielfachen von m gesetzt wird, dass auch dann keine sekularen Glieder auftreten. Sie meinen, dass es nicht so ist, sondern dass, im Gegentheil, gerade in diesem Falle und nur hier solche Glieder entstehen können und müssen.
Ich will Ihnen darin beipflichten, dass ich diese Frage in der Abhandlung zum Theil falsch beantwortet habe, aber ich glaube doch, dass ich im Wesentlichen Recht habe.[5]
Nehmen wir nähmlich, um den besprochenen Fall zu haben,

$$\lambda = k.m$$

wo k eine ganze Zahl bedeutet, so wird das Problem darin bestehen, in der Diff.Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \{n^2 - 2\beta \cos k.mt\}.x = 0 \tag{2}$$

die Constante m so zu bestimmen, dass das Integral eine trigonometrische Reihe mit dem einzigen Argumente mt wird.
Der Gleichung (5) in meiner Abhandlung entsprechend, hat man für x den Werth

$$x = \sum_{-\infty}^{+\infty} i \ \mu_i \cos\{mt + \pi + i.kmt\}$$

anzunehmen. Durch Substitution in (2) erhält man zur Berechnung der Unbekannten m und μ_i die Gleichungen

$$\mu_i\{n^2 - (1 + ik)^2 m^2\} = \beta\{\mu_{i+1} + \mu_{i-1}\}$$

5. Lindstedt comprend l'objection de Poincaré comme concernant le cas où λ est un multiple de m (voir Poincaré à Lindstedt, 14.08.1883, § 3-33-1). Lindstedt explique donc dans ce cas particulier sa méthode générale. Il inverse la condition énoncée par Poincaré dans la lettre précédente. Dans la première partie de cette lettre, il traite du cas $\lambda = km$ alors que l'objection de Poincaré concerne le cas $m = k\lambda$.

die leicht aufzulösen sind. In einer ersten Annäherung hat man z.B.

$$\mu_1 = -\frac{\beta}{(k^2+2k)n^2} \cdot \mu_0$$
$$\mu_{-1} = -\frac{\beta}{(k^2-2k)n^2} \cdot \mu_0$$
$$m^2 = n^2 + \frac{2k^2\beta^2}{n^2(k^4-4k)}$$

Man hat also im Allgemeinen ein Integral mit zwei Integrationskonstanten — μ_0 und π — und mit nur einem Argument. [6]

Wenn man das Problem in ähnlicher Weise wie *Heine* — Handb. der Kugelfunktionen Th. I pag. 404 u. folg. — eine verwandte Aufgabe löst, so sieht [man], dass es unendlich viele Werthe von m giebt, welche das Problem lösen. [7] Jedem einzelnen Werth entspricht ein vollständiges Integral. Auch die Coefficienten lassen sich in der *Heine*'schen Weise diskutieren.

Diese Schlüsse lassen sich ohne Weiteres auf den Fall übertragen, dass man als Coefficient für x in (2) nicht bloss ein einzelnes Glied

$$2\beta \cos kmt$$

sondern eine — konvergente — Reihe solcher Glieder hat.

Indessen giebt es zwei Fälle, wo das Integral nur *eine* Integrationskonstante bekommt, und also ein partikuläres Integral wird, nähmlich wenn man in (2)

$$k = 1 \quad \text{oder} \quad k = 2$$

setzt. [8]

6. Ces formules sont exactement celles obtenues par Lindstedt dans son mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la théorie de la perturbation (Lindstedt 1883a, 11–12).

7. Lindstedt fait déjà allusion à ce passage du traité de Heine (1878) dans son mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la théorie des perturbations pour signaler qu'il étudie le cas où les solutions peuvent s'exprimer sous la forme d'une série trigonométrique en λt :

> Man hat sie vor Gyldén weder direkt noch durch Annäherungen in befriedigender Weise integriren können. Nur unter der speciellen Annahme, dass x sich durch eine trigonometrische Reihe mit dem Argumente λt ausdrücken lasse, hat man die Integration durch Substitution einer solchen Reihe mit unbestimmten Coefficienten vollziehen können. (Lindstedt 1883a).

8. Lindstedt étudie à partir de ce moment les cas particuliers qui peuvent apparaître avec sa théorie générale. Ces cas font partie de ceux évoqués par Poincaré puisque lorsque $k = 1$ ou $k = 2$, m est un multiple de $\lambda/2$. En effet, Poincaré traite de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x(\beta \cos \lambda t - n^2)$$

et comme l'affirme Poincaré dans sa lettre du 14.08.1883 (§ 3-33-1), des termes séculaires apparaissent lorsque

Diese beiden Fälle, d.h. die Diff.Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \{n^2 - 2\beta \cos mt\}x = 0$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \{n^2 - 2\beta \cos 2mt\}x = 0$$

hatte ich bei der Verfassung der Abhandlung übersehen. Wenn man z.B. die zweite in der angegebenen Weise zu integrieren sucht, so findet man

$$\begin{array}{rcl}
\mu_0(n^2 - m^2) & = & \beta(\mu_{-1} + \mu_{+1}) \\
\mu_1(n^2 - 9m^2) & = & \beta(\mu_0 + \mu_2) \\
\mu_2(n^2 - 25m^2) & = & \beta(\mu_1 + \mu_3) \\
\multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\
\mu_{-1}(n^2 - m^2) & = & \beta(\mu_0 + \mu_{-2}) \\
\mu_{-2}(n^2 - 9m^2) & = & \beta(\mu_{-1} + \mu_{-3}) \\
\multicolumn{3}{c}{\dotfill}
\end{array}$$

so dass, wenn man

$$\mu_1 = \beta f \mu_0$$

setzt, so ist auch

$$\mu_{-2} = \beta f \mu_{-1}$$

wo f folgende Bedeutung hat :

$$f = \cfrac{1}{n^2 - 9m^2 - \cfrac{\beta^2}{n^2 - 25m^2 - \cfrac{\beta^2}{n - 49m^2 - \cdots}}}$$

Zur Bestimmung von m hat man demnach die Gleichung[en]

$$\mu_0\{n^2 - m^2 - \beta^2 f\} = \beta\mu_{-1}$$
$$\mu_{-1}\{n^2 - m^2 - \beta^2 f\} = \beta\mu_0$$

woraus

$$\{n^2 - m^2 - \beta^2 f\}^2 = \beta^2$$

---

m est un multiple de λ. Lindstedt traite de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = x(2\beta \cos \lambda t - n^2).$$

Dans ce cas, les termes séculaires apparaissent lorsque m est un multiple de $\lambda/2$. Voir la lettre de Lindstedt du 21.08.1883 (§ 3-33-3) et celle de Poincaré du 25.08.1883 (§ 3-33-4).

und

$$\mu_{-1} = \pm \mu_0$$

und also auch

$$\mu_{-i-1} = \pm \mu_i$$

Demzufolge schwindet aus dem Integral die Integrationskonstante π, und man erhält nur ein partikuläres Integral, dass entweder aus lauter Cosinus- oder lauter Sinus-Glieder[n] besteht, jenachdem $\mu_{-1} = +\mu_0$ oder $\mu_{-1} = -\mu_0$ genommen wird.
So z.B. hat man

$$m^2 = n^2 - \beta + \frac{\beta^2}{8m^2} - \ldots$$

und

$$\begin{array}{ccccc} \mu_1 & = & \mu_{-2} & = & -\frac{\beta}{8m^2} - \frac{9\beta^2}{64m^4} \\ \mu_2 & = & \mu_{-3} & = & \frac{\beta^2}{192m^4} - \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

wenn man schreibt

$$x = \mu_0\{\cos mt + \mu_1 \cos 3mt + \mu_2 \cos 5mt + \ldots\}.$$

Ob in diesem Falle sekuläre Glieder überhaupt auftreten, wage ich nicht zu entscheiden, ebensowenig wie ich glaube, dass *meine* Methode sie zu ermitteln erlaubt. So würde mir desshalb sehr willkommen sein, wenn Sie mir mittheilen wollten, *wie* Sie dieselben gefunden haben. [9]
Mit der ausgezeichnetsten Hochachtung
Ihr And. Lindstedt

33.3 Lindstedt à Poincaré

Dorpat den 21 August 1883

Hochgeehrter Herr Professor !
In dem gestrigen Briefe an Sie habe ich, durch ein Missverständniss veranlasst, einen Fehler begangen. Sie setzen *nicht*

$$\lambda = k \cdot m$$

sondern

$$\lambda = \frac{m}{k}$$

9. Lindstedt affirme qu'il ne peut y avoir des termes séculaires que dans le cas $m \pm n = k\lambda$, sans conclure sur leur présence effective. La thèse de Poincaré est qu'il n'apparaît effectivement des termes séculaires que dans le cas $m = k\lambda$.

wo k eine positive ganze Zahl ist. In diesem Falle wird das Verhältniss dasselbe, als wenn man $\lambda = m$ oder $\lambda = 2m$ setzt, und *Sie* haben also *vollkommen Recht*. Zum Schluss bitte ich sehr um Entschuldigung für diese Versündigung. Da dieser Fall aber für die Störungstheorie wohl keine Wichtigkeit hat, so hatte ich ihn gänzlich übersehen. [10]
Mit ausgezeichneter Hochachtung
And. Lindstedt

ALSX 1p. Collection particulière, Paris.

33.4 Poincaré à Lindstedt

Paris 25 Août 1883

Monsieur,
Merci de votre aimable lettre à laquelle je m'empresse de répondre. [11] Je ne crois pas vous avoir écrit qu'il y avait des termes séculaires quand λ est multiple de m ; et si je l'ai fait c'est par inadvertance ; j'ai dit que ces termes se présentent quand m est multiple de λ et j'aurais dû dire de $\frac{\lambda}{2}$. Voici l'analyse par laquelle j'arrive à ce résultat, analyse que je croyais connue mais qui ne doit pas l'être, puisque vous qui êtes si bien au courant de ces questions, vous ne semblez pas la connaître. [12]
Faisons $\lambda = 1$ pour plus de commodité. Soient

$$x = \phi(t) \qquad y = \psi(t)$$

deux intégrales de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x(n^2 - 2\beta \cos t) = 0.$$

Soit

$$x' = \phi(t + 2\pi) \qquad y' = \psi(t + 2\pi)$$

10. Dans son mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la théorie des perturbations, Lindstedt (1883a, 13) explique que dans le cas général, la seconde itération de ses calculs suffit pour avoir une bonne approximation des coefficients de la série. En revanche, dans les cas qui font l'objet de sa discussion avec Poincaré, Lindstedt signale que ce n'est pas suffisant mais comme son objectif dans ce mémoire est de donner une résolution de l'équation de l'évection, il ne s'intéresse ni aux cas particuliers, ni à la question des termes séculaires :

> Da ich indessen jetzt nur die Absicht habe die Evektionsgleichung, so wie Gyldén sie gegeben, in möglichst einfacher Weise zu integriren, so werde ich auf diese Frage hier nicht weiter eingehen. (Lindstedt 1883a, 13)

11. Voir Lindstedt à Poincaré, 20.08.1883 (§ 3-33-2).
12. Poincaré va raisonner en étudiant l'espace des solutions de l'équation différentielle alors que Lindstedt analysait le processus de détermination des coefficients par les équations de récurrence. Le raisonnement de Poincaré a certaines analogies avec la théorie de Floquet (1883) sur les équations différentielles à coefficients périodiques. Poincaré reprend le même raisonnement dans ses notes de cours de l'année 1898 (Cahiers 1898, pp. 10–12, reproduction numérisée, Archives Henri Poincaré).

on aura :

$$x' = \alpha x + \beta y \qquad y' = \gamma x + \delta y$$

α, β, γ et δ étant des constantes telles que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. $\alpha + \delta = 2\cos 2m\pi$ est indépendant du choix des deux intégrales x et y ; disons en passant que $\alpha + \delta$ est développable suivant les puissances de n^2 et de β en une série qui est convergente quelles que soient les valeurs de ces variables.
Si $(\alpha + \delta)^2 \lessgtr 4$; on peut choisir x et y de telle façon que : [13]

$$x' = \alpha x \qquad y' = \delta y$$

$$\beta = \gamma = 0 \qquad \alpha = e^{2im\pi} \qquad \delta = e^{-2im\pi}$$

On en déduit :

$$x = e^{imt}\phi_1(t) \qquad y = e^{-imt}\psi_1(t)$$

ϕ_1 et ψ_1 étant des séries de cosinus et de sinus des multiples de t.
Si donc m est réel, ce que nous supposerons, il n'y a pas de terme séculaire. Mais $(\alpha+\delta)^2$ est différent de 4 toutes les fois que m n'est pas un multiple de $\frac{1}{2}$ (ou de $\frac{\lambda}{2}$ en général). *Ainsi il n'y a pas de terme séculaire quand* $n + m$ *ou* $n - m$ *est multiple de* λ.
Supposons maintenant $(\alpha + \delta) = \pm 2$; dans ce cas on pourra choisir x de telle façon que :

$$x' = \pm x \qquad y' = \pm y + \gamma x$$

$$\alpha = \pm 1 \qquad \delta = \pm 1 \qquad \beta = 0. \qquad m \equiv 0 \text{ ou } \frac{1}{2} \bmod 1.$$

Mais *en général* on ne pourra pas choisir y de telle façon que γ soit nul. On déduit de là :

$$x = e^{imt}\phi_1(t) \qquad y = e^{imt}\left[\psi_1(t) + \frac{\gamma}{2\pi}t\phi_1(t)\right],$$

ϕ_1 et ψ_1 admettant la période 2π.
Ainsi dans ce cas il y a une intégrale particulière sans terme séculaire ; mais l'intégrale générale en contient à moins que γ ne soit nul.
Supposons qu'on ait trouvé l'intégrale particulière x sans terme séculaire. L'intégrale générale sera :

$$y = x\left[a\int\frac{dt}{x^2} + b\right] \qquad a \text{ et } b \text{ constantes d'intégration.}$$

Or $\frac{1}{x^2}$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{1}{x^2} = \sum_{i=1}^{p}\frac{A_i}{\cos^2\frac{1}{2}(t - a_i)} + B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \cos it + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \sin it$$

13. Lorsque $\alpha + \delta \neq 4$, l'équation fondamentale a deux racines différentes et l'équation admet donc deux intégrales périodiques de seconde espèce (c'est-à-dire des fonctions qui vérifient $f(x + 2\pi) = \alpha f(x)$) différentes.

On voit aisément que si B_0 n'est pas nul il y a des termes séculaires.
Reste à savoir si dans le cas particulier qui nous occupe B_0 et γ s'annulent ou ne s'annulent pas. D'abord remarquons que l'équation différentielle ne change pas quand on change t en $-t$. Si donc $\phi(t)$ est une intégrale particulière, $\phi(-t)$ en sera une autre et par conséquent aussi $\phi(t)+\phi(-t)$ et $\phi(t)-\phi(-t)$.[a] Cela prouve qu'il y a une intégrale partic. *paire* et une autre *impaire*. Si γ était nul, toutes les intégrales seraient périodiques et l'une d'elles serait paire, une autre impaire. On aurait donc, en faisant par exemple $m=0$

$$(1) \quad x = \sum \mu_i \cos i\,t \qquad (2) \quad y = \sum \nu_i \sin i\,t$$

pour deux intégrales particulières. En substituant on trouve vos relations de récurrence

$$\begin{aligned} (n^2-1)\mu_1 &= \beta(\mu_2+\mu_0) \\ (n^2-4)\mu_2 &= \beta(\mu_3+\mu_1) \\ (n^2-9)\mu_3 &= \beta(\mu_4+\mu_2) \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad \text{De même pour les } \nu$$

qui permettent de calculer tous les μ quand on connaît μ_0 et μ_1 (et de même ν_0 et ν_1). Or on trouve que, *quelle que soit la valeur du rapport initial* $\frac{\mu_1}{\mu_0}$, $\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}$ *tend vers l'*∞ *avec* n *; il n'y a d'exception que pour une seule valeur du rapport initial* $\frac{\mu_1}{\mu_0}$ *et alors*

$$\lim \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 0$$

Or, nous avons

$$\frac{\mu_0}{\mu_1} = \frac{\beta}{n^2} \qquad \frac{\nu_0}{\nu_1} = 0$$

Donc les deux séries (1) et (2) ne peuvent pas être toutes deux convergentes, l'une d'entre elles seulement le sera. Donc l'intégrale générale de l'équation proposée admet des termes séculaires.
Le résultat sur lequel je m'appuie et que j'ai souligné à la page précédente est aisé à démontrer par votre méthode.
Je venais d'écrire ces lignes ; quand j'ai reçu votre seconde lettre ;[14] je suis heureux de voir que nous sommes complètement d'accord. Je vous envoie néanmoins la lettre commencée.
Permettez-moi aussi de vous adresser une question au sujet de vos méthodes que, je vous le répète, je regarde comme supérieures à toutes celles qui ont été proposées jusqu'ici, même à celles de M. Gyldén. Comment établissez-vous la convergence des séries auxquelles vous parvenez ? C'est là un point que tous les astronomes ont jusqu'ici négligé d'établir d'une manière rigoureuse.
Quand il s'agit d'une équation linéaire dont les coëfficients sont des fonctions périodiques d'un seul argument, cette convergence est évidente.

14. Voir Lindstedt à Poincaré, 21.08.1883 (§ 3-33-3).

a. Poincaré écrit deux fois $\phi(t)+\phi(-t)$.

Mais il n'en est plus de même lorsque l'équation n'est plus linéaire, lorsqu'on a par exemple

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \phi(t)x + \psi(t)x^2$$

ϕ et ψ étant des fonctions périodiques d'un ou plusieurs arguments. [15] Il y a là une discussion très délicate que je voudrais vous voir aborder.
Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération et du plaisir que j'ai d'être entré en correspondance avec vous.
Poincaré

ALSX 6p. Observatoire de Paris.

33.5 Lindstedt à Poincaré

Dorpat den 5 September 1883

Sehr geehrter Herr Professor!
Für ihren letzten Brief und die darin enthaltenen Belehrungen bin ich Ihnen von ganzem Herzen dankbar. Wenn Sie glauben, dass ich in dergleichen Fragen "au courant" bin, so irren Sie sich. Ich bitte Sie mich nur als das, was ich wirklich bin, nähmlich einen *Anfänger* zu betrachten, der dankbar sein wird für jede Belehrung. [16]
In der That habe ich mich erst seit August des vorigen Jahres überhaupt mit dem Störungsproblem beschäftigt. Bis zu der Zeit war ich nur ein rein praktischer Astronom. Seitdem ich aber durch die Mittheilungen des Herrn Gyldén angeregt worden war auch meine Kräfte zu versuchen, und auf die in meiner Abhandlung ausgeführten Idee[n] gekommen war, habe ich mich unablässig bemüht dieselbe[n] für eine allgemeine Lösung des Dreikörperproblems fruchtbar zu machen. In Folge dessen habe ich auf eine strenge Herleitung der Convergenzbedingungen *vorläufig* verzichtet, weil ich der Ueberzeugung gewesen bin, dass man zuerst eine Methode auffinden musste, durch welche man im Stande sein würde, unter *Voraussetzung* von Convergenz, die allgemeine Form sowie die wirklichen Ausdrücke für die Integrale aufzufinden. [17] Erst nachdem diese Form gefunden,

15. Dans son article sur la détermination des distances mutuelles dans le problème des trois corps, Lindstedt (1884) reprend le même constat :

> Comme il est déjà dit, on a obtenu ces résultats en supposant l'existence des intégrales et sans entrer dans la discussion des conditions de convergence. À l'exception du cas où le système est *linéaire*, la question de convergence semble si difficile, dans l'état actuel de l'Analyse, et notre connaissance des intégrales si imparfaite, que les résultats obtenus ne doivent pas être sans intérêt. (Lindstedt 1884, 86)

16. Lindstedt commence à publier des travaux sur la théorie de la perturbation à partir de 1882 (Lindstedt 1882b). Auparavant ses travaux concernent des mesures de méridiens ou des observations de Mars (Lindstedt 1881, 1878a, 1878b, 1877).

Une autre raison de l'ignorance de Lindstedt des techniques utilisées par Poincaré dans la lettre précédente est aussi leur nouveauté (Fuchs 1866 ; Tannery 1875 ; Floquet 1879).

17. Dans sa note *sur les séries trigonométriques* de 1883 dans laquelle Poincaré traite de la convergence des séries de Lindstedt, Poincaré (1883b) analyse les hypothèses de Lindstedt en soulignant que ce dernier ne

scheint mir, kann man hoffen die Convergenzfrage mit Hoffnung auf Erfolg in Angriff nehmen zu können. Aus diesem Grunde habe ich alle *strengeren* Untersuchungen bis auf Weiteres verschoben. Ausserdem muss ich bemerken, dass ich noch wenig Literaturkenntniss besitze.
Auf ihre Frage wegen der Convergenz des Integrals einer Gleichung von der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \psi(t)x + \psi_1(t)x^2$$

kann ich desshalb nur die Antwort geben, dass ich damit mich nur höchst oberflächlich beschäftigt habe.
Wie schon gesagt, habe ich alle meine Bemühungen darauf gerichtet die *Form* der Ausdrücke für die Integrale des Drei-körperproblems aufzufinden. [18] Wenn es Sie interessiert will ich Ihnen den ungefährlichen Inhalt einer Note mittheilen, die ich in wenigen Tagen nach Paris schicken werde, um in den *Comptes Rendus* gedruckt zu werden, n.b. wenn sie dieser Ehre würdig erachtet wird. Ich glaube nähmlich, dass durch meine Arbeit doch die Frage so weit getrieben sein soll, dass nur die Convergenzbedingungen zu untersuchen übrig bleiben, was allerdings theoretisch das wichtigste ist. [19]

---

fait pas tout à fait les mêmes hypothèses dans sa note publiée dans les *Astronomische Nachrichten* (Lindstedt 1882b) et celle publiée dans les *Comptes rendus* (Lindstedt 1883b) ; en effet, dans la première, il suppose que ses séries sont convergentes pendant un intervalle de temps alors que dans la note aux *Comptes rendus*, il signale qu'il n'entre pas dans la discussion de la convergence de ses séries et qu'il fait l'hypothèse que les "constantes aient des valeurs telles que les développements obtenus [...] soient toujours convergents" (Lindstedt 1883b, 1278). Poincaré annonce comme résultat :

> 1. Que si ces séries convergent pendant un intervalle de temps, si petit qu'il soit, elles convergeront toujours ;
> 2. Qu'il n'est pas sûr qu'on puisse choisir les constantes de telle façon que les séries convergent ;
> 3. Que les séries, même lorsqu'elles ne convergent pas, peuvent donner une solution du problème avec une approximation indéfinie. (Poincaré 1883b, 1472)

Poincaré montre aussi dans ce travail que les séries de Lindstedt sont au moins toujours bien définies :

> M. Lindstedt dit aussi qu'il a trouvé le véritable nombre des arguments qu'il faut introduire dans les expressions des coordonnées des masses. Cela n'a de sens que si les coordonnées ne peuvent se développer que d'une seule manière en séries trigonométriques convergentes, et c'est certainement là la supposition du géomètre de Dorpat. Je me propose de montrer que cette supposition est fondée, ce qui n'est pas évident *a priori*. (Poincaré 1883b, 1472)

18. Dans son article publié en 1884 dans les *Annales scientifiques de l'ENS*, Lindstedt (1884) justifie son travail en précisant ses limites :

> Je dois donc croire que l'essai suivant, où l'on donnera une méthode pour trouver la forme des intégrales et établir leurs expressions analytiques dans un cas très important, ne sera pas tout à fait superflu. (Lindstedt 1884, 86)

19. À partir de 1883, Lindstedt se propose de résoudre la question de la forme des équations générales de la théorie des perturbations. Il présente alors son programme de travail en insistant sur l'extension de ses méthodes :

> In dem folgenden Aufsatze wage ich den Versuch, über die allgemeine Form der Integrale

Die Gl^n für die Bewegungen der Massen m und m' um M sind

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + x\left\{\frac{M+m}{r^3} + \frac{m'}{\Delta^3}\right\} &= m'x'\left\{\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right\} \\ \frac{d^2x'}{dt^2} + x'\left\{\frac{M+m'}{r'^3} + \frac{m}{\Delta^3}\right\} &= mx\left\{\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r^3}\right\} \end{aligned} \tag{1}$$

und ähnliche für y, y' und z, z', die man durch Vertauschung der Variablen erhält.[20] Wenn nun die Entwicklungen der Parenthese d.h. die Expressionen von r, r' und Δ (= die gegenseitigen Entfernungen) bekannt wären, so wäre das Problem reducirt auf das simultane System

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + x\psi(t) &= x'\psi'(t) \\ \frac{d^2x'}{dt^2} + x'\psi_1(t) &= x\psi_1'(t) \end{aligned}$$

was durch die Methode in meiner Abhandlung zu integrieren wäre.
Das wichtigste ist also r, r' und Δ zu bestimmen.
Indem ich nun *nicht* nach m und m' sondern nach 4 Functionen der 12 Integr. Constanten des Problems, die ich mit η, η', κ, κ' bezeichnet habe, entwickele, so finde ich :
Die Grössen r^2, r'^2 und Δ^2 lassen sich in trigonometrischen Reihen entwickeln, welche 4 Argumente enthalten, nähmlich

$$nt + \pi, \quad n't + \pi', \quad \nu t + \omega, \quad \nu' t + \omega'$$

wo π, π', ω, ω' 4 andere Integr. Constanten bedeuten. *Keine* sekularen Glieder finden sich vor, weder in den r, r' und Δ, noch in den rechtwinkligen Koordinaten, wenn nicht zwischen den n, n', ν, ν' besondere Relationen stattfinden würden, was ausgeschlossen bleibt. n und n' sind von den gewöhnlich genannten mittleren Bewegungen, wenn m und m' klein, um Grössen dieser Ordnung verschieden.
Weiter kann man setzen

$$\begin{aligned} \nu &= n + n' + \sigma \\ \nu' &= n - n' + \sigma' \end{aligned}$$

wo σ und σ' für eine der Combinationen

$$\begin{aligned} M = 0;\ & m = 0 \\ \text{oder} \quad m = 0;\ & m' = 0 \\ \text{oder} \quad m' = 0;\ & M = 0 \end{aligned}$$

des Störungsproblem einen Schluss zu ziehen. In einem späteren Aufsatz werde ich, von dem hier gewonnenen Resultate ausgehend, eine Methode angeben, durch welche man im Stande sein wird, dieselben in bequemer Weise wirklich aufzustellen. (Lindstedt 1883c, 97)

20. Lindstedt reprend ici des notations assez courantes : r désigne la distance mM, r' la distance $m'M$ et Δ la distance mm'. M est à l'origine, x, y, z sont les coordonnées de m et x', y', z' celles de m'.

verschwinden.
Ein Glied in den Entwickelungen, das das Argument

$$i(nt+\pi)+i'(n't+\pi')+j(\nu t+\omega)+j'(\nu't+\omega')$$

hat als Faktor die Grösse

$$\eta^i\cdot\eta'^{i'}\cdot\kappa^j\cdot\kappa'^{j'}$$

Glieder, wie Gyldén elementare nennt, finden sich thatsächlich, aber besitzen nicht die von ihm angegebene Eigenschaft, dass sie die Masse ("störende") als Faktor verlieren. Die Coefficienten dieser Glieder sind immer wenigstens von der dritten Ordnung in Bezug auf die Quantitäten η, η', κ, κ'.[21] In dem wirklichen Falle unseres Sonnensystems, ist

21. Lindstedt (1884) introduit une variable auxiliaire q définie par l'équation différentielle

$$\frac{1}{2}=x\frac{dx'}{dt}+y\frac{dy'}{dt}+z\frac{dz'}{dt}-x'\frac{dx}{dt}-y'\frac{dy}{dt}-z'\frac{dz}{dt}.$$

Il obtient ainsi un système d'équations qui sont "essentiellement les mêmes qu'a établies Lagrange dans son célèbre Mémoire *Essai sur le problème des trois corps*" (Lindstedt 1884). Lindstedt situe l'originalité de sa méthode dans le fait qu'il préserve, au contraire de Lagrange, la symétrie entre les trois corps jusqu'à l'obtention des développements en série (Lindstedt 1884, 90). Lindstedt obtient un système d'équations différentielles dont les inconnues sont q, u, u', v :

> Nous obtiendrons les intégrales de ces équations par une suite d'opérations successives, mais nous ne demanderons pas des développements suivant les puissances de deux des masses, par exemple m et m'. Les trois masses entrant dans les équations différentielles d'une manière symétrique, et en ayant égard au problème des deux corps, où l'on développe suivant les puissances de l'excentricité, c'est-à-dire d'une arbitraire d'intégration, nous développerons donc suivant les puissances de quatre quantités η, η', k et k', qui s'introduiront comme constante d'intégration, en supposant pour elles-mêmes de telles valeurs numériques que les séries obtenues seront convergentes pour toute valeur de t. (Lindstedt 1884, 93–94)

Lindstedt montre alors que les quantités u, u', v, q, ρ, ρ', δ, r^2, r'^2, Δ^2 sont developpables en des séries trigonométriques de quatre arguments

$$nt+\pi=w_1,\quad n't+\pi'=w_2,\quad \nu t+\omega=w_3,\quad \nu't+\omega'=w_4,$$

où π, π', ω, ω' sont des constantes d'intégration :

> Chaque terme dont l'argument est
>
> $$iw_1\pm i'w_2\pm jw_3\pm j'w_4,$$
>
> i, i', j, j' étant des nombres entiers positifs, aura comme facteur la quantité
>
> $$\eta^i\eta'^{i'}k^jk'^{j'}.$$
>
> [...] La première approximation nous fournira les termes du premier ordre ; de même la seconde nous donnera ceux du deuxième ordre, et ainsi de suite. Quant aux quantités n, n', ν, ν', elles sont des sommes de termes constants, qui sont tous d'un ordre *pair*. Ainsi, la deuxième approximation ne corrigera pas les valeurs obtenues pour ces quantités par la première ; de même, la quatrième conservera les valeurs de la troisième, et ainsi de suite, de sorte que l'on pourra effectuer deux approximations consécutives avec les mêmes valeurs des arguments, ce qui sera d'une grande importance dans la pratique. (Lindstedt 1884, 94)

η, η' von der Ordnung der Excentricitäten
κ von $\shortparallel$ Neigung, und κ' von der Ordnung der $\frac{aa'}{a^2+a'^2}$.
Da Sie Ihre Auseinandersetzungen in ihrem Brief für bekannt hielten, möchte ich [die] Bitte an Sie richten, mir zu sagen, *wo* ich damit vertraut gemacht werden kann. Ich würde Ihnen sehr dankbar sein, wenn Sie mir durch ein Paar Zeilen darüber Auskunft geben wollten.
Zum Schluss will ich Sie aufmerksam machen auf einen eben erschienenen Aufsatz von Prof. H. Bruns in [den] *Astronomischen Nachrichten* (letztes Heft), wo er mir eben zum Vorwurf macht, dass ich die Convergenzfrage ausser Acht gelassen habe bei der Behandlung der Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \beta x \cos t$$

und selbst eine ausführliche Herleitung giebt. [22]
Mit der tiefsten Hochachtung und Verehrung
Ihr And. Lindstedt

ALSX 6p. Collection particulière, Paris 75017.

33.6 Poincaré à Lindstedt

Paris 29 Mars 1884

Monsieur,
J'ai beaucoup réflechi depuis quelque temps à votre mémoire beitrag zur integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie et j'aurais une explication à vous demander. [23]
Prenons l'équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \psi_0 + \psi_1 x + \psi_2 x^2 + \dots$$

À la p[remièr]e approximation vous arrivez à une formule

$$x_p = \text{ une série trigonométrique en } t \text{ et } w \text{ dont le premier terme est } \eta_0 \cos w.$$

22. Heinrich Bruns se propose de compléter les preuves de Lindstedt en montrant l'existence des développements utilisés par ce dernier :

> Die betreffenden Entwickelungen enthalten nun insofern eine Lücke, als ein strenger Beweis dafür, dass man wirklich berechtigt sei, die Lösung in jener Form anzusetzen, nicht gegeben wird ; ebenso fehlt dieser Nachweis in der ausführlicheren Abhandlung "Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie" [...]. Da dieser Punkt bisher nur für den Fall, wo m gleich Null gesetzt werden darf, seine Erledigung gefunden hat, so ist es vielleicht nicht überflüssig, hier einen strengen Existenzbeweis zu geben. (Bruns 1883, 193)

23. Lindstedt 1883a.

Vous déterminez ensuite x_{p+1} par l'équation :

$$\frac{d^2x_{p+1}}{dt^2} + n^2(1-\nu)x_{p+1} = -n^2\nu x_p + \psi_0 + \psi_1 x_p + \psi_2 x_p^2 + \dots$$

le second membre est une série trigonométrique et vous disposez de ν pour en faire disparaître les termes en $\cos w$.[24]
Mais cela ne suffit pas, il faut faire disparaître aussi les termes en $\sin w$, ce que vous ne pouvez pas faire par le même procédé.
Il faudrait donc démontrer que ces termes disparaissent d'eux-mêmes. Je vois bien, par l'observation, qu'il en est effectivement ainsi mais je ne puis parvenir à le démontrer et cela ne me paraît pas du tout évident a priori.
Je vous serais fort obligé si vous vouliez bien me faire savoir comment vous le démontrez.[25]
Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,

24. L'objectif de Lindstedt est d'étudier l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \Psi_0 + \Psi_1 x + \Psi_2 x^2 + \dots \tag{1}$$

qu'il présente comme le problème principal de la théorie des perturbations (Lindstedt 1882b). Les fonctions Ψ sont essentiellement des séries trigonométriques. La méthode d'approximation successive habituelle consiste à considérer pour la première approximation la solution de l'équation sans second membre et à calculer avec celle-ci le second membre de l'équation (1). Il peut apparaître avec cette méthode des termes séculaires. L'idée de Lindstedt est d'écrire l'équation (1) sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2(1-\nu)x = -n^2\nu x + \Psi_0 + \Psi_1 x + \Psi_2 x^2 + \dots = -n^2\nu x + f(x) \tag{2}$$

et de commencer le processus d'approximations successives en considérant la solution

$$x_0 = \eta_0 \cos w, \qquad \text{où} \quad w = n(1-\sigma)t + \varpi, \quad 1-\sigma = \sqrt{1-\nu}$$

de l'équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2(1-\nu)x = 0.$$

En posant

$$f(x_0) = f(\eta_0 \cos w) = a_0 + 2a_1 \cos w + 2a_2 \cos 2w + \dots,$$

on obtient l'équation :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + n^2(1-\nu)x_1 = a_0 + (2a_1 - n^2\nu\eta_0)\cos w + 2a_2\cos 2w + \dots$$

L'intégration de cette équation implique l'absence de termes séculaires, et Lindstedt propose de négliger le terme en $\cos w$. Ainsi, il obtient (Lindstedt 1883a, 8) :

$$\nu_1 = \frac{2a_1}{n^2\eta_0}.$$

Voici donc une première approximation x_1 sous forme de série trigonométrique. La méthode de Lindstedt consiste alors à itérer le procédé. Callandreau, dans sa recension des travaux de Lindstedt, a souligné qu'il restait des questions en suspens (Callandreau 1884, 305–306).

25. Lindstedt ne démontre pas ce point ; il pensait en fait qu'il fallait se placer dans des cas où les termes en $\sin w$ disparaissaient en même temps que ceux en $\cos w$:

Poincaré

ALSX 2p. Observatoire de Paris.

33.7 Lindstedt à Poincaré

Dorpat den 21 März (2 April) 1884

Sehr geehrter Herr Professor !
Ich habe soeben ihren liebenswürdigen Brief erhalten, und beeile mich sofort darauf zu antworten. Sie fragen wie man beweisen kann, dass bei der Integration der Diff. gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \psi_0 + \psi_1 x + \psi_2 x^2 + \ldots$$

wenn man meine Methode befolgt, (also zuerst $x = \eta_0 \cos w$ setzt, darauf

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2(1-\nu)x = \psi_0 + \psi_1 \eta_0 \cos w + \ldots$$

integriert u.s.w.) die Glieder in $\sin w$ ebenfalls verschwinden. Ich glaube dass diese ihre Frage davon herrührt, dass Sie sich die *erste* Annäherung unter der Form

$$\eta_0 \cos w + \eta_0' \sin w$$

(η_0' eine zweite Integr. constante) gedacht haben. [26] Denn wenn *nur* mit $\eta_0 \cos w$ die ganze Zeit operirt wird, so kommt *kein* Sinusglied in w vor, weil die Potenzen von $\cos w$ wieder bloss Cosinusse von den Vielfachen von w geben. Aber indem ich

$$w = n(1-\sigma)t + \pi,$$

wo π die *zweite* Integrationskonstante bedeutet, gesetzt habe, sind die Sinusglieder vermieden worden.

En effet, pour que l'équation

$$\Delta u = W$$

où le second membre est une série trigonométrique en t et w puisse être satisfaite par une série trigonométrique u, il faut et il suffit que W ne contienne ni terme en $\cos w$, ni de terme en $\sin w$. Or nous pouvons disposer de ν_k, de façon à détruire les termes en $\cos w$; mais nous ne pourrions pas de même détruire les termes en $\sin w$, s'il y en avait [...].

On voit immédiatement qu'on ne peut en rencontrer dans les premières approximations ; mais il n'est pas évident qu'il en serait de même dans les approximations suivantes. Aussi M. Lindstedt croyait-il que sa méthode n'était applicable jusqu'au bout que s'il n'existait aucune relation linéaire à coefficients entiers entre les coefficients du temps dans les divers termes de $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$. (Poincaré 1886b, 59)

26. Lindstedt semble croire que Poincaré n'a pas saisi la forme de la première approximation, où un terme de la forme $\eta_0 \cos w + \eta_0' \sin w$ s'exprime sous la forme $\eta_0'' \cos w'$.

Aber auch wenn man die Form

$$x = g \cos n(1-\sigma)t + h \sin n(1-\sigma)t$$

wo g und h die Integr.constanten sind, beibehalten wollte, so ist es leicht zu sehen, dass die Sinusglieder durch dieselbe Procedur zugleich mit den Cosinusgliedern verschwinden müssen. Vorausgesetzt ist natürlich, dass in den ψ keine Glieder mit $n(1-\sigma)t$ als Argument vorkommen.
Man sieht es am Einfachsten ein, wenn man die Form

$$x = ke^{in(1-\sigma)t} + le^{-in(1-\sigma)t}$$

benutzt. Es werden dann die Coëfficienten für

$$e^{in(1-\sigma)t} \quad \text{und} \quad e^{-in(1-\sigma)t}$$

auf der rechten Seite immer dieselben sein.
Ich glaube nicht dass in dieser Hinsicht irgend eine Schwierigkeit vorliegt, da Sie aber so freundlich gewesen sind, sich für meine (in vieler Hinsicht sehr unreife) Arbeit zu interessieren, möchte ich Ihnen eine Frage machen im Betreff ihrer Note in *Comptes Rendus* für December 1884. [27]
Sie weisen dort, und mit vollstem Recht, darauf hin, dass die Hauptschwierigkeit in der *Auffindung eines Convergenzbeweises* liege. In einer früheren Note von 1882 haben Sie ebenfalls dieselbe Frage behandelt, indem Sie zeigen, dass die Reihen, die man bis jetzt in der zweiten Annäherung (in Bezug auf die störenden Massen) für z.B. die grosse Halbaxe [benutzt hat], obwohl sie periodisch sind, doch für *gewisse* irrationale Verhältnisse der mittleren Bewegungen *nicht* convergent seien, dass also die Herstellung der rein periodischen Form noch nicht die Stabilität darthut. [28] Ich glaube aber, dass ihre Schlussweise,

27. Lindstedt pensait sans doute à la note du 24 décembre (Poincaré 1883b).

28. Dans sa note *Sur les séries trigonométriques*, Poincaré (1883b) s'intéresse à la question de la convergence des séries de Lindstedt. Il rappelle d'abord un résultat montré dans sa première note (Poincaré 1882d) "qu'une série purement trigonométrique et toujours convergente peut cependant croître au-delà de toute limite" (Poincaré 1883b, 1471). Le fait de montrer l'absence de terme séculaire et de montrer la convergence des développements de Lindstedt ne suffit pas pour conclure à la stabilité du système. Poincaré se propose de montrer :

> 1. Que si ces séries convergent pendant un intervalle de temps, si petit qu'il soit, elles convergeront toujours ;
> 2. Qu'il n'est pas sûr qu'on puisse choisir les constantes de telle façon que les séries convergent ;
> 3. Que les séries, même lorsqu'elles ne convergent pas, peuvent donner une solution du problème avec une approximation indéfinie. (Poincaré 1883b, 1472)

Dans sa première note *Sur les séries trigonométriques*, Poincaré (1882d) appliqua "aux séries que l'on peut envisager en Mécanique céleste" son résultat selon lequel certaines séries trigonométriques convergentes ne sont pas bornées :

> On sait que, si t est le temps et a le grand axe, par exemple, on a pour la dérivée de ce grand axe une expression de la forme
>
> $$\frac{da}{dt} = \sum A_p \sin \alpha_p t + \sum B_p \cos \beta_p t,$$

insofern sie sich auf die Frage von den Reihen der Störungstheorie und im Allgemeinen von Integralen der Diff. Gl[eichunge]n

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \psi_0 + \psi_1 x + \dots$$

und ähnlichen bezieht, *keine* Anwendung finden kann. Denn schon in der *Annahme* eines bestimmten endlichen Verhältnisses zwischen n und n' liegt die Annahme der Convergenz der Integrale unter periodischer Form mit eingeschlossen. Ihre Schlüsse können sich nähmlich nur auf *solche* Reihen

$$\sum A_p \cos \sigma_p t + B_p \sin \sigma_p t$$

beziehen, wo die σ_p von den A_p und B_p unabhängig sind, was in der Störungstheorie *nicht* der Fall ist. Denn hier sind die σ_p selbst Reihen, die Glieder von derselben Natur wie die A_p und B_p enthalten. Wenn ein Glied in diesen unendlich gross wird, so hat man in den σ_p ebenfalls unendlich grosse Glieder von derselben Beschaffenheit. Ich meine also, dass die Annahme endlicher Werthe für die σ_p *hier* zugleich die Voraussetzung der Convergenz der Integralreihen mit sich bringt.
Ich würde Ihnen von Herzen dankbar sein, wenn Sie mir hierüber einige aufklärende Worte geben wollten. Ich sehe gar keine Möglichkeit die Convergenz der Reihen des Dreikörperproblems nach bisher bekannten Methoden nachzuweisen. Wenn nur ein einziges noch so einfaches Beispiel vorläge, würde es ganz anders aussehen.
Indem ich Sie nochmals für ihren liebenswürdigen Brief danke, bleibe ich mit der ausgezeichnetesten Hochachtung
Ihr ergebener
And. Lindstedt.

ALSX 4p. Collection particulière, Paris 75017.

les deux séries $\sum \operatorname{mod} A_p$ et $\sum \operatorname{mod} B_p$ étant convergentes. En négligeant les carrés des masses, on en conclut, pour la variation δa du grand axe, l'expression

$$\delta a = \sum \frac{A_p}{\alpha_p}(1 - \cos \alpha_p t) + \sum \frac{B_p}{\beta_p} \sin \beta_p t. \qquad (1)$$

On serait tenté de conclure que δa reste toujours compris entre certaines limites. Cela a lieu en fait pour certaines valeurs incommensurables du rapport des moyens mouvements. Mais il est d'autres valeurs *également incommensurables* de ce même rapport pour lesquels les séries du second membre de l'équation (1) [. . .] peuvent croître indéfiniment. (Poincaré 1882d, 768)

33.8 Poincaré à Lindstedt

Paris, le 8 Avril 1884

Monsieur,
J'avais bien compris que w contenait la seconde constante d'intégration ω et que par conséquent on devait écrire dans la 1re approximation

$$x = \eta_0 \cos w$$

et non $\eta_0 \cos w + \eta_0' \sin w$. Dans ces conditions, il est clair que *dans la 2de approximation,* il n'y aura pas de terme en $\sin w$. Mais *dans la 3e approximation* et les suivantes, cela n'est plus évident bien que cela soit encore vrai.
Voici d'ailleurs un exemple qui vous fera mieux comprendre mon objection. Soit :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2 x = \lambda x \cos t + \mu x^3 \sin t.$$

Première approximation : [29]

$$x = \eta_0 \cos w$$

Deuxième approximation : [30]

$$\begin{aligned} \nu = 0 \qquad x_1 \quad &= \quad \eta_0 \cos w + a\cos(w+t) + b\cos(w-t) + c\sin(w+t) + \\ & \qquad d\sin(t-w) + e\sin(t+3w) + f\sin(t-3w). \end{aligned}$$

29. La première approximation est obtenue comme solution de l'équation sans second membre :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2 x = 0.$$

w est égal à $n(\sqrt{1-\nu})t$.

30. La seconde approximation est obtenue en prenant comme second membre de l'équation $-n^2\nu_0 x_0 + \lambda x_0 \cos t + \mu x_0^3 \sin t$ et en fixant la valeur de ν de manière qu'il n'y ait pas de terme en $cos w$ (pour éviter les termes séculaires).

Comme le terme

$$\begin{aligned} \lambda\eta_0 \cos w + \mu\eta_0^3(\cos w)^3 \sin t = {} & \frac{\lambda\eta_0}{2}\Big(\cos(w+t) + \cos(w-t)\Big) \\ & + \frac{3\mu\eta_0^3}{8}\Big(\sin(w+t) + \sin(t-w)\Big) \\ & + \frac{\mu\eta_0^3}{8}\Big(\sin(t+3w) + \sin(t-3w)\Big) \end{aligned}$$

ne comporte aucun terme en $\cos w$, on choisit $\nu = 0$. La solution générale de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2 x = \lambda x_0 \cos t + \mu x_0^3 \sin t$$

sera de la forme donnée par Poincaré en assurant que $a = b$ et $c = d$.

L'équation s'écrira ensuite pour la 3e approximation [31]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2(1-\nu)x = -n^2\nu_1 x_1 + \lambda x_1 \cos t + \mu x_0^3 \sin t + 3\mu x_0^2(x_1 - x_0)\sin t.$$

Dans le second membre, il pourrait y avoir des termes en $\sin w$, dont le coefficient serait [b]

$$\frac{3}{2}\lambda(c+d) - \frac{3}{4}\mu(a-b) - \frac{3}{8}\mu(a-b). \tag{1}$$

Il est possible que je me sois trompé sur les signes des coefficients a, b, c, d dans l'expression (1). Vous le vérifierez aisément. [32] D'ailleurs voici l'expression (1) rectifiée :

$$\frac{3}{2}\lambda(c-d) - \frac{3}{4}\mu(a-b) + \frac{3}{8}\mu(a-b). \tag{1}$$

Il est aisé de vérifier que cette expression (1) est nulle, mais cela n'était pas évident a priori et cela l'est encore moins pour les approximations suivantes, bien que je considère le fait en lui-même comme certain. Une démonstration générale serait bien désirable.
Je passe au second point traité dans votre lettre. Il importe d'abord de bien préciser ce que l'on doit entendre par convergence.
Vos séries se présentent sous la forme suivante :

$$S_0 + \lambda S_1 + \lambda_2 S_2 + \ldots, \tag{2}$$

λ étant un coefficient de l'ordre des masses.
On a ensuite

$$S_i = \sum A_i \cos(mw + nt + p) \tag{3}$$

et enfin vous posez :

$$w = \omega + t(\sigma_0 + \lambda\sigma_1 + \lambda^2\sigma_2 + \ldots). \tag{4}$$

Ainsi les termes de la série (2) sont eux-mêmes des séries trigonométriques dont l'un des arguments s'exprime lui-même par une série (4). Cela posé, on peut concevoir deux modes principaux de convergence de la série (2) :

31. La 3e approximation est obtenue en prenant comme second membre

$$-n^2\nu_1 x_1 + \lambda x_1 \cos t + \mu x_1^3 \sin t.$$

L'expression proposée par Poincaré est le développement à l'ordre 1 en posant $x_1 = x_0 + (x_1 - x_0)$.

32. Seuls les termes comportant un produit $\sin(w \pm t)\cos t$ ou $\cos(w \pm t)\sin t$ peuvent faire apparaître des termes en $\sin w$, soit les termes $\lambda c \sin(w+t)\cos t$, $\lambda d \sin(w-t)\cos t$, $3\mu\eta_0^2 \cos^2 w \cos(w+t)\sin t$, $3\mu\eta_0^2 \cos^2 w \cos(w-t)\sin t$. Le coefficient de $\sin w$ sera

$$\frac{\lambda}{2}(c-d) - \frac{3\mu\eta_0^2}{4}(a-b) + \frac{3\mu\eta_0^2}{8}(a-b)$$

qui est évidemment nul.

b. Variante : "$\frac{3}{2}\lambda(a+b) - \frac{3}{4}\mu\frac{(a-b)}{2} - \frac{3}{8}\mu\frac{(a-b)}{-2}$". Le terme "$a+b$" et les dénominateurs sont rayés.

Premier mode

La série (4) est convergente de sorte que w est parfaitement déterminé. Les séries (3) sont convergentes *pour toutes les valeurs de t*. La série (2) qui a pour termes la somme des diverses séries (3) est convergente également, *mais pour certaines valeurs de t seulement*. Ce premier mode de convergence ne saurait convenir pour la démonstration de la stabilité, mais il convient pour le calcul des perturbations pendant un intervalle de temps limité (à courte échéance).[33]

Deuxième mode

La série (4) est encore convergente ; posons :

$$A = A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \ldots \tag{5}$$

où A_i est comme nous l'avons supposé plus haut le coefficient d'un certain terme $\cos(mw + nt + p)$ dans la série S_i. Supposons que les séries (5) soient convergentes et mettons la

33. Le premier mode de convergence envisagé par Poincaré est le cas où la série (2) est une série (absolument) convergente de séries (absolument) convergentes. La série n'en est pas pour autant absolument convergente ; Poincaré parle alors de semi-convergence :

> Jusqu'ici nous avons supposé que les séries que nous considérions étaient absolument convergentes. Il reste à examiner le cas de la semi-convergence qui peut se présenter dans des circonstances trop variées pour que je les énumère toutes ici. Je me bornerai au cas suivant qui me paraît être le seul qu'on puisse rencontrer dans les applications. Soit
>
> $$s_1 + s_2 + \ldots + s_n + \ldots$$
>
> une série *absolument* convergente dont chaque terme est lui-même la somme d'une série trigonométrique absolument convergente. Il peut arriver que, lorsqu'on a affaire à une série de cette forme, il soit impossible de changer l'ordre des termes sans altérer la convergence ; il y a alors semi-convergence.
>
> On peut être conduit à une pareille série dans l'application des approximations successives. Supposons qu'en négligeant les carrés des masses on soit conduit à une série trigonométrique s_1. Quand on tiendra compte ensuite des carrés, en négligeant les cubes, on verra qu'il faut ajouter à la série s_1 une autre série trigonométrique s_2, et ainsi de suite. On sera ainsi amené à une série
>
> $$s_1 + s_2 + \ldots + s_n + \ldots,$$
>
> qui devra converger si la méthode peut donner une approximation indéfinie. C'est ce qui arrive dans la méthode de M. Lindstedt et dans d'autres analogues.
>
> Ces séries peuvent converger dans un petit intervalle de temps sans converger pour toutes les valeurs de t. Je citerai comme exemple la série
>
> $$2\sin^2 t - 4\sin^4 t + 8\sin^6 t - \ldots + (-1)^{n+1} 2^n \sin^{2n} t + \ldots,$$
>
> dont chaque terme peut manifestement s'écrire sous forme de série trigonométrique et qui n'est convergente que si
>
> $$t < \log \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$
>
> J'ai lieu de penser que les séries de M. Lindstedt sont semi-convergentes de la façon que je viens de dire, mais non absolument convergentes, d'où il résulterait qu'elles ne représenteraient les distances mutuelles que pendant un intervalle de temps limité. (Poincaré 1884a, 325–326)

série (2) sous la forme :

$$\sum A \cos(mw + nt + p). \tag{6}$$

Si la série (6) est convergente, *elle l'est toujours* et c'est là le deuxième mode possible de convergence de la série (2).
Ce second mode est le seul qui convienne pour la démonstration de la stabilité (et encore faut-il que la convergence soit uniforme) et pour le calcul des perturbations à longue échéance.
Voici maintenant ce que je pense de ces deux modes de convergence. En premier lieu je crois, sans l'avoir démontré, que la série (2) est convergente. Les séries (3) ne seront pas convergentes en général si on les prend sous la forme brute que donne l'intégration. Mais il sera toujours possible en groupant les termes d'une manière convenable de leur rendre la convergence qui ne sera toutefois pas uniforme. (Ces difficultés ne se présenteraient pas si le second membre était formé d'un nombre fini de termes dont les coefficients ne dépendissent que d'un argument.) Cela posé la série (2) serait convergente pour de petites valeurs de t.
Les séries (5) seraient convergentes en général, mais *la série (6) ne le serait pas*. Voilà ce que je suis porté à croire, sans en avoir toutefois de démonstration rigoureuse.
Ainsi vos séries présenteraient le premier mode de convergence, mais non le second ; elles pourraient donc servir au calcul à courte échéance, mais non à la démonstration de la stabilité. C'est dans ce sens qu'il faut entendre le dernier paragraphe de ma note du 24 Décembre.[34] Vous trouverez dans les *Comptes Rendus* une note sur l'équation qui nous occupe et qui m'intéresse beaucoup ; car, beaucoup plus simple que les équations des trois corps, elle présente cependant les mêmes particularités et il est probable que tout ce qu'on démontrera sur elle, s'applique sans peine au problème des trois corps.[35]
Votre bien dévoué
Poincaré

ALSX 4p. Observatoire de Paris.

34. Voir Poincaré 1883b, où Poincaré explique que même non-convergentes, les séries de Lindstedt permettent d'approximer avec autant de précision que l'on désire les solutions :

> Mais, même si elles divergent, les séries de M. Lindstedt peuvent fournir une solution du problème avec une approximation indéfinie, c'est-à-dire que l'on peut trouver des séries convergentes dont les coefficients diffèrent aussi peu que l'on veut de ceux des séries de M. Lindstedt et dont la somme diffère aussi peu que l'on veut des distances mutuelles que l'on cherche à exprimer. C'est dans ce sens que la méthode de M. Lindstedt nous fournit une véritable solution du problème. (Poincaré 1883b, 1473)

35. Poincaré 1884c.

33.9 Lindstedt à Poincaré

Dorpat den 1 (13) April 1884

Sehr geehrter Herr Professor !
In ihrem letzten Brief fragen Sie, wie man beweisen kann, dass z.B. in der Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \lambda x \cos t + \mu x^3 \sin t \tag{1}$$

bei der Anwendung meiner Integrationsmethode, die Glieder in $\sin w$ rechts durch dieselbe Procedur als die in $\cos w$ verschwinden. Es ist aber dies im Allgemeinen gar nicht der Fall.[36] Die Sinusglieder in w allein *verschwinden nicht* bei ähnlichen Gleichungen durch mein Verfahren. In der obigen Gleichung hat es der Zufall gewollt bis zur dritten Approximation inclusive. Und dies widerspricht nicht dem in meiner Abhandlung "Beitrag ..." angegeb. Resultate, obgleich ich leider bei der Eile, womit die Schrift geschrieben werden musste, vergessen hatte, ausdrücklich darauf hinzuweisen.[37]
Schreiben Sie z.B. anstatt (1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \lambda x \cos(t+a) + \mu x^3 \sin(t+b)$$

die in (1) für $a = 0$, $b = -90°$ übergeht, so finden Sie in der *dritten* Approximation auf der rechten Seite folgendes Glied, das nicht durch eine Wahl von v zum Verschwinden gebracht werden kann :

$$+\frac{3\lambda\mu\eta_0^3}{4(4n^2-1)} \cdot \{\cos(w+b-a) + \cos(w-b+a)\}$$

und also bei der Integration Glieder von der Form

$$b + \sin(w \pm \overline{b-a})$$

Für den Fall (1) verschwindet jenes Glied von *selbst* unabhängig von v, was also nur von der speciellen Natur der Gleichung herrührt. Ich glaube mir auch bemerkt zu haben, dass sinus in den weiteren Approximationen bei (1) nicht verschwindet.
Ich habe nähmlich überall in meiner Abhandlung, wie Sie bemerkt haben, nur das *Cosinus*-zeichen benutzt, und zwar wird dieser Umstand das, was ich vergessen hatte anzuführen, doch andeuten können. Ich verstehe nähmlich unter "*Argument*" nicht etwa – pag. 17 – $\lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots$ sondern $\underline{\lambda_1 t + b_1}$, $\underline{\lambda_2 t + b_2}, \ldots$ und man kann alsdann sagen, dass wenn es ganze Zahlen $i, i_1, i_2, \ldots$ giebt, für welche

$$iW + i_1(\lambda_1 t + b_1) + i_2(\lambda_2 t + b_2) + \cdots$$

sich auf eine *nicht* verschwindende Constante reducirt, dass alsdann meine Methode nicht anwendbar ist, weil in dem Integral auch nicht rein periodische Glieder auftreten.

36. Voir Poincaré à Lindstedt, 08.04.1884 (§ 3-33-8).
37. Lindstedt 1883a.

Ich führe ein Paar Beispiele von *linearen* Diff-Gl^{n} an, die Sie leicht verifizieren können.[38] Das Integral von

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \{a\cos t + b\sin t\}x = 0$$

besteht aus rein periodischen Gliedern, weil

$$a\cos t + b\sin t = A\cos(t + B)$$

geschrieben werden kann, die Parenthese also nur *ein* Argument $t + B$ enthält.
Dagegen hat das Integral von

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \{a\cos t + b\sin t + c\cos 2t\}x = 0$$

auch *sekulare* Glieder, weil in der Parenthese *zwei* Argumente : $t+B$ und t sind, zwischen denen die Relation

$$t + B - t = B$$

wo B *nicht* Null sein darf, besteht. u.s.w.
Ich muss gestehen, dass ich mit Spannung ihre versprochene Note in den *C.R.* abwarte. Jedes Beispiel ist ja in dieser Sache von der grössten Wichtigkeit. Ich muss noch einmal bekennen, dass mir ihre Ansicht über die Convergenzfrage meiner Reihen für das Dreikörperproblem nicht ganz befriedigte. Dass indessen die Stabilität *nicht* durch meine Methode und Reihen bewiesen wird, gebe ich ohne weiteres zu, und habe auch nicht einen solchen Anspruch erhoben.
Die ungeheuren Schwierigkeiten indessen, die sich bei der Benutzung der von mir angegeb. Form der Integrale, bei der Convergenzfrage auftreten, scheinen mir zu beweisen, dass die trigonometrischen Reihen hier *nicht naturgemäss* sind. Ich habe desshalb, was ich Ihnen desshalb zu erzählen wage, weil ich einige Aussicht auf einen Ausweg habe, diese Methode aufgegeben und suche mir die Lösung unter einer ganz anderen Form. Sobald ich etwas positives gewonnen habe, werde ich Ihnen eine Mitteilung davon machen. Die grösste Schwierigkeit ist, sich von früheren Vorstellungen ganz unabhängig zu halten. — Können Sie mir vielleicht sagen, ob früher [3 Worte unlesbar] Diff. Gl^{n} von der Form $\frac{d^2x_i}{dt^2}$ = Ration. ganz. Functionen von den x_i integrirt worden sind, ausgenommen den bekannten, wo elliptische F^{n} auftreten ?
Ihr ganz ergebener
And. Lindstedt

ALSX 4p. Collection particulière, Paris 75017.

38. Dans sa réponse, Poincaré considère que le cas des équations linéaires ne pose aucun problème. Tisserand (1892) s'intéressera au cas où des termes séculaires apparaissent dans l'équation qui était l'objet du début de la correspondance entre Poincaré et Lindstedt :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x(q^2 + 2q_1\cos 2t) = 0.$$

33.10 Poincaré à Lindstedt

Paris, le 20 Avril 1884

Monsieur,
Le terme en

$$\cos(w+b-a)+\cos(w-b+a)$$

que vous rencontrez dans l'intégration de :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=\lambda x\cos(t+a)+\mu x^3\cos(t+b)$$

peut s'écrire :

$$2\cos w\cos(b-a).$$

C'est donc un terme en $\cos w$ que l'on peut faire disparaître par un choix convenable de t.
Quant à l'équation,

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(a\cos t+b\sin t+c\cos 2t)x=0$$

et en général à toutes les équations linéaires la théorie peut s'en faire très simplement et on ne trouve de termes séculaires que dans des cas très exceptionnels. Je me bornerai à vous renvoyer aux *Astronomische Nachrichten N° 2547.*[39] Il est donc probable que les termes en $\sin w$ disparaissent toujours et que par conséquent votre méthode n'est pas soumise à la restriction que vous énoncez dans votre lettre et qui en amoindrirait considérablement la portée. Mais cela mériterait démonstration ou tout au moins vérification.[40]

39. Callandreau (1883) applique à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2x}{dt^2}+(a_0+a_1\cos t+a_2\cos 2t+\ldots)x=0 \qquad (1)$$

les résultats de la théorie développée par Picard (1880c, 1880b) et Floquet (1883) sur les équations différentielles à coefficients périodiques ou doublement périodiques. Le point essentiel est la démonstration que l'équation (1) admet des solutions périodiques de seconde espèce, c'est-à-dire vérifiant

$$F(t+2\pi)=\mu F(t).$$

Callandreau termine sa note en montrant que les coefficients de Fourier sont des fonctions holomorphes des coefficients a et d'un terme m obtenu par l'équation $f(2\pi)=\cos 2\pi m$ où f est une solution paire de l'équation (1). L'analyse proposée par Callandreau est analogue à celle exposée par Poincaré dans sa lettre à Lindstedt du 25 août 1883 (§ 3-33-4) et par Tisserand dans le chapitre 1 du volume 3 de son *Traité de mécanique céleste* (Tisserand 1894).

40. Poincaré proposera deux preuves que l'algorithme de Lindstedt peut être indéfiniment poursuivi :

> On constate aisément que la méthode est applicable dans les premières approximations, mais on peut se demander si l'on ne sera pas arrêté dans les approximations suivantes ; M. Lindstedt n'avait pu l'établir rigoureusement et conservait même à ce sujet quelques doutes. Ces doutes n'étaient pas fondés et sa belle méthode est toujours légitime ; je l'ai démontré d'abord par l'emploi des invariants intégraux [...], puis sans me servir de ces

invariants [...]. (Poincaré 1893, 16)

Dans son article *Sur une méthode de M. Lindstedt*, Poincaré décrit la méthode de Lindstedt comme la résolution d'une succession d'équations de la forme

$$\Delta x_k = F_{k-1} + \nu_k \cos w - B_k$$

où F_{k-1} et B_k sont des séries trigonométriques et il faut déterminer ν_k de telle manière que l'équation puisse être satisfaite par une série trigonométrique :

> Il est aisé de voir comment il faut déterminer ν_k ; en effet, pour que l'équation
>
> $$\Delta u = W,$$
>
> où, le second membre est une série trigonométrique en t et w puisse être satisfaite par une série trigonométrique u, il faut et il suffit que W ne contienne ni terme en $\cos w$, ni terme en $\sin w$. or nous pouvons disposer de ν_k, de façon à détruire les termes en $\cos w$; mais nous ne pourrions pas de même détruire les termes en $\sin w$, s'il y en avait dans $F_{k-1} - B_k$. (Poincaré 1886b, 59)

Pour montrer qu'il n'apparaît pas de terme en sinus, Poincaré utilise une preuve par l'absurde fondée sur le théorème de Green-Ostrogradski. Cette preuve est typique du style géométrico-physique de Poincaré en analyse. Il suppose qu'à la $(k+1)^{\mathrm{e}}$ approximation un terme en sinus apparaisse dans $F_{k-1} - B_k$ et qu'il faille donc résoudre une équation du type :

$$\Delta x'_k = F_{k-1} + \nu_k \cos w - B_k - S \sin w$$

"en choisissant ν_k de façon à détruire les termes en $\cos w$ dans le second membre". La solution x'_k sera encore une série trigonométrique en t et w (mais ne permet plus de poursuivre l'algorithme). Poincaré pose :

$$\begin{array}{rcl} x & = & f(t,w) = x_0 + \alpha x_1 + \ldots + \alpha^{k-1} x_{k-1} + \alpha^k x'_k \\ y & = & \psi(t,w) = \frac{df}{dt} + \mu \frac{df}{dw} \\ z & = & t \end{array}$$

Il note Σ la surface décrite par le point x, y, z quand t et w parcourt l'intervalle $[0, 2\pi]$. À l'aide de la forme de Green-Ostrogradski, il montre que l'intégrale

$$\int_\Sigma (Xa + Yb + Zc)dw = 0$$

où $X = \frac{dx}{dt}$, $Y = \frac{d^2x}{dt^2}$, $Z = t$ et (a, b, c) est le champs normal à Σ. Poincaré en conclut que les coefficients du développement par rapport à α de l'intégrale sont nécessairement nuls :

> Notre intégrale devant être nulle, quel que soit α, les coefficients des diverses puissances de α dans le développement de cette intégrale devront être nuls, et ce sera vrai, en particulier, du coefficient de α^k : on devra donc avoir
>
> $$\int M_0 S \sin^2 w dw = 0,$$
>
> et, comme $M_0 \sin^2 w$ est essentiellement positif, cela ne peut avoir lieu que si S est nul. Donc, dans la méthode de M. Lindstedt, aucune des approximations n'introduira de terme en $\sin w$; donc la méthode n'est jamais en défaut. [...]
>
> La même analyse pourrait s'étendre aux équations plus générales considérées par M. Lindstedt, mais j'ai à peine besoin de dire que la question de la convergence est toujours réservée. (Poincaré 1886b, 61)

Quelques années plus tard, dans le cadre de ses travaux préparatoires pour son mémoire présenté pour le concours du roi de Suède, Poincaré aborde l'étude des équations différentielles

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} + n^2\rho = \mu\varphi(\rho, x) \tag{2}$$

Quant aux équations

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \text{ fonction rationnelle des } x_i$$

elles n'ont été intégrées, à ma connaissance, que dans quelques cas très simples et pour ainsi dire classiques que vous devez connaître.[41]

---

où n n'est pas rationnel, mu est un paramètre petit et ϕ s'écrit sous la forme d'une série trigonométrique

$$\phi(\rho, x) = \sum A\rho^m \cos(\lambda x + \alpha) = \frac{d\psi}{d\rho}$$

en rattachant la méthode de Lindstedt aux principes des *Vorlesungen über Dynamik* de Jacobi. Dans un premier temps, Poincaré transforme l'équation (2) en un système d'équations d'Hamilton :

> Nous pouvons remplacer l'équation (2) par les suivantes :
>
> $$\frac{d\rho}{dt} = \sigma, \quad \frac{d\sigma}{dt} = -n^2\rho + \mu\frac{d\psi}{d\rho}, \quad \frac{dx}{dt} = 1.$$
>
> En posant
>
> $$H = \frac{\sigma^2}{2} + n^2\frac{\rho^2}{2} - \mu\psi + p,$$
>
> il vient
>
> $$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dH}{d\sigma}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{dH}{d\rho}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dp},$$
>
> auxquelles on peut joindre (puisque p est une variable auxiliaire complètement arbitraire)
>
> $$\frac{dp}{dt} = -\frac{dH}{dx}.$$
>
> (Poincaré 1889, 21–22)

En utilisant un changement de variables, l'hamiltonien s'écrit :

$$H = p + n^2q - \mu\psi(q, y, x)$$

et les équations s'écrivent sous forme canonique. Suivant la théorie de Jacobi, le problème revient alors à intégrer l'équation aux dérivées partielles $H = C$ où "l'on regarde p et q comme les dérivées d'une même fonction z et où C est une constante arbitraire". Poincaré obtient un développement de z par rapport à μ :

> Nous possédons donc z sous la forme d'une fonction trigonométrique de x et y, dépendant en outre de deux constantes arbitraires [...].
>
> Il est aisé d'en déduire les séries de M. Lindstedt sous la forme que le savant astronome leur a donnée.
>
> On remarquera que cette méthode d'exposition met en évidence la forme purement trigonométrique de la solution, sans qu'on soit obligé de recourir au théorème de Green et à l'artifice que j'ai employé dans le *Bulletin astronomique* pour démontrer la légitimité de la méthode de M. Lindstedt. (Poincaré 1889, 24)

Poincaré choisira d'exposer la seconde démonstration dans le deuxième tome des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*.

41. Dans le cadre de son étude des équations différentielles à coefficients doublement périodiques, Picard (1880a) avait publié une note dans laquelle il se proposait d'appliquer aux équations différentielles du second ordre à coefficients doublement périodiques la "méthode très remarquable [de Klein] pour reconnaître si une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients rationnels, peut ou non être intégrée complètement au moyen des fonctions algébriques".

J'ai l'intention de me restreindre pour le moment à l'étude de l'équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \psi_1 x + \psi_2 x^2 + \dots$$

Il me paraît en effet que cette équation présente toutes les difficultés essentielles du problème des trois corps, tout en étant exempte de certaines complications de ce problème, qui ne touchent pas au fond des choses et qui embrouillent inutilement la pensée.
Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée,
Poincaré

ALSX 3p. Observatoire de Paris.

33.11 Lindstedt à Poincaré

Dorpat den 27 April 1884

Sehr geehrter Herr Professor !
Es ist kaum nöthig zu sagen, dass Sie vollkommen recht haben. Ich bitte Sie um Entschuldigung, dass ich es nicht gleich gesehen habe. In der That aber bin ich jetzt genöthigt für einige Zeit meine Untersuchungen ruhen zu lassen, theils weil, wie vor allen Dingen ihre so wichtigen Bermerkungen in *C.R.* mich überzeugt haben, ich noch nicht die nöthigen Vorkenntnisse besitze, theils weil ich in meiner jetzigen Stelle meine erste Zeit ganz heterogenen Fächern widmen muss.[42] Ich betrachte den Umstand, dass Sie sich veranlasst gesehen haben, der Sache ihre Aufmerksamkeit zu widmen, als den wichtigsten Erfolg meiner bis jetzt nur vorläufigen Arbeiten.
Mit der tiefsten Hochachtung
Ihr ganz ergebener
And. Lindstedt

ALSX 1p. Collection particulière, Paris 75017.

33.12 Lindstedt à Poincaré

Dorpat den 11 Mai 1884

Sehr geehrter Herr Professor !
Da Sie mir die Ehre erwiesen haben, mir von dem Hinscheiden ihres Schwiegervaters in Kenntnis zu setzen, erlaube ich mir Ihnen hiermit meinen innigsten Beileid und Theilnahme auszudrücken.[43] Ich sehe aus dem Poststempel, dass die Anzeige schon vor drei

42. Poincaré 1883b. En 1883 Lindstedt devint professeur de mathématiques appliquées à l'Université de Dorpat. Il quittera Dorpat pour devenir professeur de mathématiques et de mécanique théorique à la Högskola de Stockholm (Hofberg 1906, 78).

43. Le beau-père de Poincaré est décédé le 15.04.1884 à Paris.

Wochen aus Paris abgegangen ist. Ich habe sie indessen erst vorgestern erhalten; sonst würde ich Ihnen schon früher geschrieben haben.[44]
Ihre letzte Note in *C.R.* habe ich auch erst gestern bekommen, woraus Sie beurtheilen können, wie schlecht wir hier in Dorpat in literarischer Hinsicht bedient sind.[45] Mehrere wichtige Zeitschriften und Verhandlungen können wir, wegen des Mangels an Mitteln bei der Universität, nicht halten, und die übrigen bekommen wir gewöhnlich, ebenfalls um unnöthige Ausgaben zu vermeiden, mehrere Wochen später als andere Menschen.
Dass ihre Note wichtig und interessant ist, braucht wohl nicht gesagt zu werden. Ich möchte nur etwas dazu bemerken.
Erstens scheinen Sie, auch wenn es nicht gesagt wird, zu meinen, dass *meine* Reihen (n. 4 Argumenten) nur in Ausnahmefällen Gültigkeit besitzen. Alsdann hätte mein Resultat eigentlich gar kein theoretisches Interesse, ja meine Methode wäre eigentlich nichts Anderes als die früheren, nähmlich Interpolationsmethoden, die wohl für beschränkte Zeiten die Lösung der Aufgabe geben, aber weiter Nichts.[46]
Da ich aber noch nicht dies glauben kann, so habe ich zweitens nach einem anderen Ausweg gesucht, und es scheint mir, als wenn ihre Idee grosse Ähnlichkeit damit hätte. Ich suche nähmlich, analog dem Zweikörperproblem, solche Verbindungen (rationale) zwischen den Grössen

$$\frac{dr^2}{dt}, \ldots r^2, \ldots q$$

44. Lindstedt a reçu sa dernière lettre de Poincaré (§ 3-33-10) après avoir envoyé une lettre à Poincaré le 27.04.1884 (§ 3-33-11).

45. Voir Poincaré (1884d), une note présentée à l'Académie des sciences de Paris le 31.03.1884.

46. Poincaré (1884d) s'intéresse aux équations de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_0 + x\varphi_1 + x^2\varphi_2 + \ldots + x^m\varphi_m + \ldots \quad (1)$$

où les φ sont des séries trigonométriques. Il prouve que l'équation $\frac{dF}{dt} = 0$ admet toujours une solution formelle de la forme

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_m + \ldots \quad (2)$$

où F_m est un polynome homogène en x, $y = \frac{dx}{dt}$ ayant pour coefficients des fonctions périodiques de t de période 2π. Il explique que, bien que la série ne soit pas convergente en général, "ce serait une erreur" de conclure que "l'on ne peut tirer aucune conclusion de l'existence de cette série". Il montre que, dans le cas général, "on verrait, dans l'un des termes F_m de cette série, la variable t sortir des signes trigonométriques" et que l'on pourrait en conclure :

> [...] si x et y sont originairement très petits, non seulement ils ne resteront pas très petits, mais ils ne pourront jamais le redevenir après avoir cesser de l'être.
>
> *Tel est le cas général*, et, dans le cas particulier où nous nous étions placé d'abord, la disparition des termes séculaires prouve précisément l'impossibilité de trouver une fonction f dont la dérivée totale $\frac{df}{dt}$ soit toujours de même signe quand x et y sont suffisamment petits.
>
> Il résulte de là et de considérations que je ne puis développer ici que les quantités x et y pourront cesser d'être très petites, *mais pour le redevenir ensuite*. Il y a exception, toutefois, quand un certain nombre est commensurable.
>
> Dans le cas où la série (2) serait convergente, x et y resteraient toujours très petits. (Poincaré 1884d)

die sich, wenn möglich, durch ein einziges Argument darstellen lassen.[c]
Aber ich muss die Note näher studieren, ehe mir weiter darauf einlasse.
Nach einem Monat fahre ich nach Deutschland, um seine Mathematik, hauptsächlich in Berlin unter Weierstrass und Fuchs, der jetzt in B. ist, zu studiren.[47] Ich hoffe desshalb nachher mit Aussicht auf besseren Erfolg etwas mit Ihnen wetteifern zu können. Jetzt kann ich es nicht.
Wenn es mir irgend möglich ist, wass indessen leider nicht sehr wahrscheinlich ist, möchte ich auch Paris besuchen. Ich muss eben schon Anfang August hier zurück sein.
Mit der tiefsten Hochachtung, Ihr ganz ergebener,
And. Lindstedt

ALSX 3p. Collection particulière, Paris 75017.

33.13 Lindstedt à Poincaré

Dorpat den 20 September 1885

Hochgeehrter Herr Professor !
Die Trauernachricht über den Tod einer Ihnen nahestehenden Verwandten habe ich vor einigen tagen erhalten, und will Ihnen jetzt meine lebhafte Theilnahme an ihren Verlust aussprechen.[48] Zugleich ergreife ich die Gelegenheit um Ihnen meinen herzlichen Dank für die Uebersendung Ihrer Abhandlung “Sur les courbes etc.” zu bezeugen.[49]
Ich habe dieselbe leider noch nicht studieren können, obgleich das Thema mich ja sehr intressiert. Ich leide nähmlich seit 10 Monaten an den Folgen eines schweren Typhus und fange erst jetzt an mich erholt zu fühlen. In Folge dessen waren geistige Arbeiten jeder art mir ärztlich verboten, was auch erklärlich macht, dass ich so lange Nichts von mir habe hören lassen. Indessen hoffe ich jetzt mit Sicherheit sehr bald meine früheren Arbeiten wieder aufnehmen zu können.
Mit vorzüglichster Hochachtung
Ihr stets ergebener
And. Lindstedt

ALSX 2p. Collection particulière, Paris.

47. Lazarus Fuchs succède à partir de 1884 à Kummer à l’Université de Berlin. Karl Weierstress était professeur dans cette même université depuis 1856.

48. Anaïs Louise Pauline Geoffroy-Saint-Hilaire, la belle-mère de Poincaré, est décédée le 31.08.1885 à Paris.

49. Poincaré 1885g.

c. Variante : “~~Schliesslich scheint mir Ihr Schluss, dass weil t ausserhalb des period. Functionenzeichens als Factor erscheint~~”.

Chapter 34

Norman Lockyer

Joseph Norman Lockyer (1836–1920) was an astronomer, and founder and editor of the British science journal *Nature*. An avid amateur astronomer, in 1868 Lockyer noticed a prominent line in the solar spectrum, that he identified with a new element he named helium. He became a Fellow of the Royal Society in 1869, and Correspondent of the Paris Academy of Science in 1873 (astronomy section). In 1885 Lockyer was named to a new chair in astronomical physics at the Royal College of Science in South Kensington, where he became Director of the Solar Physics Observatory in 1890. On Lockyer's life and work see Meadows (2008), the *DSB* (Dingle 1973), and Wilkins (1994, 2004).

The exchange of letters between Poincaré and Lockyer concerns several subjects. In the first letter of the exchange, dating from January 1892, Lockyer asks Poincaré to verify the accuracy of his wife Winifred's translation of the latter's essay on the foundations of non-Euclidean geometry. During Poincaré's career, three of his essays were translated into English for publication in *Nature*,[1] along with three letters to the editor, and one letter to A.A. Michelson, all published in the original French.[2]

1. Poincaré 1892c, 1894a, 1898a.
2. Poincaré 1892d, 1892e, 1892f, 1899a. All four letters are annotated in Walter (2007); see §§ 2-55-1, 2-55-3, 2-55-5, 2-41-1, respectively.

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_34

34.1 Lockyer à Poincaré

Monday — Jany 26th [1892]
NATURE — PUBLISHING OFFICE: BEDFORD STREET, STRAND, LONDON

My dear Sir,
I have had a translation made of your admirable article on non-Euclidean Geometry & I shall be obliged if you will kindly look it over before it appears. [3]
I am sorry to say that Sylvester is far from well. [4]
Very sincerely yours,
J. Norman Lockyer

ALS 1p. Private collection, Paris 75017.

34.2 Lockyer à Poincaré

Feb 12 [1892]
SOUTH KENSINGTON — SCIENCE AND ART DEPARTMENT [5]

Dear Professor Poincaré,
I have not had an opportunity of inquiring lately after Sylvester's health. [6] The last time I saw him he looked very ill & told me he was arranging a consultation as he was convinced there was something very wrong.
When I hear again I will let you know.
I shall be delighted to print your letter. [7]
Very sincerely yours,
Norman Lockyer

ALS 2p. Private collection, Paris 75017.

3. Poincaré (1892c), translated by W. J. L., and published on 25.02.1892. Lockyer most likely asked his wife, Winifred James Lockyer, to translate Poincaré's essay. Mrs. Lockyer had previously translated from the French Amédée Guillemin's popular treatise *The Applications of Physical Forces* (1877). Poincaré's essay originally appeared in the *Revue générale des sciences pures et appliquées* (Poincaré 1891a). It advanced his conventionalist philosophy of geometry, according to which geometry is an abstract science, and the geometry of physical space is less a matter of experiment than of convenience. For an overview, see (Walter 2008, 2009).

4. J. J. Sylvester; for his correspondence with Poincaré, see Nabonnand et al., Volume 4.

5. The Science and Art Department of the British government was a sub-division of the Education Department, with oversight of the Royal College of Science, where Lockyer was professor of astronomical physics and director of the solar physics laboratory. In 1907, the Royal College of Science became part of the Imperial College of Science and Technology (Gay 2007, 35).

6. Lockyer had recently written Poincaré that J.J. Sylvester was ill (§ 3-34-1), apparently in response to a query from Poincaré. It seems that Poincaré then asked Lockyer for details of Sylvester's condition.

7. See Poincaré (1892d), published 03.03.1892, and reedited in Walter, ed. (2007, § 2-55-1). Poincaré reacted to Peter Guthrie Tait's critical review of his Sorbonne lectures on thermodynamics (Tait 1892, reedited in Walter, ed., 2007, § 2-62-2).

34.3 Poincaré à Lockyer

[Après 1902]
THE ATHENÆUM — PALL MALL S.W.

Mon cher Confrère,
J'accepte très volontiers votre aimable invitation, j'espère que ma lettre ne vous parviendra pas trop tard.
Votre tout dévoué,
Poincaré

ALS 1p. EUL MS 110, University of Exeter Old Library.

34.4 Poincaré à Lockyer

LONDON 19 [Après 1902]
TELEGRAPHIC ADDRESS PREVITALI, LONDON
HOTEL PREVITALI AND HOTEL MATHIS — ARUNDELL STREET — PICADILLY CIRCUS — LONDON [8]
Arundell Street — Picadilly Circus

Mon cher Collègue,
On me renvoie votre lettre de Paris, je vous remercie beaucoup de votre aimable invitation, mais je dois partir dimanche et il faut que j'aille demain à Reading. [9] Veuillez croire à tous mes regrets et m'excuser auprès de lady Lockyer.
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 1p. EUL MS 110, University of Exeter Old Library.

8. L'Hôtel Previtali et l'Hôtel Mathis appartenaient aux frères Mentasti. L'écrivain P.G. Wodehouse en fait mention dans son roman *Something Fresh* (1915).

9. La lettre de Lockyer nous manque ; elle devait être sa réponse à la lettre précédente de Poincaré (§ 3-34-3).

Chapitre 35

Edgar Odell Lovett

Edgar Odell Lovett (1871–1957) a étudié à Bethany College (É-U, Virginie-Occidentale), où il a obtenu le *Bachelor of Arts* en 1890. Par la suite, il a enseigné les mathématiques à la *Southern Normal School* (Kentucky) puis à l'Université de Virginie, où il a soutenu une thèse (Lovett 1895) sur les inégalités de Jupiter et de Saturne, en employant une méthode de G. W. Hill. Lovett a continué ses études en Europe, à Christiania (Oslo) et à Leipzig, où il a soutenu une deuxième thèse sous la direction de Sophus Lie sur la théorie des perturbations et la théorie des transformations de contact de Lie (Lovett 1899). Il s'est intéressé à la géométrie à n dimensions, ainsi qu'au problème restreint des trois corps (Lovett 1901, 1902). À propos du problème des n corps, Lovett (1912) a résumé les recherches entre 1898 et 1908, et noté l'adoption des méthodes de Poincaré dans ce domaine (Barrow-Green 1997, 148). Lovett appartenait à l'American Association for the Advancement of Science, la Royal Astronomical Society, la London Mathematical Society, la Société mathématique de France, et le Circolo matematico di Palerme.

À partir de 1897 Lovett a enseigné à l'Université Johns Hopkins, puis à l'Université de Virginie et à l'Université de Chicago, avant d'intégrer le département de mathématiques et d'astronomie à l'Université de Princeton, qu'il a dirigé à partir de 1905. En 1908, il quitta Princeton pour Houston, afin de fonder un établissement d'enseignement supérieur : l'Institut Rice. Pour mieux connaître le paysage universitaire et polytechnique, Lovett a entrepris un voyage à travers les institutions de l'Europe, la Russie, le Japon et les États-Unis en 1908–1909, en passant deux fois par Paris. Au début de 1912, il est revenu en Europe afin de recruter des enseignants en vue de l'ouverture de l'Institut Rice à l'automne (Boles 2007).

La correspondance entre Poincaré et Lovett concerne une invitation à l'inauguration de l'institut Rice, du 10 au 12 octobre 1912. Poincaré décline l'invitation à plusieurs reprises, en invoquant son état de santé puis il meurt, trois mois avant les cérémonies à Houston. Alors que l'inauguration de l'Institut Rice a eu lieu sans Poincaré, son souvenir fut invoqué à cette occasion par le délégué de l'Université de Paris, son ancien étudiant et collègue à la Faculté des sciences de Paris, Émile Borel (1915a, 1915b).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_35

35.1 Lovett à Poincaré

BERLIN, DEN 3 February 1912
HOTEL ATLANTIC — DER KAISERHOF — BERLIN

My dear Professor Poincaré,
As far as may be consistent with dignity I desire to press upon you the invitation which M^r^ Hadamard aided me in presenting a few evenings ago. [1] You cannot estimate what your coming would mean to the new institution. Your presence would be of everlasting value to us in establishing high tradition. Your lectures would represent human achievements at their present level, and the promise and problems of the future. Your coming would be a constant source of inspiration to all future associates and students of the Rice Institute. We could neither point out a room in which Newton lived, as the Cambridge don may do at Trinity College, nor designate a laboratory where Pasteur wrought, as more the doctor of Paris, but we could be able to say "Behold, where Poincaré read and walked, if but for one day in our midst." [2]
While the new institution is dedicated to the advancement of letters, science and art, by instruction and by investigation, in the individual and in the race, three circumstances make our choice of educational endeavour an easy one : 1° we are in a new and rapidly developing country ; 2° there is no school of pure and applied science of the higher grade, in its section of our country ; 3° the financial foundations, while large, is nevertheless limited, and not adequate to provide for the equipment of all faculties ; for these reasons we propose to begin a university programme of the science and with a view to opening the institution with appropriate ceremonies we are inviting a few distinguished scholars and scientists to come to Houston as our guests on the occasion of the 420th anniversary of Columbus' discovery, 19th and 20th October 1912, and to prepare say three lectures one of which to be delivered, and all three in each case to be published in a memorial volume that will be made worthy of the lectures and of the high aims of the new foundation.
For various reasons it has seemed wise to limit the fields represented as follows [3]

Mathematics	Poincaré
Physics	Thomson *
Chemistry	Ostwald **
Biology	De Vries ***

In Mathematics we have done ourselves the great honour in asking you ; in physics we

1. Jacques Hadamard, professor of analytical and celestial mechanics at the *Collège de France*, was an Adams Fund Lecturer at Columbia University in the fall of 1911, and in March 1920, he spoke in Houston about Poincaré's scientific contributions (Hadamard 1915, 1922).
2. Louis Pasteur (1822–1895).
3. The manuscript features a second, barred column, with the following four entries :

Letters	Mackail Cato professor in Oxford
Philosophy	Sir Henry Jones of Glasgow
History	Lamprecht of Leipsic
Art	Altamira of Madrid

have invited Sir J. J. Thomson ; in chemistry, Ostwald ; in biology, De Vries. [4] We propose also to invite a representative of letters, one of philosophy, one of history, and one in art. We are also arranging a conference on national and international methods on organization for instruction and investigation in Pure and applied science, and their functions in modern civilization, to be participated in by representatives of France, Germany, Italy and England. To the publications of this conference representatives of Russia, Scandinavia, Austro-Hungary & Japan will be asked to contribute.
If have written this note to supplement our rather hurried personal interview which was hurried because unfortunately delayed beyond the hour you had been good enough to name.

ADft 3p. Lovett Family Papers, 1849–1979 (MS 494), box 83, folder 36, Rice University Fondren Library.

35.2 Poincaré à Lovett

[07.02.1912][5]

Université de Paris — Faculté des Sciences — Mécanique Céleste

Cher Monsieur,
J'aurais bien envie d'accepter votre très aimable invitation ; je suis malheureusement depuis le mois de septembre dans un état de santé qui ne me permettrait pas d'entreprendre le voyage. [6] Je ne puis savoir si une suffisante amélioration se produira d'ici au mois d'octobre ; dans ces conditions, je suis obligé de décliner vos offres, car vous n'avez pas trop de temps pour tout organiser et je ne voudrais pas vous tenir plus longtemps en suspens. Mais croyez que ce n'est pas sans regret.
Votre bien dévoué,
Poincaré

ALS 1p. Rice Institute President Edgar Odell Lovett papers, box 13, folder 12, Rice University Fondren Library.

4. Joseph John Thomson, Wilhelm Ostwald, Hugo De Vries.
5. L'enveloppe de la "Faculté des sciences de l'université de Paris" fut envoyée à l'Hôtel Atlantic à Londres, puis réexpédiée au 4, Sq. de la Tour Maubourg, Paris.
6. La lettre d'invitation n'a pas été retrouvée, mais Lovett a dû inviter Poincaré à participer à l'inauguration de l'Institut Rice à Houston, Texas, du 10 au 12 octobre 1912.

35.3 Poincaré à Lovett

[28.05.1912][7]

Cher Monsieur,

Je ne prévois malheureusement pas que ma santé s'améliore assez d'ici au mois d'octobre pour me permettre d'entreprendre le voyage ; j'en suis fort contrarié, car j'avais conservé un excellent souvenir de mon premier séjour en Amérique ; et puis c'est un signe de décrépitude, ce qui est toujours désagréable.[8] Je vous enverrai un manuscrit ; je pense qu'il suffit qu'il vous parvienne pour le 1er Octobre.[9]

Votre bien dévoué,

Poincaré

ALS 1p. Rice Institute President Edgar Odell Lovett papers, box 13, folder 12, Rice University Fondren Library.

7. L'enveloppe porte une annotation de main inconnue, où la date de réception est précisée (11.06.1912), ainsi que la date de la réponse (27.06.1912). Elle est adressée à "Monsieur Odell Lovett, President, The W. Rice Insitute for the Advancement of Science, Houston Texas, États Unis d'Amérique". La réponse de Lovett n'a pas été retrouvée.

8. Poincaré a été membre de la délégation française au congrès scientifique de l'exposition mondiale de Saint-Louis en septembre, 1904. Selon Émile Borel (1915b, 163), Poincaré lui a parlé de son regret de ne plus jamais visiter les États-Unis, et lui a offert des conseils à propos des trois conférences qu'il devait prononcer à Houston :

> When Henri Poincaré was invited by President Edgar Odell Lovett to deliver an address at this scientific celebration, his acceptance was conditional on the state of his health. A few months later, he finally declined the invitation, promising, however, to send his lecture in writing. I cannot remember without emotion the last conversation I had with him on that subject. I was still hoping that his decision was not final ; but, after giving me some friendly advice about my lectures and the journey, he told me with what deep regret he had to give up the thought of ever visiting the United States again, and I felt, for the first time, how serious was the condition which justified his refusal. A few weeks afterward he was gone.

9. Poincaré est mort le 17.07.1912, apparemment avant d'avoir rédigé l'article promis à Lovett. Celui-ci, informé des obsèques de Poincaré, a écrit à Louise Poincaré afin de savoir si l'article se trouvait parmi les papiers de son mari. Elle lui a répondu dans ces termes (ALS 3p, box 13, folder 12) :

> Je n'ai trouvé aucun manuscrit malgré les recherches que j'ai faites avant de quitter Paris et je suis à peu près sûre que c'est pendant les vacances que mon Mari comptait rédiger la conférence dont il vous avait fait la promesse.
>
> Il s'était résigné à l'opération qui lui a été si fatale dans l'espoir de retrouver toute son activité, toute sa liberté et de pouvoir faire encore quelques uns de ces voyages qu'il aimait tant et lui permettaient de connaître personnellement les savants dont il était le correspondant et l'ami éloigné.
>
> Si la conférence que M. le Professeur Volterra doit consacrer à mon Mari n'est pas exclusivement mathématique je vous serais très reconnaissante de me la communiquer ….

La conférence de Volterra a été traduite en anglais pour publication dans un ouvrage issu de l'inauguration de l'Institut Rice (Volterra 1915a), et dans un *Rice Institute Pamphlet* (Volterra 1915b).

35.4 Poincaré à Lovett

[08.07.1912][10]

Monsieur,
Je viens de recevoir l'aimable invitation que m'adresse l'Institut Rice pour les fêtes du mois d'octobre. Malheureusement l'état de ma santé ne s'est pas amélioré et même je vais entrer ce soir dans une maison de santé.[11] En admettant même, ce que j'espère, que l'opération que je vais subir réussisse et me ramène à l'état normal, les effets ne sauraient en être assez prompts pour que je puisse sans danger me mettre en route à la fin de septembre. Je regrette beaucoup de ne pouvoir accepter votre offre et je vous prie de m'excuser.
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 2p. Rice Institute President Edgar Odell Lovett papers, box 13, folder 12, Rice University Fondren Library.

10. L'enveloppe porte un tampon de réception : "REC. JUL 19". Elle est adressée à "Monsieur le Professeur Lovet [sic], President of the Rice Institute, Houston Texas, États Unis d'Amérique".

11. Poincaré a subi une ablation de la prostate le 9 juillet à Paris ; il est mort peu après, le 17 juillet (Sarton 1913).

Chapter 36

George William Myers

George William Myers (1864–1931) was born in Champaign County, Illinois. [1] He studied engineering at the University of Illinois. Like many other American students in the exact sciences at the time, he went to Germany to obtain a Ph.D. [2] In 1896, he defended a thesis in theoretical astronomy at the University of Munich under Hugo von Seeliger's direction, on the source of the variability in the β Lyræ binary star system. [3]

From 1888 to 1900, Myers held several positions in succession at the University of Illinois, from instructor of mathematics to assistant, associate, and full professor of mathematics and astronomy. Upon completion of his thesis in Munich, he directed the new observatory in Urbana. In 1900, Myers became head of astronomy and mathematics at the Chicago Institute, an institution for educating future schoolteachers founded by Francis Wayland Parker (1837–1902), a pioneer of the progressive school movement in the United States. In 1901, the Chicago Institute became the School of Education of the University of Chicago (Dewey 1902), where Myers was named professor of mathematics education and astronomy, a position he held until his retirement in 1929.

Myers was a member of the astronomical societies of Germany, France, Belgium, Mexico and South America, and belonged to the American Academy for the Advancement of Science, and the American Mathematical Society. An author of high-school mathematics texts, and translator of a German text on experimental physics, Myers contributed to theoretical astronomy, which is the subject of his letter to Poincaré in 1901 (§ 3-36-1).

Myers' letter to Poincaré may have been prompted by the latter's remark on binary stars of the β Lyræ type, inserted in his review of the second volume of Charles André's *Traité d'astronomie stellaire* (1900):

> Ces étoiles doubles photométriques se répartissent en deux classes, celle d'Algol dont les variations sont discontinues et celle de β Lyre dont les variations sont continues. [..] La variabilité des étoiles du type d'Algol paraît due à des

1. If not otherwise indicated, biographical data is from *Marquis-Who's Who* (1968, 885).
2. For an overview, see Parshall & Rowe (1994).
3. See Myers (1896), or the summary in English (Myers 1898).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_36

> éclipses, celle des étoiles du type β de la Lyre à l'aplatissement considérable des deux composantes qui, pendant leur rotation et leur révolution orbitale, présenteraient à l'œil de l'observateur tantôt une section faible, tantôt une section considérable. Les premières seraient des systèmes binaires formés, les autres des systèmes binaires en voie de formation. (Poincaré 1901a, 44)

Myers' interest in the β Lyræ binary star system stemmed from his doctoral thesis, where he suggested that one star in the system might have the form of Poincaré's pear-shaped figure of equilibrium. Myers supposed that the system's cyclical variation of light intensity was the result of "mutual eclipses of two revolving bodies of unequal brightness" (Myers 1898, 4). From observational data and a few convenient assumptions, Myers concluded that the two bodies are ellipsoids of revolution, and that the distance of their centers is only about 2.4 times the semi-major axis of the larger ellipsoid, such that the separation of the two bodies is very small indeed. For Myers, β Lyræ "furnishes us a concrete illustration of the actual existence in space of a Poincaré figure of equilibrium" (Myers 1898, 19). Judging from Poincaré's review of André's *Traité*, he found Myers' suggestion to be quite plausible. He later published Charles Nordmann's speculation that continuously-varying light intensity from a celestial body results from the orbit of a gaseous pear-shaped figure (Nordmann 1909a). Poincaré also allowed for the possibility that binary stars result from the increase in rotational velocity of a rotating fluid mass due to cooling (Poincaré 1911a, XV–XVI).

36.1 Myers à Poincaré

Sept. 24, 1901
Chicago Ills. U.S.A. – 6026 Monroe Ave.
CHICAGO University — William R. Harper, PRESIDENT [a]
Professor of Astronomy and Mathematics — School of Education

Mr. H. Poincaré, Paris France

My dear Sir:
You have perhaps noticed in Professor André's book entitled *"Traité d'astronomie stellaire"* Vol II p 303 that my discussions of β Lyræ and U Pegasi both seem to point to a concrete confirmation of your excellent work on rotating liquids. [4] I am now curious to

4. Poincaré's review of the second volume of André's treatise appeared in the January issue of the *Bulletin astronomique*, a journal of which he was editor-in-chief.

The passage from André's *Traité* alluded to by Myers reads as follows:

> Le système binaire de β Lyre constitue … un cas absolument remarquable: … ses deux composantes sont presque en contact l'une avec l'autre.
>
> Il est d'ailleurs probable que le système de U Pégase lui est fort analogue, mais avec un contact plus assuré des deux composantes.
>
> Avec d'aussi faibles densités moyennes, ces deux systèmes sont probablement encore à

a. The letterhead is barred; the original version reads: "CHICAGO INSTITUTE — ACADEMIC AND PEDAGOGIC — FRANCIS WAYLAND PARKER, PRESIDENT".

see if by computing light curves based upon any of your other theoretical forms – perhaps the apiodal – I may be able to represent the light curves of any other variables. To this end I write to enquire whether you can put into my hands a copy of the paper containing your discussion, or discussions, of your various forms of rotating liquid masses in equilibrium. If you can do so, you will greatly oblige me and help me, perhaps, to accomplish something which may be of interest to you as furnishing tangible proof of the existence in the universe of such equilibrium forms as your matchless pen has proved possible.
Most respectfully yours,
G. W. Myers

ALS 1p. Private collection, Paris 75017.

> l'état nébuleux; leurs atmosphères se confondent et, se mêlant à une certaine distance des noyaux stellaires, se distribuent en surfaces équipotentielles différant de plus en plus de la forme sphérique et affectant les formes si bien étudiées par l'éminent géomètre Poincaré. (André 1900, 303)

In his detailed review, Poincaré agreed with André's assessment of β Lyræ, referring to it as a type of emerging binary system (Poincaré 1901a, 44).

Chapter 37

Simon Newcomb

Simon Newcomb (1835–1909) was largely an autodidact in mathematics, although he attended Harvard University's Lawrence Scientific School in 1857–1858, where he studied under Benjamin Peirce, and obtained a BS degree. From 1877, Newcomb was employed as a calculator in Cambridge at the *Nautical Almanac* Office, which publication he would be associated with for the next forty years.

In 1861, Newcomb obtained a position with the United States Naval Observatory, benefiting from the displacement of personnel due to the Civil War (Dick 2002, 276). Newcomb taught mathematics at the United States Naval Academy, and mathematics and astronomy at Johns Hopkins University. For twenty years, he directed the *Nautical Almanac*, until his retirement in 1897.

From the 1870s, Newcomb was recognized as the premier astronomer of position the the United States, and he became an influential senior member of the American scientific community, and a key spokesman for science. Awarded the Gold Medal of the Royal Astronomical Society in 1874, Newcomb was named a Correspondant of the Paris Academy of Science the same year, and Foreign Associate of the Academy in 1895, succeeding Hermann von Helmholtz (Académie des sciences 1968, 405; *CRAS* 122, 1896, 15). In 1899, Newcomb became a Correspondent of the French Bureau of Longitude.[1] Newcomb was the first Bruce Medalist in 1897, and he presided the American Mathematical Society in 1897–1898 (Campbell 1924). The organization of the scientific component of the Congress of Arts and Science, held in conjunction with the World's Fair in Saint Louis in September, 1904, was left to Newcomb. Several letters were exchanged between Poincaré and Newcomb concerning Poincaré's participation in the Congress, two of which are published here.[2]

The set of letters exchanged between Newcomb and Poincaré covers two decades, but only one concerns scientific matters directly. As noted by Newcomb's contemporaries

1. See Poincaré's letter to the Minister of Public Instruction, 28.06.1899 (§ 3-47-14).

2. Details of Poincaré's only trip to the United States were disclosed by Paul Langevin in a letter to his wife. Langevin recounted the invitation to the White House, where the French Delegation to the Congress of Arts and Science met with President Theodore Roosevelt (Walter 2007, § 2-33, note 3).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_37

Hill (1909), Stone (1909), and Brown (1910), Newcomb preferred applied to theoretical celestial mechanics, his paper on the general integrals of planetary motion (Newcomb 1876) being the outstanding exception, and one that Poincaré took up in the *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (1893, Chap. 9).

Only one letter from the surviving epistolary exchange between Poincaré and Newcomb takes up a mathematical question. In the summer of 1890, Newcomb drafted a letter to Poincaré (§3-37-1) requesting his help in solving a problem arising from Newcomb's theory of the Moon. No trace of either a related letter to Poincaré, or an eventual response has been located among their papers.

Following his mandatory retirement, Newcomb continued to perform research under the auspices of the new Carnegie Institution in Washington. Newcomb's bibliography up to 1905 was compiled by R. C. Archibald (1905), extended in Archibald (1924). Biographical sources on Newcomb are several, beginning with Newcomb's autobiograpy (Newcomb 1903). On Newcomb's view of science see Moyer (1992), and for an overview of his life and work at the United States Naval Observatory, see Dick (2002, Chap. 8).

37.1 Newcomb à Poincaré (fragment)

Washington le Juin, 1890 [3]

À Monsieur H. Poincaré, Membre de l'Institut

Cher Monsieur,

Permetter me de vous indiquer un problème qui me paraît digne de votre admirable génie : c'est celui des inégalités qui peuvent être produites dans le mouvement de la lune par l'action des planètes. Les observations de la lune depuis 1670 montrent qu'il y a des inégalités dans ce mouvement notablement dans la longitude moyenne, qui ne sont pas produites par l'action du Soleil. Si elles sont réelles l'action des planètes est la seule cause à laquelle on peut les attribuer.

Je pense depuis vingt ans à une méthode d'aborder le problème que j'ai indiquée dans le *Journal* de M. Liouville pour 1870. [4] Mais j'ai trouvé que l'application pratique de cette méthode demande des calculs analytiques et numériques tellement longues et compliqués que je n'ai pu les achever.

J'ai cherché vainement à trouver quelque transformation des équations du problème qui peut rendre plus facile les calculs nécessaires à sa solution. Voilà pourquoi je prends la liberté de attirer votre attention au sujet en espérant que, sans bien de difficulté, vous pouvez trouver une telle transformation ou au moins montrer qu'elle n'est pas possible.

Je pose

X, Y, Z, co-ordonnées rectangulaires du Soleil rapportées au centre de gravité de la terre et de la lune ;

3. Le manuscrit s'accompagne d'une enveloppe sans timbre, adressée par Newcomb : "À Monsieur — Mr H. Poincaré — Membre de l'Institut — Académie des Sciences — Paris, France." Il semble donc vraisemblable que Newcomb n'a pas envoyé de lettre à Poincaré au sujet de la théorie de la lune.

4. Newcomb 1871.

x, y, z, celles de la lune rapportées au centre de la terre ;
m_1, m_2, m_3, m_4, les masses du Soleil, de la terre, de la lune, et d'une planète ;
x_4, y_4, z_4, co-ordonnées de la planète rapportées au Soleil.

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{m_1(m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3} \\
\mu_2 &= \frac{m_2 m_3}{m_2+m_3} \\
\Delta &= x(x_4+X) + y(y_4+Y) + z(z_4+Z) \\
\rho &= \left\{(x_4+X)^2 + (y_4+Y)^2 + (z_4+Z)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \\
R^2 &= X^2+Y^2+Z^2 \\
r^2 &= x^2+y^2+z^2 \\
r_4^2 &= x_4^2+y_4^2+z_4^2 \\
W &= \text{angle entre } R \text{ et } r.
\end{aligned}$$

La part de la fonction de force qui concerne le mouvement relatif des trois corps Soleil, Terre, Lune peut être réduite à la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\Omega &= \Omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2 \\
\Omega &= \frac{m_1(m_2+m_3)}{R} + \frac{m_2 m_3}{r} \\
\Omega_1 &= \frac{1}{2} m_1 \mu_2 \frac{r^2}{R^3}(3\cos^2 W - 1) \\
\Omega_2 &= m_4 \mu_1 \left(\frac{1}{\rho} + \frac{x_4 X + y_4 Y + z_4 Z}{r_4^3}\right) + m_4 \mu_2 \left(\frac{3}{2}\frac{\Delta^2}{\rho^5} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{\rho^3}\right).
\end{aligned}$$

Alors les six équations différentielles du mouvement relatif sont

$$\mu_1 \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{\partial \Omega}{\partial X}$$

et mêmes pour Y et Z,

$$\mu_2 \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

et mêmes pour y et z.
La solution demande trois approximations.

Première Approximation

On néglige Ω_1 et Ω_2. La solution est celle du mouvement elliptique : x, y, z sont exprimés en fonction de six constantes arbitraires et X, Y, Z en fonction de six autres constantes arbitraires.

Deuxième approximation

On pose $\Omega = \Omega_0 + \Omega_1$; la solution est de la forme

$$x, y, z, X, Y, Z = f(a_1, a_2, \ldots, a_6, a'_1, \ldots, a'_6, t). \tag{1}$$

On peut choisir les douze constantes $a_1, \ldots, a_6, a'_1, \ldots, a'_6$ de telle sorte que, quand Ω_1 s'évanouit, $a_1, \ldots, a_6$ deviennent ceux du mouvement elliptique de x, y, z, et $a'_1, \ldots, a'_6$ celles du mouvement elliptique de X, Y, Z.
La partie la plus difficile de cette approximation est achevée par notre excellent ami feu M. Delaunay dans sa "Théorie du mouvement de la Lune."[5]

Troisième Approximation

On tient compte de Ω_2 en faisant varier les douze éléments (1) par la méthode de Lagrange. Maintenant, nous arrivons au point délicat du problème. Le travail de Delaunay nous donne les valeurs de x, y et z dans la forme

$$x, y, z = f(a_1, \ldots, a_6, a'_1, \ldots, a'_6, t). \tag{2}$$

La détermination des valeurs variables de $a'_1, \ldots, a'_6$ dues à l'action de m_4 n'offre aucune difficulté, et comme on peut censer ces variations comme actuellement existantes,[6] on est porté à supposer que la méthode de solution la plus simple doit consister en regardant les douze éléments comme simultanément variables. Telle est la méthode que j'ai imaginée. Pour l'appliquer il faut former les valeurs de

$$\frac{\partial\Omega_2}{\partial a} = \frac{\partial\Omega_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a} \tag{3}$$

$$+ \frac{\partial\Omega_2}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial a} + \frac{\partial\Omega_2}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial a}. \tag{4}$$

Maintenant, voilà la difficulté : Quoique les valeurs de $\frac{\partial X}{\partial a}$ soient moindres que celles $\frac{\partial x}{\partial a}$ dans le rapport

$$\frac{m_3}{m_2}\frac{r}{R} = 1 \div 25\,000\,000,$$

cependant, $\partial\Omega_2/\partial X$ est plus grand comme $\partial\Omega_2/\partial x$ dans le même rapport; ainsi (3) et (4) sont du même ordre de grandeur. Aussi, le calcul analytique de X, Y, Z en fonction de $a_1, \ldots, a_6$ paraît demander un travail comparable avec celui de Delaunay ; et je désire naturellement éviter ce travail.[7]
Maintenant : voilà comment on peut éviter ce travail par ce qu'on peut appeler la méthode ordinaire, comme Delaunay l'a appliquée dans son calcul des inégalités de longue période

5. Delaunay 1860b; 1867. Lors du congrès international des mathématiciens à Rome en 1908, Newcomb qualifiera la théorie de la lune de Delaunay de "monument de calcul algébrique et numérique", en soulignant "le génie qui a conçu cette extension de la méthode féconde de Lagrange" (Newcomb 1909, 137).

6. C'est-à-dire, on peut considérer les variations comme actuellement existantes.

7. La théorie du mouvement de la lune de Delaunay compte deux gros volumes, et son auteur a annoncé un troisième tome, qu'il n'a pas pu finir avant sa mort en 1872.

produit par l'action de Vénus sur la lune (Appendix à la *Conn. du Temps* 1862 ?)[8] On regarde $a'_1, \ldots, a'_6$ dans (2) comme des constantes numériquement données, $a_1, \ldots, a_6$ comme seules variables et, en Ω_2, X, Y, Z comme fonctions du temps numériquement données. Ainsi $\partial X/\partial a$ disparaît des équations et son calcul n'est pas nécessaire.
Les deux questions qui se présentent sont :

1. Cette seconde méthode est-elle bien rigoreuse ?
2. Y a-t-il un rapprochement possible des deux méthodes qui combine la rigueur de l'une avec la facilité de l'autre ?

ADft fragment, 13p. Simon Newcomb Papers 35, Library of Congress, USA.

37.2 Poincaré à Newcomb

[Entre fin 1895 et début 1896]

Monsieur et très honoré Collègue,
J'ai l'honneur de vous adresser un projet de circulaire et un projet d'adresse à M. Mittag-Leffler. Il s'agit de sauver les *Acta Mathematica* menacés dans leur existence.[9] J'espère que vous voudrez bien y contribuer. Si vous y êtes disposé, je vous prierais de vouloir bien signer la circulaire et recueillir pour l'adresse le plus de signatures possible. Faites bien remarquer qu'on peut signer l'adresse sans participer à la souscription.
Pressés par le temps, nous ne pouvons malheureusement attendre votre adhésion pour faire imprimer les circulaires.
Vous recevrez donc incessamment un paquet de circulaires imprimées, ne portant pas votre signature ; mais si, comme nous l'espérons, vous nous prêtez votre concours, nous vous prierions de vouloir bien les signer à la main.[10]
Nous tenons beaucoup à votre nom.
Veuillez agréer, Monsieur et Cher Collègue, l'assurance de ma considération la plus distinguée,
Poincaré

ALS 2p. Newcomb Papers 35, Manuscript Division, Library of Congress, Washington, D.C.

8. Delaunay 1860a.

9. Au mois d'avril 1895, la diète suédoise a retiré la subvention accordée aux *Acta Mathematica* depuis douze ans, mettant ainsi en difficulté Mittag-Leffler, fondateur et rédacteur en chef de ce journal. À ce propos, voir Nabonnand 1999, §§ 1-1-126, 1-1-133 ; Walter 2007, §§ 2-56.14, 2-58-2.

10. L'adresse à Mittag-Leffler publiée aux *Acta Mathematica* t. 50 porte le nom de trente scientifiques, dont trois venant des États-Unis : Newcomb, Craig, et Sylvester. Pour la liste complète, voir Nabonnand, dir., 1999, § 1-1-133.

37.3 Newcomb à Poincaré

Weggis, Suisse, September 30, 1899

À Monsieur le Président du Bureau des Longitudes, Paris

Dear Sir,
Owing to my absence from home I have only now received notice of the very great honor done me by the Minister of Public Instruction and the Fine Arts in nominating me Correspondant of the Bureau des Longitudes. I beg that you will convey to the authorities who have done me this honour the assurance of my very high appreciation of it. This act adds one more to the ties which bind me to France, and will be a great incentive to doing work in the future of a kind to interest your Bureau. [11]
I remain, Sir, most respectfully, your obedient servant,
Simon Newcomb

ALS 2p. Observatoire de Paris.

37.4 Poincaré à Newcomb

[Entre 02.06.1904 et 15.06.1904]

Mon cher Confrère,
Je suppose que vous êtes à Londres pour la Commission des Académies, je vous écris donc à la Royal Society ; on n'a pu en effet me donner votre adresse à l'hôtel Continental. [12] J'étais malheureusement absent de Paris le 2 Juin, et je ne suis pas sûr de m'y trouver le 15 devant moi-même aller en Angleterre à cette époque.
J'accepte en principe l'invitation que le Comité de l'Exposition de Saint Louis a bien voulu me faire. Est-ce à vous que je dois adresser ma réponse officielle, ou sinon à qui dois-je le faire ?
Pourriez-vous me dire aussi si ces conférences doivent se faire en anglais ou si je puis parler en français.
Je tâcherai de vous revoir à Paris si j'y suis encore lors de votre retour.
Votre bien dévoué Confrère,
Poincaré

ALS 2p. Newcomb Papers 35, Manuscript Division, Library of Congress, Washington, D.C.

11. Newcomb was named Correspondent of the Bureau des longitudes on July 7, 1899 ; see the notes to the letter from Poincaré to Leygues, 28.06.1899 (§ 3-47-13).

12. L'Association internationale des Académies s'est réunie au siège de la Royal Society à Londres le 25.05.1904 (*Nature* 70, n° 1805, 02.06.1904, p. 106).

37.5 Poincaré à Newcomb

[Entre les mois de juin et juillet 1904]

Mon cher Collègue,
J'avais choisi un autre sujet, et j'en avais à peu près arrangé le plan ; il est probable que je m'y tiendrai ; néanmoins, je réfléchirai à votre proposition, dont je vous remercie. [13]
Je vous demande pardon de ne pas l'accepter immédiatement, mais je ne suis pas sûr d'en tirer quelque chose.
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 1p. Newcomb Papers 35, Manuscript Division, Library of Congress.

37.6 Poincaré à Newcomb

[Vers le mois de janvier 1907]

Mon cher Collègue,
Je viens d'apprendre que vous venez d'être nommé commandeur de la Légion d'Honneur. [14] Je suis très heureux de la distinction si méritée qui vous est accordée et je profite de l'occasion pour me rappeler à votre bon souvenir.
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 1p. Newcomb Papers 35, Manuscript Division, Library of Congress, Washington, D.C.

13. Après avoir invité Poincaré à prononcer une conférence lors du congrès scientifique de l'Exposition internationale de St. Louis, le président du congrès, Simon Newcomb a dû lui proposer un sujet. Alors que nous ignorons le sujet proposé par Newcomb, le 24 septembre 1904 Poincaré fera une conférence intitulée "L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique" (Poincaré 1904b).

Au Congrès des arts et sciences de St. Louis, Poincaré rejoindra les autres membres de la délégation française, dont Gaston Darboux, Émile Picard, et Paul Langevin, alors que Pierre Curie restera à Paris ; ce dernier a décliné l'invitation de Newcomb pour lui et son épouse Marie Skłowdowska Curie le 14.05.1904 (Newcomb Papers 20 ; Blanc et al. 2009, 498).

14. Nommé chevalier en 1893, Newcomb est devenu commandeur de la Légion d'honneur par décret du 05.01.1907 ; voir le dossier LH/1894/13, Archives nationales françaises.

37.7 Poincaré à Newcomb

[13.11.1908][15]

UNIVERSITÉ DE PARIS — FACULTÉ DES SCIENCES — MÉCANIQUE CÉLESTE

Mon cher Collègue,
Je serais bien heureux si vous vouliez bien consentir à faire partie d'un comité d'honneur pour l'érection d'un monument à Laplace ; nous ne vous demanderions pas une minute de votre temps.
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 1p. Newcomb Papers 35, Manuscript Division, Library of Congress, Washington, D.C.

15. Une lettre identique à celle-ci a été envoyée à G.H. Darwin (§ 3-15-46), W. Foerster (§ 3-18-2), et G. Mittag-Leffler (§ 1-1-237). Poincaré a présidé le comité d'initiative formé afin d'ériger un monument à l'honneur de Laplace dans sa ville natale (*CRAS* 149, 1909, p. 1026). Le comité atteindra son objectif le 03.07.1932.

Chapitre 38

Henri Joseph Perrotin

Fils d'un agent des télégraphes, Joseph Perrotin (1845–1904) a enseigné au lycée de Pau, avant de faire des études de mathématiques et d'astronomie à la Faculté des sciences de Toulouse, où il a fait la connaissance de Félix Tisserand, directeur de l'Observatoire de Toulouse. Tisserand a accueilli Perrotin à l'Observatoire en tant qu'aide astronome en 1873 ; l'année suivante il est devenu astronome adjoint, et en 1879, il a soutenu une thèse à la Faculté des sciences de Paris sur la théorie de Vesta.

Entre 1880 et 1889, il participa à diverses missions scientifiques importantes, dont l'observation du passage de Vénus devant le Soleil (le 6 décembre 1882, à Carmen-de-Patagones, en Patagonie, Argentine) et trois calculs de la différence des longitudes (Nice-Paris, Paris-Milan et Nice-Ajaccio-Ile Rousse).

Parallèlement, Perrotin suivit les installations et la construction d'un observatoire astronomique à Nice, financé par le banquier et académicien libre Raphaêl Bischoffsheim (1823–1906). Le Bureau des Longitudes le désigna comme directeur de cet observatoire.

Parmi les études de Perrotin se trouvent la théorie analytique des perturbations de Vesta, la découverte de divers astéroïdes et le calcul de leurs perturbations, et la description des surfaces des planètes Vénus et Mars. Perrotin a notamment confirmé l'existence d'une rotation inattendue de Vénus en plaçant un objectif à 2740 m au-dessus du niveau de la mer (sur le Mont Mounier, dans les Alpes-Maritimes). Avec la collaboration de Martial Simonin, il a entrepris en 1902 des mesures de la vitesse de la lumière sur un parcours aller-retour entre l'Observatoire de Nice et le Mont Vinaigre.

Directeur des *Annales de l'Observatoire de Nice* à partir de 1887, Chevalier de la Légion d'honneur, et deux fois lauréat du prix Lalande (1875 et 1884), Perrotin fut élu correspondant de l'Académie des sciences de Paris, section d'astronomie en 1892, et correspondant du Bureau des longitudes en 1894. [1]

1. Une appréciation détaillée des travaux de Perrotin a été publiée dans *Astronomische Nachrichten* 165(3952), 1904, 253–256.

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_38

38.1 Perrotin à Poincaré

NICE, LE 4 nov. 1899
OBSERVATOIRE DE NICE

Monsieur le Président,
Je serai heureux, pour ma part, d'être agréable au Bureau des Longitudes et à l'Observatoire de Paris en mettant à la disposition de ce dernier notre cercle portatif de Gautier. [2]
Reste le consentement de M. Bischoffsheim ; mais il est aisé de prévoir qu'il ne sera pas difficile à obtenir. [3]
J'ai relu, ces jours-ci, Votre belle Notice sur la stabilité du système solaire (je Vous lis quand je peux ; à défaut, je tâche de me dédommager en Vous relisant). [4]
C'était un sujet qui revenait souvent dans les entretiens si instructifs que j'avais autrefois avec mon Maître regretté, M. Tisserand. Il pensait comme Vous, mais, avec sa timidité native, il n'aurait pas osé le dire publiquement.
Comme tout cela est vrai ! et, d'ailleurs, ne semble-t-il pas absurde, à priori, de supposer, dans la nature, des mouvements ou des vitesses uniformes, c'est-à-dire des choses qui ne changent pas ! Il en est de même de la ligne droite. [5]
Ce sont des approximations mais rien que des approximations, commodes seulement pour la synthèse des travaux de notre esprit.
Schiaparelli peut se flatter d'avoir, par ses découvertes géniales, fait faire un pas immense à la Philosophie naturelle. [6]
Il y a déjà pas mal de temps que j'ai terminé la théorie de Vesta, mais rien ne presse pour la publier. [7]
Il y a d'ailleurs, dans les résidus des longitudes, quelques nombres qui ne me satisfont pas complètement. Il est vrai qu'ils rentreraient à peu près dans l'ordre si, comme l'a fait M. Leveau, on modifiait notablement la masse de Mars ; mais, depuis sa détermination par l'observation des satellites, il semble qu'il soit bien difficile d'y toucher, en dehors de certaines limites, tout au moins. [8]

2. Il s'agit d'un cercle portatif construit d'après les indications de l'astronome Maurice Loewy (1833–1907, directeur de l'observatoire de Paris). L'instrument fut utilisé pour déterminer la latitude dans le calcul de la différence des longitudes entre Paris-Nice, Nice-Milan et Nice-Ajaccio-Ile Rousse (1880–1889).

3. L'Observatoire de Nice appartenait à Raphaêl-Louis Bischoffsheim (1823–1906), banquier, homme politique, mécène, et académicien libre. À sa mort en 1906, conformément à ses vœux, l'observatoire fut légué à la Sorbonne (dossier Bischoffsheim, archives de l'Académie des sciences de Paris).

4. Poincaré 1898b.

5. Poincaré a affirmé que selon la deuxième loi de la thermodynamique (ou la "loi de Carnot"), toutes les planètes du système solaire finiraient par tomber dans le Soleil (Poincaré 1898b).

6. G. V. Schiaparelli (1835–1910) était réputé pour ses observations de Mars, planète qu'il a étudiée lors de sept oppositions entre 1877 et 1890. Entre autres, il a fait état de canaux longs de plusieurs centaines de kilomètres, une observation confirmée par plusieurs astronomes, dont Perrotin (1886). Des doutes sur l'existence des canaux martiens persistaient au début du XXe siècle, et les progrès techniques dans les moyens d'observation ont montré que ces canaux sont fictifs. En plus des canaux martiens, Schiaparelli était connu pour ses études des comètes ; voir son *Opere* (Reale Specola di Brera 1929).

7. Perrotin a soutenue sa thèse à la Faculté des sciences de Paris le 6 février 1879 sur la théorie de Vesta (Perrotin 1879, 1880), et il a complété sa théorie dans les années 1890 (Perrotin 1890, 1895), mais il n'a plus rien fait paraître à ce sujet.

8. Gustave Leveau (1841–1911) fut nommé astronome adjoint à l'Observatoire de Paris en 1868. Il a

Veuillez agréer, Monsieur le Président, l'hommage de mon affectueux souvenir et de mon plus respectueux dévouement.
Perrotin

ALS 4p. Collection particulière, Paris 75017.

affirmé la théorie de Mars de son patron Le Verrier contre celle de Newcomb, en assignant à Mars une masse plus importante que celle avancée par Newcomb. Celle-ci diffère moins de l'estimation actuelle que celle-là ; voir Newcomb (1895, 107) et Leveau (1895).

Chapitre 39

Pierre Puiseux

Pierre Puiseux (1855–1928) fut le fils de Laure et Victor Puiseux. Sa mère est morte en 1858, et il fut élevé par sa grand-mère maternelle, la sœur d'Henri Wallon, professeur à la Faculté des lettres de Paris et membre de l'Académie française. Son père était professeur d'astronomie mathématique à la Faculté des sciences de Paris et membre de l'Académie des sciences de Paris (section d'astronomie). Pierre a fait ses études au Lycée Saint-Louis et à l'École normale supérieure ; il a obtenu sa licence-ès-sciences en 1877. Deux ans plus tard, il a soutenu sa thèse de doctorat, "Sur l'accélération séculaire du mouvement de la lune."

Nommé élève-astronome à l'Observatoire de Paris en 1879, Pierre Puiseux est devenu maître de conférences à la Faculté des sciences de Paris en 1880, et aide-astronome en 1881. En 1904 il est devenu astronome à l'Observatoire de Paris, et il fut élu à l'Académie des sciences de Paris le 26 février 1912 (section d'astronomie). En collaboration avec Maurice Lœwy à l'Observatoire de Paris, Puiseux a construit un atlas lunaire, publié en treize fascicules entre 1896 et 1910 (Lœwy & Puiseux 1910). Sur la carrière et les travaux de Puiseux, voir Charle & Telkes (1989, 239), et Jeans (1929a).

La lettre de Puiseux à Poincaré (§ 3-39-1) date du début de leurs carrières universitaires, et semble concerner une suppléance ponctuelle de Puiseux par Poincaré.

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_39

39.1 P. Puiseux à Poincaré

Paris 12 janvier [1882 ou 1883]

Mon cher collègue,
J'ai parlé à M. Philippon de l'arrangement que je vous ai proposé. Il n'y a fait aucune objection. Je vais donc mettre à profit votre obligeance et prendre encore ma volée pour quelques jours. À la fin de la semaine prochaine je reviendrai prendre mon poste et vous faire de vive voix mes remerciements et ceux de mon père. [1]
Agréer mon cher collègue l'assurance de mon affectueux dévouement.
P. Puiseux

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

1. Victor Puiseux (1820–1883) était professeur d'astronomie théorique à la Faculté des sciences de Paris, et père de Pierre Puiseux ; ce dernier et Henri Poincaré étaient tous les deux maître de conférences de mathématiques à la Faculté des sciences de Paris entre 1881 et 1885. Pierre Puiseux a pu demander à Poincaré de le suppléer dans ce cadre.

Chapitre 40

Rodolphe Radau

Rodolphe Radau (1835–1911) est né à Angerburg (Prusse), dans une famille d'origine française, qui avait émigré suite à la révocation de l'Édit de Nantes. Il s'est inscrit à l'Université de Königsberg en 1852, et deux ans plus tard a travaillé comme attaché volontaire à l'Observatoire de Königsberg. Il soutint une thèse en latin sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps en 1857. La même année, il est engagé par Antoine d'Abbadie dans la rédaction des travaux géodésiques, et s'est installé à Paris en 1859. Il est obligé de quitter la France lors de la guerre de 1870, mais il est rentré à Paris en 1871, et a obtenu la nationalité française par décret en 1874 (Académie des sciences 1968, 457 ; Véron 2006).

En 1897, soutenu par le Secrétaire perpétuel, Joseph Bertrand, Radau fut élu à l'Académie des sciences de Paris, succédant à Tisserand dans la section d'astronomie, alors que l'autre Secrétaire perpétuel, Marcelin Berthelot (1827–1907) s'y opposait. Grâce encore à Bertrand, Radau est devenu membre du Bureau des longitudes et a succédé à un autre français par naturalisation, Maurice Lœwy (1833–1907) comme rédacteur en chef de la *Connaissance des Temps* en 1908.

Dans sa nécrologie faite au nom du Conseil de l'Observatoire de Paris et au nom du Conseil des Observatoires, Poincaré a rappelé des résultats scientifiques "de premier ordre" de Radau, notamment sur les perturbations de la Lune dues à l'action des planètes, et à propos de la figure de la terre, à partir de l'équation de Clairaut et les valeurs observées de la précession. C'était là, écrivit Poincaré,

> … une découverte très importante, mais il l'a publiée avec tant de discrétion que malgré mes dénégations réitérées, et bien que je n'y eusse aucun droit, je n'ai jamais pu empêcher qu'on ne me l'attribue. (Poincaré 1912b, 89)

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_40

40.1 Poincaré à Radau

[12.05.1897][1]

Mon cher Confrère,
Vous devez avoir chez vous les manuscrits des placards suivants : 2193, 2194, 2196, 2197, 2198, 2199.
Ce serait assez pressé. Voudriez-vous porter le plus tôt possible les épreuves corrigées à l'imprimerie.
Le plus pressé serait 2194 (Observations de M. Borelly).[2]
Votre bien dévoué Confrère,
Poincaré

ALS 1p. Darmstaedter H 1879, Staatsbibliothek zu Berlin — Preußischer Kulturbesitz.

40.2 Poincaré à Radau

[Entre 1897 et 1911]

Mon cher Confrère,
Seriez-vous assez bon pour demander à Gauthier-Villars la situation du *Bulletin* et établir d'après cette situation la composition du N° d'Octobre (Deux feuilles).[3]
Merci d'avance.
Votre bien dévoué Confrère,
Poincaré

ALS 1p. Darmstaedter H 1879, Staatsbibliothek zu Berlin — Preußischer Kulturbesitz.

1. Date de la poste allemande.
2. Des observations faites à l'Observatoire de Marseille par Alphonse Louis Nicolas Borrelly (1842–1926), astronome de l'Université de Marseille, ont paru dans le *Bulletin astronomique*, numéro d'octobre, 1897 ; voir Borrelly (1897).
3. Le *Bulletin astronomique*, dont Poincaré est le rédacteur en chef depuis 1897, est publié par la maison d'édition parisienne Gauthier-Villars.

Chapter 41

Karl Schwarzschild

Karl Schwarzschild (1873–1916) got an early start in astronomy and celestial mechanics in Frankfurt, thanks to his father's acquaintance with the mathematician Paul Epstein. His first two papers on double star orbits were published when he was only sixteen years old. In 1891, Schwarzschild studied at the University of Strasbourg, and in 1893 moved to the University of Munich, where he defended a thesis on equilibrium figures of rotating fluid masses written under the direction of Hugo von Seeliger (Schwarzschild 1896, 1898).

From 1896 to 1899, Schwarzschild was an assistant at the Kuffner Observatory in Ottakring (near Vienna), where he worked on photometric techniques, a subject on which he presented his Habilitation in 1899 at the University of Munich, entitled *"Beiträge zur photographischen Photometrie der Gestirne"*.

In 1901 Schwarzschild was named associate professor of astronomy at the University of Göttingen, and director of the Göttingen Observatory. A year later, he was promoted to full professor. In Göttingen, Schwarzschild participated in research seminars with the leading lights of mathematics and theoretical physics, including his colleagues David Hilbert, Hermann Minkowski, Emil Wiechert, Karl Runge, Woldemar Voigt, and Felix Klein, and a number of brilliant doctoral students and *Privatdozenten*, including Max Born and Walter Ritz. In April, 1909, he attended Poincaré's Wolfskehl lectures in Göttingen, but left later in the year to direct the Potsdam Observatory.

In 1913, Schwarzschild became a member of the German Academy of Science in Berlin. When war broke out, he volunteered, and was assigned to the Eastern Front, where he contracted a rare skin disease, from which he died in 1916.

Beginning with his dissertation, Schwarzschild engaged with Poincaré's work in celestial mechanics on several occasions, and paid tribute to both its power, and opacity. The letter that we publish here is his response to Poincaré's memoir on the stability of the pear-shaped figure (Poincaré 1902d), that developed out of Poincaré's exchange with George Howard Darwin.

Like Poincaré, Schwarzschild took a keen interest in Kapteyn's announcement of his two-stream theory of star flows in the Milky Way (1906). He published an alternative,

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_41

unitary model of the proper motion of stars, based on an ellipsoidal velocity distribution (Schwarzschild 1907).

Poincaré did not mention Schwarzschild's theory in his *Lessons on Cosmogonical Hypotheses* (Poincaré 1911a), which may have led Schwarzschild to deplore, in his book review, Poincaré's preference for French authors. He also sharpened Poincaré's critique of Arrhenius' hypothesis of a cyclical universe, which ran counter to the second law of thermodynamics. [1]

Schwarzschild expressed admiration for Poincaré's critical approach. In his discussions of cosmogonical hypotheses, Schwarzschild wrote, Poincaré had not "destroyed these ideas by criticism, but laid bare their core and even represented many of them in a clearer way than their authors" (Schwarzschild 1913).

In virtue of his wide-ranging scientific contributions, Schwarzschild was compared to Poincaré by Eddington, who described him as a sort of "guerilla leader", in that Schwarzschild's "attacks fell where they were least expected" (Eddington 1917, 319). For a contemporary overview of Schwarzschild's life and work by a close collaborator, see Hertzsprung (1917); see also the *DSB* (Dieke 1975), and Schwarzschild's *Collected Papers* (Voigt 1992a, 1992b, 1992c).

41.1 Schwarzschild à Poincaré

GÖTTINGEN, DEN 22. April 1902
KÖNIGL. STERNWARTE

Hochgeehrter Herr!
Zunächst möchte ich Ihnen meinen herzlichsten Dank für die Abhandlung über die Stabilität der Birnfiguren aussprechen, die ich von Cambridge aus erhalten habe. [2] Es war schon immer mein Wunsch, daß Sie dieser Frage einmal einige Zeit schenken möchten, und ich freue mich lebhaft, daß er in Erfüllung gegangen ist. [3] Es ist selbstverständlich, daß Sie die Sache so weit gebracht haben, als es innerhalb der zugänglichen analytischen Hülfsmittel möglich ist. Das durch eine unendliche Reihe ausgedrückte Kriterium auf ein endliches reducieren zu wollen, ist wohl ein aussichtsloses Beginnen, da es einen bis auf Glieder zweiter Ordnung genauen geschlossenen Ausdruck der Birnfigur voraussetzen würde, zu dessen Herstellung ich keinen Weg sehe? [4]

1. See Walter, ed. (2007), § 2-2, Kragh 2013.

2. Wie aus Schwarzschilds Brief an Darwin vom 22.04.1902 (DAR.251:4995, Cambridge University Library, § 3-48-6) hervorgeht, hat Schwarzschild von Darwin einen Sonderdruck von Poincaré (1902d) erhalten; vgl. hier auch (§ 3-15-42).

3. Es war Schwarzschild selbst, der in seiner Dissertation (1898) Poincarés ursprüngliche Annahme widerlegte, die Stabilität der Birnfigur lasse sich nach dem Prinzip des Austauschs der Stabilitäten begründen. Vgl. hierzu (§ 3-15-11).

4. Zur unendlichen Reihe, die in Poincarés Kriterium auftritt, vgl. die Einleitung zu Kapitel § 3-15 sowie insbesondere (§ 3-15-19) und die zugehörigen Erläuterungen. Schwarzschild weist zu Recht darauf hin, dass dieses Problem behoben werden könnte, wenn man die Deformation des kritischen Jacobi-Ellipsoids durch einen geschlossenen Ausdruck angeben könnte, statt sie in eine (unendliche) harmonische Reihe entwickeln zu müssen. Andererseits wird auch deutlich, dass Schwarzschild noch davon ausgeht, eine Bestimmung der

Der zweite Zweck dieser Zeilen ist ein anderer, vielleicht sehr anspruchsvoller. Sie haben den Göttinger Mathematikern und Astronomen nach einem Briefe an Prof. Klein Hoffnung gemacht, Sie bei Gelegenheit der Astronomenversammlung (4.-7. August) dieses Jahres hier begrüßen zu können. [5] Obwohl wir Ihnen schon für Ihre Anwesenheit vielen Dank wissen werden, werden wir uns doch noch mehr freuen, wenn Sie auf der Versammlung irgend einen Vortrag über Mechanik oder Physik des Himmels halten wollten. Ein früher Anzeigetermin des Vortrags ist zwar erwünscht, aber nicht erforderlich. Helfen Sie uns, die Stätte der Wirksamkeit von Gauß bei dieser Gelegenheit in würdiger Weise zu verherrlichen! (Er verdient es schließlich vor Abel.)

In der Hoffnung, daß Sie diesen Wunsch nicht zudringlich finden und gewähren mögen, [6]

Ihr ganz ergebener

K. Schwarzschild

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

Birnfigur bis auf Glieder zweiter Ordnung müsse eine Entscheidung der Stabilitätsfrage erlauben; Jeans (1915, 28; 1929, 216) schreibt später, dass eine Entwicklung bis zur dritten Ordnung erforderlich ist.

Schwarzschild geht auch in seinem Brief an Darwin vom 22.04.1902 (§ 3-48-6) auf die neuen Resultate zur Birnfigur ein, vgl. die Erläuterungen zu (§ 3-15-13).

5. Felix Klein hatte Poincaré bereits in seinem Brief vom 14.01.1902 zur Teilnahme an der Versammlung eingeladen.

6. The month of August, 1902, found Poincaré in Switzerland; see his letter to Edouard Sarasin, in Walter (2007, § 2-52-7).

Chapitre 42

Martial Simonin

Louis-Martial-Erasme Simonin naît à Mont-le Vignoble dans la Meurthe le 29 juin 1863. Il étudie à l'École normale supérieure entre 1882 et 1885 et réussit l'agrégation de mathématiques en 1887. Entre 1885 et 1887, il est chargé de cours au lycée de Vendôme avant d'obtenir une place d'astronome à l'Observatoire de Nice.

Il soutient une thèse de mathématiques à la Faculté des sciences de Paris consacrée à l'orbite de 108 Hécube (Simonin 1897b, 1897c). L'orbite d'Hécube représente un cas particulier du problème des trois corps (Soleil, Jupiter, Hécube) dans lequel les moyens mouvements des planètes troublées sont commensurables, ce qui fait apparaître des petits diviseurs dans les développements en série. La préparation de cette thèse est l'objet des deux premières lettres adressées en 1896 par Simonin à Poincaré. Poincaré sera cosignataire avec Andoyer et Wolf du rapport de thèse (§ 3-48-3) et présidera le jury. Les deux dernières lettres concernent des améliorations des résultats de sa thèse.

En 1902, Simonin rédige une notice dans laquelle il résume ses travaux d'astronomie théorique et pratique (observations méridiennes, observations équatoriales de petites planètes dont Hécube, observations dans le Premier Vertical ainsi que des opérations géodésiques). Il annonce en particulier de nouvelles recherches sur l'orbite d'Hécube :

> Cette étude nouvelle sur Hécube fera suite au premier Mémoire publié relativement à cet astéroïde ; elle comprendra la détermination de toutes les perturbations à longue ou à courte période, supérieure à une seconde d'arc ; les calculs des coefficients des arguments le seront prochainement. (Simonin 1902a, 4)

Ce sera l'occasion d'une nouvelle rencontre avec Poincaré puisque la même année, Simonin publiera un article "sur les équations canoniques et la fonction perturbatrice" (1902b) dans laquelle il "adopte les variables de M. Poincaré" et Poincaré publiera deux notes consacrées à Hécube : la première sur "les solutions périodiques et les planètes du type d'Hécube" (Poincaré 1902b), où il revient sur l'intérêt d'étudier les solutions périodiques de la première et de la deuxième sorte pour les problèmes dans lesquels "les moyens mouvements sont à peu près commensurables." Le second article de Poincaré, "sur les

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_42

planètes du type d'Hécube", présente les résultats de la thèse de Simonin dans son propre formalisme :

> M. Simonin a, il y a quelques années, soutenu une thèse remarquable sur le mouvement de la planète d'Hécube ; plus récemment, il est revenu sur cette même question et le *bulletin* vient de publier un article de lui sur ce sujet. Ayant pris cette année pour sujet de mon Cours la théorie des petites planètes, j'ai eu l'occasion de résumer nos connaissances sur les orbites planétaires du type d'Hécube et des autres types caractéristiques. j'ai donc mis les résultats de M. Simonin sous une forme nouvelle qu'il ne peut-être pas inutile de faire connaître ici. (Poincaré 1902f, 289)

Nommé sous-directeur de l'Observatoire de Nice en 1904 suite au décès de Perrotin, Simonin est nommé astronome titulaire à l'Observatoire de Paris en 1911, où il exercera jusqu'à sa retraite en 1927 (Véron 2006).

42.1 Simonin à Poincaré

Nice 4 Décembre 1895

Cher Monsieur,
Je vous prie de vouloir bien m'excuser si je n'ai pas répondu plus tôt à votre aimable lettre.[1] Je vous remercie beaucoup de vos excellents conseils et je profite de votre bien-

1. Nous n'avons pas retrouvé cette lettre de Poincaré, qui suit la thèse de Simonin, lui donne des conseils dans ce cadre. Dans l'introduction de sa thèse, Simonin précise que Tisserand lui a proposé le sujet :

> [L]e problème d'Hécube ne peut être traité par les procédés ordinaires, si on ne leur fait subir, au préalable, d'importantes modifications. Il a semblé à M. Tisserand que l'étude complète des méthodes employées et des résultats obtenus par les divers géomètres qui se sont occupés de cette question, devait conduire à une solution simple qui n'entraînât pas avec elle le recours aux fonctions elliptiques.
>
> C'est ce problème que M. Tisserand a bien voulu nous proposer de résoudre. (Simonin 1897b, 4)

Simonin signale au même endroit qu'il s'est inspiré des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* de Poincaré pour son travail ; il applique la méthode proposée par Poincaré afin d'obtenir une première approximation périodique. Après avoir expliqué que l'approche de Le Verrier ne peut s'appliquer au cas de la trajectoire d'Hécube, il présente rapidement la méthode qu'il va mettre en œuvre en se référant à Poincaré :

> Si l'on remarque, avec M. Poincaré, qu'en négligeant d'abord la masse de Jupiter ainsi que les excentricités et les inclinaisons des orbites, Hécube et Jupiter décrivent autour du Soleil deux circonférences avec les vitesses angulaires qu'on peut désigner par n et n', on voit que, après chaque intervalle de temps égal à $\frac{2\pi}{n-n'}$, ces deux planètes se retrouvent dans la même position relative par rapport au Soleil. Si l'on rapporte le système à des axes mobiles tournant d'un mouvement uniforme avec la vitesse angulaire n', les coordonnées d'Hécube sont des fonctions périodique du temps ; la période est $\frac{2\pi}{n-n'}$. Le problème ainsi simplifié comporte une infinité de solutions périodiques. Ces solutions, dans lesquelles l'excentricité est très petite, sont appelées par l'auteur : solutions périodiques de la première sorte.
>
> M. Poincaré a, en outre, démontré que le problème des trois corps comporte encore des solutions périodiques de la première sorte, si la masse Jupiter est assez petite, pourvu que n et n' ne soient pas commensurables. Considérons l'une d'entre elles, prenons pour

veillance pour vous donner quelques détails sur mes recherches.
Si j'ai tardé à vous écrire, c'est que je comptais pouvoir tenir compte des termes du 2e ordre par rapport à l'excentricité ; les calculs sont longs et difficiles ; au lieu de les continuer, je crois préférable d'appliquer de suite les formules que vous m'avez indiquées dans votre dernière lettre ; je reviens à la valeur adoptée dès le début pour le moyen mouvement.
Quant aux procédés d'identification de Delaunay, voici une remarque que je me permets de vous soumettre. [2]

> origine du temps l'époque d'une conjonction d'Hécube et de Jupiter ; les coordonnées d'Hécube, rapportées à des axes mobiles comme plus haut, sont des fonctions périodiques du temps, et la vitesse de cet astéroïde est, à l'origine des temps, normale à son rayon vecteur.
>
> M. Poincaré recommande, surtout pour le cas particulier qui nous occupe ici, l'usage de ces solutions périodiques, quoique les conditions initiales du mouvement ne soient pas exactement celles qui correspondent à une solution périodique ; mais, si elles diffèrent peu de la réalité, la grande inégalité, provenant de ce que $n-2n'$ est petit par rapport à n et n', introduit des grands coefficients qui varient peu si l'on passe des conditions véritables du mouvement à celles qui correspondent à une solution périodique ; il est donc avantageux de déterminer ainsi la valeur approchée de ces grands coefficients.
>
> En outre, si l'on peut choisir, comme première approximation, une solution assez voisine de l'orbite réelle, la différence entre les coordonnées calculées et réelles d'Hécube peut rester assez petite pour qu'on puisse, pendant assez longtemps, négliger le carré de cette différence. C'est à ce propos que M. Poincaré introduit les équations qu'il appelle *équations aux variations*. On verra plus loin avec quelle approximation on peut ainsi représenter les diverses positions d'hécube, et quelle modification on peut apporter à ces méthodes pour obtenir des résultats plus exacts. (Simonin 1897b, 6–7)

2. Simonin fait allusion aux techniques de développements par appoximation successives de Delaunay. Delaunay propose une série d'opérations et de formules qui permettent d'identifier les coefficients des séries décrivant les trajectoires des planètes :

> Il s'ensuit qu'on ne peut tirer des équations différentielles du mouvement de tous ces corps les diverses conséquences qui s'y trouvent contenues implicitement, qu'en ayant recours aux méthodes d'intégration par approximation. Heureusement l'état de notre système planétaire se prête à merveille à l'emploi de ce mode d'intégration, en ce que, abstraction faite du Soleil, chacun des corps qu'il renferme est sous l'influence prédominante d'un corps principal qui produit à lui seul les circonstances les plus saillantes de son mouvement, les autres corps n'ayant pour effet que de modifier ce mouvement dans d'étroites limites. Pour les planètes, ce corps principal est le Soleil ; pour les satellites, en tant que l'on considère leur mouvement par rapport à la planète dont chacun d'eux dépend, c'est cette planète même qui joue le rôle principal dont il est question. Il est naturel d'après cela de considérer d'abord uniquement le mouvement des planètes et de leurs satellites, tel qu'il résulte de la seule action du corps principal correspondant à chacun d'eux, mouvement qui n'est autre chose que le mouvement elliptique ; puis de partir de là, comme d'une première approximation, pour arriver par une suite d'approximations successives à satisfaire de mieux en mieux aux équations différentielles du mouvement de ces divers corps. Telle est la marche que l'on suit en effet. Les approximations que l'on effectue ainsi les unes après les autres introduisent successivement dans les expressions des coordonnées de chacun des mobiles, des parties nouvelles que l'on obtient sous forme de développements en séries de quantités périodiques ; et l'on s'arrête lorsque l'on juge que les approximations suivantes ne fourniraient plus aucun terme d'une valeur sensible. Les divers termes périodiques qui se trouvent ainsi introduits dans les expressions des coordonnées d'une planète ou d'un satellite constituent ce qu'on nomme les *inégalités* de cette

Si l'on se borne aux termes du 1er ordre par rapport à la masse, les calculs sont faciles ; mais pour obtenir une plus grande précision, j'ai été amené, à l'imitation de Mr Harzer, à considérer des termes du 2e ordre par rapport à la masse troublante. [3]
Soit θ_{00} la valeur de θ_0 où on a supposé $e_0 = 0$, posons :

$$\varepsilon = \frac{(6)}{G_0\theta_{00}}, \quad \varepsilon' = \frac{(3)}{G_0\theta_{00}},$$

si dans l'équation qui donne $\frac{dy}{dt}$, on remplace $\frac{1}{e}$ par : $\frac{1}{e_0} - \frac{e_1}{e_0^2}\cos\theta_0 t - \frac{e_2}{e_0^2}\cos 2\theta_0 t$, et que pour les identifications, on remplace les inconnues e_1 e_2 θ_0 g_0 θ_1 g_1 θ_2 g_2 par des expressions ayant l'une des deux formes $M + M'e_0^2$ ou $Me_0 + \frac{M'}{e_0}$, la valeur de g_0 indépendante de e_0 est

$$\frac{2(2)}{C_r} + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon^2}{C_r^3};$$

le 2e terme est plus important que le 1er ; il semble donc utile, comme le recommande Mr Harzer, de ne pas négliger certains termes du 2e ordre par rapport à la masse.

> planète ou de ce satellite. (Delaunay 1860b, ix–x)

Tisserand, dans le troisième volume de son *Traité de mécanique céleste*, tout en reconnaissant la valeur de la théorie de Delaunay a souligné qu'elle conduisait à des calculs longs et difficiles :

> Cette théorie est très intéressante au point de vue analytique ; dans la pratique, elle atteint le but poursuivi, mais au prix de calculs algébriques effrayants. C'est comme une machine aux rouages savamment combinés qu'on appliquerait presque indéfiniment pour broyer un obstacle, fragments par fragments. On ne saurait trop admirer la patience de l'auteur qui a consacré plus de vingt années de sa vie à l'exécution des calculs algébriques qu'il a effectué tout *seul*. (Tisserand 1894, 232)

Tisserand déplore surtout que pour les séries qui apparaissent avec la méthode de Delaunay pour déterminer les mouvements moyens du nœud et du périgée ainsi que les coefficients des inégalités convergent très lentement. Il évoque une amélioration possible de la méthode en utilisant une remarque de Poincaré :

> Or il serait possible, ainsi que l'a remarqué M. Poincaré, d'introduire un autre système d'éléments canoniques, susceptible d'être employé en même temps au développement de la fonction perturbatrice. (Tisserand 1894, 237)

3. Paul Harzer, astronome à Kiel, avait publié en 1886 un mémoire *sur un cas spécial du problème des trois corps* dans lequel il a traité de la trajectoire de Hécube :

> Le problème dont il s'agit ici concerne le mouvement d'une planète "troublée" qui est assujettie à l'attraction du soleil et d'ailleurs à celle d'une planète "troublante", dont le moyen mouvement serait à peu près la moitié de celui de la planète troublée, comme dans le cas de Jupiter vis-à-vis d'un certain nombre de planétoides, parmi lesquelles la planète Hécuba (108) semble s'approcher le plus près dans son moyen mouvement du moyen mouvement double de Jupiter ….
>
> Pour obtenir une solution du problème des trois corps qui puisse représenter le mouvement sinon pendant un temps illimité au moins pour un temps incomparablement long vis-à-vis de la période de révolution de la planète, il faut, déjà dans la première approximation, ajouter – et non seulement dans le cas qui nous occupe, mais généralement – aux parties du mouvement, résultant de l'attraction du soleil et données par le mouvement elliptique de certaines parties dues à l'action de la planète troublante. (Harzer 1888, 3)

Mais si l'on pose

$$e_1 = e_{11} + e_{12}e_0^2, \quad g_1 = g_{11}e_0 + g_{12}\frac{1}{e_0},$$

on trouve $e_{11} = \varepsilon - \frac{5}{2}\varepsilon\varepsilon'$, $g_{12} = -\varepsilon + 2\varepsilon\varepsilon'$, alors $e_1 - e_0 g_1$ n'est plus nul en même temps que e_0 ; la différence $\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon'$ entre e_{11} et $-g_{12}$ provient d'un terme

$$\frac{1}{2}\varepsilon\left(\varepsilon' - \frac{3\varepsilon^2}{2G_0^3\theta_{00}}\right),$$

j'ai cru devoir négliger le terme en ε^3, quoiqu'il soit tout à fait comparable au terme en $\varepsilon\varepsilon'$; l'un des deux l'emporte alternativement sur l'autre suivant les diverses valeurs que j'ai successivement adoptées pour le moyen mouvement.

J'espérais que les formules de Mr Tisserand me permettraient de résoudre cette difficulté, aussi n'avais-je pas cru utile de vous la signaler. Malheureusement, je me suis aperçu, depuis mon retour à Nice, que j'avais, il y a quelques années, abandonné les formules que Mr Tisserand avait données dans le tome IV (année 1887) du *Bulletin astronomique ;* je n'avais pu appliquer au cas actuel les formules (14) de la page 188 ;[4] si on y remplace $\lambda = \frac{\iota}{\iota'}$ par 2, et qu'on néglige e_1^2 devant l'unité, on trouve

$$e^2 = e_1^2 - x - \ldots$$

d'où

$$e = e_1\left(1 - \frac{x}{e_1^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

4. Dans son article sur la commensurabilité des moyens mouvements dans le système solaire, Tisserand (1887) s'intéresse au mouvement d'une planète P de masse nulle "se mouvant dans le plan même de l'orbite regardée comme invariable d'une planète P' (Jupiter par exemple) de masse m'". L'objectif de Tisserand est d'adapter à ce cas particulier du problème des trois corps les méthodes de Delaunay :

> Nous nous proposons maintenant d'appliquer la méthode que Delaunay a employée avec succès dans sa *Théorie de la Lune* ; les conditions sont les mêmes d'un côté, en ce sens que, dans les deux cas, m est supposé nul ; elles diffèrent notablement à un autre point de vue, parce que la quantité $\frac{a}{a'}$, qui est très petite dans le cas de la Lune, ne l'est plus ici ; en outre, la quantité $\frac{n}{n'}$ peut être voisine d'un nombre entier tel que $2, 3, \ldots$, ou d'un nombre commensurable simple. (Tisserand 1887, 186)

Dans les formules précédentes, a et n désignent selon les notations traditionnelles, le demi-grand axe et la vitesse de l'astre. Les formules (14) de Tisserand donnent des développements de l'excentricité e en fonction d'un paramètre x tel que $a = a_1(1 + x)$ qui est petit dans le cas étudié :

$$\sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{1-e_1^2}-\lambda}{\sqrt{1+x}} + \lambda$$
$$e^2 = e_1^2 + x\sqrt{1-e_1^2}(\sqrt{1-e_1^2} - \lambda) - \ldots$$
$$e = e_1 + x\sqrt{1-e_1^2}\frac{\sqrt{1-e_1^2}-\lambda}{2e_1} + \ldots$$

e_1 désigne l'excentricité à l'origine des temps et λ le rapport des inclinaisons.

x^2 est de l'ordre de la masse ; on a donc à peu près $x^2 = \frac{1}{1000}$ comme valeur maxima ; pour Hécube $e_1 = \frac{1}{10}\frac{x^2}{e_1^4}$ peut devenir $\frac{1}{1000} : \frac{1}{10000} = 10$; la série qui donne e est divergente.

M^r Tisserand, lui aussi, s'est toujours montré si bienveillant pour moi que j'ai craint de lui déplaire en lui signalant cette difficulté. En outre sur la même question, tome III (année 1886), M^r Tisserand a publié une note bien remarquable, page 424 et suiv.,[5] où il introduit une solution périodique identique à celle qui me sert de point de départ ; une application numérique (page 432) montre que : « l'excentricité produite par les perturbations … peut à un moment donné être beaucoup plus grande que l'excentricité indépendante des perturbations ».[6]

J'ai cru bien faire en vous signalant les seules difficultés que je rencontre encore ; si je me permets de vous les soumettre, c'est que j'en ai cherché la solution sans la trouver.

Daignez agréer, cher Monsieur, avec l'assurance de toute ma gratitude, l'expression de mes sentiments les plus dévoués et les plus respectueux.

M. Simonin

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

5. Tisserand (1886) étudie le mouvement de deux planètes autour du soleil dans le cas où "les moyens mouvements n et n' offrent un rapport de commensurabilité très approchée, représenté par une fraction irréductible de la forme $\frac{j+1}{j}$, j étant un entier positif". La conclusion de Tisserand est que dans ce cas il se crée une excentricité non négligeable par les perturbations :

> De là cette conséquence : alors même que l'excentricité propre e'_0, indépendante des perturbations, serait nulle, il y aura une excentricité e'_1, produite par les perturbations, contenant en facteur la masse m, et dont la valeur … pourra être très sensible, en raison du petit diviseur σ ; autrement dit : Si le mouvement de P' était primitivement circulaire et uniforme, les perturbations causées par la planètes P auront pour principal effet de le transformer en un mouvement très voisin d'un mouvement elliptique képlérien, avec une rotation uniforme du grand axe. (Tisserand 1886, 428)

6. Tisserand applique les formules qu'il a obtenues au cas de Hilda (153) et Jupiter. Sa conclusion est "l'excentricité produite par les perturbations est ici considérable et peut, à un moment donné, être beaucoup plus grande que l'excentricité e_0 indépendante des perturbations". Il souligne que ces calculs mettent en évidence une orbite intermédiaire au sens de Gyldén et qu'il y a une analogie certaine entre ses résultats et ceux de Herzer dont le travail "se rapporte aux petites planètes dont le moyen mouvement est voisin du double de celui de Jupiter".

42.2 Simonin à Poincaré

Nice le 12 Avril 1896

Cher Monsieur,

Je me permets de vous adresser les résultats que j'ai obtenus au sujet de l'orbite d'Hécube (108).

D'après les indications que vous avez bien voulu me donner, j'ai introduit une constante de plus dans mes formules qui n'en contenaient que 3 au lieu de 4. De plus j'ai tenu compte, pour les termes principaux, du carré de l'excentricité ; j'ai ainsi obtenu, dans les expressions du périhélie et de l'excentricité, le terme en $\frac{\sin}{\cos}(J - \overline{3\theta_0 - g_0 t})$ que j'avais introduit empiriquement au mois d'octobre dernier pour diminuer les résidus. [7]

J'ai résolu à nouveau les équations qu'on obtient par la méthode d'identification de De-

7. Dans un premier temps, Simonin se sert des variables classiques :

$$L = \sqrt{a}, \qquad G = \sqrt{a(1-e^2)}, \qquad H = G\cos i, \qquad \gamma = \sin\frac{i}{2},$$

où a est le demi-grand axe, e l'excentricité, i l'inclinaison. Après avoir exprimé les équations du système avec ces variables et obtenu une série de formules permettant de calculer e et une expression θ égale à

$$l + 2g + 2h - 2l' - 2g' - 2h'$$

où l est l'anomalie moyenne, g la distance du nœud ascendant au périhélie et h la longitude du nœud, Simonin effectue un changement de variables "qui offre, entre autres avantages, celui de faire disparaître e_0 du dénominateur" (Simonin 1897b, 17) :

$$\begin{aligned} L &= L, \\ \lambda &= l + g + h, \\ \eta &= \sqrt{L}\, e \sin(g+h), \\ \xi &= \sqrt{L}\, e \cos(g+h), \end{aligned}$$

Simonin signale que les formules obtenues pour ces quatre variables donnent "pour employer le langage de M. Poincaré, toutes les solutions périodiques du problème restreint". Ces formules dépendent de quatre constantes G_0 une constante arbitraire qui apparaît lorsque l'on considère la première du système $2L - G = G_0$, e_0, g_m et c des constantes d'intégration. En posant $J = g_m + h$ et $n = \theta_0 - g_0 + 2n'$, Simonin obtient une solution périodique de la première sorte (au sens de Poincaré) :

$$\begin{aligned} L &= G_0, \\ \lambda &= J + nt, \\ \eta &= e_{11}\sqrt{G_0}\sin[J - (\theta_0 - g_0)t], \\ \xi &= e_{11}\sqrt{G_0}\cos[J - (\theta_0 - g_0)t], \end{aligned}$$

Simonin poursuit son calcul en suivant la stratégie de Poincaré :

> Dès qu'on connaît une solution périodique du problème, toutes celles qui en diffèrent peu s'obtiennent par l'intégration d'un système d'équations linéaires et homogènes ; ce sont ces équations que M. Poincaré a appelées *équations aux variations*. (Simonin 1897b, 20)

Le traitement des équations aux variations fait apparaître des termes en

$$\frac{\sin}{\cos}[J - (\theta_0 - g_0)t], \qquad \frac{\sin}{\cos}[J - (2\theta_0 - g_0)t], \quad \text{et} \quad \frac{\sin}{\cos}[J - (3\theta_0 - g_0)t]$$

dans les séries de η et ξ (voir Simonin 1897b, 24).

launay ; pour cela je me suis servi de ce que j'avais une valeur approchée de chacune de ces inconnues pour négliger certains termes et en conserver d'autres, sans tenir compte de l'exposant de la masse perturbatrice.

En outre dans l'expression du demi-grand axe, j'ai introduit un terme à longue période contenant le carré de la masse. Enfin j'ai déterminé les perturbations périodiques les plus importantes du demi-grand axe, de la longitude moyenne, du périhélie et de l'excentricité. En se servant des formules de Le Verrier, on trouve les coefficients suivants exprimés en secondes d'arc :

pour la longitude :

$$\begin{array}{llll}
366'' \sin(\lambda' - \lambda), & 37'' \sin(\lambda' - \varpi), & -34'' \sin(\lambda' - \varpi'), & 77'' \sin(5\lambda' - 3\lambda - 2\varpi) \\
441'' \sin 2(\lambda' - \lambda), & 52'' \sin(\lambda' - \varpi), & 228'' \sin(3\lambda' - 2\lambda - \varpi'), & -112'' \sin(5\lambda' - 3\lambda - \varpi - \varpi') \\
182'' \sin 3(\lambda' - \lambda), & -344'' \sin(3\lambda' - 2\lambda - \varpi), & 83'' \sin(4\lambda' - 3\lambda - \varpi') & \\
86'' \sin 4(\lambda' - \lambda), & -123'' \sin(4\lambda' - 3\lambda - \varpi), & 46'' \sin(5\lambda' - 4\lambda - \varpi') & \\
44'' \sin 5(\lambda' - \lambda), & -61'' \sin(5\lambda' - 4\lambda - \varpi) & &
\end{array}$$

et pour l'excentricité :

$$\begin{array}{ll}
-39'' \cos(\lambda - \varpi), & 82'' \cos(3\lambda' - \lambda - 2\varpi) \\
-83'' \cos(\lambda' - \varpi), & -59'' \cos(5\lambda' - 3\lambda - 2\varpi) \\
189'' \cos(3\lambda' - 2\lambda - \varpi), & -53'' \cos(3\lambda' - \lambda - \varpi - \varpi') \\
70'' \cos(4\lambda' - 3\lambda - \varpi), & 43'' \cos(5\lambda' - 3\lambda - \varpi - \varpi') \\
32'' \cos(5\lambda' - 4\lambda - \varpi) &
\end{array}$$

Le terme à longue période contenant le carré de l'excentricité de l'orbite de Jupiter a toujours été négligé ; par suite je n'ai pas tenu compte des perturbations à courte période contenant ce carré ; le plus fort des termes ainsi négligés a pour coefficient 36" de longitude.

Les formules qui m'ont servi sont, en ne transcrivant pas les perturbations à courte période et en posant : $\mathcal{L} = \sqrt{a}$, $\lambda =$ longitude moyenne, $\xi = \sqrt{L}e\cos\varpi$, $\eta = \sqrt{L}e\sin\varpi$,[8]

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= G_0 + A - \frac{G_0}{2}B^2 - \frac{E_1^2}{2}\cos^2\theta_0 t - BE_1G_0\cos\theta_0 t + B'E_1G_0\sin\theta_0 t\\
&\quad + A_1\cos\left(J - \overline{\theta_0 - g_0}t - g' - h'\right),\\
\lambda &= J + nt + A\frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0}t + \frac{3}{2G_0^3}B^2 t + B(\theta_1 - g_1)\sin\theta_0 t + B'(\theta_1 - g_1)\cos\theta_0 t\\
&\quad + B^2(\theta_2 - g_2)\sin 2\theta_0 t - C + B_1\sin(J - \overline{\theta_0 - g_0}t - g' - h'),\\
\xi &= \left[E_1\sqrt{G_0} + A\frac{\partial(E_1\sqrt{G_0})}{\partial G_0} + \sqrt{G_0}E'B^2\right]\cos(J - \overline{\theta_0 - g_0}t)\\
&\quad + \left[AE_1\sqrt{G_0}\frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0} + \frac{3e_1\sqrt{G_0}}{2G_0^3}B^2\right]t\sin(J - \overline{\theta_0 - g_0}t)\\
&\quad + B\sqrt{G_0}\cos(J + g_0 t) - B'\sqrt{G_0}\sin(J + g_0 t) + BE_2\sqrt{G_0}\cos(J - \overline{2\theta_0 - g_0}t)\\
&\quad + B^2E_3\sqrt{G_0}\cos(J - \overline{3\theta_0 - g_0}t) + C_1\cos(g' + h'),\\
\eta &= \left[E_1\sqrt{G_0} + A\frac{\partial(E_1\sqrt{G_0})}{\partial G_0} + \sqrt{G_0}E'B^2\right]\sin(J - \overline{\theta_0 - g_0}t)\\
&\quad - \left[AE_1\sqrt{G_0}\frac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0} + \frac{3e_1\sqrt{G_0}}{2G_0^3}B^2\right]t\cos(J - \overline{\theta_0 - g_0}t)\\
&\quad + B\sqrt{G_0}\sin(J + g_0 t) + B'\sqrt{G_0}\cos(J + g_0 t) + BE_2\sqrt{G_0}\sin(J - \overline{2\theta_0 - g_0}t)\\
&\quad + B^2E_3\sqrt{G_0}\sin(J - \overline{3\theta_0 - g_0}t) + C_1\sin(g' + h').
\end{aligned}
$$

Vu la difficulté du calcul des coefficients θ_1 g_1 θ_2 g_2 etc. ..., j'ai conservé ces notations malgré leur complication. Les valeurs numériques des constantes de ces formules sont :[a]

8. Ces formules sont celles que Simonin appelle les expressions définitives de L, λ, η et ξ (Simonin 1897b, 30). Comme le rappelle Simonin, A, B, B', C sont des constantes d'intégration qu'il faut déterminer à partir des observations et les autres coefficients sont des fonctions de G_0.

a. Variante : l'indice n sur C_1 a été barré.

$$
\begin{array}{rlrlrlrl}
n &= 613'', 576 & J &= 166°, 59' & \theta_0 &= 16'', 176 & A_1 &= [\bar{3}.167997]_n \\
G_0 &= [0, 842200] & E_1 &= [\bar{2}.363093] & g_0 &= 0'', 856 & B_1 &= [\bar{2}.394700]_n \\
A &= [\bar{2}.527508] & E' &= [0, 008790]_n & \theta_1 - g_1 &= [0, 439290] & C_1 &= [\bar{2}.662960]_n \\
B &= [\bar{2}.988653] & E_2 &= [\bar{3}.080174]_n & \theta_2 - g_2 &= [\bar{1}.744784]_n & & \\
B' &= [\bar{3}.888869] & E_3 &= [\bar{1}.373974]_n & \dfrac{\partial(\theta_0 - g_0)}{\partial G_0} &= [\bar{3}.093583]_n & & \\
C &= [\bar{2}.211722] & & & & & &
\end{array}
$$

J'ai mis entre crochets [ ], au lieu des nombres, leurs logarithmes. On obtient ainsi les éléments d'Hécube rapportés à l'écliptique et à l'équinoxe de 1850,0 ; l'époque est 1897 septembre 23,5, temps moyen de Berlin.[9]

Je rappelle rapidement qu'on a posé $\theta = \lambda - 2\lambda'$, puis

$$
\begin{array}{rcl}
\theta &=& \theta_0(t+c) + \theta_1 \sin\theta_0(t+c) + \theta_2 \sin 2\theta_0(t+c) \\
g &=& g_m + g_0(t+c) + g_1 \sin\theta_0(t+c) + g_2 \sin 2\theta_0(t+c) \\
e &=& e_0 + e_1 \sin\theta_0(t+c) + e_2 \sin 2\theta_0(t+c) + e_3 \sin 3\theta_0(t+c)
\end{array}
$$

e_1, e_2, e_3 peuvent se mettre sous la forme $\left| \begin{array}{rcl} e_1 &=& E_1 + E' e_0^2 \\ e_2 &=& E_2 e_0 + \frac{E_2'}{e_0} \\ e_3 &=& E_3 e_0^2 + \cdots \end{array} \right.$

Les formules qui donnent Ω, longitude du nœud ascendent et i, inclinaison de l'orbite, sont :

$$
\operatorname{tg}(\Omega - J + \overline{\theta_0 - g_0 t}) = [0, 001810] \operatorname{tg}\left[[\bar{1}.996483](353°15'9'' - J + \overline{\theta_0 - g_0 t})\right]
$$

$$
i = [\bar{2}.886269] \left\{[\bar{1}.996486] - [\bar{3}.616297] \cos[0, 297543]\{353°15'9'' - J + \overline{\theta_0 - g_0 t}\}\right\}^{\frac{1}{2}}
$$

En comparant les ascensions droites et les déclinaisons données par les observations et par ces formules, on obtient les différences : $o - c$[10]

9. Les valeurs numériques obtenues dans la thèse (Simonin 1897b, 53) sont sensiblement différentes.

10. $o - c$ désigne les différences entre les valeurs observées et celles calculées.

Année	α	δ
1869	-7^s	$+68''$
71	(-20)	-165
74	$+9$	$+54$
75	$+8$	-67
76	$+4$	$+6$
77	$+3$	$+38$
78	-9	-18
80	-6	$+43$
81	$+5$	-48
86	-1	$+8$
88	$+6$	$+77$
89	-9	-43
92	(-18)	$+120$
1894	$+7$	$+71$

Etant donnés ces résidus, au lieu de calculer des lieux normaux, j'ai conservé, pour chaque opposition, une observation fictive, moyenne de plusieurs observations faites le même soir par divers observateurs.
On peut remarquer que les observations de 1871 et de 1892 sont distantes d'environ 21 ans, et que les arguments $3\lambda'-2\lambda$, $3\lambda'-\lambda$, $5\lambda'-3\lambda$ et λ' ont pour période environ 11 ans. Je crois devoir attribuer ces deux résidus, non pas aux termes périodiques que j'ai négligés, mais plutôt à la suppression de tous les termes de e^3. D'ailleurs monsieur Perrotin a bien voulu me faire remarquer que dans le n° 368 de *l'astronomical Journal* p. 62, Mr Hill a trouvé pour la longitude de moyenne de Cérés des résidus de $-40''$ en 1857 et $+40''$ en 1866, quoique les éléments de cette planète ne présentent rien de particulier. [11]

Comme je ne pouvais diminuer mes résidus en changeant le moyen mouvement, l'époque ou la masse, et que j'avais rencontré de grandes difficultés dans les calculs des divers coefficients numériques, j'ai cherché des coefficients empiriques ; le premier terme de ξ et de η difficile à calculer donnerait de meilleurs résultats si on lui ajoutait le coefficient empirique : $[\bar{3}.231551]_n$. On peut remarquer aussi que le terme $B^2E_3\sqrt{G_0}\cos(J-3\theta_0-g_0t)$ est plus important que le terme $BE_2\sqrt{G_0}\cos(J-2\theta_0-g_0t)$. En outre on voit aisément que les observations de 1871–74–75 seraient mieux représentées si on diminuait la longitude du périhélie, et celles de 1892–94, si on l'augmentait. L'introduction du terme à longue période contenant le carré de l'excentricité de l'orbite de Jupiter ne donnerait pas de meilleurs résultats.
En résumé je ne vois pas comment avec les formules données plus haut, on peut obtenir des résidus inférieurs à ceux que j'ai transcrits ci-dessus. Je recours donc encore une fois à vos bienveillants conseils, trop heureux si vous êtes un peu satisfait des efforts que j'ai faits et des résultats obtenus.
Je vous prie de vouloir bien excuser la longueur de cette lettre.
Daignez agréer, cher Monsieur, l'expression de toute ma gratitude et de mon entier dévouement,
M. Simonin

ALS 4p. Collection particulière, Paris 75017.

11. Hill 1896. Joseph Perrotin était depuis 1884 le directeur de l'Observatoire de Nice dans lequel travaillait Simonin.

42.3 Simonin à Poincaré

[Entre les mois de mai et juillet 1898]

Dans le numéro de mai dernier du *Bulletin astronomique*, p. 197, qui contient l'analyse d'une Note que vous avez bien voulu présenter l'an dernier aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXIV, p. 1423, [12] je lis que l'hypothèse admise par moi *est en contradiction avec tout ce que l'on sait sur la constitution du Soleil.* [13]
Cette critique ne me paraît pas exacte ; c'est pourquoi je me permets de vous adresser ces quelques mots de rectification.
L'hypothèse qui m'a servi de point de départ est extraite du Tome II du *Soleil* du P. Secchi, p. 219 et 222. [14]
On lit (p. 219) : « Il est remarquable que les phases des diamètres sembleraient avoir une correspondance avec les inégalités du périgée solaire, découvertes par M. Le Verrier. Serait-ce là un effet de *l'excentricité du centre de gravité du Soleil par rapport au centre de figure ?* En cette matière, on ne peut poser que des questions dont la solution est réservée à la postérité … ».
Dans le même Ouvrage (p. 31), on lit aussi que la chromosphère n'a *pas partout et toujours la même épaisseur*.
Après de longues réflexions, j'ai été encouragé à vous adresser ma Note par la lecture de cette conclusion d'un Mémoire de M. Dunér : [15]

> « Je dois avouer que cette différence entre le temps de rotation dans les différentes latitudes me semble incompréhensible et constitue un des problèmes les plus difficiles de l'Astrophysique, d'autant plus que les recherches sur la rotation du Soleil, faites à l'aide des mesures sur les facules, semblent contredire ce ralentissement. »
>
> Dunér, *Recherches sur la rotation du Soleil*
> (*Société royale des Sciences d'Upsal*, 1891).

La surface solaire m'a donc paru pleine d'énigmes ; aussi me suis-je cru autorisé à me servir d'une nouvelle hypothèse pour expliquer le mouvement du périhélie de Mercure. Les calculs de ma Note mènent à cette conclusion. [16]

12. Simonin (1897a) se propose "d'expliquer, à l'aide d'une hypothèse simple, les différences entre les valeurs observées et théoriques des longitudes des périhélies ou des nœuds de certaines grosses planètes."
13. Il s'agit de l'avis suivant de Guillaume Bigourdan :

> M. Simonin montre qu'en admettant que le centre de gravité du Soleil diffère de son centre de figure, on explique les différences entre les valeurs observées et les valeurs théoriques des longitudes des périhélies ou des nœuds de certaines planètes sans introduire, pour les autres planètes, une perturbation périodique variable. Malheureusement l'hypothèse qui sert de base à cette explication est en contradiction avec tout ce que l'on sait de la constitution du Soleil. (Bigourdan 1898, 18)

14. Secchi 1870.
15. Dunér 1891.
16. Le périhélie de Mercure présentait une avance séculaire anormale de plusieurs dizaines de secondes, qu'on cherchait à expliquer depuis sa mise en évidence par Le Verrier (1859). Poincaré se penchera sur la

Tous se passe comme si les planètes causaient des marées sur la surface gazeuse du Soleil, de même que la Lune cause des marées sur la surface des mers de notre planète.
Cette conclusion est en tout point conforme à ce que vous dites de l'attraction des planètes sur le Soleil dans votre Notice sur la stabilité du Système solaire *(Ann. du Bur. des Long.,* 1898, p. B.14). [17]
Que l'on considère ou non cette explication comme une simple interprétations des calculs, qu'on voie là une action de la gravitation, une action électrique ou magnétique, on peut toutefois se demander si elle conduit, pour une autre planète que Mercure, à un mouvement anormal du périhélie.
Si l'on admet que, comme cela se passe pour les marées, le rayon du cercle décrit par le centre de gravité du Soleil autour du centre de figure est proportionnel à $\frac{m}{r^3}$ (m, masse de la planète troublante ; r, sa distance au Soleil), on a, pour la somme approchée des variations séculaires des périhélies et des nœuds ☊ des diverses grosses planètes, le Tableau suivant, où j'admets pour Mercure les variations données par M. Newcomb (*Comptes rendus*, t. CXIX, p. 984) : [18]

	$\delta\varpi + \delta☊$ d'après	
Planètes	M. Newcomb	l'hypothèse Secchi
Mercure	46" ± 6"	46"±6"
Vénus	−2 ± 30	19 ± 6
Terre	5 ± 7	4 ± 1
Mars	9 ± 10	0, 1 ± 0, 0
Jupiter	"	0, 1 ± 0, 0
Saturne	"	0, 001

L'hypothèse actuelle ne semble donc conduire à aucune contradiction et elle explique la variation séculaire du périhélie de Mercure, qui n'a pu jusqu'alors être encore expliquée. Il est bien évident que ces calculs ne sont qu'approchés ; j'y ai d'ailleurs négligé les variations de l'excentricité et de l'inclinaison.

question lors de son cours de 1906–1907 sur "Les limites de la loi de Newton", dont les notes d'Henri Vergne ont été conservées aux Archives Henri Poincaré, et un résumé a été publié par Marguerite Chopinet (Poincaré 1953). L'avance anormale disparaîtra dans la théorie d'Einstein (1916) ; voir à ce sujet Roseveare (1982).

17. Poincaré 1898b. Dans ses réflexions sur la stabilité du système solaire, Poincaré évoque l'influence du phénomène des marées ou des déformations élastiques sur le mouvement du soleil :

> Mais le Soleil produit aussi des marées, l'attraction des planètes en produit également sur le Soleil . . ..
>
> Il ne faudrait pas croire qu'un globe solide, qui ne serait pas recouvert par des mers, se trouverait, grâce à l'absence des marées, soustrait à des actions analogues à celles dont nous venons de parler. Et cela, en admettant même que la solidification ait atteint le centre de ce globe.
>
> Cet astre, que nous supposons solide, ne serait pas pour cela un corps solide invariable ; de pareils corps n'existent que dans les traités de Mécanique rationnelle.
>
> Il serait élastique et subirait, sous l'attraction des corps célestes voisins, des déformations analogues aux marées et du même ordre de grandeur. (Poincaré 1898c)

18. Newcomb 1894.

Si l'on considère que la période de onze ans, constatée dans certaines études sur le diamètre solaire, concorde avec le temps de révolution de Jupiter, que les conjonctions de Mercure et de Vénus se succèdent tous les quatre et tous les dix mois, et, par suite, que les actions respectives de Mercure, Vénus, et Terre peuvent introduire des variations analogues ou plutôt inférieures à celles qu'on attribue aux erreurs d'observations dues aux saisons terrestres, il me paraît grave de condamner, *a priori*, une hypothèse qui rend mieux compte du mouvement du périhélie de Mercure que celles qui ont été proposées jusqu'alors.

PTrL. Publiée dans Simonin (1898).

42.4 Simonin à Poincaré

Observatoire de Nice, 9 juillet 1901

Cher Maître,

Je me permets de recourir encore, après en avoir référé à M$^{\text{r}}$ Perrotin, à votre extrême bienveillance pour vous soumettre les résultats que je viens d'obtenir pour une nouvelle orbite d'Hécube.[19]

J'ai admis que l'orbite donnée dans ma thèse était assez approchée pour qu'on puisse remplacer, dans la fonction perturbatrice, les éléments elliptiques par leurs expressions obtenues à la fin de ma thèse.[20] Les seuls éléments que j'ai pu vérifier jusqu'alors par un double calcul sont le demi-grand axe et la longitude moyenne. Je me suis astreint à calculer toutes les perturbations capables d'introduire dans la position d'Hécube une correction de 1". Pour le demi-grand axe, leur nombre est supérieur à 1200.

En désignant par σ la différence $n-2n'$ entre le moyen mouvement d'Hécube et le double de celui de Jupiter ($\sigma = 15$" environ) et par g le mouvement du périhélie d'Hécube ($g = 1$" environ), l'unité de temps étant le jour moyen, j'ai donné dans ma thèse pour L (racine du demi-grand axe) et pour λ (longitude moyenne) les expressions suivantes que je simplifie un peu et où je remplace les coefficients par leurs valeurs approchées en degrés et minutes :

$$\left.\begin{aligned} L &= L_0 + 54' \cos(186° + \overline{\sigma + g}t) + 5' \cos(26° + \sigma t), \\ \lambda &= \lambda_0 + 613'', 65t + 15°32' \sin(6° + \overline{\sigma + g}t) \\ &\quad + 23' \sin(192° + \overline{2\sigma + 2g}t) + 85' \sin(205° + \sigma t). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Les nouvelles valeurs sont, en simplifiant les expressions et m'arrètant aux termes impor-

19. Henri Perrotin est directeur de l'Observatoire de Nice.
20. Simonin 1897b, 1897c.

tants :

$$\left.\begin{aligned}
L &= L_0' + 0'', 1t + 9' \cos(205^\circ + gt) + 2' \cos(117^\circ + 2gt)\\
&\quad + 58' \cos(202^\circ + \overline{\sigma + gt}) + 2' \cos(245^\circ + \sigma t) + 3' \cos(76^\circ + 2\sigma t)\\
&\quad + 4' \cos(65^\circ + \overline{2\sigma + 2gt}) + 9' \cos(67^\circ + \overline{2\sigma + gt}),\\
\lambda &= \lambda_1'' + 613'', 55t - 0,000.01t^2 + 44^\circ \sin(26^\circ + gt)\\
&\quad + 37' \sin(297^\circ + 2gt) + 9' \sin(275^\circ + 3gt)\\
&\quad + 16^\circ 22' \sin(22^\circ + \overline{\sigma + gt}) + 34' \sin(65^\circ + \overline{\sigma - gt}) + 11' \sin(53^\circ + \sigma t)\\
&\quad + 6' \sin(187^\circ + \overline{\sigma + 2gt}) + 2' \sin(272^\circ + \overline{\sigma - 2gt})\\
&\quad + 79' \sin(247^\circ + \overline{2\sigma + gt}) + 34' \sin(246^\circ + \overline{2\sigma + 2gt})\\
&\quad + 27' \sin(255^\circ + 2\sigma t) + 2' \sin(277^\circ + \overline{2\sigma - gt})\\
&\quad + 6' \sin(111^\circ + \overline{3\sigma + gt}) + 5' \sin(125^\circ + \overline{3\sigma + 2gt})\\
&\quad + 3' \sin(105^\circ + 3\sigma t) + 2' \sin(168^\circ + \overline{3\sigma + 3gt}).
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Parmi les différences entre les expressions (1) et (2), la plus frappante provient, dans la seconde valeur de λ, du terme $44^\circ \sin(26^\circ + gt)$ qui est fourni par le terme $9' \cos(205^\circ + gt)$ de L.
J'ai cru bon, avant de continuer les calculs des autres éléments, de vous prier de bien vouloir me donner votre avis sur ces résultats et sur leurs différences avec l'orbite approchée qui m'a servi de point de départ dans ces nouvelles recherches.
Je vous prie de vouloir bien agréer, cher Maître, avec toutes mes excuses pour le dérangement nouveau que je vous cause, l'assurance de toute ma gratitude et l'expression de mes sentiments les plus respectueux.
Votre élève tout dévoué
M. Simonin

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

42.5 Simonin à Poincaré

Observatoire de Nice 16 juillet 1901

Cher Maître,

Je vous remercie de votre bonne lettre et je réponds de suite aux questions que vous voulez bien me poser.

En raison du grand nombre de termes à calculer dans la fonction perturbatrice et du temps que me prennent ici les observations quotidiennes et les calculs nécessités par elles, je n'ai pu encore vérifier que les perturbations à longue période d'Hécube par Jupiter et cela pour les seuls éléments $\mathcal{L}$ et λ.

Je compte comparer les nouvelles formules aux observations, lorsque tous les calculs seront terminés pour les autres éléments elliptiques. C'est alors que j'espère pouvoir corriger g et les autres éléments dont les valeurs adoptées jusqu'alors sont celles de la première approximation.

Les termes séculaires se sont introduits de la façon suivante :

Si dans le terme $Ae\cos(\lambda + 2\lambda' + \varpi)$ de la fonction perturbatrice, on remplace, après avoir dérivé par rapport à λ, les éléments elliptiques par leurs valeurs :

$$\begin{aligned}
&\lambda = \lambda_0 + nt + \lambda_1 \sin(\varepsilon_0 + \overline{\sigma + g}t) + \cdots \\
&\lambda' = \lambda'_0 + n't \qquad (n - 2n' = \sigma) \\
&e \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \varpi = A' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\varepsilon_1 + gt) + \cdots
\end{aligned}$$

on a :

$$\frac{d\mathcal{L}}{di} = -AA' \sin\left[\lambda_0 - 2\lambda'_0 + \varepsilon_1 + \overline{\sigma + g}t + \lambda_1 \sin(\varepsilon_0 + \overline{\sigma + g}t)\right] + \cdots$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{L}}{di} &= -AA' \cos(\lambda_0 - 2\lambda'_0 + \varepsilon_1 + \overline{\sigma + g}t) \times \lambda_1 \sin(\varepsilon_0 + \overline{\sigma + g}t) + \cdots \\
&= -AA' \frac{\lambda_1}{2} \sin(\varepsilon_0 - \lambda_0 + 2\lambda'_0 - \varepsilon_1) + \cdots
\end{aligned}$$

d'où un terme en t dans l'expression de $\mathcal{L}$ et un terme de t^2 dans celle de λ.

J'ai eu en tout 44 termes de cette forme que j'ai groupés en un seul terme séculaire.

Je vous prie, cher Maître, de vouloir bien agréer, avec l'expression entière de ma gratitude, l'assurance de mes sentiments les plus dévoués et les plus respectueux,

M. Simonin

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

42.6 Simonin à Poincaré

Observatoire de Nice, 1er Août 1901

Cher Maître,

J'ai l'honneur de vous adresser une Note sur la comète d'Encke, où je pars d'une hypothèse peut-être un peu hardie.[21]

Si cette hypothèse ne vous semble pas à rejeter, je vous demanderais de bien vouloir publier cette Note dans le *Bulletin Astronomique*.[22]

Veuillez agrèer, cher Maître, l'assurance de mes sentiments respectueux et reconnaissants,

Votre élève tout dévoué,

M. Simonin

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

21. Simonin suppose que l'accélération de la comète d'Encke serait due à un astre non encore observé :

> Si l'on admet que l'accélération du mouvement de la comète d'Encke est due, comme le pensent plusieurs astronomes, à des corpuscules dont elle s'approche, on peut se demander s'il n'existe pas une planète ayant même moyen mouvement que la comète (1074"), et passant à peu près en même temps qu'elle en un point commun de leurs orbites.
>
> En faisant des calculs successivement pour (291), (296), (364), (367), (422) et (440), dont les moyens mouvements diffèrent peu de 1074", on arrive à des résultats négatifs.
>
> Admettons toutefois qu'un astre non encore observé réponde à la question. (Simonin 1901, 451)

22. Depuis 1897, Poincaré est président du comité de rédaction du *Bulletin*.

Chapitre 43

Thorvald Nicolai Thiele

Thorvald Thiele (1838–1910) naît dans une famille d'intellectuels à Copenhague. Il étudie l'astronomie à l'université de Copenhague et soutient en 1866 une thèse dans laquelle il étudie les orbites du système double d'étoiles γ Virginis (Thiele 1866). Thiele dirige à partir de 1872 la compagnie d'assurances sur la vie *Hafnia* et devient professeur d'astronomie à l'Université de Copenhague en 1875. Il prend en même temps la direction de l'Observatoire qu'il conservera jusqu'à sa retraite. Il fonde en 1873 avec Zeuthen et Petersen la Société danoise de mathématiques.

Ses travaux de recherche concernent les mathématiques des assurances, les mathématiques actuarielles, la théorie des observations, l'interpolation, la résolution numérique du problème des trois corps et l'estimation des erreurs systématiques dans l'observation des systèmes doubles d'étoiles (Burrau 1911).

La lettre qu'il envoie à Poincaré le 7 mars, 1887 (§ 3-43-1) concerne un résultat mathématique de Sylvester sur l'algèbre des matrices 2×2.

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_43

43.1 Thiele à Poincaré

Paris 1887 Mars 7

Monsieur,
Le point essentiel qui vous empêchera de suivre M. Sylvester sera que

$$y = \frac{a+bx}{c+dx} = \frac{ba+nbx}{nc+ndx}.$$

L'idée de y étant déterminée en comparation de x d'une manière unique ainsi que celle de x par celle de y, il reste encore que la détermination elle même soit uniquement donnée par les idées de x et y. Il semble que M. Sylvester exige que toutes les quatre constantes a, b, c, d doivent être données, sans cela, son addition

$$\frac{a+a'+(b+b')x}{c+c'+(d+d')x}$$

sera nécessairement indéfinie. Mais si l'on concède que toutes les quatre constantes soient essentielles pour la détermination, alors la multiplication et la division seraient ou indéterminées ou tout formelles.
L'indétermination peut être facilement vaincue p. ex. si l'on exige que $f(a, b, c, d) = 1$, mais alors la multiplication ne possèderait [pas] en général la principe distributive.
Si l'on voudrait forcer cet obstacle en exigeant que $ad - bc = 1$ devrait être une condition absolue, de telle manière que dans l'addition on devrait opérer selon la formule

$$\frac{\frac{a+a'}{n} + \frac{b+b'}{n}x}{\frac{c+c'}{n} + \frac{d+d'}{n}x}$$
$$\text{où} \qquad n^2 = (a+a')(d+d') - (b+b')(c+c')$$

on rencontrerait enfin dans la duplicité de cette détermination de n l'obstacle insurmontable, c'est-à-dire irréconciliable à la charactère unique des déterminations.
Veuillez Monsieur pardonner mon mauvais français et agréer l'assurance de ma parfaite estime.
Thiele

ALS 3p. Collection particulière, Paris 75017.

Chapitre 44

François-Félix Tisserand

François-Félix Tisserand (1845–1896) est né à Nuits-Saint-Georges (Côte-d'Or), fils d'un tonnelier. Major de sa promotion à l'École normale supérieure (1863), il a suivi l'enseignement de Charles Hermite, et a été recruté en 1866 en tant qu'astronome adjoint par Urbain Le Verrier à l'Observatoire de Paris, où il devait débusquer les erreurs de la théorie de la lune de Delaunay. Cette théorie, que Tisserand connaissait selon Poincaré "mieux que l'inventeur, peut-être" (Poincaré 1896), a été le sujet de sa thèse, soutenue à la Faculté des sciences de Paris (Tisserand 1868). Tisserand a été nommé à la direction de l'Observatoire de Toulouse en 1873, et il devint correspondant de la section d'astronomie à l'Académie des sciences de Paris l'année suivante. En 1878, Tisserand succéda à Le Verrier dans la section d'astronomie de l'Académie des sciences et au Bureau des longitudes. Du côté de l'enseignement, à la Sorbonne il fut suppléant à Liouville dans la chaire de mécanique rationnelle, puis titulaire en 1882, avant de succéder l'année suivante à Puiseux dans la chaire d'astronomie mathématique et de mécanique céleste (Estanave 1906, 12).

Une fois installé à la Sorbonne, Tisserand a entrepris deux grands projets : la fondation du *Bulletin astronomique* en 1884, et la rédaction de son *Traité de mécanique céleste* (Tisserand 1889a), salué par Poincaré comme un "grand Ouvrage", qui a été pour sa génération l'équivalent du *Traité* de Laplace (Poincaré 1896). "C'est le livre que Laplace aurait écrit", disait Poincaré plus tard, "s'il avait vécu de nos jours" (Poincaré 1900a, E11). Les deux premiers tomes du *Traité* de Tisserand ont paru en 1889 et 1891 ; en 1892, Tisserand a été nommé à la direction de l'Observatoire de Paris, là où sa carrière d'astronome avait commencé 26 ans plus tôt. La même année, Tisserand a appuyé avec succès la candidature au Bureau des longitudes de Poincaré, à qui Tisserand comparait Lagrange, Laplace, et Poisson (voir son rapport, § 3-48-1).

Les trois lettres de Tisserand à Poincaré concernent la collaboration de ce dernier avec le *Bulletin astronomique*. Avant même que ce journal soit lancé, Tisserand encourageait Poincaré à s'intéresser aux "problèmes astronomiques" (Tisserand à Poincaré, 29.12.1883, § 3-44-1). Son intervention était efficace : trente-sept articles de Poincaré ont paru dans le *Bulletin*, journal qu'il dirigeait suite à la mort de Tisserand, jusqu'à la fin

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_44

de sa vie. Avec le journal, Poincaré a repris la chaire universitaire de Tisserand, en abandonnant à Joseph Boussinesq sa propre chaire de physique mathématique et calcul des probabilités. Sur les travaux de Tisserand, voir sa *Notice* (Tisserand 1878), la nécrologie de Callandreau (1897a), et le *DSB* (Lévy 1976).

44.1 Tisserand à Poincaré

Paris 1883 Décembre 29

Mon cher collègue,
Je viens de lire aux *Comptes-Rendus* votre note sur le travail de M. Lindstedt ;[1] je la trouve très intéressante. J'espère que ce premier travail sera suivi d'autres sur la théorie des perturbations ; avec vos talents, je crois que vous ferez dans ce domaine, de belles découvertes dont nous autres astronomes, pourrons faire notre profit.
On va fonder à l'observatoire un journal astronomique dont je serai probablement le Directeur, officiellement ou officieusement.[2] C'est à ce titre que je viens vous demander si vous ne pourriez pas rédiger un Mémoire contenant l'essentiel de vos communications du 30 Nov. 1882, du 23 Juillet 1883, et du 24 Décembre dernier.[3] Votre Mémoire paraîtrait en Mars 1884 ; je vous en serais personnellement très reconnaissant.[4]
Si plus tard, je puis vous donner quelques renseignements qui vous permettent d'aborder mathématiquement quelques problèmes astronomiques, je le ferai avec grand plaisir.

1. Dans sa note, Poincaré met en rapport les récents travaux de Lindstedt (1882b, 1883b, 1883d, 1883c) et ses propres résultats sur la résolution des équations différentielles par des séries trigonométriques (Poincaré 1882e, 1882d, 1882c) :

> M. Lindstedt a publié [...] une solution nouvelle du problème des trois corps, qui lui permet d'exprimer les coordonnées des trois masses par des séries purement trigonométriques. Cet important résultat donne quelque intérêt à une remarque que j'avais faite dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie le 30 octobre 1882. J'avais montré, dans cette Note, qu'une série purement trigonométrique et toujours convergente peut cependant croître au-delà de toute limite. Ainsi, même en supposant vaincues toutes les difficultés provenant des questions de convergence, le résultat de M. Lindstedt ne permettrait pas de conclure à la stabilité du système solaire, dans le sens rigoureux du mot. (Poincaré 1883b, 1471)

2. Tisserand fait allusion au *Bulletin astronomique*. Le premier volume du *Bulletin* paraît en 1884 ; il est publié sous les auspices de l'Observatoire de Paris par Tisserand avec la collaboration de G. Bigourdan, O. Callandreau et R. Radau. Dans l'avertissement signé par l'amiral Mouchez, alors directeur de l'Observatoire de Paris, on peut lire que le *Bulletin astronomique* "est destiné à combler une lacune regrettable dans les Revues scientifiques françaises" puisqu'"aucune, en effet n'était destinée spécialement aux astronomes et aux hommes de science qui veulent se tenir au courant des progrès de l'Astronomie" (Mouchez 1884, 5). Mouchez annonce que la nouvelle revue astronomique sera consacrée à la publication des éphémérides produites par les observatoires français, de mémoires sur "diverses questions d'Astronomie théorique ou pratique" et d'"une revue aussi complète que possible de toutes les nouvelles astronomiques".

3. Poincaré 1882d, 1883a, 1883b.

4. Poincaré publiera deux articles dans le premier volume du *Bulletin astronomique* consacrés, le premier aux solutions périodiques du problème des trois corps (Poincaré 1884a) et le second à la convergence des séries trigonométriques (Poincaré 1884b). Il sera un auteur fidèle du *Bulletin*, publiant 37 articles dans la plupart des domaines de la mécanique céleste et de l'astronomie théorique.

Veuillez agréer mes sentiments d'estime sincère,
F. Tisserand

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

44.2 Tisserand à Poincaré

Paris 1884 Février 8

Cher Monsieur,
J'ai reçu votre article sur le problème des trois corps, et l'ai trouvé très intéressant ; il paraîtra dans le N°. 2 du *Bulletin astronomique,* le 15 Mars prochain. [5]
Je vous ferai envoyer le *Bulletin* régulièrement, en vous demandant seulement quelques articles de temps à autre.
Si vous avez le temps de développer vos dernières communications à l'Académie, sur les séries employées par les astronomes, vous nous rendrez un grand service. [6]
Votre bien dévoué,
F. Tisserand

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

44.3 Tisserand à Poincaré

Paris 1884 Février 26

Cher Monsieur,
Voulez-vous me permettre de vous signaler la question suivante :
Il s'agit d'intégrer les deux équations simultanées ci-dessous :

$$\left.\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= M(1 + M_1 e^2 + M_2 e^4)\sin\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= N(1 + N_1 e^2 + N_2 e^4 + N_3 e^6) + \frac{M}{e}(1 + P_1 e^2 + P_2 e^4)\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dans ces équations, $M\ M_1\ M_2$; $N\ N_1\ N_2\ N_3$; $P_1\ P_2$; désignent des constantes.
On suppose que, pour $t = 0$, la valeur de e est très petite, et que le coefficient M est de l'ordre du carré de cette petite quantité ; les autres coeff. sont finis. Delaunay a rencontré ces équations dans sa théorie de la Lune (voir le tome 28 des *Mémoires de l'Académie des Sciences,* page 107) ; [7] il a donné les expressions intégrales de $e\cos\theta$ et de $e\sin\theta$ sous

5. Poincaré 1884a.

6. Poincaré 1882e, 1882d, 1883b. Dans le même volume du *Bulletin astronomique* Poincaré a publié un article dans lequel il reprend ses développements sur la convergence des séries trigonométriques (Poincaré 1884b).

7. Delaunay (1860b, xxvi) s'intéresse au problème du mouvement de la lune autour de la terre en tenant compte de l'attraction solaire :

forme périodique ; je crois qu'il serait intéressant d'étudier les conditions qui doivent être remplies pour que l'on ait effectivement :

$$\left.\begin{aligned} e\cos\theta &= \sum_0^\infty A_i \cos i\alpha(t+c) \\ e\sin\theta &= \sum_0^\infty B_i \sin i\alpha(t+c), \end{aligned}\right\} \quad \alpha \text{ et } c \text{ sont constants.}$$

en séries convergentes.

Déterminer, sous forme analytique, toutes les inégalités du mouvement de la Lune autour de la Terre, jusqu'aux quantités du septième ordre inclusivement, en regardant ces deux corps comme de simple points matériels, et tenant compte uniquement de l'action perturbatrice du Soleil, dont le mouvement apparent autour de la Terre est supposé se faire suivant les lois du mouvement elliptique, telle est donc la question que je me suis proposé de résoudre, et que j'ai résolue en effet, à l'aide d'un travail assidu de plusieurs années.

L'analyse du problème conduit Delaunay au système d'équations

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{dL}{dt}=\frac{dR}{dt}, & \frac{dG}{dt}=\frac{dR}{dg}, & \frac{dH}{dt}=\frac{dR}{dh} \\ \frac{dl}{dt}=-\frac{dR}{dL}, & \frac{dg}{dt}=-\frac{dR}{dG}, & \frac{dh}{dt}=-\frac{dR}{dH} \end{array}\right.$$

où $\boldsymbol{R}$ désigne la fonction perturbatrice, $\boldsymbol{l}$, l'anomalie moyenne de la lune, $\boldsymbol{g}$, la distance angulaire du nœud ascendant au périgée et $\boldsymbol{h}$, la longitude du nœud ascendant comptée à partir d'une ligne fixe. Si on appelle $\boldsymbol{a}$ le demi-grand axe de l'orbite de la lune, $\boldsymbol{e}$ son excentricité et $\boldsymbol{i}$ son inclinaison, alors en notant $\boldsymbol{\mu}$ la somme des masses de la terre et de la lune,

$$\boldsymbol{L} = \sqrt{\boldsymbol{a\mu}}, \qquad \boldsymbol{G} = \boldsymbol{L}\sqrt{1-\boldsymbol{e}^2}, \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}\cos \boldsymbol{i}.$$

La méthode de Delaunay consiste à appliquer "un assez grand nombre d'opérations élémentaires ayant chacune pour but de faire disparaître un terme de la fonction perturbatrice $\boldsymbol{R}$" (Tisserand 1890, 265) :

> Nous avons donc effectué successivement les diverses opérations nécessaires pour enlever à la fonction perturbatrice $\boldsymbol{R}$ la totalité des termes périodiques capables de fournir des inégalités d'un ordre inférieur au quatrième. [...] Nous avons dû en effectuer 57. (Delaunay 1860b)

Delaunay précise alors comment il est amené à étudier le système d'équations dont il est question dans la lettre de Tisserand ; lorsque après une des 57 opérations évoquées par Delaunay, la fonction perturbatrice est réduite à un terme non-périodique et à un seul terme périodique, Delaunay est conduit à étudier un système de la forme

$$\frac{\boldsymbol{d\Theta}}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{A}\sin\theta, \qquad \frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{dA}}{\boldsymbol{d\Theta}}\cos\theta + \frac{\boldsymbol{dB_1}}{\boldsymbol{d\Theta}}.$$

Dans le cas général, Delaunay utilise la méthode des approximations successives. Cette méthode devient inopérante lorsque la variable $\boldsymbol{e}$ apparaît dans les diviseurs :

> Mais il est arrivé plusieurs fois que l'une des deux équations différentielles contenait la variable $\boldsymbol{e}$ en diviseur ; alors nous avons employé les formules suivantes, établies pour ce cas particulier.
>
> Soit à intégrer les équations différentielles
>
> $$\left\{\begin{array}{l} \frac{de}{dt}=M(1+M_1e^2+M_2e^4)\sin\theta \\ \frac{d\theta}{dt}=N(1+N_1e^2+N_2e^4+N_3e^6)+\frac{M}{e}(1+P_1e^2+P_2e^4)\cos\theta \end{array}\right.$$

où θ désigne l'argument du terme de la fonction perturbatrice que l'on veut faire disparaître et $\boldsymbol{e}$ est considéré comme une petite quantité du premier ordre.

Ces questions n'ont pas été étudiées par Delaunay.
Les équations (1) se présentent constamment dans sa théorie, et se trouvent ainsi avoir une grande importance.
Je crois qu'il vous serait très facile de résoudre la question, si toutefois elle vous intéresse. [8]
Veuillez agréer, Cher Monsieur, l'assurance de mes sentiments dévoués,
F. Tisserand

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

8. Poincaré ne s'intéresse pas directement au système d'équations proposé par Tisserand. Par contre, il expose dans le deuxième tome des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (Poincaré 1893) la méthode de Delaunay comme l'une des premières à résoudre le problème des petits diviseurs. En revanche, Tisserand a donné une méthode de résolution du système d'équations qu'il évoque dans sa lettre :

> Delaunay a donné les intégrales approchées des équations, sans faire connaître la marche employée. J'ai pensé qu'il pouvait être utile de combler cette lacune, et c'est le but du présent travail. (Tisserand 1890, 267)

Chapitre 45

Aloys Verschaffel

Aloys Verschaffel naît à Delteldonk (Belgique) le 1er mars 1850. Il devient prêtre et oratorien, un ordre qui se consacre en grande part à l'enseignement. Après une carrière d'enseignant dans des établissements secondaires, il rejoint Antoine d'Abbadie pour travailler dans son observatoire privé. En 1900, peu de temps après que l'Observatoire d'Abbadia (Hendaye) ait été légué à l'Académie des sciences, Verschaffel en est nommé directeur, poste qu'il occupera vingt-deux ans. Pendant son mandat de directeur, l'Observatoire d'Abbadia réalisa et publia vingt volumes d'observations méridiennes et stellaires ; il participa au vaste projet international lancé en 1887, la Carte du ciel. Verschaffel a inventé un chronographe enregistreur et (avec G. Seguy) "un photomètre fondé sur l'absorption de la lumière par le noir de fumée et sa transformation en travail mécanique" (Collard 1933, 89).

Verschaffel reçoit plusieurs prix, et est élu correspondant pour la section d'astronomie de l'Académie des sciences en 1911.[1] Il meurt le 24 janvier 1933 à Villefranque (Basses-Pyrénées).

La lettre qu'envoie Poincaré à Verschaffel concerne un manuscrit de ce dernier sur la jeunesse des étoiles, vraisemblablement soumis pour publication dans le *Bulletin astronomique*. Poincaré demande à Verschaffel de préciser ses observations de la vitesse des étoiles, des données qui permettaient à Schwarzschild et Eddington de théoriser la structure de la Voie Lactée (voir Paul 1993), mais Verschaffel n'a pas fait paraître de telles données par la suite dans les pages du *Bulletin*.

1. Voir les *Comptes-rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 154, séance du 2 janvier, 1912, p. 23. Le rapport sur les titres de Verschaffel a été rédigé par Benjamin Baillaud ; il est conservé aux archives de l'Académie des sciences, dossier Verschaffel.

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_45

45.1 Poincaré à Verschaffel

[Entre 1909 et 1911]

BUREAU DES LONGITUDES — PALAIS DE L'INSTITUT — 3, RUE MAZARINE

Mon cher Collègue,
M. Bigourdan m'a communiqué votre note sur la jeunesse des étoiles. [2]
Elle me paraît intéressante ; permettez moi pourtant les observations suivantes ; il conviendrait de rappeler les chiffres sur lesquels vous vous appuyez, car il est nécessaire de savoir :
1° S'il s'agit seulement des mouvements propres angulaires ou des vitesses radiales, car dans le 1er cas on pourrait supposer qu'elles sont lentes parce qu'elles sont loin.
2° S'il s'agit des mouvements propres observés, c'est-à-dire des mouvements par rapport au Soleil, ou des mouvements corrigés de la parallaxe c'est-à-dire des mouvements absolus. Dans l'exposé de votre théorie, il serait nécessaire d'expliquer nettement les hypothèses dont vous partez. Les vitesses v et v' sont-elles rapportées au Soleil, ou au Centre de gravité du système Solaire ; à quelle loi de probabilité sont-elles supposées satisfaire, est-ce celle de Maxwell ? [3]
Votre bien dévoué collègue
Poincaré

ALS 2p. A. Verschaffel 371, Château d'Abbadia.

2. Guillaume Bigourdan fut membre du comité de rédaction du journal dirigé par Poincaré, le *Bulletin astronomique*, et membre de l'Académie des sciences de Paris, section d'astronomie. Vraisemblablement, Verschaffel a soumis une note pour publication dans le *Bulletin* ou les *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences*.

Aucune note au sujet des vitesses d'étoiles n'a été publiée par Verschaffel jusqu'à 1914, lorsque dans les pages du *Bulletin*, il a rappelé (sans le citer) une analyse probabiliste de Poincaré dans ses *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques* (Poincaré 1911a, 104–111). Prenant en compte la découverte par J. C. Kapteyn de deux essaims d'étoiles (Kapteyn 1906), Poincaré avait conclu que la Voie lactée n'avait pas encore atteint l'équilibre thermo-mécanique. Verschaffel a observé que la loi d'équipartition – employée par Poincaré sous la supposition de l'équlibre thermo-mécanique – était inadmissible. Verschaffel rejetait en bloc le modèle adopté par W. Thomson (et par Poincaré sous la même condition), lorsqu'il écrivait : "rien ne semble nous autoriser à appliquer la loi de l'équipartition de l'énergie d'un mélange de gaz à un mélange d'étoiles" (Verschaffel 1914, 267). L'approche de W. Thomson et de Poincaré a été défendue par Pierre Puiseux dans son commentaire sur l'article de Verschaffel. Puiseux a observé que la loi d'équipartition pouvait s'établir dans un système stellaire "sans intervention de chocs" (Puiseux 1914). Sur la théorie de Kapteyn, voir Paul (1993) et Van der Kruit (2015).

3. La loi de Maxwell-Boltzmann décrit la distribution des vitesses des molécules d'un gaz parfait monoatomique à l'équilibre thermodynamique.

Chapitre 46

Max Wolf

Max Wolf (1863–1932) a fait ses études à Heidelberg, où il a rédigé une thèse sous la direction de Leo Königsberger (Wolf 1888). Wolf a poursuivi ses études à Stockholm auprès de Hugo Gylden, avant de revenir à Heidelberg en 1890 en tant que Privatdozent à la Karl-Ruprechts-Universität. Lauréat de l'Institut de France en 1892, Wolf fut nommé professeur d'astrophysique (sans chaire) et directeur de l'Observatoire du Königstuhl en 1893, et professeur ordinaire en 1902, toujours à Heidelberg. En reconnaissance de ses travaux, la *Royal Astronomical Society* de Londres lui décerna sa Médaille d'or en 1914, et l'*Astronomical Society of the Pacific* lui donna sa Médaille Bruce en 1930. Wolf a assuré la direction de l'Observatoire du Königstuhl jusqu'à sa mort en 1932, à l'âge de 69 ans.

Wolf était expert dans l'emploi des techniques photographiques, avec lesquelles il a découvert plus de deux cents astéroïdes, et trois comètes. Le 22 février 1906, il a découvert l'astéroïde (588) Achille (1906 TG), reconnu comme le premier du groupe des troyens, qui réalisent le type d'orbite décrit par Lagrange en 1772 dans le cadre du problème des trois corps, où l'astéroïde suit l'un des points de Lagrange de l'orbite de Jupiter. Six mois plus tard, le 27 août 1906, Wolf a découvert l'astéroïde (605) (1906 UU), qui figure dans la lettre qu'il a envoyée à Poincaré le 20 février 1912. Sur la vie et les travaux de Wolf, voir Reynolds (1933), Freiesleben (1976), et Knill (2007).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_46

46.1 Wolf à Poincaré

DEN 20 Février 1912
GR. BAD. STERNWARTE, HEIDELBERG

À Monsieur le Président – Henri Poincaré, Membre de l'Institut

Monsieur,
Veuillez avoir la bonté de communiquer à propos de la soirée du „Jubilée Flammarion" que je prend la liberté de donner le nom „Juvisia" à la planète (605) (1906 UU) découverte par moi le 27 Août 1906, pour reconnaître ainsi de notre part les grands mérites de l'Astronome de Juvisy. [1]
Cette planète, calculée par M. R. Coniel, est assez importante, possédant la grande inclinaison $i = 19^\circ\ 40'$, pendant que l'excentricité est de $\varphi = 7^\circ\ 45'$ ($\mu = 679''$). [2]
Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de mon respect et de mon meilleur dévouement.
Dr Max Wolf
M. d. l. Soc. Astr. de France

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

1. Le jubilé scientifique de Camille Flammarion a eu lieu à l'Hôtel des Sociétés savantes à Paris le 26.02.1912. Membre du comité d'initiative, et ancien président de la Société astronomique (1901–1902), Henri Poincaré a présidé la manifestation, et prononcé un discours soulignant les mérites de l'astronome et l'écrivain. À la fin de son discours, Poincaré a mentionné la lettre de Wolf :

> [Flammarion] a fondé l'Observatoire de Juvisy, et là je vous garantis que l'on fait de la besogne sérieuse ; on le sait bien à l'étranger : il n'y a pas huit jours que je recevais une lettre de M. Max Wolf, de Heidelberg, le célèbre découvreur de petites planètes ; il m'annonçait qu'il venait de donner à la planète 605, remarquable par sa forte inclinaison, le nom de *Juvisia*, "afin, disait-il, de reconnaître les grands mérites de l'Astronome de Juvisy." Mon cher Flammarion, je n'ai malheureusement pas, pour ma part, de planète à vous offrir, mais je suis heureux de rendre hommage au savant qui est en même temps un poète, et au poète qui est en même temps un savant. (Poincaré 1912a, 103)

2. René Coniel (1881–?) fut calculateur auxiliaire à l'Observatoire de Paris (Véron 2006). Il a calculé, à partir de cinq observations, une inclinaison de $19^\circ\ 40'\ 11''.1$ par rapport à l'écliptique (ou 19.66875°), sans préciser l'incertitude (Coniel 1908a, 1908b). L'excentricité angulaire φ de $7^\circ\ 45'$ correspond à une excentricité $e = \sin\varphi = 0.13485$. Coniel a désigné par μ la vitesse angulaire moyenne par jour de l'astéroïde par rapport à la Terre. Plus récemment, à partir de 1356 observations, l'inclinaison de l'astéroïde 605 Juvisia (1906 UU) fut déterminée par le Jet Propulsion Laboratory pour le 13 janvier 2016, avec une valeur de 19.66256754612874°, et une incertitude (un sigma) de 6.0913×10^{-06}°, alors que l'excentricité fut de 0.1394129787862667, et son incertitude fut de 4.9629×10^{-08}.

Chapitre 47

Le Bureau des longitudes

Henri Poincaré fut nommé membre titulaire du Bureau des longitudes en 1893, secrétaire pour les années 1896 et 1897, puis Président du Bureau en 1899, 1909 et 1910. Cette activité a laissé des traces dans les procès-verbaux des séances, à raison de cinq cents manuscrits.[1] Selon l'historien Peter Galison, Poincaré considérait le Bureau des longitudes comme le point de convergence de la technique et la science (Galison 2003). À propos de l'histoire du Bureau, on peut consulter Bigourdan (1927), Feurtet (2005), et Schiavon (2016).

La correspondance de Poincaré en rapport avec le Bureau des longitudes témoigne non seulement de la grande variété de sujets traités et étudiés au sein de cette institution, mais également de la nature et de l'étendu de l'engagement de Poincaré dans les affaires du Bureau. Ces échanges permettent de mieux comprendre pourquoi Poincaré s'intéresse à certains sujets comme, par exemple, la mesure du géoïde, ou la décimalisation du temps.

Sur le Bureau des longitudes on rappellera qu'il fut crée le 25 juin 1795 par une loi de la Convention nationale (Assemblée nationale française). Il avait alors la fonction de reprendre "la maîtrise des mers aux Anglais" grâce à l'amélioration de la détermination des longitudes en mer. Ensuite, le Bureau des longitudes fut chargé de calculer et publier les éphémérides (la *Connaissance des Temps*) et un *Annuaire* propre "à régler ceux de la République". Entre 1877 et 1949 il édite en outre les *Annales du Bureau des longitudes*.

À partir de 1854, cette institution donne un élan nouveau aux études de géodésie : un décret impérial confère de nouvelles attributions aux membres du Bureau, parmi lesquelles rechercher et provoquer "les progrès que l'état de la science comporte, soit dans le domaine de l'astronomie et de la mécanique céleste, soit dans le vaste cercle de leurs applications journalières à la navigation, à la géodésie, à la géographie et à la physique du globe" (Delaunay et al. 1863). Au sein du Bureau des longitudes sont désormais admis de nouveaux représentants du ministère de la Guerre, de la Marine et du corps des ingénieurs hydrographes. Sous l'impulsion des savants du Bureau des longitudes, et notamment de l'astronome Hervé Faye, de jeunes acteurs militaires sont ainsi admis sur la

1. Des numérisations et transcriptions des procès-verbaux du Bureau des longitudes de 1795 à 1932 ont été mises en ligne par Laurent Rollet et Martina Schiavon.

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_47

scène scientifique française, dont le capitaine François Perrier, chargé des grandes opérations géodésiques au XIXe siècle (Schiavon 2010, 2014a).

L'annotation de la correspondance de Poincaré à propos du Bureau des longitudes s'appuie sur les registres des séances du Bureau, couvrant la période d'activité de Poincaré (1893–1912). Dans le chapitre dédié au courrier du Bureau des longitudes, nous voyons comment Poincaré collaborait avec des individus de milieux variés : des académiciens, des officiers militaires, des marins et des fabricants d'instruments de précision. De même, ce chapitre nous fait découvrir la grande variété des questions traitées au sein du Bureau, concernant, entre autres, le fonctionnement des observatoires, la mesure des arcs, l'observation des éclipses et du passage de Vénus, l'organisation de la célébration du bicentenaire du mètre, et la transformation de la Tour Eiffel en station d'émission d'ondes hertziennes pour la télégraphie sans fil.

47.1 Raoul de Saint-Arroman (cabinet) à Poincaré

PARIS, LE 23 juillet 1897 REPUBLIQUE FRANCAISE — MINISTERE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE & DES BEAUX-ARTS
DIRECTION DU SECRÉTARIAT ET DE LA COMPTABILITÉ — SECRETARIAT — 1ER BUREAU

À Monsieur Poincaré, de l'Institut

Monsieur le Secrétaire & cher Maître,
Vous avez bien voulu envoyer, pour l'impression, à M. de Saint-Arroman, les deux derniers procès-verbaux de la Commission de Décimalisation. [2]
En l'absence de mon chef, je me permets, afin de gagner du temps, de vous demander quelques renseignements.
Nous avons déjà en épreuves le procès-verbal *N° 1* que vous trouverez ci-joint. Je comprends bien que c'est celui-là *corrigé* par vous et complété par le procès-verbal du 12 juillet qu'il faut renvoyer à l'Imprimerie Nationale. Mais vous nous retournez en même temps le procès-verbal *N° 2* non daté, qui reproduit à peu près les mêmes décisions que le procès-verbal *N° 1* du 16 juin et dont vous trouverez aussi la minute : *N° 3*.
Voudrez-vous être assez obligeant, Monsieur le Secrétaire et cher Maître, pour m'indiquer brièvement s'il ne s'agit que du *N° 1* (comme je le crois) avec les annexes qui y étaient jointes et qui sont tirées déjà, d'ailleurs. Aussitôt votre réponse, j'enverrai le procès-verbal à M. Héoy en lui demandant une épreuve que je vous soumettrai.
Après le tirage définitif, j'enverrai procès-verbal & annexes à tous les Membres de la Commission.
Veuillez agréer, Monsieur le Secrétaire & Cher Maître, l'expression de mes sentiments les plus distingués & dévoués.
Goublet — au 1er Bureau du Secrétariat

ADftS 2p. F17 2921, Archives nationales françaises.

2. Goublet est secrétaire du Ministre de l'Instruction publique, Raoul de Saint-Arroman.

47.2 Raul-Blaise de Saint-Arroman à Poincaré

PARIS, LE 10 février 1899
MINISTERE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS — MINUTE
M. de Saint-Arroman [3]

À M. Poincaré, de l'Institut, Professeur à la faculté des Sc., 63 rue Claude Bernard

Monsieur et Cher maître,
Il est devenu urgent de faire réimprimer et tirer à un assez grand nombre d'exemplaires tous les documents : note préliminaire, questionnaire, procès-verbaux et annexes, relatifs à la "Décimalisation du temps et de la circonférence" élaborés par la Commission dont vous êtes Secrétaire. [4]
Permettez-moi de vous communiquer, ci-joint, les épreuves en trois exemplaires de toutes ces pièces. Je vous serais reconnaissant de vouloir bien les corriger et nous les retourner avec votre bon à tirer, s'il y a lieu. [5]
Veuillez agréer, Monsieur & cher Maître, l'expr[ession] de mes sent[iments] bien dist[ingués] & dévoués.

AL 1p. F17 2921, Archives nationales françaises.

47.3 Georges Leygues (cabinet) à Poincaré

PARIS, LE 27 février 1899
MINISTERE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS – MINUTE
Objet : Projet de congrès à Paris en 1900, pour l'étude de la décimalisation du temps et de la circonférence. Réponse du Danemark

À M. le Président du Bureau des Longitudes

Monsieur le Président,
Monsieur le Min^{e} des Affaires étrangères vient de m'annoncer, d'après une lettre du Min^{e} de la République à Copenhague, que le gouvern[emen]t Danois ne serait pas actuellement disposé à se faire représenter par des délégués dans le Congrès qui se réunirait à Paris en 1900, en vue de l'étude des questions de décimalisation du temps et de la circonférence.
J'ai l'honneur de vous transmettre cette information pour faire suite à mes communications des 18 juin, 19 août et 28 décembre 1898.
Agréez M. le Président
À l p l d – P[our] le Min[istre] – [signature illisible]

ADftS 1p. F17 2921, Archives nationales françaises.

3. Raoul-Blaise de Saint-Arroman (1849–1915) fut chef du bureau des travaux historiques et scientifiques au Ministère de l'Instruction publique (5^{e} bureau des missions), membre des sociétés artistiques, dramatiques, littéraires, philantrophiques et savantes, écrivain et auteur dramatique.

4. Poincaré était secrétaire de la Commission de la décimalisation du temps et de la circonférence depuis le 15.02.1897.

5. Parmi ces pièces se trouvait vraisemblablement le rapport présenté par Poincaré le 07.04.1897 à la Commission, et réédité dans ses *Œuvres*, Volume 8 (Poincaré 1952).

47.4 Georges Leygues (cabinet) à Poincaré

Paris, le 20 mars 1899
MINISTERE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE DES BEAUX-ARTS — MINUTE

Objet : Commission de décimalisation du temps et de la circonférence. Envoi d'une brochure de M. de Rey-Pailhade (2 ex)
À M. le Président du Bureau des Longitudes

Monsieur le Président,
Monsieur J. de Rey-Pailhade, ancien président de la Société de Géographie de Toulouse, vient de m'envoyer plusieurs exemplaires d'une brochure intitulée : « Documents sur l'heure décimale de la Convention nationale » qu'il a adressée à la Commission parlementaire saisie de la proposition de loi de MM. Delaune et Gonzy sur l'heure décimale.
J'ai l'honneur de vous transmettre ci-joint deux exemplaires de cette brochure. Je vous serais obligé de la joindre au dossier de l'affaire soumise à l'examen de la Commission spéciale d'études sur la décimalisation de la circonférence et du temps constituée sous votre présidence.
Agréez Monsieur le Président . . .
Pour le ministre.
Le chef

ADft 1p. F17 2921, Archives nationales françaises.

47.5 Anatole Bouquet de la Grye à Poincaré

2 avril 99
Juvisy sur Orge

Mon cher Président,
Mr Richet m'ayant demandé l'autorisation de reproduire dans la revue scientifique la notice que j'ai insérée dans l'*annuaire du Bureau des Longitudes*, je la lui redonnée volontiers, en demandant seulement de noter la source. [6]
Pareille demande m'avait été faite d'Odessa il y a un mois, par le directeur de l'observatoire ; il s'agissait de la traduire en Russe.
J'ai consenti de même avec la réserve habituelle.
Je crois devoir Mon cher Président informer le Bureau de ces deux demandes qui d'ailleurs ne peuvent nuire à la vente de l'*annuaire*.
Sentiments les plus distingués,
A. Bouquet de la Grye

ALS 2p. Registre des séances 1899, Bureau des longitudes, Paris.

6. Bouquet de la Grye 1899. Anatole Bouquet de la Grye (1827–1909) devint membre du Bureau des longitudes en 1886. Sur sa carrière et ses travaux, voir Poincaré (1911b).

47.6 Georges Leygues (cabinet) à Poincaré

Paris, le 13 avril 1899
MINISTERE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE DES BEAUX-ARTS – MINUTE

Objet : projet de congrès à Paris, en 1900, pour l'étude de la question de décimalisation du temps et de la circonférence. Réponse de la Belgique
À M. le Président du Bureau des Longitudes

Monsieur le Président,
Monsieur le Ministre des Affaires étrangères vient de m'annoncer, d'après une lettre de Monsieur le Ministre de la République à Bruxelles, que les Départements ministériels belges de l'Industrie et du Travail, de l'Intérieur et de l'Instruction publique, de la Guerre et des Chemins de Fer se montrent disposés, en principe, à se faire représenter par des délégués dans le Congrès qui se réunirait à Paris, en 1900, pour l'étude des questions relatives à la décimalisation du temps et de la circonférence.
J'ai l'honneur de vous transmettre cette information pour faire suite à mes communications antérieures sur le même objet (18 juin, 19 août et 28 décembre 1898, et 27 février 1899).
Agréez Monsieur le Président ...
Pour le ministre
Le chef

ADft 1p. F17 2921, Archives nationales françaises.

47.7 Poincaré à Georges Leygues

[28.04.1899][7]

Monsieur le Ministre,
C'est au mois de décembre prochain que tombe le centenaire de l'adoption du système métrique. Le Bureau des Longitudes, qui a pris autrefois une si grande part à cette réforme capitale, s'est demandé s'il ne conviendrait pas de célébrer d'une manière quelconque le souvenir de cet événement.
Peut-être toutefois jugerez-vous qu'il est préférable d'ajourner cette solennité au moment où l'Association Géodésique Internationale doit venir à paris pour son Congrès de 1900.
Si vous approuvez ces vues, Monsieur le Ministre, il y aurait lieu sans doute de consulter l'Académie des Sciences sur l'opportunité d'une pareille célébration.
Je suis avec respect, Monsieur le Ministre, votre dévoué serviteur.
Poincaré

ALS, 1p. F17 13571, Archives nationales.

7. La lettre porte le cachet "Cabinet du ministre, 28 avril 1899".

47.8 Poincaré à Georges Leygues

[05.05.1899][8]

Monsieur le Ministre,
Le Bureau des Longitudes m'a chargé d'appeler votre bienveillante attention sur les éphémérides et instructions nautiques qui viennent d'être publiées par M. le Commandant Guyon et distribuées par M. le Ministre de la Marine sur divers bâtiments en vue d'expériences relatives à la décimalisation du temps et de la circonférence. Ces expériences doivent servir de base aux discussions du Congrès International qui doit se réunir en 1900 pour discuter cette question. Un exemplaire de ces éphémérides vous sera adressé par M. le Commandant Guyon. Peut-être un plus grand nombre d'exemplaires vous seront-ils nécessaires en vue de communications à divers corps ou à diverses personnes ; dans ce cas ces exemplaires seraient à votre disposition car on en a tiré environ 300.
Vous avez bien voulu nous donner connaissance des réponses de divers gouvernements étrangers au sujet de ce projet de Congrès. Si, comme il est probable, ces réponses vous font persister dans l'intention de le réunir, le Bureau des Longitudes est à vos ordres pour aider en ce qui le concerne à l'organisation de ce Congrès.
Je suis avec respect, Monsieur le Ministre, votre dévoué serviteur.
Poincaré

ALS 3p. F17 2921, Archives nationales françaises.

47.9 H. Poincaré. Note sur les observations en géodésie

10 Mai 1899

Note de M. H. Poincaré

On peut faire en géodésie trois sortes d'observations :
1° les observations géodésiques proprement dites qui nous font connaître la forme géométrique du globe.
2° Les nivellements qui font connaître la hauteur du sol au dessus du géoïde.
3° Les observations du pendule.
Les trois séries d'observations sont solidaires, et si deux d'entre elles étaient complètes et parfaitement précises, la troisième deviendrait inutile.
Si en effet on développe en séries de Laplace la hauteur du sol au dessus du géoïde, celle du géoïde au dessus de l'ellipsoïde de Clarke, et l'intensité de la pesanteur, il y a entre les trois coëfficients correspondants des trois développements une relation linéaire très simple.
On peut à l'aide de cette relation vérifier si l'explication des anomalies de la pesanteur proposée par M. Lallemand et qui paraît au premier abord séduisante est suffisante pour

8. Le manuscrit porte un tampon du Ministère de l'Instruction publique et des Beaux-Arts : "Enregistrement 5 MAI 99". Il comporte en outre une annotation au crayon de main inconnue : "dossier à M. de S^{t} Arroman".

en rendre compte : on reconnaît qu'il n'en est rien ; il est donc nécessaire d'admettre avec M. Faye, un déficit de matière sous les continents et un excédant sous les Océans. [9]
Si la formule proposée pour le pendule par M. Faye était tout à fait exacte, le géoïde ne différerait pas de l'ellipsoïde. Mais cette formule n'est qu'approchée sur les continents et n'est plus exacte sur les mers.
On voit par ces considérations que les observations du pendule nous donneraient une connaissance plus exacte de la figure de la Terre que les observations géodésiques ; à une condition toutefois, c'est que les observations fussent faites sur toute la surface du globe systématiquement et avec des instruments aussi semblables que possible.
Il y aurait donc intérêt à ne pas abandonner les expériences projetées par le Bureau pour la comparaison des différents systèmes de pendule ; et de les faire reprendre aussitôt que la campagne d'été de M. Janssen au Mont Blanc sera terminée et que le pendule de Sterneck redeviendra disponible. [10]

AD 2p. Registre des séances du Bureau des longitudes, séance du 10.05.1899 (annexe), Archives du Bureau des longitudes, Paris.

47.10 Charles Henry Davis à Poincaré

Washington, D. C., May 17, 1899 [11]
U.S. NAVAL OBSERVATORY, GEORGETOWN HEIGHTS
Captain, U.S.N., Superintendent [12]

In anticipation of the total eclipse of the sun, May 28, 1900, the United States Navy Department has arranged with the Secretary of the Treasury to have admitted free of duty the instruments of foreign astronomers who may come to this country to observe the eclipse. [13] To this end, astronomers abroad who contemplate an expedition to the United States are invited to notify the Superintendent of the Naval Observatory of the probable date of their arrival, with the name of the port at which they propose to disembark. The Navy Department will forward to the consuls of the different countries to which these observers belong, stationed at the ports in the United States at which the gentlemen shall arrive, a letter stating their purpose in traveling, which letter be countersigned by the consul, and presented to the collector at the port as a proof of their identity. Upon this the collector will extend all proper facilities for the speed delivery of the instruments in question, free of duty and charges. The Superintendent of the Observatory will be glad to hear from each of the proposed expeditions, in order that he may render such assistance as lies in his power. The path of totality extends through a thickly settled portion of the country, including some principal cities. Facilities for transportation are excellent, but it

9. Faye 1886a, 1886b, 1886c 1886d.
10. À propos du pendule de Von Sterneck, voir Poincaré à Janssen (§ 3-27-3).
11. The letter was received by the Bureau by 07.06.1899 at the latest, according to the annotation: "Séance du 7 juin 1899".
12. Charles Henry Davis (1845–1927) était *superintendent* à l'Observatoire naval depuis 1897. Il fut membre de la Société philosophique de Washington, et de la Société astronomique de Mexique (Cattell 1921, 167).
13. Voir le rapport de Bigourdan (1900b).

is recommended that instruments be securely packed and marked "Delicate instruments — handle with care." The climate at that season is warm. The chances for clear weather are good. Full information regarding routes of travel to proposed points, and other particulars, can best be obtained through consuls. Through the regular diplomatic channels, notice should be conveyed to the local authorities of the city or town selected as a post of observation. This Observatory will issue a pamphlet of instructions, containing large scale maps showing path of totality.
C. H. Davis

TLS. X5 D2, Observatoire de Paris.

47.11 Georges Leygues (cabinet) à Poincaré

PARIS, LE 6 Juin 1899
MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE DES BEAUX-ARTS ET DES CULTES — MINUTE
Objet poste astronomique de Zi-Ka-Wei

M. le Président,
M. le Ministre [14] vient de me transmettre copie d'une note adressée à M. le Consul général de France à Shang-haï par le Père de Beaurepaire-Louvagny, des pères de Jésuites de Zé-Ka-Wei, sur le poste astronomique de cette localité et le projet d'établissement d'un nouvel observatoire à Zo-Cé. [15] J'ai l'honneur de vous communiquer le document dont il s'agit. Agréer.
P[our] le M[inistre]

ADft 1p. F17 13054, Archives nationales françaises.

14. Il s'agit du ministre des Affaires étrangères, Gabriel Hanotaux, qui a transmis à Leygues une note que lui a adressée le Consul général de France à Shanghaï. En effet, dans une lettre datée du 05.06.1899, Leygues remercie Hanotaux de cette communication qu'il a fait parvenir au président du Bureau des longitudes (F17 13054, Archives nationales).

15. La lettre est accompagnée d'une "Note sur l'observatoire astronomique Zi-ka-wei Zo-cé", adressée à Leygues par le Conseiller d'Etat directeur (signature illisible). Ce document explique que les pères jésuites de Zi-ka-wei viennent d'acquérir un terrain situé à 30 km de Shanghaï en vue d'établir un nouvel observatoire astronomique qui s'ajoutera à l'observatoire astronomique en place à Zi-ka-wei. Le nouvel observatoire sera élevé sur l'une des rares collines avoisinant Shanghaï, ce qui devrait permettre de rendre de meilleurs services à la science météorologique et à la navigation en Extrême orient. Le père de Beaurepaire-Louvagny, qui sera le directeur du nouvel observatoire, envisage de l'outiller avec une lunette équatoriale photographique de grandes dimensions. Il a donc remis au Consul général de France à Shang-haï une note détaillée sur le site de Zo-cé, ainsi que sur l'appareil (F17 13054, Archives nationales).

47.12 Annibale Riccò à Poincaré

CATANIA, LE 21 Juin 1899[a]
R. OSSERVATORIO DI CATANIA — SEZIONE ASTROFISICA — DIREZIONE — NUM. 481
Directeur de l'Obs. de Catane[16]
OGGETÒ Position de l'Observatoire de Catane

Monsieur le Président du Bureau des Longitudes, Paris

Monsieur,
J'ai l'honneur de vous informer que nous avons fait le calcul préliminaire des observations faites par M. Zona et moi en 1894 pour la détermination de la difference de longitude entre Catane (Lunette des passages) et Palerme (Cercle Méridien) ; il est resulté :

$$6^{m}.54^{s},8$$

ce qui donne pour longitude de Catane

$$12°.44'.56'' = 0^{h}.50^{m}.59^{s},7 \text{ E. Paris}$$

Je vous rappelle aussi que la latitude de Catane (lunette des passages), d'après la determination de M. Zona en 1894, est

$$+\,37°.30'.13'',25$$

Agréez, Monsieur, les sentiments de haute considération de Votre très dévoué
A. Riccò

ALS 1p. X5 R3, Observatoire de Paris.

16. Annibale Riccò (1844–1919) fit ses études à *Politecnico di Milano* et à l'Université de Modena. Il a enseigné les mathématiques et la physique à Modena, où il fut également assistant à l'Observatoire météorologique. En 1878, il est devenu professeur de physique à l'école d'ingénieurs de Naples et, deux ans plus tard, à Palerme. Il a obtenu en 1890 la première chaire d'astrophysique en Italie à l'Université de Catane, où il fut recteur entre 1898 et 1900. Riccò fut membre de l'*Accademia nazionale dei Lincei*, de l'*Accademia Gioenia* et de l'Union astronomique internationale (Chinnici 1999, 454–456).

a. Le manuscrit porte une annotation à l'encre rouge de main inconnue :"Séance du 28 Juin 1899".

47.13 Poincaré à Georges Leygues

PARIS, LE 28 Juin 1899 [17]

BUREAU DES LONGITUDES — DIRECTION de l'Enseignement Supérieur – 2e Bureau [b]

À Monsieur le Ministre de l'Instruction publique et des Beaux Arts

Monsieur le Ministre,
Conformément au Décret du 30 avril 1899, instituant un certain nombre de *Correspondants* du Bureau des Longitudes, soit en France, soit à l'Étranger :
Le Bureau, par décision en date du 21 de ce mois, a l'honneur de vous proposer de conférer le titre de *Correspondant* du Bureau des Longitudes, à Mr S. Newcomb, célèbre astronome Américain, résidant à Washington (E.U.), Associé Étranger de l'Institut de France. [18]
Veuillez agréer, Monsieur le Ministre, l'hommage de mon profond respect.
Le Président du Bureau des Longitudes,
Poincaré

ALS 1p. F17 13570, Archives nationales de France.

47.14 Georges Leygues (cabinet) à Poincaré

Paris, le 29 septembre 1899

MINISTERE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE DES BEAUX-ARTS – MINUTE

Objet : Projet de Congrès à Paris, en 1900 pour l'étude de la question de décimalisation du temps et de la circonférence. Réponses du Portugal
À M. le Président du Bureau des Longitudes

Monsieur le Président,
Monsieur le Ministre des Affaires étrangères vient de m'annoncer que le gouvernement Portugais [pressenti ?] à titre officieux par le Ministre de la République à Lisbonne, a répondu qu'il ne verrait aucun inconvénient à se faire représenter, s'il y était invité, au Congrès projeté en vue d'études sur la question de la décimalisation du temps et de la circonférence. [19]
J'ai l'honneur de vous transmettre cette information pour faire suite à ma lettre du 13 avril dernier rappelant mes communications antérieures sur le même objet.
Agréez Monsieur le Président

17. Le manuscrit n'est pas de la main de Poincaré ; il porte un tampon de réception : "Ministère de l'Instruction publique — Direction de l'Enseignement supérieur — Arrivé le 30 Juin 1899 — N° 180 — Au 2ème Bureau".

18. Simon Newcomb obtiendra le titre de Correspondant par arrêté du 03.07.1899 (F17 13570, Archives nationales). Il remerciera Poincaré par lettre du 30.09.1899 (§ 3-37-3).

19. Poincaré a présidé la commission chargée de l'étude des projets de décimalisation du temps et de la circonférence depuis 1897.

b. Variante : L'entête d'origine est barré : "DIRECTION — ~~DU SECRÉTARIAT ET DE LA COMPTABILITÉ — 1ER~~ BUREAU".

Pour le ministre
Le chef

ADft 1p. F17 2921, Archives nationales.

47.15 Georges Leygues (cabinet) à Poincaré

PARIS, LE 7 NOV 1899
MINISTERE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE DES BEAUX-ARTS — MINUTE

Objet : Décimalisation du temps et de la circonférence. Projet de Congrès. Réponses des Gvts de Suède et de Norvège.
À M. le Président du Bureau des Longitudes

Monsieur le Président,
Le Ministère des Affaires étrangères vient de m'annoncer que notre ministre à Stockholm a prévenu les gouvern[ements] des Royaumes Unis de Suède et Norvège sur l'accueil qu'il serait disposé à donner à une demande de participation éventuelle à un Congrès international chargé d'étudier la question de la décimalisation du temps et de la circonférence.
De la réponse du Ministre Royal des Aff[aires] Ét[rangères], il résulte que les autorités scientifiques compétentes des Royaumes Unis, appelés à donner leur avis sur la matière, se sont montrés peu favorables à la réforme en question, et que, dans ces conditions, il ne paraît pas possible de donner par avance, l'assurance de la participation de la Suède et de la Norvège au Congrès projeté.
J'ai l'honneur de vous transmettre cette information pour faire suite à mes communications antérieures sur le même objet.
Agréez M. le Président [illisible]
P[our] le M[inistre]
Le Directeur

ADft 2p. F17 2921, Archives nationales françaises.

47.16 Poincaré à Georges Leygues

PARIS, LE 27 Décembre 1899 [c]
BUREAU DES LONGITUDES — DIRECTION — De l'enseignement supérieur — 2e BUREAU

À Monsieur le Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts.

Monsieur le Ministre,
J'ai l'honneur de vous annoncer que, conformément à votre dépêche du 16 de ce mois, le Bureau des Longitudes a désigné pour l'année 1900, par voie de scrutin :

c. Le manuscrit n'est pas de la main de Poincaré ; il porte un tampon de réception peu lisible : "[MINISTÈRE DE] L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR — ARRIVÉ LE 28 Xbre 1899— N° 474 — AU 2E BUREAU".

Président, M^r Faye,
Vice-Président, M^r le Commandant Guyou,
Secrétaire, M^r Lippmann.[20]

Je vous prie, Monsieur le Ministre, de vouloir bien agréer ces choix et les soumettre à l'approbation de M^r le Président de la République.
Veuillez agréer, Monsieur le Ministre, l'hommage de mon profond respect.
Le Président du Bureau des Longitudes,
Poincaré

ALS 1p. F17 13570, Archives nationales françaises.

47.17 Georges Leygues à Poincaré

PARIS, LE 30 DEC 1899
MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS — MINUTE

Objet : Centenaire de l'adoption définitive du système métrique

À M. Poincaré, président du Bureau des Longitudes, Paris

Monsieur le Président,
Vous avez bien voulu m'entretenir d'un projet de célébrer le souvenir de l'adoption définitive du système métrique dont le centenaire tombe au mois de décembre de la présente année. Ainsi que vous le suggériez, j'ai consulté à ce sujet l'Académie des Sciences de l'Institut de France qui vient de me communiquer un avis favorable.
J'ai donc l'honneur de vous annonce que j'adopte en principe la proposition que vous m'avez soumise. Toutefois, j'estime avec vous, et tel est aussi le sentiment de l'Académie qu'il serait préférable d'ajourner cette solennité au moment où l'Association géodésique internationale se réunira à Paris, pour le Congrès de 1900.
Agréez, M. le Président, l'e[xpression de mes] s[entiments] e[xtrêmement] d[évoués]
Le M[i]n[i]s[tr]^e

ADft 1p. F17 13571, Archives nationales françaises.

47.18 Poincaré à Raoul Blaise de Saint-Arroman

[Entre fin décembre 1899 et le 4 janvier 1900]

Cher Monsieur,
Monsieur Boltzmann, Professeur à l'Université de Vienne, désire qu'on lui envoie un exemplaire de mon rapport sur la décimalisation de l'heure.[21] Pouvez-vous lui faire cet envoi.[22]

20. Hervé Faye, Émile Guyou, Gabriel Lippmann.

21. Poincaré 1895.

22. Le manuscrit porte trois annotations, de trois mains inconnues, qui indiquent que le souhait de Poincaré a été exaucé. La première annotation : "M. Goublet m'en parler d'urgence". La deuxième : "Répondre par un petit mot, signature du chef, que l'envoi a été fait". La troisième : "fait".

Votre bien dévoué,
Poincaré

ALS 1p. F17 2921, Archives nationales françaises.

47.19 Raoul Blaise de Saint-Arroman à Poincaré

Paris, le 4 janvier 1900
Ministère de l'instruction publique et des Beaux-Arts — minute — 5e Bureau
M. de St-Arroman

À M. Poincaré, membre de l'Institut

Monsieur le Président et cher Maître,
Je suis heureux de vous annoncer que nous adressons aujourd'hui même à M. Boltzmann, Prof. à l'Université de Vienne, un ex[emplaire] de votre rapport sur la décimalisation de l'heure.[23]
Ainsi se trouve réalisé le désir que vous aviez bien voulu m'exprimer.
Agréez, M., l'expr. de mes sentiments les plus dist. et dév.

ADft 1p. F17 2921, Archives nationales françaises.

47.20 H. Poincaré : Rapport sur une lettre de Helmert

[Vers 1900]

Observations sur la Lettre de M. Helmert[24]

Il est évident d'abord qu'il y a un grand intérêt de multiplier autant qu'on le pourra les mesures de latitude et d'azimuth et qu'il importe de donner satisfaction à M. Helmert dans la mesure du possible. Je dois cependant faire quelques observations.

Mesures d'Azimuths

La plus importante est celle qui se rapporte aux mesures d'azimuth.[25] Soit η la déviation de la verticale vers l'Est ; δL les différences de longitude ; δA celles d'azimuth ; λ la latitude ; il viendra :

$$\delta A = \delta L \cdot \sin\lambda; \qquad \eta = \delta L \cdot \cos\lambda.$$

Or λ sera très petit. Donc pour $\lambda = 1°$ par exemple, 1" d'erreur sur l'azimuth correspondra à une erreur de 57" sur η et à une erreur de $3^s, 3$ sur la longitude. Pour $\lambda = 3°$,1"

23. Poincaré a remis son rapport “sur les résolutions de la commission chargée de l'étude des projets de décimalisation du temps et de la circonférence” le 07.04.1897 (Poincaré 1952). À propos de ce rapport, voir Galison (2003, 167–168).

24. La lettre de Helmert n'a pas été retrouvée.

25. À ce sujet, voir Helmert (1894).

d'erreur sur l'azimuth correspondra encore à une erreur de 19" sur η et de $1^s, 1$ sur la longitude.
Nous ne devons donc pas nous étonner si M. Oudemans dans sa triangulation de Java, sous des latitudes très faibles, a trouvé que les déviations de la verticale déduites des azimuths sont en moyenne 3 ou 4 fois plus grandes que celles déduites des longitudes (pas pour les mêmes points, il est vrai).[26]
Il faut observer en effet que la déviation de la verticale n'est pas la seule cause de la différence entre les azimuths géodésique et astronomique. Il faut tenir compte en outre de la cause suivante ; la projection d'une ligne géodésique du géoïde sur l'ellipsoïde, n'est pas toujours une ligne géodésique de l'ellipsoïde. Il est difficile d'évaluer l'effet de cette seconde cause ; mais il est clair que si elle devient sensible, ce qui arrive peut-être dans les pays accidentés, les résultats se trouveront viciés.

Influence sur les Angles horizontaux

M. Helmert insiste surtout sur l'erreur produite dans les angles horizontaux des triangles par la déviation de la verticale. Il importe d'abord de se rendre compte de la portée de cette erreur.
Nous avons un réseau de triangles dans l'espace ; nous pouvons nous proposer : 1° Ou bien de le projeter sur le géoïde par des normales au géoïde ; 2° Ou bien de le projeter sur un ellipsoïde de référence par des normales à cet ellipsoïde.
Dans le 1^er^ cas, nous avons mesuré un arc de géoïde, dans le 2^d^ cas un arc d'ellipsoïde.
Dans le 1^er^ cas, on ne doit pas faire la correction de M. Helmert ; dans le 2^d^ cas, elle est nécessaire.
Quelle est d'abord la grandeur de cette correction.
Soit OV la direction de la verticale observée ; (normale au géoïde) ; OV' la direction de la verticale dite vraie (normale à l'ellipsoïde) ; OA une droite menée perpend. à OV dans le plan VOV' ; OB une droite de visée quelconque.
Soit δ l'angle VOV' (déviation totale de la verticale) ; $r/2 + z$ l'angle VOB ; ω l'angle BOA. On mesure le dièdre AOV, BOV au lieu du dièdre AOV', BOV'.
Soit V et V' les deux dièdres en question ; on trouve :

$$V' - V = \delta \sin V \operatorname{tg} z.$$

Pour une déviation de 10", une différence de niveau entre les deux stations de $1000^{\text{mètres}}$, distance 50^{km}, l'erreur maximum sera de 0",2.
Si donc la bissectrice de l'angle mesuré est perpendiculaire au plan de la déviation, il n'y aura pas d'erreur sur cet angle. Ce n'est donc pas quand l'un des côtés sera dirigé suivant la méridienne que l'on pourra se dispenser d'observer les azimuths, mais quand la bissectrice de l'angle sera dirigée suivant la méridienne.

Étude de l'arc de géoïde

Maintenant quel inconvénient y aura-t-il si nous mesurons l'arc de géoïde au lieu de mesurer l'arc d'ellipsoïde, c'est-à-dire si nous ne faisons pas la correction en question ?

26. Oudemans 1875.

Ce qui nous importe, c'est la forme du géoïde qui est réel, et non celle de l'ellipsoïde qui est fictif. Nous serions donc tentés de conclure que la correction proposée est tout à fait inutile. Pourquoi une pareille conclusion serait-elle prématurée ?
Considérons un arc de courbe que pour plus de simplicité je supposerai plan.
Soit s la longueur d'arc comptée à partir d'une origine quelconque, R le rayon de courbure, α l'angle de la normale avec une direction fixe. Nous mesurons les deux valeurs extrêmes de α, qui sont α_0 et α_1 et la longueur totale de l'arc :

$$S = \int R d\alpha$$

Nous avons besoin pour connaître réellement la forme de l'arc de connaître les différences des coordonnées des deux extrémités, c'est-à-dire les intégrales

$$X = \int R \cos\alpha d\alpha; \qquad Y = \int R \sin\alpha d\alpha.$$

Alors la question se pose ainsi.
La connaissance de S est-elle suffisante pour nous faire connaître X et Y avec assez d'approximation ? Si R peut être regardé comme constant, on aura simplement

$$X = S\frac{\sin\alpha_1 - \sin\alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}; \qquad Y = S\frac{\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}$$

Mais si R est variable, et surtout si les variations sont systématiques, de telle façon que la valeur moyenne de R soit plus grande dans une moitié de l'arc que dans l'autre, cela ne sera plus vrai.
En réalité nous aurons des mesures de α en 9 points, de sorte que notre arc sera divisé en 8 arcs partiels. Pour que les différences soient sensibles, il faudrait donc que les variations de R fussent pour ainsi dire systématiquement irrégulières et que par exemple $R - R'$ fût plus grand dans la 2[de] moitié de chacun des arcs partiels que dans la 1[re] moitié ;[d] en appelant R le rayon de courbure véritable et R' le rayon de courbure déduit des 9 observations de latitude ; (nous pourrions représenter R' par un polynôme du 7[e] degré en s dont on calculerait les coeff. de façon à satisfaire aux 9 observations de latitude).
De pareilles variations sont-elles à craindre ? Le seront-elles encore après qu'on aura tenu compte des attractions locales (si on juge à propos de le faire), remplaçant ainsi le géoïde réel, par un géoïde fictif parfaitement défini d'ailleurs, mais moins irrégulier ? Ce sont là des questions qu'il est difficile de trancher *a priori* et c'est une des raisons pour lesquelles il y a lieu de donner satisfaction autant que possible au désir de M. Helmert.

Fermeture des triangles

M. Helmert insiste sur un autre avantage de sa correction ; les triangles, dit-il, se fermeront mieux. Examinons ce point.
L'excès sphérique est égal à la surface du triangle divisé par la surface du triangle trirectangle tracé sur la sphère équivalente au géoïde, c'est-à-dire à la sphère dont le rayon

d. Variante : "moitié ; ~~et que cette différence subsiste après qu'on aurait fait les corre~~".

est moyen proportionnel entre les deux rayons de courbure principaux du géoïde. Si nous ne connaissons pas bien ces deux rayons de courbure, il en résultera une incertitude sur l'évaluation de cet excès sphérique.

Soit un triangle de 1000 kilomètres-carrés, son excès sphérique sera de 6" environ. L'erreur sur cet excès, c'est-à-dire sur la fermeture du triangle, sera due à l'incertitude sur le rayon de courbure moyen du géoïde. Une incertitude de $1/100$, plus grande que la différence entre le rayon polaire et le rayon équatorial, donnerait sur l'excès une erreur de 0",12.

Mettons les choses à l'extrême. Supposons qu'à l'une des stations la verticale soit déviée de 10" et qu'à la station suivante distante de 40^{km}, la déviation soit nulle. L'erreur sur le rayon de courbure sera de $1/130^{\text{e}}$ environ et l'incertitude sur la fermeture de 0",10.

Cela ne serait pas négligeable, mais outre que de pareils écarts sont bien peu vraisemblables, ils ne pourraient se produire qu'en vertu d'attractions toutes locales, dues à des masses apparentes, et que l'on pourrait suffisamment corriger pour cet objet spécial.

L'influence sur l'erreur de fermeture des triangles sera donc très faible et cette raison me paraît moins importante que la précédente.

Influence sur la Réduction des Angles au Niveau de la Mer

Soit z l'angle d'une direction avec l'une des lignes de courbure, R et R' les deux rayons de courbure principaux du géoïde, h l'altitude ; il faut faire subir à la direction une correction

$$\frac{h}{2}\sin 2z\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right).$$

Cette correction pourra se trouver altérée :

1° s'il y a une incertitude sur R. Pour une incertitude de $1/130$ comme tout à l'heure, l'erreur sur la correction serait de 0",4 (altitude 3000 mètres) et notablement plus grande que la correction elle-même. Mais un pareil écart est tout à fait improbable.

2° si la direction des lignes de courbure est mal connue. Pour la connaître, il faudrait avoir non seulement la déviation vers le N, mais la déviation vers l'E (soit par les azimuts, soit par un autre procédé). (Je ne veux pas dire que la direction de la ligne de courbure soit celle de la méridienne soit géodésique, soit astronomique ; elle dépend de la différence des déviations aux 3 sommets du triangle.)

D'ailleurs cette connaissance de la déviation vers l'E serait nécessaire aussi si l'on voulait tenir compte de l'incertitude sur R. Il serait illusoire en effet de faire la correction sur R, sans faire celle sur R' qui peut être égale et de signe contraire. Dans ces conditions, et vu la difficulté de mesurer la déviation vers l'E, il serait illusoire de se préoccuper de cette cause d'erreur ; elle est sans doute très faible, et on peut l'éliminer en ramenant la triangulation non au niveau de la mer, mais au niveau du géoïde d'altitude 2500 m par exemple pour ramener ensuite au niveau de la mer l'arc de méridien d'abord calculé sur ce géoïde.

Influence sur la Réduction des Bases au Niveau de la Mer.

Si les verticales aux deux extrémités d'une base sont déviées, il en résulte une erreur dans la réduction de cette base au niveau de la mer.[e] Par exemple, une déviation de 1" à l'une des extrémités (la verticale restant inaltérée à l'autre extrémité) produirait une erreur d'un peu plus d'un centimètre. Il n'y a pas beaucoup lieu de s'en préoccuper parce que comme je l'expliquais tout à l'heure, on pourra tout rapporter, bases et triangles, au géoïde d'altitude 2500 jusqu'à la fin du calcul où on ramènera l'arc de méridien calculé au niveau de la mer.

Influence sur le Nivellement Géodésique

C'est là ce qu'il y a de plus grave. Si l'on mesure une différence de hauteur par des distances zénithales réciproques et simultanées ; si z et z' sont les deux distances zénithales observées, z_1 et z_1' les distances zénithales vraies, α l'angle des deux verticales on aura à peu près :

$$z_1 + z_1' = \pi + \alpha; \qquad z_1 = z + \frac{\pi + \alpha - z - z'}{2}.$$

Une erreur de 10" sur α produira une erreur de 5" sur z_1.
Cela n'aurait pas d'importance si on pouvait fermer le triangle ; et l'erreur se corrigerait à peu près ; mais on ne pourra pas fermer le triangle par des observations réciproques et simultanées, ces observations ne pouvant se faire que sur une ligne en zig-zag.

Grandeur probable des écarts

J'ai admis dans ce qui précède un écart de 10" sur un côté de 40^{kilm} ; cela paraît énorme ; malheureusement nous ne pouvons pas affirmer que cela soit impossible. J'ai relevé dans la triangulation de Java des écarts du même genre sur diverses paires de stations, contenues dans le tableau suivant, où la première colonne contient la distance des deux stations en minutes d'arc, la seconde colonne la différence des deux déviations de la verticale dans le sens du méridien (déviation vers le Nord déduite des mesures de latitude) ; cette différence est exprimée en secondes d'arc. Enfin la troisième colonne contient le rapport des nombres de la 2[de] colonne à ceux de la 1[re]. Je rappellerai que ce rapport avec l'écart que j'ai admis plus haut (10" sur 40 Kilomètres) serait d'environ 1/130.

21	25	$\frac{1}{50}$
25	27	$\frac{1}{56}$
13	7	$\frac{1}{110}$
7	12	$\frac{1}{35}$
20	25	$\frac{1}{50}$
55	34	$\frac{1}{100}$
19	33	$\frac{1}{34}$

Ces écarts sont énormes, et encore plus grands que ce que j'avais admis. Peut-être seraient-ils diminués si on faisait la correction topographique pour tenir compte des attractions locales.
D'un autre côté on doit observer que la chaîne de Java est presque perpendiculaire au méridien, tandis que celle des Andes est peu inclinée sur le méridien. On doit donc s'attendre à ce que les déviations N.S soient plus petites qu'à Java.
En revanche les déviations E.O seront sans doute plus grandes et ce sont celles qu'il est le plus difficile de mesurer.

e. Variante : "de la mer. ~~Si la base a 8000 mètres~~".

Nous pouvons examiner encore, en relevant les résultats de la triangulation de Java, ce qu'elle a donné pour les déviations vers l'E. Les déviations déduites des azimuths varient de -63 à $+46$ quand on va de l'extrémité occidentale à l'extrémité orientale de l'île ; celles qui sont déduites des longitudes varient de -8 à $+9$.

Évidemment les premières sont trop fortes pour une raison systématique quelconque, probablement celle que j'indiquais au début. Quant aux dernières, elles conduisent à un rapport de $1/1900$.

La divergence entre les résultats tirés des azimuths et ceux qu'on tire des longitudes me frappe. Si elle est due à la cause que j'expliquais au début, nous devons observer qu'elle sera plus grande encore à l'Équateur puisque la latitude pour Java varie de 6° à 9°, et qu'à Quito elle variera entre 0° et $\pm 3°$.

Si je relève maintenant les déviations dans le volume que vient de publier le Geodetic Survey des États-Unis (arc de parallèle de 39°) je vois que les déviations sont en général beaucoup moindres qu'à Java et qu'elles ont une variation plus régulière, de sorte que la différence des déviations en deux stations voisines a des chances de ne pas être considérable. Par exemple sur 109 stations de latitude, je n'en vois que 2 qui dépassent 10" et la plus grande est de 12". Pour les azimuths il n'y a qu'une dizaine de stations sur 73 où la différence dépasse 10", pour les longitudes il n'y en a 8 sur 37, la plus grande est de 24". Il semble qu'on puisse en rendre assez bien compte par les attractions des masses visibles.

En fait le Geodetic Survey paraît n'avoir fait aucune des corrections dont nous venons de parler et tout porte à croire qu'elles auraient été tout à fait négligeables.

Si donc nous étions sûrs de nous trouver dans les mêmes conditions qu'aux États-Unis, nous n'aurions pas à nous préoccuper de toutes ces difficultés.

Conclusions

Je crois que si cela ne doit pas entraîner un trop grand surcroît de dépenses, il y a lieu de donner satisfaction à M. Helmert en ce qui concerne les mesures de latitude :

1° Parce qu'en nous y refusant, nous donnerions toujours prise à ses critiques.

2° Parce que dans tous les cas, ces mesures nous donneront d'importants renseignements sur les attractions locales et la forme du géoïde.

3° Parce que, en ce qui concerne la valeur définitive de l'arc à mesurer, nous ne sommes pas sûrs que les corrections proposées soient insensibles. Cela est probable, mais nous ne pourrons le savoir qu'une fois ces mesures faites.

En ce qui concerne les azimuths je serai plus réservé ; je crains fort que ce qu'on en tirera ne soit qu'illusoire.

Enfin pour les observations pendulaires, il est clair qu'on ne peut que gagner à les multiplier ; et qu'il pourrait être avantageux de les distribuer comme le propose M. Helmert ; mais cela sera-t-il possible, étant données les conditions locales, je ne le crois pas et en tout cas on ne pourra en juger que sur place.

AD 7p. Collection particulière, Paris 75017.

47.21 Poincaré à Aristide Briand

PARIS, LE 11 juin 1906 [27]
INSTITUT DE FRANCE – ACADÉMIE DES SCIENCES

À Monsieur le Ministre de l'Instruction Publique, des Beaux Arts et du Culte

Monsieur le Ministre,
Les travaux entrepris depuis 1901 par la Mission géodésique française chargée de la mesure de l'Arc de Méridien de Quito vient de prendre fin. [28]
La Commission de l'Académie à laquelle incombait le soin de contrôler les opérations exécutées en Équateur et au Pérou par les officiers du service géographique de l'armée a suivi en détail leurs travaux, et elle ne peut que louer leur compétence scientifique et admirer l'énergie, le courage et la constance qu'ils ont dû déployer pour surmonter les difficultés de tout ordre qu'ils ont rencontrées.
Trois des membres de la Mission : le Commandant Massenet et les soldats Roussel et Pressé ont succombé aux suites de leurs fatigues ; le Commandant Maurain rentré en France, épuisé par la rude vie de la Cordillère a dû prendre prématurément sa retraite.
L'examen des observations fait prévoir déjà que la publication des méthodes employées et des résultats obtenus ajoutera largement au renom scientifique de notre pays.
L'Académie des Sciences croit donc devoir vous demander d'appuyer auprès du Ministre de la Guerre les demandes de récompenses qui pourront être faites en faveur du Chef, des officiers et du personnel secondaire de la Mission en Équateur.
Veuillez agréer, Monsieur le Ministre, l'assurance de ma haute considération.
Le Président de l'Académie des Sciences,
Poincaré

ALS 2p. F17 13062, Archives nationales

47.22 Poincaré à Léon Bourgeois

[Vers le mois de septembre 1906]
HÔTEL BRISTOL – CONSTANTINOPLE – PROPR. L. ADAMOPOULOS

Monsieur le Ministre,
J'ai l'honneur de vous accuser réception du passeport diplomatique que vous avez bien voulu me faire m'adresser en vue de ma mission de Budapest.
Veuillez agréer, Monsieur le Ministre, l'assurance de mon respectueux dévouement.
Poincaré

ALS 1p. F17 13054, Archives nationales.

27. Deux copies du texte de cette lettre se trouvent aux archives de l'Académie des sciences. L'une d'entre elles porte l'en-tête "Ministère de la Guerre – Service Géographique de l'Armee – Section Analyse" (Dossiers généraux, N° 18, Commission du méridien de Quito). L'autre se trouve dans le registre de correspondance "Copie de lettres 1902–1909".

28. Sur cette mesure voir Schiavon (2006).

47.23 Aristide Briand (cabinet) à Poincaré

PARIS, LE 4 SEPT 1906
MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE DES BEAUX-ARTS ET DES CULTES
MINUTE
OBJET Conférence de Buda-Pecth — Avis d'indemnité

Monsieur,[29]
J'ai l'honneur de vous annoncer, que par un arrêté en date du 31 août dernier, je vous ai attribué une somme de huit cent francs (800), à titre d'indemnité pour les frais de votre délégation à la Conférence de la Comm. géod. int^{ale} à Buda Pecth.
Vous serez ultérieurement avisé de l'ordonnancement de cette somme.
Ag[réer] elpd
P[our] le M[inistre] — Le chef

ADft 1p. F17 13054, Archives nationales françaises.

47.24 Aristide Briand (cabinet) à Poincaré

PARIS, LE 5 SEPT 1906
MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE DES BEAUX-ARTS ET DES CULTES
MINUTE
Objet Conférence de Buda-Pecth — Envoi d'un passeport diplomatique

Monsieur,[30]
M. le M[inistre] des Aff[aires] Ét[rangères] m'adresse aujourd'hui même le passeport diplomatique que je lui avais demandé de v[ouloir] b[ien] mettre à votre disposition, afin de vous permettre de vous rendre sans difficultés à la Conférence que la Commission géodés. int^{ale} tiendra à Buda-Pecth, le 20 sept. courant.
J'ai l'honneur de vous transmettre ci-jointe cette pièce en vous priant de v[ouloir] b[ien] m'en accuser réception.
P[our] le M[inistre] — Le s/chef

ADft 1p. F17 13054, Archives nationales françaises.

29. La lettre était destinée à Anatole Bouquet de la Grye (membre de l'Institut et président de la Commission géodésique française), Henri Poincaré (membre de l'Institut), et Gaston Darboux (secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences).

30. La lettre était destinée aux membres de la Commission géodésique française : Anatole Bouquet de la Grye (président), Gaston Darboux, Henri Poincaré, Hanusse, Lallemand, ainsi qu'à l'ingénieur en chef du service hydrographique de la marine, Driencourt.

47.25 Aristide Briand (cabinet) à Poincaré

PARIS, LE 15 OCT 1906
MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS ET DES CULTES
MINUTE
OBJET Conférence de la Comm. géod. int^{ale} à Budapest

Monsieur, [31]
M. le M[inistre] des Aff[aires] Étrang[ères] vient de me communiquer le rapport que notre représentant à Budapest lui a adressé sur les travaux que la Conférence de l'Association géodésique int^{ale} a tenue dans cette ville, au mois de sept. dernier.
Il m'a été particulièrement agréable d'apprendre que les travaux de la délégation française avaient produit une impression considérable sur les savants étrangers réunis à cette occasion, et que votre participation à la Conférence avait contribué puissamment à augmenter la considération dont sont entourées à l'étranger les recherches des savants français.
Je suis heureux de saisir cette occasion pour vous adresser mes bien vives félicitations et vous faire parvenir l'expression personnelle de ma vive gratitude.
Le M[inistre]

ADft 1p. F/17/13054, Archives nationales françaises.

47.26 Aristide Briand (cabinet) à Poincaré

PARIS, LE 21 9^{bre} 1906
MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE DES BEAUX-ARTS ET DES CULTES
MINUTE

J'ai l'honneur de vous informer que le Comité consultatif des observatoires astronomiques de province se réunira le mardi 11 décembre prochain à 2^{h}½ au Ministère. [32]
[33]

Vous êtes prié de v[ouloir] b[ien] assister à cette réunion.
D^{r}

ADft 1p. F17 13572, Archives nationales françaises.

31. La lettre était destinée à Anatole Bouquet de la Grye (membre de l'Institut et président de la Commission géodésique française), Gaston Darboux (secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences), et Henri Poincaré.

32. Lettre adressée aux secrétaires perpétuels de l'Académie des sciences Marcelin Berthelot et Gaston Darboux, aux directeurs des observatoires Auguste Lebeuf (Besançon), Luc Picart (Bordeaux), Charles André (Lyon), Édouard Stephan (Marseille), Benjamin Baillaud (Toulouse), Léon Bassot (Nice), Charles Trépied (Alger), Maurice Lœwy (Paris), Jules Janssen (Meudon), au directeur du Bureau central de météorologie Eleuthère Mascart, au directeur de l'Enseignement supérieur Charles Bayet et à Henri Poincaré.

33. Le comité des observatoires fut créé par le décret du 27 novembre 1879. Dans son sein, les directeurs traitent avec le ministre des questions administratives dont le recrutement du personnel. En 1907, le comité devint le Conseil des observatoires astronomiques.

47.27 Poincaré à Gaston Doumergue

PARIS, LE 25 Janvier 1909 [f]
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE — BUREAU DES LONGITUDES
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR — 2E BUREAU

LE PRÉSIDENT DU BUREAU DES LONGITUDES À MONSIEUR LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS ~~ET DES CULTES~~

Monsieur le Ministre,
Le Bureau des Longitudes, désireux de mettre les Pouvoirs publics en garde contre la tendance, qui vient encore de se révéler, de ne pas respecter les règles fondamentales qui ont présidé à la formation du Système métrique, afin, en outre, de ne pas nuire au progrès manifeste que fait parmi les nations étrangères ce système si logique, vient de renouveler le vœu qui vous a été transmis par lettre du 27 Novembre 1907. Ce vœu a d'ailleurs été adopté par l'Académie des Sciences, le 16 Mars 1908, sur un rapport de M. Violle, Président du Bureau National des Poids et Mesures. [34]
Le Bureau des Longitudes se référant d'autre part aux communications qui lui ont été faites par M. Guillaume, Directeur Adjoint du Bureau international des Poids et Mesures, dans les séances des 9, 16 et 23 décembre 1908, et dont il a adopté les conclusions, émet de nouveau le vœu que la pièce de 25 centimes soit remplacée par une pièce de 20 centimes et qu'il ne soit émis aucune pièce de monnaie ni créée d'autre mesure qui ne soit conforme à la règle du double et de la moitié des unités du Système. [35]
Le Bureau des Longitudes serait heureux que vous voulussiez bien donner communication de ce nouveau vœu à M. le Ministre des Finances et à M. le Ministre du Commerce et de l'Industrie.
Pour le Président.
Le Vice-Président, [36]
Poincaré

ALS 1p. F17 13571, Archives nationales françaises.

47.28 H. Poincaré : Sur un projet de carte

[Entre le 11.02 et le 24.02.1909] [37]

Le Bureau des Longitudes,
Considérant qu'un projet des carte au 50000e avait déjà été approuvé en 1817 par une commission présidée par Laplace.

34. Jules Violle.
35. Charles-Édouard Guillaume.
36. Poincaré sera élu à la présidence du Bureau des longitudes deux jours plus tard, le 27.01.1909.
37. Note lue à la séance du 24.02.1909 du Conseil du Bureau des longitudes.

f. Le manuscrit porte un tampon du Ministère de l'Instruction publique et des Beaux-Arts : "CABINET 26 JANV 1909".

Que si ce projet avait été exécuté avant la création de notre réseau de chemins de fer, il aurait permis de réaliser sur les études de ce réseau des économies bien supérieures aux dépenses qu'il aurait entraînées, que ces économies peuvent être évaluées au moins à 5000 fr par kilomètre, soit à 200 millions pour l'ensemble du réseau.
Qu'un projet analogue a été repris en 1890 et doit coûter en tout environ 25 millions.
Qu'il assurera aux différents services publics des économies beaucoup plus importantes.
Que d'ailleurs son intérêt scientifique serait très considérable.
Que les avantages que l'on doit attendre d'une semblable carte deviendraient illusoires si l'exécution devait durer un trop grand nombre d'années.
Que les crédits actuellement affectés à ce travail étant inférieurs à 24000 francs, n'en permettraient pas l'achèvement avant un millier d'années.
Qu'il est urgent de remédier à un pareil état de choses, par une augmentation notable des crédits. [g]
Émet le vœu que le crédit annuel actuellement affecté à la carte au 50000e soit augmenté progressivement et dans une large mesure, de manière à assurer l'achèvement dans un délai raisonnable.

AD 3p. Registre des séances 1909, Bureau des longitudes.

47.29 Poincaré à Gaston Doumergue

[14.04.1909] [h]

Monsieur le Ministre,
D'après le récent décret qui a réglé la situation des Calculateurs au Bureau des Longitudes, ces fonctionnaires ne peuvent être chargés de travaux supplémentaires qu'après avoir accompli les 2100 heures que comporte leur travail réglementaire annuel.
Cet article était destiné à éviter que des calculateurs après s'être fait dans les premiers mois de l'année allouer des heures supplémentaires, ne puissent, dans les derniers mois, sous un prétexte quelconque, se dispenser d'exécuter leur tâche réglementaire tout en touchant l'intégralité de leur traitement. Cependant il en résulte pour ces fonctionnaires un préjudice manifeste. Il est en effet impossible d'organiser le travail de façon à concentrer

g. Variante : les quatre paragraphes suivants ont été rayés :

> Que cette augmentation ne peut être que progressive.
>
> Que l'état actuel du personnel ne permettrait pas d'utiliser un crédit de plus de 50000 francs et qu'il faut attendre pour monter au dessus de ce chiffre qu'on ait pu former et exercer des auxiliaires plus nombreux.
>
> Que d'ailleurs, en utilisant des plans directeurs des places fortes, on pourrait, avec ce crédit de 50000 francs, marcher pendant quelques années à raison de 8 feuilles par an, ce qui correspondrait à l'achèvement de la carte en 125 ans.
>
> Qu'un crédit plus élevé ne deviendrait nécessaire pour conserver la même vitesse d'avancement que quand on aura épuisé le stock de documents amassés pour le lever de ces plans directeurs.

h. Le manuscrit porte deux annotations de main inconnue : “Lettre jointe au procès verbal du 14 avril 1909 et envoyée le 21 — H.D.”, puis “Annexe au procès-verbal de la séance du 14 avril 1909”.

les heures supplémentaires dans les quatre ou cinq derniers mois de l'année ; les calculateurs ne pourraient alors suffire à leurs tâche qu'à la condition de travailler plus de 300 heures par mois.
Il est donc nécessaire de répartir ces travaux supplémentaires sur l'année entière ; seulement aux termes du décret, s'ils sont pris à la lettre ; ces travaux ne peuvent être payés que dans les deux derniers trimestres ; il en résulte que les calculateurs sont obligés à faire à l'État une sorte d'avance pouvant monter pour chacun d'eux à quelques centaines de francs, puisqu'ils doivent exécuter des calculs qui ne peuvent être soldés qu'avec plusieurs mois de retard. Cette situation a donné lieu à des plaintes qui ne semblent pas tout à fait sans fondement.
Le Bureau ne croît pas qu'il ait lieu de revenir sur le décret et de modifier l'article ; les considérations qui l'ont fait adopter conservant toute leur valeur.
Mais sans doute serait-il possible de tolérer une dérogation à l'application de cet article, en répartissant les 2100 heures qu'il exige sur une période plus courte que l'année, et de demander, par exemple, 525 heures de travail réglementaires *par trimestre*, avant de solder les travaux supplémentaires exécutés pendant ce trimestre.[i] On en serait quitte pour en revenir a une interprétation stricte, si cette manière de procéder conduisait à des abus.
C'est sur ce point, Monsieur le Ministre, que nous voudrions vous demander vos instructions.

AL 3p. Registre des séances 1909, Bureau des longitudes.

47.30 Poincaré à Gaston Doumergue

Paris, le 12 mai 1909
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE — BUREAU DES LONGITUDES
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR — 2e BUREAU

LE PRÉSIDENT DU BUREAU DES LONGITUDES À MONSIEUR LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ~~ET~~ DES BEAUX-ARTS ~~ET DES CULTES~~

Correspondant étranger

Monsieur le Ministre,
Le Bureau des Longitudes désirant remplacer, parmi ses correspondants étrangers, l'amiral Calheiros Da Graça, décédé en 1906 dans un accident de mer, a procédé à l'élection d'un nouveau correspondant en vertu du décret du 30 Avril 1889.[38]
M. Wilhelm Fœrster, ancien directeur de l'Observatoire de Berlin, Président du Comité international des Poids et Mesures, a réuni l'unanimité des suffrages des membres présents.

38. Francisco Calheiros da Graça (1849–1906), officier de la marine brésilienne, a dirigé le service de la carte maritime au Brésil. Il a péri avec 211 hommes lors du naufrage du cuirassé Aquidabã dans la baie de Jacuacanga, précipité par une explosion dans la nuit du 21 janvier 1906.

i. Une phrase de main inconnue a été insérée : "Travaux dont le montant ne pourrait, en aucun cas, excéder le quart des travaux supplémentaires prévus pour l'année entière."

En conséquence, j'ai l'honneur, Monsieur le Ministre, de soumettre ce choix à votre haute approbation et de vous proposer la nomination de M. W. Fœrster, comme correspondant étranger du Bureau des Longitudes.
Poincaré

ALS 1p. F17 13570, Archives nationales françaises.

47.31 Poincaré à Gaston Doumergue

Paris, le 11 août 1909[j]
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
BUREAU DES LONGITUDES
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR – 2E BUREAU

LE PRÉSIDENT DU BUREAU DES LONGITUDES À MONSIEUR LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE et DES BEAUX-ARTS ~~ET DES CULTES~~.

Vœu pour la reprise des travaux de révision de la triangulation générale.

Monsieur le Ministre,
J'ai l'honneur de vous transmettre le vœu suivant adopté, à la suite d'un vote unanime, par le Bureau des Longitudes.
Considérant que le rattachement des levers cadastraux à la triangulation générale du pays représente, au point de vue technique, une nécessité primordiale, reconnue dès le XVIIIe siècle par l'Assemblée Constituante (Lois des 4-21 Août et 16-23 Septembre 1791) et par l'Administration même des Finances en 1803 (Instructions Ministérielles des 3 frimaire, an XI, et 10 ventôse, an XII).
Considérant que l'inobservation de cette sage mesure a été l'une des causes de l'insuffisance des plans de l'ancien cadastre ; que les opérations cadastrales effectuées depuis lors à l'étranger, notamment en Allemagne et en Autriche depuis 1817, et, plus récemment, en Tunisie, en Alsace-Lorraine, depuis 1884, en Italie, depuis 1886, etc ... s'appuient toutes sur une triangulation préalable et générale du pays.
Vu l'art. 4 du décret du 9 juin 1898, ainsi conçu :
« Les levers cadastraux sont appuyés sur une triangulation spéciale dérivant de la grande triangulation dite de l'État-Major, préalablement révisée à cet effet ».
« La marche des opérations cadastrales suit celle de la révision de la grande triangulation ».
Considérant que la grande triangulation de l'État-Major, y compris le réseau du 3e ordre, est déjà révisée et complétée sur près de 3 millions d'hectares.
Qu'une somme de deux millions de francs, et un petit nombre d'années suffiraient, à la rigueur, pour achever la révision des réseaux du 1er et du 2e ordre et permettre ainsi, dans l'avenir, de rattacher, comme par le passé, à la triangulation générale, les levers cadastraux effectués sous le régime de la loi du 17 mars 1898.

j. Le manuscrit porte une annotation au crayon : "Communiquée au M[inis]tre des Finances". Il porte le tampon de la Direction générale des contributions directes, du 19 août 1909.

Considérant que le rattachement préalable dont il s'agit constitue à la fois le procédé le plus sûr et le plus exact de raccord entre les plans parcellaires de communes limitrophes, et en même temps le seul moyen pratique et rationnel d'assemblage des *plans généraux* des diverses communes, en vue de l'établissement de la carte nationale au 50000^{e}, depuis si longtemps réclamée, et aujourd'hui en cours d'exécution.
Considérant que s'il était ajourné jusqu'au moment de la confection même de feuilles correspondantes de la carte, ce rattachement présenterait d'inextricables difficultés du fait de l'inévitable discordance que l'on constaterait alors, pour les bases cadastrales entre leur valeur directement mesurée et celle déduite des bases géodésiques ; que l'on se trouverait ainsi forcé à répéter une bonne partie des opérations et qu'il en résulterait un notable et tout à fait inutile accroissement de dépenses.
Vu l'art. 1er du décret du 27 février 1907 portant abrogation de l'art. 4 du décret du 9 juin 1898.
Le Bureau des Longitudes émet instamment le vœu :
1° Que l'art. 1er susvisé du décret du 27 février 1907 soit rapporté et que les nouvelles opérations cadastrales à exécuter sous le régime de la loi du 17 mars 1898 restent comme elles l'avaient toujours été jusqu'alors, appuyées sur la triangulation du Service géographique de l'Armée.
2° Qu'à cet effet, les chaînes de 1er ordre et le réseau de 2^{e} ordre de cette triangulation soient révisés dans le plus court délai possible.
3° Qu'une copie de ce vœu soit transmise à Monsieur le Ministre des Finances par l'intermédiaire de Monsieur le Ministre de l'Instruction Publique.
Poincaré

ALS 3p. F17 13571, Archives nationales.

47.32 Gaston Doumergue (cabinet) à Poincaré

Paris, le 28 octobre 1909
MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS — MINUTE

Le Ministre M. le Président du Bureau des Longitudes.

Monsieur Joseph de Ray-Pailharde, Président du Comité pour la propagation des méthodes décimales m'a fait parvenir un appel que, sous le titre de Perfectionnement dans le chronométrage, il adresse à la fabrication horlogère et à la presse sportive.
J'ai l'honneur de vous transmettre ce document dont il vous appartient d'apprécier l'intérêt.

ADft 1p. F17 13571, Archives nationales françaises.

47.33 Gaston Doumergue (cabinet) à Poincaré

PARIS, LE 30 OCT 1909
MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS — MINUTE

Le M[inis]tre À M le Président du Bureau des Longitudes

Pour répondre au désir que vous m'avez exprimé par votre dépêche du 29 7bre d[ernie]r, j'ai transmis à M. le Mtre des travx publics, des Postes et des Télégraphes, le vœu émis dans la séance du 15 du même mois, par le Bureau des Longitudes et concernant le rattachement des points géodésiques au Réseau du Nivellement général de la France.
Mon collègue me fait connaître à la date du 29 Octobre c[ouran]t que, en raison de nombreux déplacements spéciaux qu'il nécessiterait, ce rattachement ne saurait, sans dépense excessive, être effectué en une seule campagne. Il estime, par contre, que l'opération est très réalisable, à la condition d'être menée progressivement, au fur et à mesure du passage des brigades du Service du Nivellement à proximité des villes où sont situés les signaux.
En conséquence M. Millerand a décidé qu'en profitant de toutes les circonstances favorables, le Service de Nivellement Général de la France déterminera d'une manière progressive l'altitude des points géodésiques établis dans les chefs-lieux de département et d'arrondissement : à la fin de chaque campagne, les résultats de ces déterminations seront communiqués au Bureau des Longitudes pour être insérés dans son *Annuaire.*

ADft 2p. F17 13571, Archives nationales françaises.

47.34 Gaston Doumergue (cabinet) à Poincaré

PARIS, LE 30 OCT 1909
MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS — MINUTE

Le Mtre A. M le Présidt du Bureau des Longitudes

Pour répondre au désir que vous m'avez exprimé par votre dépêche du 11 août d[ernie]r, j'ai transmis à M. le Mtre des Finances le vœu émis par le Bureau des Longitudes en vue de la reprise des travaux de révision de la triangulation générale.
En réponse à cette communication, mon collègue m'a adressé la dépêche ci-jointe, que je vous serai obligé de vouloir bien me renvoyer, après en avoir pris connaissance.[39]

ADft 1p. F17 13571, Archives nationales françaises.

39. Il s'agit d'un rapport du Ministère des Finances refusant la proposition du Bureau des longitudes.

47.35 Gaston Doumergue (cabinet) à Poincaré

Paris, le 24 décembre 1909
MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS — MINUTE

Le Ministre M. le Président du Bureau des Longitudes.
J'ai l'honneur de vous communiquer la lettre par laquelle le Président de la Fédération des Syndicats des Capitaines au Long-Cours de France me fait part du voeu exprimé par les officiers et capitaines de la marine marchande en vue d'être représentés au Bureau des Longitudes par l'Inspecteur général d'hydrographie au ministère du commerce.
Je vous serais obligé, en me renvoyant cette requête, de me faire connaître l'avis du Bureau des Longitudes sur la suite dont elle lui paraît susceptible.

ADft 1p. F17 13571, Archives nationales françaises.

47.36 Gaëtan Blum à Poincaré

PARIS, LE 3 janvier 1910[40]
SOCIÉTÉ ASTRONOMIQUE DE FRANCE
FONDÉE EN 1887, RECONNUE D'UTILITÉ PUBLIQUE EN 1897

Monsieur et Cher Collègue,
J'ai l'honneur de vous informer que l'Ordre du Jour de la Séance du Conseil du 5 Janvier, $8^{h}1/4$, sera le suivant :
« Examen de modifications à apporter au projet de statuts votés par le Conseil dans sa dernière réunion ».
Veuillez agréer, Monsieur et Cher Collègue, mes bien sincères salutations.
L'un des Secrétaires Adjoints,
Blum

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

47.37 Poincaré à Gaston Doumergue

PARIS, LE 12 janvier 1910
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE — BUREAU DES LONGITUDES
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR – 2E BUREAU

LE PRÉSIDENT DU BUREAU DES LONGITUDES À MONSIEUR LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE et DES BEAUX-ARTS ~~ET DES CULTES~~.
Suivant les indications de votre dépêche du 24 décembre 1909 (Direction de l'enseignement supérieur – 2e Bureau) j'ai l'honneur de vous retourner la lettre du 13 décembre

40. Secrétaire adjoint de la Société astronomique de France, Gaëtan Blum invite Poincaré à la réunion du Conseil. Le manuscrit comporte trois pages de calculs de la main de Poincaré à propos des masses fluides en rotation.

dernier, par laquelle la Fédération des Syndicats de Capitaines au Long-Cours de France demande que M. l'Inspecteur général d'hydrographie du Ministère du Commerce soit appelé à représenter au Bureau des Longitudes les intérêts de la navigation commerciale ; vous voulez bien, en outre, demander l'avis du Bureau sur la suite que cette requête est susceptible de comporter.

Voici cet avis :

Cette demande s'appuie sur ce que la navigation commerciale doit être avant tout rapide et économique, et exige des recueils et des tables faciles à consulter et présentant sous un petit volume le maximum des renseignements utiles au navigateur.

En ce qui concerne les tables astronomiques utiles à la navigation, le Bureau des Longitudes a déjà donné satisfaction à ce besoin en créant l'*Extrait de la Connaissance des Temps* qui sous un petit volume et pour un prix modique contient tous les éléments nécessaires aux marins. Ce recueil est d'ailleurs utilisé par les petits bâtiments de la marine militaire.

Les méthodes de navigation, et surtout les éléments astronomiques dont elles exigent l'emploi sont d'ailleurs identiques, qu'il s'agisse de navires militaires ou de bâtiments de commerce ; les un et les autres ont également besoin de naviguer avec rapidité et économie.

Les intérêts de la navigation sont déjà représentés au Bureau des Longitudes par deux officiers de marine, membres titulaires, et par le Directeur d'Hydrographie, membre en service extraordinaire ; cela peut paraître suffisant.

En dehors des tables astronomiques, tous les documents nautiques sont publiés par un seul établissement, le service hydrographique de la Marine ; les mêmes cartes, les mêmes instructions, les mêmes annuaires de marées sont utilisés par les marines de guerre et de commerce. À plus forte raison les mêmes tables astronomiques conviennent à l'une et à l'autre ; et s'il y avait quelque perfectionnement à y introduire, qui intéressât les navires de commerce ; il ne serait pas moins utile à la marine militaire.

Il convient de relever un passage de la lettre de la Fédération où il est dit que M. Massenet peut être à juste titre considéré comme le chef du service hydrographique de la marine marchande. Ainsi qu'il est dit plus haut, il n'y a, en France, comme dans les autres pays, qu'un seul Service hydrographique, celui de la Marine, qui pourvoit aux besoins de tous les navigateurs. L'Inspecteur général d'hydrographie est la tête des Écoles dites improprement d'hydrographie, où l'instruction scientifique est donnée aux aspirants capitaines au Long-Cours, instruction assez élémentaire d'ailleurs ; mais ses fonctions n'ont aucun rapport avec celles du chef du Service hydrographique.

Enfin, si les Capitaines au Long-Cours ont quelques modifications à demander aux tables astronomiques destinées aux marins, ils sont assurés, en adressant leurs propositions au Bureau des Longitudes d'y trouver toutes les compétences nécessaires pour les examiner avec l'intérêt qu'elles méritent et leur donner satisfaction dans la mesure du possible.

Poincaré

LS 3p. F17 13571, Archives nationales françaises.

47.38 Poincaré à Gaston Doumergue

PARIS, LE 26 janvier 1910
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE — BUREAU DES LONGITUDES
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR – 2E BUREAU

LE PRÉSIDENT DU BUREAU DES LONGITUDES À MONSIEUR LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, DES BEAUX-ARTS ~~ET DES CULTES~~.
J'ai l'honneur de vous faire connaître que le Bureau des Longitudes, se conformant à votre dépêche du 14 du mois courant, a, par voie de scrutin, établi la composition de son bureau pour l'année 1910 de la façon suivante :

Président, M. Poincaré
Vice-Président, M. Bigourdan
Secrétaire, M. Deslandres.

Je vous serais reconnaissant, Monsieur le Ministre, en accueillant favorablement ces choix, de vouloir bien les soumettre à l'approbation de Monsieur le Président de la République.
Poincaré

LS 1p. F17 13570, Archives nationales françaises.

47.39 Poincaré à Gaston Doumergue

Paris, le 10 février 1910
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE – BUREAU DES LONGITUDES
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR – 2E BUREAU

LE PRÉSIDENT DU BUREAU DES LONGITUDES À MONSIEUR LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE et DES BEAUX-ARTS ~~ET DES CULTES~~.
J'ai l'honneur de recommander à votre bienveillante attention les vœux suivants formulés par le Bureau des Longitudes qui se rapportent aux échelles adaptées sur les ponts de Paris pour relever la hauteur variable des eaux.
Pendant l'inondation, les yeux de tous étaient fixés sur ces échelles, qui donnaient la hauteur de la crue ; or nous avons constaté que les hauteurs mesurées aux différents ponts n'étaient nullement comparables. Cela tient à ce que les zéros de toutes ces échelles n'ont pas une origine commune. Un usage ancien du service des Ponts et Chaussées place le zéro à l'étiage le plus bas observé sur chaque pont. Les divergences s'expliquent aisément par les particularités locales et par le fait que les ponts ont été construits à des époques très différentes.
Ce mode de mesures offre certains inconvénients que nous croyons devoir rappeler, puisque l'une des attributions du Bureau est l'étude de toutes les questions générales relatives au nivellement. Nous ne voulons d'ailleurs, en aucune façon, critiquer le service des Ponts, qui, dans le choix qu'il a fait, a été guidé par des raisons spéciales, d'ordre technique.

Nous nous plaçons seulement à un point de vue différent pour réclamer une mesure complémentaire et le rattachement de toutes ces échelles à une même origine.
Nous sommes ainsi conduits à proposer :
1° la mesure de l'altitude au dessus du niveau de la mer des zéros de toutes ces échelles, et leur rattachement au nivellement général de la France.
2° l'addition sur chaque pont, d'une seconde échelle, voisine de l'échelle existante, et qui donne les altitudes exactes au-dessus du niveau de la mer.
Il sera ainsi plus facile de suivre des variations de la crue tout le long de la Seine, et de comparer les indications de ces échelles aux repères du nivellement général, répartis sur tout le territoire de la ville et de se rendre compte des risques d'invasion des eaux.
Je vous prie, Monsieur le Ministre, de prendre en considération les vœux précédents et, si vous le jugez utile, de les transmettre à Monsieur le Ministre des travaux publics.
Poincaré

ALS 3p. F17 13571, Archives nationales françaises.

47.40 Poincaré à Gaston Doumergue

Paris, le 14 février 1910
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE — BUREAU DES LONGITUDES
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR – 2E BUREAU

LE PRÉSIDENT DU BUREAU DES LONGITUDES À MONSIEUR LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE et DES BEAUX-ARTS ~~ET DES CULTES~~.
Pour répondre au désir que vous avez bien voulu m'exprimer dans votre dépêche du 9 du mois courant, à l'effet de savoir si M. Stefanik est de nationalité française, j'ai l'honneur de vous faire connaître que cet astronome, qui est d'origine hongroise, a entrepris, le 13 mars 1909, les démarches utiles pour obtenir sa naturalisation comme en fait foi le certificat ci-joint. [41]
J'ajouterai que dans la demande de subvention que j'ai eu l'honneur de vous adresser à la date du 26 janvier dernier, une erreur de lecture m'a fait dire qu'il était Docteur ès-Sciences de l'Université de Paris, c'est l'Université de Prague et non celle de Paris qui lui a conféré ce grade.
Poincaré

LS 1p. F17 13571, Archives nationales françaises.

41. Milan Stefaniki fut attaché à l'Observatoire de Meudon en 1907 ; il fut chargé d'une mission à Samarkand à l'occasion de l'éclipse de soleil du 19.01.1907.

47.41 Poincaré à Gaston Doumergue

PARIS, LE 21 Février 1910[k]
REPUBLIQUE FRANCAISE — BUREAU DES LONGITUDES
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR — 2e BUREAU

LE PRÉSIDENT DU BUREAU DES LONGITUDES À MONSIEUR LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS ~~ET DES CULTES~~

J'ai l'honneur de porter à votre connaissance que le Bureau des Longitudes est d'avis que le moment est venu de remplacer M.M. J. Gautier et Bouquet de la Grye décédés tous deux en décembre dernier : le premier, comme Artiste ayant rang de titulaire, le second, comme Membre titulaire de la section d'astronomie.
Je vous demande, en conséquence, de vouloir bien déclarer la vacance de ces deux places et inviter le Bureau à procéder à la désignation de deux candidats pour chacune d'elles conformément aux dispositions du décret du 9 mars 1852.

LS 1p. F17 13570, Archives nationales françaises.

47.42 Gaston Doumergue (cabinet) à Poincaré

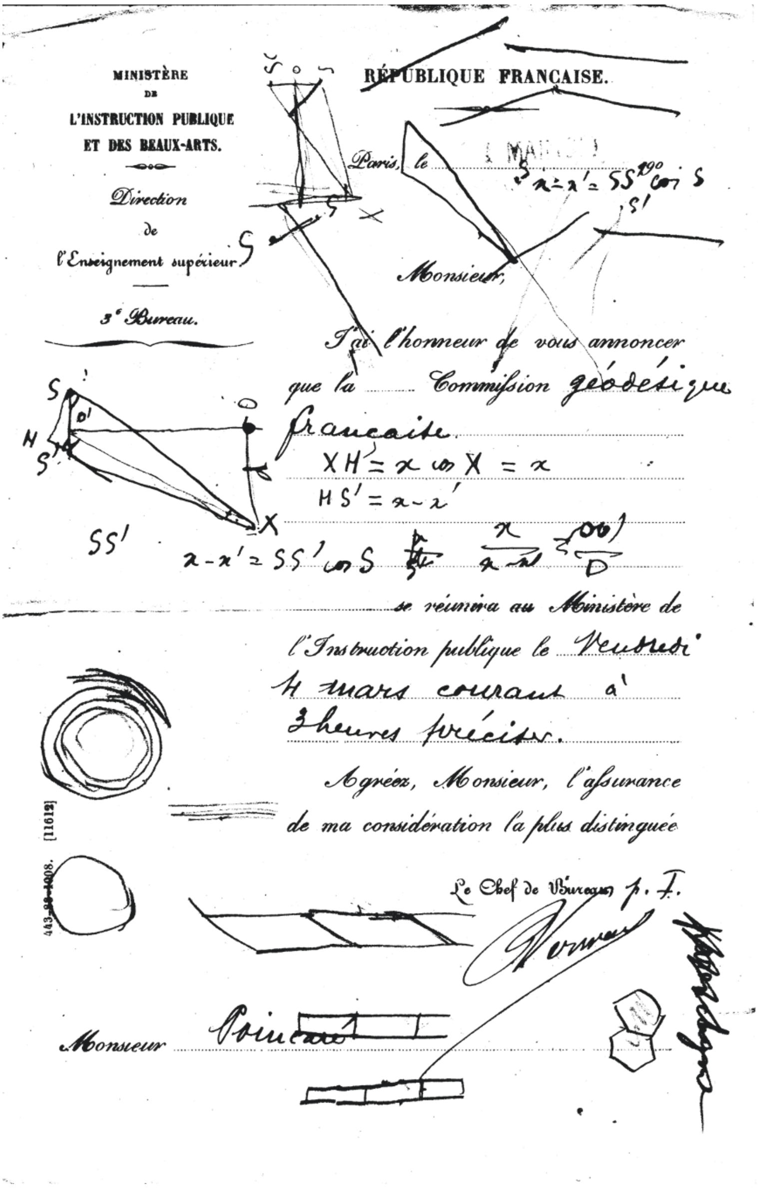
PARIS, LE 1 MAR 1910[l]
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR — 3E BUREAU

MONSIEUR Poincaré,
J'AI L'HONNEUR DE VOUS ANNONCER QUE LA COMMISSION géodésique française SE RÉUNIRA AU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE LE Vendredi 4 mars courant à 3 heures précises.
AGRÉEZ, MONSIEUR, L'ASSURANCE DE MA CONSIDÉRATION LA PLUS DISTINGUÉE,
LE CHEF DU BUREAU p. I.
[signature illisible]

ALS 1p. Collection particulière, Paris 75017.

k. Le manuscrit porte un tampon de réception du Ministère de l'Instruction publique et des Beaux-Arts, en date du 22.02.1910.

l. Le manuscrit comporte une dizaine de figures et un poignée de calculs de la main de Poincaré.



MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS.

Direction de l'Enseignement supérieur

3e Bureau.

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE.

Paris, le

Monsieur,

J'ai l'honneur de vous annoncer que la Commission géodésique française

$x - x' = SS' \cos S$

$XH' = x \cos X = x$

$HS' = x - x'$

$x - x' = SS' \cos S$ $\quad \frac{x}{x - x'}$ $\quad \frac{001}{D}$

se réunira au Ministère de l'Instruction publique le Vendredi 4 mars courant à 3 heures précises.

Agréez, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée

Le Chef de Bureau p. I.

Monsieur Poincaré

443-98-1908. [11612]

Gaston Doumergue (cabinet) à Poincaré, 01.03.1910, avec des calculs et des figures d'Henri Poincaré (Collection particulière, Paris)

47.43 Gaston Doumergue (cabinet) à Poincaré

Paris, le 8 mars 1910
MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS — MINUTE

Le Ministre M. le Président du Bureau des Longitudes.
Pour répondre au désir que vous m'avez exprimé, j'ai l'honneur de vous retourner le certificat ci-jt, relatif à la demande formée par M. Stefanik en vue d'obtenir l'admission à domicile et qui était joint à votre lettre du 14 février dernier.

ADft 1p. F17 13571, Archives nationales françaises.

47.44 Poincaré à Gaston Doumergue

PARIS, LE 9 Mars 1910
REPUBLIQUE FRANCAISE — BUREAU DES LONGITUDES
DIRECTION — DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR — 2E BUREAU

LE PRÉSIDENT DU BUREAU DES LONGITUDES À MONSIEUR LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS ~~ET DES CULTES~~

Conformément à l'invitation que vous avez bien voulu nous transmettre, par votre dépêche en date du 23 février 1910, nous avons procédé aujourd'hui à la désignation de deux candidats pour le siège d'Artiste ayant rang de titulaire, devenu vacant par suite du décès de M. J. Gautier.
Les votes du Bureau ont donné les résultats suivants :
M. Carpentier (Jules, Adrien, Marie, Louis), de l'Académie des Sciences, a été désigné en première ligne ;
et M. Amédée Jobin, opticien, en deuxième ligne.
Poincaré

LS 1p. F17 13570, Archives nationales françaises.

47.45 Poincaré à Gaston Doumergue

PARIS, LE 16 Mars 1910[m]
REPUBLIQUE FRANCAISE — BUREAU DES LONGITUDES
DIRECTION — DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR — 2E BUREAU

LE PRÉSIDENT DU BUREAU DES LONGITUDES À MONSIEUR LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS ~~ET DES CULTES~~
Conformément à l'invitation que vous avez bien voulu nous transmettre, par votre dépêche en date du 23 février 1910, nous avons procédé aujourd'hui à la désignation de deux

m. Le manuscrit porte un tampon du Cabinet du Ministère de l'Instruction publique et des Beaux-Arts : "DATE DE L'ARRIVÉE 17 MARS 1910".

candidats pour le siège de membre titulaire dans la section d'astronomie, devenu vacant par suite du décès de M. Bouquet de la Grye.
Le scrutin a donné les résultats suivants :
En première ligne M. Andoyer, Professeur d'Astronomie à la faculté des Sciences de l'Université de Paris.
En deuxième ligne M. Hanusse, Directeur d'hydrographie.
Poincaré

LS 1p. F17 13570, Archives nationales françaises.

47.46 Poincaré à Gaston Doumergue

PARIS, LE 13 juillet 1910
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE — BUREAU DES LONGITUDES
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR — 2E BUREAU [n]

LE PRÉSIDENT DU BUREAU DES LONGITUDES À MONSIEUR LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS ~~ET DES CULTES~~

En raison de la démission de M. le Commandant Guyou que je vous ai transmise le 6 Juillet courant, j'ai l'honneur de vous proposer les nominations suivantes, qui n'entraînent aucune dépense :
1° Celle de M. le Vice-Amiral Fournier, Membre titulaire du Bureau des Longitudes, comme Directeur de notre observatoire du parc de Montsouris. [42]
2° Celle de M. Claude, Membre adjoint, dont les services sont très appréciés, comme Directeur adjoint du même observatoire. [43]
Poincaré

ALS 1p. F17 13570, Archives nationales françaises.

47.47 Gaston Doumergue (cabinet) à Poincaré

PARIS, LE 21 SEP 1910
MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS — MINUTE

Le Me à Mr le Président du Bureau des Longitudes,
Mr le Ministre des Affaires Étrangères me transmet avec prière de renvoi une lettre de Mr Linsenboltz auteur d'une table de chronologie universelle qui lui a exprimé le désir de faire connaître en France sa méthode. [44]

42. Fournier fut nommé Directeur de l'Observatoire du parc de Montsouris par arrêté du 20.08.1910 du Ministère des Travaux public, des postes et des télégraphes, chargé par intérim du Ministère de l'Instruction publique et des Beaux-Arts (F17 13570, Archives nationales françaises).
43. Claude est nommé Directeur adjoint de l'Observatoire du parc de Montsouris par arrêté du 20.08.1910 (F17 13570, Archives nationales françaises).
44. Voir Linsenboltz 1892.

n. Il y a une annotation de main inconnue : "Consulter le Mtr de la Marine pour le Ve Amiral Fournier."

J'ai l'honneur de vous communiquer ci-joint cette lettre, que je vous serais obligé de me retourner accompagnée de votre avis sur la suite qu'elle vous aura paru comporter.
[signature illisible]

ADftS 1p. F17 13571, Archives nationales françaises.

47.48 Poincaré à Gaston Doumergue

Paris, le 5 octobre 1910
République Française — Bureau des Longitudes
Direction de l'Enseignement Supérieur – 2e Bureau

Le Président du Bureau des Longitudes à Monsieur le Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts ~~et des Cultes~~.

Le Bureau a pris connaissance de la lettre de M. Linsenboltz qui offre une table de chronologie de l'histoire universelle.[45] En vous retournant sa lettre, j'ai l'honneur de vous faire observer qu'elle ne contient aucune indication sur la manière dont cette table a été construite et qu'en l'absence de cette table elle-même, il est absolument impossible d'apprécier la valeur du travail auquel s'est livré M. Linsenboltz.
Il y aurait donc lieu de prier l'auteur de vouloir bien communiquer son travail afin qu'un avis puisse être exprimé en ce qui le concerne.
Poincaré

ALS 1p. F17 13571, Archives nationales françaises.

47.49 Maurice-Louis Faure (cabinet) à Poincaré

Paris, le 13 décembre 1910
Ministère de l'Instruction Publique et des Beaux-Arts – Minute
Direction de l'Enseignement Supérieur – 2e Bureau

Le Ministre À M. le Président du Bureau des Longitudes

Comme suite à ma dépêche du 21 7bre et en réponse à votre lettre du 5 8bre, j'ai l'honneur de vous transmettre ci-jt la table de chronologie universelle que M. Linsenboltz vient de me faire parvenir par les soins de notre ambassadeur à Berlin ; et qu'il serait heureux de voir soumettre à l'examen du Bureau des Longitudes.[46]

AL 1p. F17 13571, Archives nationales françaises.

45. Voir Linsenboltz 1892.
46. Voir Linsenboltz 1892.

47.50 Poincaré à Maurice-Louis Faure

PARIS, LE 19 Décembre 1910[o]
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
BUREAU DES LONGITUDES
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR – 2E BUREAU

LE PRÉSIDENT DU BUREAU DES LONGITUDES À MONSIEUR LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE et DES BEAUX-ARTS ~~ET DES CULTES~~.

Le Bureau des Longitudes a examiné attentivement la table de la chronologie universelle de M. Linsenboltz que vous avez bien voulu me transmettre par votre dépêche du 13 décembre courant.[47]
J'ai l'honneur de vous faire connaître le résultat de cet examen.
Le travail de M. Linsenboltz est très ingénieux et je ne doute pas qu'il ait coûté à son auteur, comme il le dit, beaucoup de peine et de persévérance, mais son utilité est contestable. Il existe en effet plusieurs tables analogues qui donnent le même résultat tout aussi promptement.
Poincaré

LS 1p. F17 13571, Archives nationales françaises.

47.51 Poincaré à Maurice-Louis Faure

PARIS, LE 4 janvier 1910
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE – BUREAU DES LONGITUDES
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR – 2E BUREAU

LE PRÉSIDENT DU BUREAU DES LONGITUDES À MONSIEUR LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, DES BEAUX-ARTS ~~ET DES CULTES~~

L'article 7 du décret du 15 mars 1875, sur la réorganisation du Bureau des Longitudes prescrivant que le président, le vice-président et le secrétaire de cet établissement scientifique seront nommés annuellement par décret, le Bureau a procédé par voie de scrutin à la désignation de ces trois fonctionnaires pour l'année 1911. Ont été nommés :

Président, M. Bigourdan ;
Vice-Président, M. Baillaud ;
Secrétaire, M. Andoyer.

J'ai l'honneur de porter ces choix à votre connaissance et, si vous les approuvez, je vous serais reconnaissant de vouloir bien les soumettre à la haute sanction de Monsieur le Président de la République.
Poincaré

LS 1p. F17 13570, Archives nationales françaises.

47. Voir Linsenboltz 1892.

o. Le manuscrit porte un tampon du Ministère de l'Instruction publique et des Beaux-arts du 21.12.1910.

47.52 Théodore Steeg (cabinet) à Poincaré

Paris, le 29 mars 1911
MINISTERE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DES BEAUX-ARTS
MINUTE
Le ministre

À M. H. Poincaré, membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sc. de Paris.

J'ai l'honneur de vous adresser ci-joint ampliation d'un arrêté en date du par lequel je vous ai nommé, pour trois ans, Président du Conseil des observatoires. [p] Par un autre arrêté de même date, dont vous trouverez également ampliation sous ce pli.
Est nommé pour la même période de trois ans, membre du dit Conseil, en remplacement de M. Carpentier, devenu membre de droit.

ADft 1p. F17 13573, Archives nationales françaises.

47.53 J. Tessin à Poincaré

PARIS, LE 15 Avril 1912 [q]
BUREAU DES LONGITUDES — PALAIS DE L'INSTITUT — 3, RUE MAZARINE

LE SECRÉTARE-BIBLIOTHÉCAIRE À MONSIEUR Poincaré, Membre du Bureau des Longitudes, 63, rue Claude-Bernard

J'ai l'honneur de vous faire connaître qu'à l'occasion de l'éclipse de soleil d'après demain, 17 avril, le Bureau des Longitudes ne se réunira pas ce jour là. [48] Mais plusieurs Membres du Bureau ayant exprimé le désir que la séance de la semaine ne soit pas supprimée, comme il avait été prévu tout d'abord, il a été convenu que la prochaine séance aurait lieu le Jeudi, 18 avril, à 2 heures ½.
J. Tessin

ALS 3p. Collection particulière, Paris 75017.

48. À propos des observations de l'éclipse du 17 avril en France, dont celles de l'amiral Fournier et le colonel Bourgeois à bord un ballon dirigeable, voir le récit de Camille Flammarion (1912c).

p. Le manuscrit contient un espace vide à la place de la date de l'arrêté.
q. Le manuscrit porte un tampon : "CONVOCATION". Il comporte en outre deux pages de calculs d'orbites de la main de Poincaré, sans lien à la lettre de Tessin.

Chapitre 48

Documents divers

48.1 H. Poincaré : Résumé d'un mémoire pour *Le Temps*

[Entre avril 1885 et mai 1886] [1]

Tous les astres semblent avoir été originairement fluides et il est probable que la plupart d'entre eux le sont demeurés au moins dans la plus grande partie de leur masse. De plus ils sont tous animés d'un mouvement de rotation. Il est donc naturel de se demander quelles sont les figures d'équilibre possibles d'une masse fluide en rotation, sous l'influence de l'attraction newtonienne et de la force centrifuge ; il est aisé de comprendre pourquoi, depuis le milieu du siècle dernier, les géomètres ont consacré tant d'efforts à cette recherche.

Le cas dont ils se sont le plus occupés est celui où cette masse est homogène. Ce n'est pas celui de la nature, mais le cas le plus général est si difficile que nous n'avons presque rien ajouté à ce que Clairaut nous en avait appris au siècle dernier. Dans l'hypothèse de l'homogénéité, on connaît depuis longtemps deux formes d'équilibre qui sont l'ellipsoïde de révolution et l'ellipsoïde à trois axes inégaux de Jacobi ; mais on a longtemps ignoré s'il y a d'autres figures possibles et même si ces ellipsoïdes sont stables.

C'est une jeune Russe, [a] M^{me} Kowalevski qui a la première appliqué à cette question les ressources perfectionnées de l'analyse moderne. Son mémoire sur l'anneau de Saturne, terminé en 1874 a paru en 1885 dans les *Astronomische Nachrichten* et a attiré l'attention du monde savant. [b] Les importants travaux qu'elle a publiés dans divers recueils sur les points les plus variés des mathématiques ont d'ailleurs déjà reçu une première récompense ; M^{me} Kowalevski a été nommée l'année dernière professeur à l'Université

1. Une version éditée de cette note a été publiée sans attribution au journal *Le Temps* le 5 mai 1886, à l'occasion de la livraison des *Acta mathematica*, dans laquelle figure le mémoire de Poincaré : "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation" (Poincaré 1885b). Le texte de l'article du *Temps* à été réédité par Ph. Nabonnand (1999, § 1-1-47, note 2).

a. Variante : "C'est une jeune ~~savante~~ Russe . . .".
b. Variante : ". . . a ~~excité~~ attiré l'attention du monde savant."

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3_48

de Stockholm ; c'est la première fois qu'une femme obtient une chaire d'enseignement supérieur. [2]

Dans ce mémoire est énoncé [c] un intéressant résultat retrouvé depuis par Sir W. Thomson : une masse annulaire peut demeurer en équilibre (instable, il est vrai) alors même qu'elle n'y est pas maintenue par la présence d'un corps central. Ainsi une masse fluide peut prendre des figures d'équilibre qui ne sont pas ellipsoïdales, mais annulaires ; ce sont celles dont M. Poincaré a repris l'étude dans le *Bulletin Astronomique*. [3]

Cette étude n'est pas sans intérêt pratique, car elle peut jeter quelque lumière sur la mystérieuse nature des anneaux de Saturne. Clerk Maxwell a démontré que ces anneaux ne peuvent être solides, et que s'ils sont fluides, leur densité ne peut surpasser le $\frac{1}{300}$ de celle de la planète. [4] D'autre part la conclusion de M. Poincaré est que les anneaux, supposés fluides, ne peuvent être stables que si leur densité est *au moins* égale au $\frac{1}{16}$ de celle de Saturne. [5] L'analyse semble donc confirmer [d] l'hypothèse de M. Trouvelot qui considère les anneaux comme formés d'une multitude de satellites extrêmement petits et qui ne croit pas pouvoir expliquer autrement certains changements observés (*Bull. Astr.* Tome II p. 28). [6] M. Poincaré a publié sur la même question un nouveau mémoire dans le dernier numéro des *Acta Math.* [7] Ce recueil, fondé à Stockholm en 1882 par M. Mittag-Leffler, est rapidement devenu, grâce au dévouement du directeur et à la protection d'un souverain éclairé, l'un des premiers journaux mathématiques du monde. [e]

Dans ce travail l'auteur montre qu'outre les figures d'équilibre ellipsoïdales et annulaires, il y en a une infinité d'autres, mais dont une seule est stable ; il détermine en même temps les conditions de stabilité de l'ellipsoïde de révolution et de celui de Jacobi. Mais l'hypothèse suivante fera mieux comprendre ses conclusions. Imaginons une masse fluide, [f] se contractant par refroidissement, mais assez lentement pour rester homogène et pour que la vitesse de rotation soit la même en tous ses points. D'abord presque sphérique, elle s'aplatit de plus en plus, en conservant la forme d'un ellipsoïde de révolution. Puis l'équateur lui-même cesse d'être circulaire et devient elliptique, la masse fluide prend alors la forme d'un ellipsoïde à trois axes inégaux. Ensuite l'ellipsoïde se creuse dans sa partie médiane l'une de ses moitiés tend à s'allonger de plus en plus et l'autre à se rapprocher de la forme sphérique. Enfin tout porte à croire que si le refroidissement continuait encore,

2. Sofia Kovalevskaia (1850–1891), mathématicienne russe ; voir Cooke (1984) et la correspondance entre Kovalevskaia et Poincaré dans le Volume 4. Le mémoire visé par Poincaré est Kovalevskaia (1885).

3. W. Thomson & Tait 1883, 333 ; Poincaré 1885e, 1885f.

4. Voir le mémoire couronné du prix Adams en 1857, "On the stability of the motion of Saturn's rings", réédité par Brush et al. (1983).

5. Poincaré 1885a.

6. Trouvelot 1885. Étienne-Léopold Trouvelot (1827–1895), dessinateur et astronome, a collaboré avec Jules Janssen à l'Observatoire de Meudon à partir de 1882.

7. Voir Poincaré (1885b), et le résumé de Gray (2013, 303).

c. Variante : "Dans ce mémoire est énoncé ~~pour la première fois~~ un intéressant résultat . . .".

d. Variante : "~~Il semble donc qu'on doive renoncer à l'hypothèse de la fluidité~~ L'analyse semble donc confirmer . . .".

e. Variante : ". . . mathématiques du monde. ~~Le dernier numéro de ce recueil contient un nouveau mémoire de M. Poincaré sur la même question.~~"

f. Variante : ". . . une masse fluide ~~homogène~~".

notre masse se partagerait en deux corps distincts et inégaux.
On pourrait être tenté de tirer de là des conséquences cosmogoniques ; ce serait fort prématuré ; car on ne doit pas oublier que la nébuleuse primitive de Laplace, d'où serait sorti le système solaire, était fort loin d'être homogène, et que les résultats précédents ne peuvent lui être appliqués sans de très grandes modifications.

AD 2p. Musée des lettres et manuscrits.

48.2 H. Poincaré : Le prix du Roi Oscar II

[Vers le mois de décembre 1889]

L'une des cinq questions proposées au choix des concurrents intéressait l'Astronomie. C'est celle précisément que traite le mémoire couronné. Le problème des trois corps a pour objet l'étude du mouvement de trois masses qui s'attirent mutuellement conformément à la loi de Newton. C'est le cas d'une planète soumise à l'attraction du Soleil et d'une autre planète. [8]
Les grands astronomes du siècle dernier et du commencement de ce siècle ont imaginé pour la solution de ce problème une méthode d'approximations successives qui consiste à développer suivant les puissances des masses, en négligeant d'abord les carrés des masses perturbatrices qui sont de très petites quantités, en tenant compte ensuite de ces carrés et négligeant les cubes des masses, et ainsi de suite. Mais si l'approximation ainsi obtenue est très grande et suffit jusqu'ici largement aux besoins de la pratique, elle n'est pas indéfinie, et ne nous fait pas connaître la position d'un astre à un instant quelconque du passé ou de l'avenir avec une erreur aussi petite qu'on le veut.
Une autre question se pose, le système solaire est-il stable ? Est-il possible que deux des astres dont il se compose viennent un jour à se choquer ? Ou, sans aller si loin, les distances des diverses planètes au Soleil resteront-elles éternellement peu différentes de ce qu'elles sont aujourd'hui ? Les excentricités seront-elles toujours très petites et les mouvements seront-ils toujours directs ?
Il va sans dire que la question ne peut être traitée qu'en négligeant les forces autres que celles de Newton qui pourraient agir sur les planètes et en assimilant ces astres à de simples points matériels. Diverses causes doivent en effet troubler la stabilité du système Solaire ; comme par exemple, l'action retardatrice des marées, l'induction électromagnétique des astres les uns sur les autres et peut-être l'influence d'un milieu résistant très ténu. Mais en tout cas ces causes ne peuvent agir qu'avec une extrême lenteur et on peut d'abord les laisser de côté.

---

8. Poincaré décrit le contenu du mémoire couronné par le prix du Roi Oscar II de Suède, “Sur le problème des trois corps”. Alors que le manuscrit n'est pas daté, les propos de Poincaré suggèrent qu'il ignorait encore que son mémoire contenait une erreur d'analyse de la stabilité des solutions voisines des solutions périodiques. La découverte de cette erreur lui fit retravailler son mémoire pour publication, et en reprenant son analyse, il a mis en évidence un nouveau type d'orbites, qu'il a appelé “doublement asymptotiques”. Pour des comparaisons des différences entre le mémoire couronné et le mémoire imprimé dans les *Acta* (Poincaré 1890a), voir Gray (1992 ; 2013, § 4), Andersson (1994), Barrow-Green (1994, 1997).

Le problème n'en reste pas moins très difficile. Laplace et Lagrange ont montré que dans la première approximation, l'expression des grands axes ne contient pas de termes séculaires et par conséquent que les distances des planètes au Soleil ne subissent que des oscillations périodiques. Poisson a établi ensuite qu'il en est encore de même dans la 2^de^ approx. On a longtemps espéré que le fait était général ; il n'en est malheureusement rien, un jeune Roumain, M. Spiru-Haretu a montré récemment que les termes séculaires apparaissent dès la 3^e^ approx. [9] Cela ne prouve pas que le système solaire est instable mais seulement que la méthode employée jusqu'ici ne peut convenir que pour les premières approx.

C'est ce qui a engagé MM. Gyldén et Lindstedt à chercher d'autres procédés ; les séries auxquelles ils parviennent ne contiennent plus que des termes périodiques mais elles ne sont pas convergentes en général ; quoique bien supérieures aux anciens développements, elles ne peuvent donc nous donner qu'une approx. limitée et ne peuvent servir à une démon[s]tration rigoureuse de la stabilité du système.

Quelques jours avant sa mort, Lejeune Dirichlet avait annoncé à un ami qu'il possédait cette démonstration ainsi que d'autres résultats importants. Mais dans ses papiers on n'a trouvé aucune trace de cette découverte qui est entièrement perdue pour la science. [10]

Tel était, au moment du concours, l'état de la question, que M. Poincaré aborda avec toutes les ressources de l'analyse moderne. Le premier point qu'il établit est l'existence des solutions périodiques. *Si les vitesses et les positions initiales des trois corps sont convenablement choisies, les distances de ces trois corps repasseront périodiquement par les mêmes valeurs.* Le premier exemple de ces solutions remarquables a été donné par Laplace. Si la distance de la Lune à la Terre, dit-il, était six fois plus grande, cet astre pourrait rester toujours en opposition, de telle façon qu'il y aurait toujours Pleine Lune. J'ajoute que Liouville a démontré depuis que cette Lune en opposition perpétuelle serait dans un équilibre instable que la moindre perturbation suffirait pour déranger. M. Hill, dans sa théorie de la Lune, a rencontré d'autres solutions périodiques, dont quelques-unes présentent des particularités remarquables. [g]

Pour certaines conditions initiales du mouvement de la Lune, cet astre ne jouirait plus de toutes ses phases, il n'y aurait ni nouvelle lune, ni premier, ni dernier quartier ; dans d'autres cas au contraire, on aurait trois quadratures entre deux syzygies consécutives. M. Poincaré a démontré qu'il existe toujours une infinité de solutions périodiques. Sans doute, il est infiniment peu probable que les conditions initiales du mouvement réel des astres correspondent précisément à une de ces solutions ; mais comme ces solutions qu'il est facile de développer complètement sont en nombre infini, on en pourra trouver une qui s'écarte aussi peu qu'l'on veut de l'orbite réelle de la planète étudiée.

Le second point établi par M. Poincaré est l'existence des solutions asymptotiques, qui

9. Haret 1877, 1878, 1885.

10. Il s'agit d'une remarque de Weierstrass ; l'ami de Dirichlet en question est Léopold Kronecker, qui a lui-même contesté la version de Weierstrass, tel qu'on peut douter que Dirichlet ait fait une telle annonce (Barrow-Green 1997, 60).

g. Variante : "... remarquables. ~~Si les conditions initiales du mouvement de la Lune étaient convenablement choisies, cet astre, dit-il, n'aurait jamais de quadratures.~~"

jouissent des propriétés suivantes. [fin du fragment] [11]

AD fragment, 4p. Fonds Camille Flammarion 1 MI/542, Archives départementales de l'Essonne.

48.3 F.-F. Tisserand : Note sur les travaux de Poincaré

Paris, 1892 Novembre 4

Note sur les travaux de M. Poincaré [12]
M. Poincaré est aujourd'hui, en France et même en Europe, le seul géomètre possédant à fond tous les secrets de l'Analyse mathématique la plus élevée, en même temps que les théories les plus délicates de la Mécanique Céleste et de la Physique mathématique.
Il a fait faire dans ces dernières années de très grands progrès à l'astronomie, pour ce qui concerne la figure et les mouvements des corps célestes. Sortant des voies battues depuis

11. La suite du manuscrit de Poincaré nous manque, mais voici la suite de l'article signé par Camille Flammarion :

> L'orbite diffère d'abord extrêmement peu de l'orbite fermée qui correspond à la solution périodique, mais elle s'en écarte de plus en plus à chaque révolution, d'abord très lentement, puis plus rapidement ; elle finit par s'en écarter beaucoup pour recommencer ensuite à s'en rapprocher ; elle s'en rapproche alors *constamment et indéfiniment.*
>
> Il est un cas particulier où ces considérations suffisent pour établir d'une façon tout à fait rigoureuse *la stabilité du système.*
>
> Supposons que la masse d'un des trois corps soit infiniment petite : le mouvement des deux astres ne sera pas troublé, il s'effectuera donc suivant les lois de Kepler. Imaginons de plus que les excentricités de ces deux corps soient nulles, de façon qu'ils décrivent deux circonférences concentriques autour de leur centre de gravité commun et que le troisième corps se meuve dans le plan de ces deux circonférences.
>
> Tel serait le cas du Soleil, de Jupiter et d'une petite planète, si l'on négligeait l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites, ou bien encore du Soleil, de la Terre et de la Lune, si l'on négligeait l'excentricité de l'orbite terrestre et l'inclinaison de l'orbite lunaire.
>
> Dans ce cas, il est rigoureusement démontré que le grand axe de l'orbite du corps troublé oscillera entre deux limites très rapprochées, et que l'excentricité restera éternellement petite. On peut espérer que cette démonstration est susceptible d'être étendue au cas général, mais de grands obstacles restent encore à vaincre.
>
> Ce nouveau progrès de la Science est donc en faveur de la stabilité éternelle du système du monde, en vertu des propres forces qui en régissent les mouvements.
>
> Ce fameux problème des trois corps a été l'objet de l'étude des plus profonds mathématiciens. Dès l'année 1745, Euler l'avait attaqué de front à propos du mouvement de la Lune. Vinrent ensuite les travaux de Clairaut, qui remporta, en 1750, le prix proposé par l'Académie de Saint-Pétersbourg ; puis ceux de d'Alembert dans ses recherches sur différents points importants du système du monde, puis ceux de Lagrange et de Laplace. Ce grand problème de l'action de la gravitation sur plusieurs corps formant entre eux un même système est l'un des plus considérables de toute la Mécanique céleste. Il s'agit ici de l'étude analytique de la stabilité même de l'univers. Par la victoire qu'il vient de remporter sur les géomètres du monde entier, M. Poincaré a, du premier coup, inscrit son nom à la hauteur de Newton, au fronton du temple d'Uranie. (C. Flammarion 1889, 267–268)

12. Le 04.01.1893, Poincaré fut nommé membre du Bureau des longitudes, au titre de l'Académie des sciences, en remplacement d'Ossian Bonnet (1819–1892).

les admirables travaux de Lagrange et de Laplace, il a trouvé des voies nouvelles dont on peut attendre encore de féconds résultats. Sa place est marquée au Bureau des Longitudes pour y représenter l'Académie des Sciences, et particulièrement la section de géométrie.
Nous avons des représentants éminents de la Physique et de l'Astronomie physique, mais il nous faut un géomètre.
Le Bureau des Longitudes tirera un grand secours de la présence de M. Poincaré ; d'autre part son rare talent y prendre un nouvel essor parce que nous lui présenterons bon nombre de questions à résoudre.
C'est ainsi que se continuera le rôle glorieux, et presque spécial à la France, dans l'application des théories mathématiques au développement de l'astronomie ; le Bureau des Longitudes y a contribué puissamment avec Lagrange, Laplace et Poisson ; la tradition serait dignement continué par M. Poincaré.
F. Tisserand

ADS 1p. F17 13569, Archives nationales françaises.

48.4 H. Poincaré et al. : Rapport sur la thèse de Coculesco

5 Novembre 1895

M. Coculesco, dans le travail qu'il présente à la Faculté, s'est proposé de trouver une expression approchée des termes de rang élevé dans le développement de la fonction perturbatrice.[13] Ces termes peuvent avoir une grande importance s'ils correspondent à des inégalités de très longue période ; et le calcul direct en est souvent fort pénible ; c'est ce qui donne de l'intérêt à toutes les méthodes qui permettent de l'abréger.
Ces méthodes ont déjà été l'objet de travaux nombreux.
Dans la première partie de sa thèse, l'auteur rappelle d'abord les résultats de ses devanciers en modifiant seulement quelques points de détail.
La seconde partie contient l'exposé des résultats réellement nouveaux.
Les principes généraux du calcul, fondés sur la méthode de M. Darboux, sont connus depuis longtemps ; mais l'application exige une discussion délicate qui n'a encore été poussé jusqu'au bout que dans un cas très particulier ; celui où l'inclinaison mutuelle des orbites est nulle, et l'autre très petite.
M. Coculesco discute complètement un cas un peu plus général, mais déjà notablement plus compliqué.
Il suppose l'inclinaison nulle ; les deux excentricités sont très petites sans qu'aucune soit nulle. Enfin les deux périhélies ont même longitude.
Le problème ainsi restreint est encore fort délicat et M. Coculesco le traite complètement.
La même méthode pourrait évidemment s'étendre au cas où les longitudes des périhélies diffèrent de 180°. Ce cas n'a pas été abordé par l'auteur.
En résumé nous sommes d'avis que le travail de M. Coculesco constitue un pas en avant dans cette difficile théorie et qu'il y a lieu d'autoriser l'auteur à faire imprimer ses thèses.

Appell Poincaré Tisserand[14]

ADS. AJ16 5536, Archives nationales françaises.

13. Coculesco 1895a, 1895b, 1895c.
14. La suite du rapport est rédigée par Félix-François Tisserand :

> M. Coculesco a montré dans la soutenance de sa première thèse qu'il connaissait très bien toutes les parties de la question très délicate résolue partiellement par M. Poincaré.
>
> La question proposée par la Faculté comme seconde thèse, est aussi l'une des plus ardues des mathématiques ; M. Coculesco a prouvé, par ses réponses, qu'il en possédait à fond tous les détails.
>
> La Faculté confère à M. Coculesco le grade de docteur, avec la mention très honorable.
>
> Paris 1895, novembre
>
> F. Tisserand

48.5 H. Poincaré : Rapport sur la thèse de M. Simonin

24 mars 1897

L'étude du mouvement de la planète Hécube présente de grandes difficultés parce que le moyen mouvement est presque exactement le double de celui de Jupiter. [15]
L'orbite de cette planète a fait l'objet d'un travail de M. Harzer qui a employé les méthodes de M. Gylden. [16] M. Simonin a cherché à obtenir les mêmes résultats par des méthodes plus simples.
M. Simonin néglige dans la fonction perturbatrice les termes qui contiennent l'excentricité d'Hécube à une puissance supérieure à 2 ou celle de Jupiter à une puissance supérieure à 1 ; ainsi que les puissances supérieures de l'inclinaison.
Mais il divise l'intégration en deux étapes. Il néglige d'abord tous les termes qui dépendent de l'inclinaison ou de l'excentricité de Jupiter. La fonction perturbatrice ne contient plus alors que des termes constants ou des termes dépendants de l'argument unique

$$\ell + 2g + 2h - 2\ell' - 2g' - 2h'$$

La méthode de Delaunay est alors applicable et l'intégration complète possible. L'auteur, après quelques tâtonnements, arrive à discerner quels sont les termes de l'intégrale que l'on doit conserver et ceux que l'on peut négliger.
Les premières variables adoptées ont cet inconvénient qu'une quantité très petite e_0, qu'on pourrait appeler l'excentricité moyenne, s'introduit artificiellement dans les dénominateurs.
L'auteur évite cet inconvénient par un changement de variables ; ses tâtonnements auraient certainement été abrégés s'il avait fait ce changement tout au début du calcul.
Quoi qu'il en soit parmi les solutions des équations simplifiées intégrables par la méthode de Delaunay, M. Simonin distingue une solution périodique qui est de la 1ère sorte et qui diffère peu de l'orbite d'Hécube.
Cette orbite sert de première approximation et les corrections qu'on doit y apporter sont données par des équations différentielles linéaires dites équations aux variations.
Si nous supposons $e' = \gamma = 0$, ces équations sans second membre sont encore intégrables par la méthode de Delaunay.
Si on introduit l'excentricité de Jupiter e' les équations demeurent les mêmes sauf qu'elles acquièrent un second membre. Elles s'intègrent donc aussi immédiatement. Les termes dépendants de γ qui définissent le mouvement en latitude conduisent à des équations linéaires que l'on peut également intégrer.
Il faut pour compléter les expressions auxquelles on arrive tenir compte de certains termes dépendant de e_0^2 et des principales perturbations périodiques que l'on peut calculer par les méthodes ordinaires.
La seconde partie de la thèse est consacrée à la comparaison du calcul avec les observations. La partie délicate était le choix des constantes.

15. La thèse de Simonin (1897b, 1897c) porte sur l'orbite de l'astéroïde Hécube.
16. Paul Harzer et Hugo Gyldén.

Après d'assez longs tâtonnements que l'auteur relate en détail, il adopte un tableau définitif de constantes.
La comparaison le conduit alors à un résidu maximum de 45 secondes de temps. Il est ainsi conduit à introduire un terme nouveau dépendant de l'argument $J - (3\theta_0 - g_0)t$; ce terme qu'il avait d'abord négligé doit en effet exister ; mais Simonin n'en calcule pas le coefficient, il se borne à le déterminer *empiriquement* ; il ne cherche pas même à en évaluer théoriquement l'ordre de grandeur, ce qui l'aurait d'ailleurs conduits à des calculs assez pénibles.
Le résidu maximum est alors notablement réduit (à peu près de moitié) comme on devrait s'y attendre.
La masse de Jupiter calculée par les perturbations d'Hécube ne diffère pas de celle qui est généralement adoptée.
M. Simonin termine en comparant ses résultats avec ceux de M. Harzer et en donnant les éléments osculateurs d'Hécube de 1897 à 2147.
Le travail auquel s'est livré M. Simonin a été long et pénible ; il s'est trouvé aux prises avec de grandes difficultés dont il a heureusement triomphé et nous estimons qu'il y a lieu de l'autoriser à faire imprimer et à soutenir sa thèse.

Poincaré Andoyer Wolf[17]

M. Simonin a montré dans la soutenance de sa thèse d'assez grandes qualités d'exposition. D'autre part, en répondant aux questions posées par la Faculté, il a montré que l'Astronomie d'Observation lui était aussi familière que l'Astronomie Théorique.
L'une de ces questions portait sur l'emploi du niveau et du bain de mercure. Le candidat a trouvé là l'occasion d'exposer les travaux personnels qu'il a faits sur ce sujet à l'Observatoire de Nice.
L'autre question se rapportait aux applications du principe Doppler-Fizeau. M. Simonin y a également répondu d'une manière satisfaisante.
Le jury a donc été unanime à le juger digne du titre de docteur avec la mention honorable.
Le Président
Poincaré

ADS. AJ16 5536, Archives nationales françaises.

48.6 Karl Schwarzschild à George Howard Darwin

GÖTTINGEN, DEN 22. April 1902
KÖNIGL. STERNWARTE

Hochgeehrter Herr Professor!
Meinen besten Dank für die Übersendung der Arbeiten über die „Birnfigur". [18] Ihr numerisches Resultat verändert die Anschauung, die man bisher nach Poincaré's Skizze hatte,

17. Henri Andoyer, Maître de conférences, et Charles Wolf, professeur d'astronomie physique à la Sorbonne.
18. Darwin 1902a, 1902b; Poincaré 1902d.

doch sehr wesentlich. Die Bemerkung, daß eine verhältnismäßig geringe Deformation bereits ein Grübchen am stumpfen Ende der Birne erzeugt, legt die Vermutung nahe, daß in der Reihe der Birnfiguren, selbst wenn die ersten stabil sind, die Stabilität nicht lange anhalten wird. Wenigstens kann man, wenn ich richtig voraussehe, beweisen, daß eine Figur mit Grübchen nicht stabil sein kann. Oder sollten schon so bald andere ellipsoidal harmonics ausser $\mathfrak{P}_3\mathfrak{Q}_3$ in Betracht kommen, daß in Wirklichkeit das Grübchen gar nicht auftritt?
Darf man hoffen, daß Sie sich der Frage der Stabilität der Birnfigur im Anschluss an Poincaré annehmen werden? [19]
Wem man einen Finger reicht, der nimmt gern gleich die ganze Hand. Wir rechnen darauf, Sie am 4. August zur Astronomenversammlung hier zu sehn. Ich möchte daran die Bitte schließen, daß Sie uns bei dieser Gelegenheit auch mit irgend einem Vortrag über ein Ihnen gerade zur Hand liegendes Thema erfreuen wollten. Die Zeitdauer eines Vortrags pflegt bei diesen Versammlungen zwischen 10 Minuten und einer Stunde zu rangieren. Je eher Sie eine diesbezügliche Anzeige an Prof. Klein, mich oder Prof. Seeliger (den Vorstand der Astron. Gesellschaft) gelangen lassen würden, um so angenehmer wäre es uns. [20] Da die Abelfeier sicher nicht auf diese Tage fallen wird, so rechnen wir darauf, endlich einmal wieder einen hervorragenden französischen Gelehrten in unsrer Mitte zu sehn, was der astron. Gesellschaft seit dem Tode Tisserand's nicht mehr beschieden war. [21] Indessen werden wir auch sehr zufrieden sein, wenn Sie die Anzeige und sich selbst im August gleichzeitig bringen würden.
In der Hoffnung Ihrer freundlichen Zusage und mit nochmaligem Dank.
Ihr ganz ergebener,
K. Schwarzschild

ALS 2p. CUL-DAR251.4995, Cambridge University Library.

---

19. Schwarzschild wrote to Poincaré on the same day as he wrote to Darwin; see Schwarzschild to Poincaré, 22.04.1902 (§ 3-41-1).

20. Felix Klein und Hugo von Seeliger.

In Darwins Antwort vom 1. Juni 1902 (Cod. Ms. K. Schwarzschild Briefe 154, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen) heisst es:

> Do you think the Astron. Soc. would care to hear a short account of the stability of "the pear-shaped figure" in *English* [...]?

Darwin erläutert sodann in groben Zügen seinen Beweis — vgl. die Einleitung von Kapitel (§ 3-15) — und schliesst wie folgt:

> I shall probably have presented my paper to the Royal Society before [the meeting], but it certainly will not have been published.

Darwins Aufsatz ging am 19. Juni 1902 bei der Royal Society ein und wurde am selben Tag gelesen (Darwin 1903b). Schwarzschild zeigt sich in seiner Antwort vom 05.06.1902 von diesen Neuigkeiten und Darwin's Vorschlag begeistert (§ 3-48-7). Darwin hat tatsächlich einen Vortrag über die „Stabilität der birnförmigen Poincaré'schen Gleichgewichtsfiguren" gehalten (Kreutz 1902).

21. Die Feierlichkeiten anlässlich des hundertsten Geburtstags von Abel fanden vom 4. bis 7. September 1902 in Oslo (Christiania) statt. In diesem Rahmen wurde Poincaré (zusammen mit 27 weiteren Mathematikern) die Ehrendoktorwürde der Universität Christiania verliehen, er konnte sie aber nicht persönlich entgegennehmen, vgl. seinen Brief an Mittag-Leffler vom 08.09.1902 (Nabonnand 1999, § 1-1-195). Weitere Informationen zur Abelfeier geben die Erläuterungen zu dem genannten Brief sowie Sørenson (2004).

48.7 Karl Schwarzschild à George Howard Darwin

GÖTTINGEN, DEN 5. Juni 1902
KÖNIGL. STERNWARTE

Hochgeehrter Herr Professor!
Ihr Brief vom 1. dieses Monats hat uns Göttingern allen eine große Freude bereitet. Erstens sind wir nun sicher, Sie im August hier zu sehn und dann wollen Sie uns Mitteilungen über einen Gegenstand bringen, der allgemeines Interesse erregt und über den wir Sie sogar auf Hindustanisch gern würden reden hören.
Dienstag vor acht Tagen habe ich in der Göttinger mathematischen Gesellschaft über Ihre und Poincaré's Arbeiten über das Apioid berichtet. Es wurde mit freudigem Jubel aufgenommen, als ich vorgestern hinzufügen konnte, daß Sie die Frage der Stabilität gelöst und die Hülfsmittel zur genaueren Construction der Form der Figur in der Hand haben. Man ist nun gespannt, genaueres und weiteres über Ihre Ergebnisse zu hören.
Es würde durchaus nichts ausmachen, wenn Ihre Untersuchung kurz vor der Versammlung veröffentlicht würde, denn es ist durchaus keine Vorschrift, nur unpubliciertes zu besprechen, und es dauert immer einige Zeit, bis englische Literatur bei uns durchdringt.
In der angenehmen Erwartung, nun bald Ihre persönliche Bekanntschaft machen zu dürfen,
Ihr ganz ergebenster
K. Schwarzschild

Das nähere Programm der Versammlung werden Sie in einigen Tagen erhalten. Die Vortragsordnung wird erst in den letzten Tagen festgesetzt, man wird sich hierin aber gerne jedem Ihrer Wünsche fügen.

ALS 2p. CUL-DAR251.4996, Cambridge University Library.

48.8 Oskar Backlund au Comité Nobel

8 Febr. 1910[h]
OBSERVATOIRE CENTRAL NICOLAS
POULKOVO ~~PRÈS~~ Gouvernement DE ST. PÉTERSBOURG
CABINET DU DIRECTEUR

Herr Sekreteraren för Nobel Komitén för Fysik.
Härmed har jag äran anhålla få biträda det förslag af Herrar Appell, Darboux och Fredholm att Nobelpriset för Fysik 1910 måtte tilldelas Henri Poincaré för "ses découvertes concernant les équations différentielles de la Physique Mathématique."[22]
Högaktningsfullt
O. Backlund

ALS 4p. Nobel Archives of the Royal Swedish Academy of Sciences.

22. Voir G. Darboux et al. au Comité Nobel, circa 1 January 1910, dans Walter (2007), § 2-62-24. Backlund vise en particulier les mémoires publiés dans l'*American Journal of Mathematics* 12, 1890b, et dans les *Rendiconti di Palermo* 8, 1894b, mentionnés par Darboux et al.

h. Le manuscrit porte un cachet de réception :"K. Vetenskapsakademiens, Nobelkomitéer, Inkom den 14.2 1910".

Compléments au Volume 2

12.6 Marcel Brillouin à Poincaré

PARIS, LE Oct 1911 [a]
COLLÈGE DE FRANCE – PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Cher Monsieur,
Je crois que vous faites partie du jury de Baccalauréat demain mardi après midi, et que vous avez à décider du sort d'un jeune homme *auquel je m'intéresse – Blocq (Maxime).* [1] Il avait bien travaillé tout l'année, et j'ai été un peu surpris de son insuccès en Juillet. Sous ce coup de fouet, il a passé ses vacances à tout revoir, et je crois qu'il mérite tout à fait de réussir. S'il était près de la limite du mauvais coté à l'écrit, puis-je vous prier de passer néanmoins à l'examen oral ? J'espère que vous ne le regretteriez pas.
En vous remerciant d'avance, croyez à mes meilleurs sentiments.
M. Brillouin

ALS 2p. Collection particulière, Paris 75017.

1. Maxime Blocq-Mascart (1894–1965) fut pilote d'avion lors de la 1re guerre mondiale, et fit des études après-guerre à l'École libre des sciences politiques à Paris. Lors de la deuxième guerre mondiale, il fut membre du bureau permanent du Conseil national de la Résistance, et l'un des fondateurs du *Parisien Libéré* (Wikipédia, article "Maxime Blocq-Mascart", consulté le 26.02.2014).

a. Le manuscrit n'indique pas le jour du mois.

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3

Chapitre 63

Heike Kamerlingh Onnes

Heike Kamerlingh Onnes (1853–1926) a commencé des études de mathématiques et de physique en 1870 à l'Université de Groningen. Il les a poursuivi à l'Université de Heidelberg, auprès de Robert Bunsen et de Gustav Kirchhoff. De retour à Groningen en 1873, Kamerlingh Onnes a soutenu sa dissertation sur les preuves de la rotation diurne de la terre en 1879. À partir de 1878, il fut assistant au directeur de l'École polytechnique de Delft, Johannes Bosscha. Quatre ans plus tard il est devenu professeur de physique à l'Université de Leyde, et directeur du laboratoire de physique.

Kamerlingh Onnes a réussi en 1908 à liquéfier l'hélium, et trois ans plus tard, il a mis en évidence le phénomène de supraconductivité. Ses recherches dans le domaine des basses températures furent reconnues par le prix Nobel de physique en 1913. À propos de la carrière et les travaux de Kamerlingh Onnes, voir le *DSB* (van den Handel 1973), Gavroglu & Goudaroulis (1991), et A. van Helden (1999).

Les lettres que nous publions ici trouvent leur origine dans la célébration du jubilé de la thèse de doctorat du collègue de Kamerlingh Onnes à Leyde, Hendrik-Antoon Lorentz. Les collaborateurs de Lorentz ont organisé une réunion scientifique le 11 décembre 1900, ainsi que la publication des communications. Parmi les invités français se trouvaient Henri Poincaré et trois de ses anciens étudiants : Bernard Brunhes, Pierre Duhem et Georges Sagnac. [1] Le *Jubelschrift* comprend également les contributions de quelques-uns des plus grands noms de l'électrodynamique autrichienne, allemande et britannique : Ludwig Boltzmann, Emil Cohn, Max Planck, Emil Wiechert, Wilhelm Wien, et J.J. Thomson.

Le recueil en question est intitulé *Recueil de travaux offerts par les auteurs à H.A. Lorentz à l'Université de Leiden à l'occasion du 25e anniversaire de son Doctorat, le 11 décembre 1900*. Édité par Bosscha (1900), ce livre a paru aux *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles.*

1. Sagnac croyait qu'il devait son invitation à l'intermédiaire de Poincaré ; voir Sagnac à Poincaré, 15.09.1900 (§ 2-51-5).

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3

63.1 Poincaré à Kamerlingh Onnes

[Vers le mois de septembre 1900]

Mon cher Collègue,
Je ne demande pas mieux que de collaborer au *Jubelschrift* que vous voulez dédier à M. le Professeur Lorentz dont j'admire beaucoup les travaux.[2] Tout me fait espérer que je pourrai d'ici au mois de décembre écrire quelque chose qui puisse figurer dans ce recueil. Mais je vous demanderai un peu de temps avant de vous donner le titre de ce travail ; cela exige quelque réflexion.[3]
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 2p. Kamerlingh Onnes Archief, Museum Boerhaave.

63.2 Poincaré à Kamerlingh Onnes

[Vers le mois d'octobre 1900]

Mon cher Collègue,
Je viens de recevoir votre lettre ; j'enverrai volontiers un memoire comme je vous l'ai déjà dit ; mais je ne crois pas pouvoir l'envoyer avant le 15 novembre.[4]
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 1p. Kamerlingh Onnes Archief, Museum Boerhaave.

2. Poincaré a consacré trois articles aux travaux de Lorentz entre 1897 et 1900 (Poincaré 1897a, 1899c, 1899b), dont deux concernent l'effet de Zeeman. Il a présenté la théorie des électrons de Lorentz dans son cours de 1899 à la Faculté des sciences de Paris, à coté des théories de l'électrodynamique de Heinrich Hertz et de Joseph Larmor (Poincaré 1901b).

3. Parmi les trois lettres qui nous sont parvenues de Poincaré à Kamerlingh Onnes, aucune ne dévoile le titre de la contribution de Poincaré au *Jubelschrift* de Lorentz. Le manuscrit de sa contribution (voir Poincaré à Kamerlingh Onnes, § 2-63-3, notes) porte le titre : "La théorie de Lorentz et le principe de réaction" (Poincaré 1900b).

4. Poincaré s'est engagé à contribuer au *Jubelschrift* de Lorentz (Bosscha 1900) ; voir Poincaré à Kamerlingh Onnes (§ 2-63-1). Il a envoyé son manuscrit à Kamerlingh Onnes vers le 10 novembre 1900 (§ 2-63-3).

63.3 Poincaré à Kamerlingh Onnes

[10.11.1900][5]

Mon cher Collègue,
J'ai l'honneur de vous adresser sous pli recommandé ma contribution au jubilé de Lorentz. J'espère que je ne suis pas trop en retard et que ce mémoire ne vous paraîtra pas trop long.[6]
Votre bien dévoué Collègue,
Poincaré

ALS 1p. Kamerlingh Onnes Archief, Museum Boerhaave.

5. Le manuscrit porte une annotation de main inconnue : "10,11,00".

6. Poincaré avait annoncé à Kamerlingh Onnes l'envoie de son manuscrit pour la mi-novembre ; voir Poincaré à Kamerlingh Onnes, ca. octobre 1900 (§ 2-63-2). L'autographe de Poincaré (23pp.) est conservé au Museum Boerhaave, fonds Kamerlingh Onnes. Il a été édité dans le *Jubelschrift* de Lorentz (Poincaré 1900b), ainsi que dans les *Œuvres* de Poincaré (Petiau, dir, 1954, 464–488).

Bibliographie

Académie des sciences de Paris, dir. *Le livre du centenaire de la naissance de Henri Poincaré 1854–1954*. Paris : Gauthier-Villars, 1955.

—. *Index biographique des membres et correspondants de l'Académie des sciences*. Paris : Gauthier-Villars, 1968.

Ambronn, L. *Handbuch der astronomischen Instrumentenkunde*. 2 vols. Berlin : Springer, 1899.

Andersson, K. G. Poincaré's discovery of homoclinic points. *Archive for History of Exact Sciences* 48(2) (1994) : 133–147.

Andoyer, H. Contribution à la théorie des orbites intermédiaires. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse* 1 (1887) : M1–M72.

André, C. *Traité d'astronomie stellaire, Volume 2*. Paris : Gauthier-Villars, 1900.

Archibald, R. C. Bibliography of the life and works of Simon Newcomb. *Transactions of the Royal Society of Canada* 11(3) (1905) : 79–110.

—. Simon Newcomb 1835–1909 : Bibliography of his life and work. *Memoirs of the National Academy of Sciences* 17 (1924) : 19–69.

Backlund, O. Zur Theorie der Präcession und Nutation. *Bulletin de l'Académie impériale de St- Pétersbourg* 12 (1900) : 387–409.

—. Sur la précession ; extrait d'une lettre de M. O. Backlund à M. Poincaré. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 132 (1901) : 291–292.

—. Sur la méthode horistique de Gyldén. *Bulletin astronomique* 21 (1904) : 289–292.

Backlund, O., Sundman, K. F., et Zeipel, H. v., dir. *Hugo Gyldén, Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales, Volume 2 : Détermination des inégalites des huit planètes principales dépendant de leurs configurations*. Stockholm : F. & G. Beijer, 1908.

Baillaud, B. *Exposition de la méthode de M. Gylden pour le développement des perturbations des comètes*. Thèse, Faculté des sciences de Paris, Paris, 1876.

—. *Notice sur les travaux scientifiques*. Toulouse : Privat, 1907.

Barrow-Green, J. E. Oscar II's prize competition and the error in Poincaré's memoir on the three body problem. *Archive for History of Exact Sciences* 48(2) (1994) : 107–131.

—. *Poincaré and the Three Body Problem*. Providence : AMS/LMS, 1997.

Bassot, L. et Defforges, G. Sur la détermination récente de la longitude Paris-Greenwich. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 51 (1891) : 407–413.

Bauschinger, J. Wilhelm Foerster. *Astronomische Nachrichten* 212(24) (1921) : 489–492.

S.A. Walter et al. (Hrsg.), *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens*, Publications des Archives Henri Poincaré
Publications of the Henri Poincaré Archives, DOI 10.1007/978-3-7643-8293-3

Bernkopf, M. A history of infinite matrices. *Archive for History of Exact Sciences* 4(4) (1968) : 308–358.

Bertrand, M. Déformation tétraédrique de la Terre et déplacement du pôle. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 130(8) (1900a) : 449–464.

—. Essai d'une théorie mécanique de la formation des montagnes ; déplacement progressif de l'axe terrestre. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 130 (1900b) : 291–298.

—. Le bassin houiller du Gard et les phénomènes de charriage. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 130(5) (1900c) : 213–220.

Bigourdan, G. *Sur l'équation personnelle dans les mesures d'étoiles doubles*. Thèse, Faculté des sciences de Paris, Paris, 1886.

—. *Notice sur les travaux scientifiques*. Paris : Gauthier-Villars, 1897.

—. Compte rendu de M. Simonin, Sur le mouvement des périhélies de Mercure et de Mars et du nœud de Vénus. *Bulletin astronomique* 15(5) (1898) : 197.

—. Ambronn (Dr L.), Handbuch der astronomischen Instrumentenkunde. *Bulletin astronomique* 17 (1900a) : 450–454.

—. Rapport sommaire sur l'observation, faite en Espagne, de l'éclipse totale de soleil du 28 mai 1900. *Bulletin astronomique* 17 (1900b) : 369–382.

—. Sur les changements de courbure que subissent certains niveaux à bulle d'air, sous l'influence des variations de température. *Comptes rendu hebdomadaires de l'Académie des sciences* 139(6) (1904) : 385–387.

—. J. Janssen. *Bulletin astronomique* 25 (1908) : 49–58.

—. Le Bureau des longitudes : son histoire et ses travaux des origines (1795) à ce jour. *Annuaire du Bureau des longitudes* 1928 (1927) : A1–A72.

Bigourdan, G. et Lancelin. Détermination de la différence de longitude entre les méridiens de Greenwich et de Paris, exécutée en 1902. *Annales de l'Observatoire de Paris ; Mémoires* 26 (1910) : B1–B214.

Biswas, A. K. et Biswas, M. R. Laussedat, Aimé. In Gillispie (1973), 64–65, 1973.

Blanc, K., Tesinka, E., et Adloff, J.-P., dir. *Pierre Curie correspondances*. Château de Saint-Rémy-en-l'Eau : Monelle Hayot, 2009.

Boda, K. Martin Brendel. *Astronomische Nachrichten* 270 (1940) : 278.

Boistel, G. *L'observatoire de la Marine et du Bureau des longitudes au parc Montsouris : une école pratique d'astronomie au service des marins et des explorateurs*. Paris : Édite, 2010.

Boistel, G., Le Gars, S., et Le Lay, C., dir. *Hervé Faye (1814–1902) ou l'art de la rupture*. Palaiseau : Bibliothèque de l'École polytechnique, 2014.

Boles, J. B. *University Builder : Edgar Odell Lovett and the Founding of the Rice Institute*. Baton Rouge : Lousiana State University Press, 2007.

Borel, E. *Le hasard*. Paris : Alcan, 1914.

—. Molecular theories and mathematica. In Rice Institute (1912), 347–377, 1915a.

—. Molecular theories and mathematics. *Rice Institute Pamphlet* 1(2) (1915b) : 163–193.

Borel, E., Deltheil, R., Esclangon, E., et. al.. *Benjamin Baillaud, 1848–1934*. Toulouse : Privat, 1937.

Borrelly, A. Observations de planètes, faites à l'observatoire de Marseille (équitorial d'Eichens de 0^m, 26 d'ouverture). *Bulletin astronomique* 14(10) (1897) : 382–386.

—. Observations de comètes faites à l'Observatoire de Marseille. *Bulletin astronomique* 29(4) (1912) : 136–140.

Börsch, A. *Vergleichung der Mittelwasser der Ostsee und Nordsee, des Atlantischen Oceans und des Mittelmeeres auf Grund einer Ausgleichung von 48 Nivellementspolygonen in Central- und Westeuropa*. Berlin : P. Stankeiwicz, 1891.

Bosscha, J., dir. *Recueil de travaux offerts par les auteurs à H.A. Lorentz*. The Hague : Martinus Nijhoff, 1900.

Bour, E. *Mémoire sur le problème des trois corps*. Paris : Mallet-Bachelier, 1855a.

—. Sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique analytique. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 20 (1855b) : 185–200.

Bourgeois, R. *Géodésie élémentaire*. Paris : Doin, 1908.

Brechenmacher, F. La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker. *Revue d'histoire des mathématiques* 13(2) (2007a) : 187–257.

—. L'identité algébrique d'une pratique portée par la discussion sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des planètes (1766–1874). *Sciences et techniques en perspective* (2007b) : 5–85.

Brendel, M. *Über die Anwendung der Gyldén'schen absoluten Störungstheorie auf die Breitenstörungen einer gewissen Klasse kleiner Planeten, nebst numerischem Beispiel für den Planeten 46 Hestia*. Thèse, Universität Berlin, Berlin, 1890.

Brillouin, M. L. Appareil léger pour la détermination rapide de l'intensité de la pesanteur. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 125 (1897) : 292–293.

Brown, E. W. Simon Newcomb. *Bulletin of the American Mathematical Society* 16(7) (1910) : 341–355.

—. Biographical memoir of George William Hill, 1838–1914. *Biographical Memoirs, National Academy of Sciences of the United States of America* 8 (1916) : 275–309.

Brünnow, F. *Traité d'astronomie sphérique et d'astronomie pratique*. 2 vols. Paris : Gauthier-Villars, 1869.

Bruns, H. Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie. *Astronomische Nachrichten* 106(2553) (1883) : 193–204.

Brush, S. et Everitt, C., dir. *Maxwell on Saturn's Rings*. Cambridge MA : MIT Press, 1983.

Buhl, A. Eugène Cosserat. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse* 23 (1931) : V–VIII.

Burrau, C. Todesanzeige : Thorvald Thiele. *Astronomische Nachrichten* 186 (1911) : 63–64.

Cahan, D. *An Institute for an Empire : The Physikalisch-technische Reichsanstalt 1871–1918*. Cambridge : Cambridge University Press, 1989.

Cailleux, A. Lapparent, Albert-Auguste Cochon de. In Gillispie (1973), 30–31, 1973.

Callandreau, O. Sur la théorie du mouvement des corps célestes. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 93 (1881) : 779–781.

—. Calcul des variations séculaires des éléments des orbites. *Annales de l'Observatoire de Paris* 18 (1882a) : A1–A46.
—. Détermination des perturbations d'une petite planète par les méthodes de M. Gyldén. *Annales de l'Observatoire de Paris* 16 (1882b) : A1–A54.
—. Sur une équation différentielle de la théorie des perturbations et remarques relatives aux Nos 2389 et 2435 des A. N. *Astronomische Nachrichten* 107(2547) (1883) : 33–38.
—. Revue des publications astronomiques. *Bulletin astronomique* 1 (1884) : 302–307.
—. Sur le développement des coordonnées elliptiques. *Bulletin astronomique* 3 (1886) : 528–532.
—. Remarques sur la théorie de la figure de la terre. *Bulletin astronomique* 5 (1888) : 473–480.
—. Mémoire sur la théorie des planètes. *Annales de l'Observatoire de Paris* 19 (1889a) : E1–E84.
—. Remarques sur la figure de la terre. *Bulletin astronomique* 6 (1889b) : 185–192.
—. Sur les calculs de Maxwell relatifs au mouvement d'un anneau rigide autour de Saturne. *Bulletin astronomique* 7 (1890a) : 69–75.
—. Valeur asymptotique des coefficients du développement utilisé dans les quadratures mécaniques. *Bulletin astronomique* 7 (1890b) : 301–304.
—. Sur quelques applications des théories concernant les solutions particulières périodiques du problème des trois corps et l'intégration des équations différentielles à coefficients périodiques. *Bulletin astronomique* 8 (1891) : 49–67.
—. Étude sur la théorie des comètes périodiques. *Annales de l'Observatoire de Paris* 20 (1892a) : B1–B64.
—. Sur un cas particulier du problème des trois corps. *Bulletin astronomique* 9 (1892b) : 113–118.
—. Sur des intégrales définies qui jouent un rôle dans le calcul des perturbations ; application aux petites planètes ; calcul des éléments moyens de leurs orbites. *Bulletin astronomique* 10 (1893a) : 265–274.
—. Sur des intégrales définies qui jouent un rôle dans le calcul des perturbations ; application aux petites planètes ; calcul des éléments moyens de leurs orbites (suite). *Bulletin astronomique* 10 (1893b) : 313–321.
—. Sur quelques points de la théorie de la lune de Delaunay. *Bulletin astronomique* 12 (1895) : 369–372.
—. François-Félix Tisserand. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 57(4) (1897a) : 231–233.
—. Hugo Gyldén. *Bulletin astronomique* 14 (1897b) : 289–293.
—. Sur la théorie de la figure des planètes ; applications à Jupiter et à la Terre. *Bulletin astronomique* 14 (1897c) : 214–217.
—. Sur la théorie de la figure des planètes ; énergie potentielle de la gravitation d'une planète. *Bulletin astronomique* 16 (1899) : 226–228.
—. Revue des publications astronomiques. *Bulletin astronomique* 17 (1900) : 127–128.
—. Sur la détermination du géoïde au moyen de l'ensemble des déviations de la verticale. *Bulletin astronomique* 18 (1901a) : 211–214.

—. Sur la signification de l'hypothèse de la fluidité dans la théorie de la figure des planètes. *Bulletin astronomique* 18 (1901b) : 214–216.

Cambridge Philosophical Society, dir. *Memoirs Presented to the Cambridge Philosophical Society on the Occasion of the Jubilee of Sir George Gabriel Stokes*. Cambridge : Cambridge University Press, 1900.

Campbell, W. W. Biographical memoir Simon Newcomb 1835–1909. *Memoirs of the National Academy of Sciences* 17 (1924) : 1–18.

Cantor, G. N. Creating the Royal Society's Sylvester Medal. *British Journal for the History of Science* 37 (2004) : 75–92.

Carolino, L. M. et Simões, A. The eclipse, the astronomer and his audience : Frederico Oom and the total solar eclipse of 28 May 1900 in Portugal. *Annals of Science* 69(2) (2012) : 215–235.

Cartan, E. Sur la stabilité ordinaire des ellipsoïdes de Jacobi. In *Proceedings of the International Mathematical Congress Toronto 1924, Volume 2*. 2 vols. Publié par J. Fields, 9–17. Toronto : University of Toronto, 1928.

Cattell, J. M. et Brimhall, D. R., dir. *American Men of Science : A Biographical Directory*. Garrison NY : The Science Press, 3e édition, 1921.

Chandrasekhar, S. *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*. New Haven : Yale University Press, 1969.

Charle, C. et Telkes, E. *Les professeurs de la Faculté des sciences de Paris (1901–1939)*. Paris : Éditions du CNRS, 1989.

Charlier, C. V. L. Ueber eine mit dem Problem der drei Körper verwandte Aufgabe. *Mémoires de l'Académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg* 36 (1888).

—. Studier öfver tre-kroppar-problemet. *Bihang till Kongl. Svenska vetenskaps-akademiens handlingar* 18(6) (1892).

—. Studier öfver tre-kroppar-problemet. *Bihang till Kongl. Svenska vetenskaps-akademiens handlingar* 19(2) (1893).

—. Untersuchung über die allgemeinen Jupiterstörungen des Planeten Thetis. *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-akademiens förhandlingar* 22 (1898) : 42.

—. Lettre de M. Charlier à M. Poincaré. *Bulletin astronomique* 18(10) (1901) : 369–371.

—. *Die Mechanik des Himmels, Volume 1*. Leipzig : Veit, 1902.

—. *Die Mechanik des Himmels, Volume 2*. Leipzig : Veit, 1907.

—. *Introduction to Stellar Statistics*. Lund : Scientia, 1921.

Chinnici, I. *La carte du ciel : correspondance inédite conservée dans les archives de l'Observatoire de Paris*. Paris : Observatoire de Paris/Osservatorio Astronomico di Palermo, 1999.

Chofardet, P. Éphéméride de la planète 511 Davida. *Bulletin astronomique* 26(7) (1909) : 288–289.

Coculesco, N. Sur le développement approché de la fonction perturbatrice. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 120 (1895a) : 32–34.

—. *Sur les expressions approchées des termes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice*. Thèse, Faculté des sciences de Paris, Paris, 1895b.

—. Sur les expressions approchées des termes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 1 (1895c) : 359–442.

—. *Teoria refracticĭ astronomice*. Bucharest : Carol Göbl, 1899.

Coggia, J. E. Observations de planètes et de comète faites à l'Observatoire de Marseille (équatorial d'Eichens, de 0,26 m d'ouverture, juillet-décembre 1909). *Bulletin astronomique* 27 (1910) : 160–161.

Collard, A. L'abbé Aloys Verschaffel (1850–1933). *Ciel et terre* 49 (1933) : 88–92.

Coniel, R. Éléments et éphéméride de la planète (605) (1906 UU). *Bulletin astronomique* 25 (1908a) : 137–138.

—. Éléments et éphéméride de la planète (605) [1906 UU]. *Astronomische Nachrichten* 177(5) (1908b) : 77–78.

Cooke, R. *The Mathematics of Sonya Kovalevskaya*. New York : Springer, 1984.

Cosserat, E. Sur le cercle considéré comme élément générateur de l'espace. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse* 3(1) (1889) : E1–E81.

Cosserat, E. et Cosserat, F. *Théorie des corps déformables*. Paris : Hermann, 1909.

Cotardière, Ph. de la. et Fuentes, P. *Camille Flammarion*. Paris : Flammarion, 1994.

Darboux, G. *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal, 4 vols.* Paris : Gauthier-Villars, 1887.

Darwin, G. H. On the tidal friction of a planet attended by several satellites and on the evolution of the solar system. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 172 (1881) : 491–535.

—. On Jacobi's figure of equilibrium for a rotating mass of fluid. *Proceedings of the Royal Society of London* 41 (1886) : 319–336.

—. On figures of equilibrium of rotating masses of fluid. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 178 (1887) : 379–428.

—. Periodic orbits. *Acta Mathematica* 21 (1897) : 101–242.

—. The theory of the figure of the Earth carried to the second order of small quantities. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 60 (1899) : 82–124.

—. Presentation of the Medal of the Royal Astronomical Society to M. Henri Poincaré. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 60 (1900) : 406–415.

—. The pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid. *Proceedings of the Royal Society of London* 69 (1901) : 147–148.

—. Ellipsoidal harmonic analysis. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 197 (1902a) : 461–557.

—. On the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 198 (1902b) : 301–331.

—. The approximate determination of the form of Maclaurin's spheroid. *Transactions of the American Mathematical Society* 4(2) (1903a) : 113–133.

—. The stability of the pear-shaped figure of equilibrium. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 200 (1903b) : 251–314.

—. On the figure and stability of a liquid satellite. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 198 (1906) : 161–248.

—. *Scientific Papers*. 5 vols. Cambridge : Cambridge University Press, 1907.

—. *Scientific Papers by Sir George Howard Darwin, Volume 2 : Tidal Friction and Cosmogony*. Cambridge : Cambridge University Press, 1908.

—. On certain families of periodic orbits. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 70 (1909) : 108–143.

—. *Scientific Papers of George Howard Darwin, Volume 3 : Figures of Equilibrium of Rotating Liquid and Geophysical Investigations*. Cambridge : Cambridge University Press, 1910.

Dehérain, H., dir. *Œuvres scientifiques de Jules Janssen*. 2 vols. Paris : Société d'éditions géographiques, maritimes et coloniales, 1929.

Delaunay, C., Laugier, E., et Faye, H. Sur l'état actuel de la géodésie et sur les travaux à entreprendre par le Bureau des longitudes, de concert avec le Dépôt de la Guerre, pour compléter la partie astronomique du réseau français. *Connaissance des Temps* 1864 (1863) : 1–20.

Delaunay, C. E. Sur l'inégalité lunaire à longue période du à l'action perturbatrice de Vénus, et dépendant de l'argument $\ell + 16\ell' - 18\ell''$. *Connaissance des temps ou des mouvements célestes à l'usage des astronomes et des navigateurs pour l'an 1862* (1860a) : 3–58.

—. *Théorie du mouvement de la lune, Volume 1*. Paris : Mallet-Bachelier, 1860b.

—. *Théorie du mouvement de la lune, Volume 2*. Paris : Mallet-Bachelier, 1867.

Deslandres, H. *Sur les bandes ultra-violets des métalloïdes avec une faible dispersion*. Thèse, Faculté des sciences de Paris, Paris, 1888.

Dewey, J. The University of Chicago School of Education. *Elementary School Teacher* 3(3) (1902) : 200–203.

Diacu, F. et Holmes, P. *Celestial Encounters : The Origins of Chaos and Stability*. Princeton : Princeton University Press, 1996.

Dick, S. J. *Sky and Ocean Joined : The U.S. Naval Observatory, 1830–2000*. Cambridge : Cambridge University Press, 2002.

Dieke, S. H. Backlund, Jöns Oskar. In *Dictionary of Scientific Biography, Volume 1 : Pierre Abailard–L. S. Berg*. Publié par C. C. Gillispie, 371–372. New York : Charles Scribner's Sons, 1970.

—. Schwarzschild, Karl. In *Dictionary of Scientific Biography, Volume 12 : Ibn Rushd–Jean-Servais Stas*. Publié par C. C. Gillispie, 247–253. New York : Charles Scribner's Sons, 1975.

Dingle, H. Lockyer, Joseph Norman. In Gillispie (1973), 440–443, 1973.

Dirichlet, P. G. L. Über die Stabilität des Gleichgewichts. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 32 (1846) : 85–88.

Dubois, E.-P. *Cours d'astronomie, à l'usage des officiers de la marine impériale*. Paris : A. Bertrand, 3e édition, 1877.

Dunér, N. C. *Recherches sur la rotation du soleil*. Uppsala : E. Berling, 1891.

Dyson, F. W. Bigourdan, Guillaume. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 93 (1933) : 233–234.

Eddington, A. S. Karl Schwarzschild. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 77(4) (1917) : 314–319.

Eginitis, D. Mémoire sur la stabilité du système solaire. *Annales de l'Observatoire de Paris* 19 (1889) : H1–H16.

Einstein, A. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik* 354 (1916) : 769–822.

Esclangon, E. *Les fonctions quasi-périodiques*. Thèse, Faculté des sciences de Paris, Paris, 1904a.

—. Les fonctions quasi-périodiques. *Annales de l'Observatoire de Bordeaux* 11 (1904b) : 1–276.

—. Observations de comètes. *Bulletin astronomique* 29 (1912) : 100–103.

Estanave, E. *Nomenclature du personnel enseignant, des administrateurs, docteurs et boursiers de la Faculté des sciences de l'université de Paris de 1809 à 1906*. Paris : Croville-Morant, 1906.

Fabry, L. *Étude sur la probabilité des comètes hyperboliques et l'origine des comètes*. Thèse, Faculté des sciences de Paris, Paris, 1893.

Faye, H. *Cours d'astronomie, 1e division, 1873–1874*. Paris : École polytechnique, 1873.

—. *Sur l'origine du monde ; théories cosmogoniques des anciens et des modernes*. Paris : Gauthier-Villars, 1884.

—. Sur la constitution de la croûte terrestre. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 102(12) (1886a) : 651–658.

—. Sur la constitution de la croûte terrestre, conclusion. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 102(14) (1886b) : 786–789.

—. Sur les rapports de la géodésie avec la géologie. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 103(2) (1886c) : 99–103.

—. Sur les rapports de la géodésie avec la géologie. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 103(5) (1886d) : 295–299.

Fayet, G. Nécrologie : Gustave Leveau. *Astronomische Nachrichten* 187(4471) (1911) : 111–112.

Feurtet, J.-M. *Le Bureau des longitudes (1795–1854) de Lalande à Le Verrier*. Thèse, École nationale des chartes, Paris, 2005.

Fischer, W. Helmert, Friedrich Robert. In Gillispie (1972), 239–241, 1972.

Flammarion, C. *La pluralité des mondes habités, où l'on expose les conditions d'habitabilité des terres célestes, discutées au point de vue de l'astronomie et de la physiologie*. Paris : Didier, 1862.

—. *Récits de l'infini : Lumen ; histoire d'une comète ; dans l'infini*. Paris : Didier et Cie, 1873.

—. *Catalogue des étoiles doubles et multiples en mouvement certain, comprenant toutes les observations faites sur chaque couple depuis sa découverte, et les résultats conclus de l'étude des mouvements*. Paris : Gauthier-Villars, 1878.

—. Le problème des trois corps et le triomphe de M. Poincaré. *Astronomie* 8(7) (1889) : 265–268.

—. Le mouvement de la Terre. *Bulletin de la Société Astronomique de France* 18 (1904) : 116–119.

—. *Mémoires biographiques et philosophiques d'un astronome*. Paris : Flammarion, 1911.

—. Henri Poincaré. *Astronomie et Bulletin de la Société astronomique de France* 26 (1912a) : 372–375.

—. Henri Poincaré et sa pensée philosophique. *Astronomie et Bulletin de la Société astronomique de France* 26 (1912b) : 418–421.

—. L'éclipse de soleil du 17 avril. *Astronomie et Bulletin de la Société astronomique de France* 26 (1912c) : 234–244.

Floquet, G. Sur la théorie des équations différentielles linéaires. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* 8 (1879) : 3–132.

—. Sur les équations linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* 12 (1883) : 47–88.

Lefébure de Fourcy, L.-E. *Leçons d'algèbre*. Paris : Bachelier, 5e édition, 1845.

Freiesleben, H.-C. Wolf, Maximilian Franz Joseph Cornelius. In *Dictionary of Scientific Biography, Volume 14 : Addison Emery Verrill–Johann Zwelfer*. Publié par C. C. Gillispie, 481–482. New York : Charles Scribner's Sons, 1976.

Fuchs, L. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit verändlichen Coefficienten. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 66 (1866) : 121–160.

Gaillot, A. Addition à la théorie du mouvement de Saturne de Le Verrier – Application intégrale de la méthide d'interpolation. *Annales de l'Observatoire de Paris* 24 (1904) : 1–512.

Galison, P. *Einstein's Clocks and Poincaré's Maps : Empires of Time*. New York : Norton, 2003.

Gauja, P. *Les fondations de l'Académie des sciences (1881–1915)*. Hendaye : Impr. de l'Obs. d'Abbadia, 1917.

Gauss, C. F. *Disquisitiones arithmeticæ*. Leipzig : G. Fleischer, 1801.

—. *Recherches mathématiques*. Paris : Courcier, 1807.

Gavroglu, K. et Goudaroulis, Y., dir. *Through Measurement to Knowledge : The Selected Papers of Heike Kamerlingh Onnes, 1853–1926*. Dordrecht : Kluwer, 1991.

Gay, H. *The History of Imperial College London, 1907–2007 : Higher Education and Research in Science, Technology and Medicine*. London : Imperial College Press, 2007.

Gharnati, A. *La correspondance entre Henri Poincaré et George Howard Darwin : Origine et stabilité des figures piriformes)*. Thèse, Université Nancy 2, Nancy, 1996.

Gilain, C. La théorie qualitative de Poincaré et le problème de l'intégration des équations différentielles. *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences* 34 (1991) : 215–242.

Gillispie, C. C., dir. *Dictionary of Scientific Biography, Volume 2 : Hans Berger–Christoph Buys Ballot*. New York : Charles Scribner's Sons, 1970.

—. *Dictionary of Scientific Biography, Volume 6 : Jean Hachette–Joseph Hyrtl*. New York : Charles Scribner's Sons, 1972.

—. *Dictionary of Scientific Biography, Volume 8 : Jonathon Homer Lane–Pierre Joseph Macquer*. New York : Charles Scribner's Sons, 1973.

Gillispie, C. C. et Holmes, F. L., dir. *Dictionary of Scientific Biography*. 18 vols. New York : Charles Scribner's Sons, 1970.

Gispert, H. *La France mathématique : la Société mathématique de France (1870–1914)*. Paris : SFHST, 1991.

Goldstein, C., Schappacher, N., et Schwermer, J., dir. *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticæ*. Berlin : Springer, 2007.

Graber, F. Le nivellement, une mesure pour l'action autour de 1800. *Histoire & mesure* 21(21–22) (2006) : 29–54.

Grattan-Guinness, I. The Sylvester Medal : origins and recipients 1901–1949. *Notes and Records of the Royal Society of London* 47 (1993) : 105–108.

Gray, J. Poincaré and the solar system. In *The Investigation of Difficult Things*. Publié par P. M. Harman et A. E. Shapiro, 503–524. Cambridge : Cambridge University Press, 1992.

—. *Henri Poincaré : A Scientific Biography*. Princeton : Princeton University Press, 2013.

Bouquet de la Grye, A. Une ascension au pic de Tenerife. *Annuaire du Bureau des longitudes* (1899) : 740–754.

Guccia, G. B., dir. *Annuario del circolo matematico di Palermo*. Palermo : Circolo matematico di Palermo, 1908.

Guillemin, A. *The Applications of Physical Forces*. London : Macmillan, 1877.

Gyldén, H. Om en method för den analytiska härledningen af de små planeternas relativa störingar. *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-akademiens förhandlingar* 31(1) (1874) : 13–24.

—. Kort redogörelse för en ny method i störingstheorien. *Acta Societas Scientarum Fennica* (1875) : 209–220.

—. Sur la théorie du mouvement des corps célestes (extrait d'une lettre adressée à M. Hermite). *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 92 (1881a) : 1262–1265.

—. Sur les inégalités à longues périodes dans les mouvements des corps célestes. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 92 (1881b) : 1033–1038.

—. Sur l'intégration d'une équations différentielle linéaire du deuxième ordre dont dépend l'évection. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 93 (1881c) : 127–131.

—. Ueber die Convergenz der successiven Annäherungen bei der theoretischen Berechnung der Bahnen der Himmelskörper. *Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft* 16 (1881d) : 296–304.

—. Ueber die Theorie der Bewegungen der Himmelskörper. *Astronomische Nachrichten* 100(2383) (1881e) : 98–102.

—. Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes. *Acta Mathematica* 15 (1891) : 65–189.

—. Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes (suite et fin). *Acta Mathematica* 17 (1893a) : 1–168.

—. *Traité analytique des orbites absolues des huit planètes principales, Volume 1 : Théorie générale des orbites absolues*. Stockholm : F. & G. Beijer, 1893b.

Hadamard, J. *Four Lectures on Mathematics Delivered at Columbia University in 1911*. New York : Columbia University Press, 1915.

—. The early scientific work of Henri Poincaré. *Rice Institute Pamphlet* 9(3) (1922) : 111–183.

Hamy, M. *Étude sur la figure des corps célestes*. Thèse, Faculté des sciences de Paris, Paris, 1887.

—. Principes mécaniques qui ont permis de réaliser un bain de mercure à couche épaisse. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 125(20) (1897) : 760–762.

—. Sur l'amortissement des trépidations du sol ; application du bain de mercure à couche épaisse. *Bulletin astronomique* 15(5) (1898) : 172–181.

—. *Notice sommaire sur les travaux scientifiques de M. Maurice Hamy*. Paris : Gauthier-Villars, 1902.

Handel, J. van den. Kamerlingh Onnes, Heike. In *Dictionary of Scientific Biography, Volume 7 : Iamblichus–Karl Landsteiner*. Publié par C. C. Gillispie, 220–222. New York : Charles Scribner's Sons, 1973.

Haret, S. C. Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 85(10) (1877) : 504–506.

—. *Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires*. Thèse, Faculté des sciences de Paris, Paris, 1878.

—. Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires. *Annales de l'Observatoire de Paris* 18 (1885) : I.1–I.39.

—. *Mécanique sociale*. Paris : Gauthier-Villars, 1910.

—. Henri Poincaré. *Bulletin de la section scientifique de l'Académie roumaine* 1 (1912) : 50–65.

Harzer, P. Quelques remarques sur un cas spécial du problème des trois corps ; application à Hécuba (108). *Astronomiska iakttagelser och undersokningar anstalda pa Stockholms Observatorium* 3(4) (1888) : 1–28.

Heine, E. *Handbuch der Kugelfunctionen, Theorie und Anwendungen, Volume 1 : Theorie der Kugelfunctionen und der verwandten Functionen*. Berlin : G. Reimer, 2e édition, 1878.

Helden, A. v. Heike Kamerlingh Onnes 1853–1926. In *A History of Science in the Netherlands : Survey, Themes and Reference*. Publié par K. v. Berkel, A. v. Helden, et L. Palm, 491–494. Leiden : Brill, 1999.

Helmert, F. R. *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Teil 1 : Die mathematischen Theorien*. Leipzig : B. G. Teubner, 1880.

—. *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie, Teil 2 : Die physikalischen Theorien*. Leipzig : B. G. Teubner, 1884.

—. *Die Schwerkraft im Hochgebirge insbesondere in den Tyroler Alpen in geodaher und geologischer Beziehung*. Berlin : P. Stankiewicz, 1890.

—. Ueber eine Vereinfachung bei der Einführung von Stationsergebnissen in die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes. *Astronomische Nachrichten* 134(3210) (1894) : 281–296.

Hentschel, K. *Mapping the Spectrum : Techniques of Visual Representation in Research and Teaching*. Oxford : Oxford University Press, 2002.

Hermite, C. Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1884–1891). *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* 6 (1985) : 79–217.

Hertzsprung, E. Karl Schwarzschild. *Astrophysical Journal* 45 (1917) : 285–292.
Hill, G. W. Researches in the lunar theory. *American Journal of Mathematics* 1(1–3) (1878) : 5–26, 129–147, 245–260.
—. *A New Theory of Jupiter and Saturn*. Washington : United States Nautical Almanac Office, 1890.
—. The periodic solution as a first approximation in the lunar theory. *Astronomical Journal* 15 (1895) : 137–143.
—. Jupiter-perturbations of Ceres of the first order and the derivation of the mean elements. *Astronomical Journal* 16 (1896) : 57–62.
—. Extension of Delaunay's method in the lunar theory to the general problem of planetary motion. *Transactions of the American Mathematical Society* 1 (1900) : 205–242.
—. Illustrations of periodic solutions in the problem of three bodies. *Astronomical Journal* 22 (1902) : 93–97, 117–121.
—. Professor Simon Newcomb as an astronomer. *Science* 30(768) (1909) : 353–357.
Hobson, E. W. *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1931.
Hockey, T., dir. *The Biographical Encyclopedia of Astronomers*. New York : Springer, 2007.
Hofberg, H. *Svenskt biografiskt handlexikon : alfabetiskt ordnade lefnadsteckningar af Sveriges namnkunniga män och kvinnor från Reformationen till nuvarande tid, Volume 2*. Stockholm : Albert Bonnier, 1906.
Holmberg, G. Charlier, Carl Vilhelm Ludvig. In Hockey (2007), 224–225, 2007.
Hough, S. S. On certain discontinuities connected with periodic orbits. *Acta Mathematica* 24 (1901) : 257–288.
Jacobi, C. G. J. Über die Figur des Gleichgewichts. *Annalen der Physik und Chemie* 33 (1834) : 229–238.
Jeans, J. H. On the potential of ellipsoidal bodies, and the figurees of equilibrium of rotating liquid masses. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 215 (1915) : 27–78.
—. *Astronomy and Cosmogony*. Cambridge : Cambridge University Press, 2e édition, 1929.
—. Pierre Puiseux. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 89 (1929a) : 327–328.
Kapteyn, J. C. Statistical methods of stellar astronomy. In *Congress of Arts and Science : Universal Exposition, St. Louis, 1904, Volume 4*. 8 vols. Publié par H. J. Rogers, 369–425. Boston/New York : Houghton, Mifflin & Co., 1906.
Kershaw, M. 'A thorn in the side of European geodesy' : measuring Paris-Greenwich longitude by electric telegraph. *British Journal for the History of Science* 47(4) (2014) : 637–660.
Kilian, W. et Révil, J. *Notice sur la vie et les travaux de Marcel Bertrand*. Grenoble : Allier Frères, 1908.
Knill, O. Wolf, Maximilian Franz Joseph. In Hockey (2007), 1237–1238, 2007.
Kopal, Z. Darwin, George Howard. In *Dictionary of Scientific Biography, Volume 3*. Publié par C. C. Gillispie, 582–584. New York : Charles Scribner's Sons, 1971.

Kovalevskaia, S. V. Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnsringe. *Astronomische Nachrichten* 111(2643) (1885) : 37–48.

Kovalevsky, J. Faye, Hervé. In *Dictionary of Scientific Biography, Volume 4 : Richard Dedekind–Firmicus Maternus*. Publié par C. C. Gillispie, 555. New York : Charles Scribner's Sons, 1971.

Kragh, H. Nordic cosmogonies : Birkeland, Arrhenius and fin-de-siècle cosmical physics. *European Physical Journal H* 38(4) (2013) : 549–572.

Krämer, H., dir. *Weltall und Menschheit : Geschichte der Erforschung der Natur und der Verwertung der Naturkräfte im Dienste der Völker*. 5 vols. Berlin : Bong, 1902.

—. *L'univers et l'humanité : histoire des différents systèmes appliqués à l'étude de la nature, utilisation des forces naturelles au service des peuples*. 5 vols. Paris : Bong, 1904.

Kreutz, H. Versammlung der Astronomischen Gesellschaft in Göttingen. *Astronomische Nachrichten* 159(3812) (1902) : 323–328.

Kronecker, L. Ueber Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln. *Berl. Monatsber.* (1869) : 159–193, 688–698.

Kruit, P. C. van der. *Jacobus Cornelius Kapteyn : Born Investigator of the Heavens*. Berlin : Springer, 2015.

Kushner, D. S. Sir George Darwin and a British school of geophysics. *Osiris* 8 (1993) : 196–223.

Lagrange, J. L. *Mécanique analytique, Volume 1*. Paris : Courcier, 2e édition, 1811.

—. *Mécanique analytique, Volume 1*. Paris : Mallet-Bachelier, 3e édition, 1853.

Lallemand, C. Sur le zéro international des altitudes. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences* 110 (1890) : 1323–1326.

Lamy, J. *L'observatoire de Toulouse aux XVIIIe et XIXe siècles : archéologie d'un espace savant*. Rennes : Presses universitaires de Rennes, 2007.

Lamy, J., dir. *La carte du ciel : histoire et actualité d'un projet scientifique international*. Les Ulis : EDP Sciences, 2008.

Laplace, P. S. de. *Exposition du système du monde*. 2 vols. Paris : Imprimerie du cercle-social, 1795.

—. *Traité de mécanique céleste*. 5 vols. Paris : Duprat, 1799.

—. *Traité de mécanique céleste, Volume 4*. Paris : Courcier, 1805.

—. Mémoire sur la diminution de l'obliquité de l'écliptique, qui résulte des observations anciennes. *Connaissance des Temps* 1811 (1809) : 429–450.

—. Sur les comètes. *Connaissance des Temps* 1816 (1813) : 213–220.

—. Application du calcul des probabilités, aux opérations géodésiques. *Connaissance des Temps* 1820 (1818a) : 422–440.

—. Sur la longueur du pendule à seconds. *Connaissance des Temps* 1820 (1818b) : 265–280.

—. Sur la rotation de la terre. *Connaissance des Temps* 1821 (1819) : 242–258.

—. Éclaircissemens sur les mémoires précédens, relatifs aux inégalités lunaires dépendantes de la figure de la terre, et au perfectionnement de la théorie des tables de la lune. *Connaissance des Temps* 1823 (1820a) : 332–337.

—. Sur le perfectionnement de la théorie et des tables lunaires. *Connaissance des Temps* 1823 (1820b) : 226–231.

—. Sur les inégalités lunaires dues à l'aplatissement de la terre. *Connaissance des Temps* 1823 (1820c) : 219–225.

—. De l'action de la lune sur l'atmosphère. *Connaissance des Temps* 1826 (1823) : 308–317.

—. Sur les variations de l'obliquité de l'écliptique et de la précession des équinoxes. *Connaissance des Temps* 1827 (1824) : 234–237.

—. Mémoire sur les deux grandes inégalités de Jupiter et de Saturne. *Connaissance des Temps* 1829 (1826) : 236–244.

—. Mémoire sur le flux et le reflux lunaire atmosphérique. *Connaissance des Temps* 1830 (1827) : 3–18.

Lapparent, A. de. Sur la symétrie tétraèdrique du globe terrestre. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 130 (1900) : 614–619.

Launay, F. *Un globe-trotter de la physique céleste : l'astronome Jules Janssen*. Paris : Vuibert, 2008.

—. *The Astronomer Jules Janssen : A Globetrotter of Celestial Physics*. Berlin : Springer, 2011.

Le Gars, S. *L'émergence de l'astronomie physique en France (1860–1914) : acteurs et pratiques*. Thèse, Université de Nantes, Nantes, 2007.

Le Roy, E. Un positivisme nouveau. *Revue de métaphysique et de morale* 9 (1901) : 138–153.

Le Verrier, U. J. J. Recherches astronomiques (suite). *Annales de l'Observatoire impérial de Paris* 2 (1856) : 1–301.

—. Théorie du mouvement de Mercure. *Annales de l'Observatoire de Paris* 5 (1859) : 51–103.

Lebeuf, A. *Sur une nouvelle démonstration des polynômes Hansen-Tisserand*. Thèse, Faculté des sciences de Paris, Paris, 1897.

—. Sur une nouvelle démonstration des polynômes Hansen-Tisserand. *Annales de l'Observatoire de Paris* 13 (1902) : C1–C85.

—. L'œuvre de Henri Poincaré : l'astronome. *Revue de métaphysique et de morale* 21 (1913) : 659–674.

Lebeuf, A. et Chofardet, P. Résultats des observations faites, pendant l'éclipse totale de Soleil du 30 août 1905, à Cisternia (Espagne). *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 145 (1907) : 410–412.

Leveau, G. Sur une inégalité à longue période dans la longitude de Mars. *Bulletin astronomique* 12 (1895) : 507–515.

—. Comète périodique de d'Arrest ; éphéméride pour le retour de 1910. *Bulletin astronomique* 27 (1910) : 81–89.

Lévy, J. R., dir. *Œuvres d'Henri Poincaré, Volume 7*. Paris : Gauthier-Villars, 1952.

Lévy, J. R. Bigourdan, Guillaume. In Gillispie (1970), 126–127, 1970.

—. Hamy, Maurice Théodore Adolphe. In Gillispie (1972), 94–9578, 1972.

—. Janssen, Pierre Jules César. In Gillispie (1970), 73–78, 1973.

—. Tisserand, François Félix. In *Dictionary of Scientific Biography, Volume 13 : Hermann Staudinger–Giuseppe Veronese*. Publié par C. C. Gillispie, 422–424. New York : Charles Scribner's Sons, 1976.

Liapunov, A. M. *On the Stability of Ellipsoidal Forms of Equilibrium of Rotating Fluids (in Russian)*. Thèse, University of Saint Petersburg, Saint Petersburg, 1884.

—. *The General Problem of the Stability of Motion (in Russian)*. Thèse, University of Kharkov, Kharkov, 1892.

—. Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse* 6(1) (1904) : 5–116.

—. Sur un problème de Tchebychef. *Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg* 17(3) (1905).

—. Problème général de la stabilité du mouvement. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse* 9(2) (1907) : 203–474.

Lichtenstein, L. Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung ; Mathematische Probleme in der Theorie der Figur der Himmelskörper. In *Leipziger Mathematische Antrittsvorlesungen : Auswahl aus den Jahren 1869–1922*. Publié par H. Beckert et W. Purkert, 146–185. Leipzig : Teubner, 1987.

Lindstedt, A. *Undersökning af Meridiancirkeln på Lunds Observatorium jemte bestämning af densammas polhöjd*. Thèse, Université de Lund, Lund, 1877.

—. *Beobachtungen des Mars während seiner Opposition 1877 angestellt auf der Sternwarte zu Lund*. Lund : Berlings, 1878a.

—. Beobachtungen des Mars während seiner Opposition 1877 angestellt mit dem 6 zöllingen Meridiankreise der Sternwarte zu Lund. *Astronomische Nachrichten* 92 (1878b) : 303–304.

—. Meridianbeobachtungen zu Dorpat and Elemente. *Astronomische Nachrichten* 100 (1881) : 125–128.

—. Bemerkungen zur Integration einer gewissen Differentialgleichung. *Astronomische Nachrichten* 103 (1882a) : 257–268.

—. Über die Integration einer für die Störungstheorie wichtigen Differentialgleichung. *Astronomische Nachrichten* 103 (1882b) : 211–219.

—. Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie. *Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St-Pétersbourg* 31(4) (1883a) : 1–20.

—. Sur la forme des expressions des distances mutuelles, dans le problème des trois corps. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 97 (1883b) : 1276–1278, 1353–1355.

—. Ueber die allgemeine Form der Integrale des Dreikörperproblems. *Astronomische Nachrichten* 105 (1883c) : 97–112.

—. Ueber die Integration einer gewissen Differentialgleichung. *Astronomische Nachrichten* 104 (1883d) : 145–150.

—. Sur la détermination des distances mutuelles dans le problème des trois corps. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* 1 (1884) : 85–102.

Linsenboltz, L. *Calendrier perpétuel, avec indication des jours, semaines, mois et années, de 1601 à l'an 3000*. Paris : L. Linsenboltz, 1892.

Liouville, J. Note sur la figure d'une masse fluide homogène, en équilibre, et douée d'un mouvement de rotation. *Journal de l'École polytechnique* 14 (1834) : 289–296.

Lœwy, M. Détermination faite en 1902 de la différence de longitude entre les méridiens de Greenwich et de Paris. *Comptes rendu hebdomadaires de l'Académie des sciences* 139(24) (1904a) : 1010–1015.

—. Discours de M. Lœwy aux obsèques de M. Callandreau. *Bulletin astronomique* 21 (1904b) : 131–135.

Lœwy, M. et Puiseux, P. *Atlas photographique de la lune*. Paris : Imprimerie nationale, 1910.

Lovett, E. O. The great inequality of Jupiter and Saturn. *Astronomical Journal* 15(255) (1895) : 113–127.

—. The theory of perturbations and Lie's theory of contact transformations. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 30 (1899) : 47–149.

—. Sur la géométrie à n dimensions. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 7(3) (1901) : 259–303.

—. On the periodic solutions of the problem of three bodies. *Astronomische Nachrichten* 159(3810) (1902) : 281–286.

—. Generalisation of the problem of several bodies, its inversion, and an introductory account of recent progress in its solution. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 42 (1912) : 252–315.

Lützen, J. Joseph Liouville's work on the figures of equilibrium of a rotating mass of fluid. *Archive for History of Exact Sciences* 30 (1984) : 113–166.

MacLaurin, C. *A Treatise of Fluxions*. 2 vols. Edinburgh : T.W. & T. Ruddiman, 1742.

Marquis-Who's Who, dir. *Who Was Who in America : A Companion Volume to Who's Who in America, Volume 1, 1887–1942*. Chicago : Marquis-Who's Who, 1968.

Commines de Marsilly, L.-J. A. *Recherches mathématiques sur les lois fondamentales du monde physique, Premier mémoire : Actions simples*. Paris : Gauthier-Villars, 1865.

—. *Recherches mathématiques sur les lois de la matière*. Paris : Gauthier-Villars, 1868.

—. Mémoire sur une méthode de calcul appropriée aux corps discontinus qui ont des actions à distance. *Association française pour l'avancement des sciences* 8(1879) (1880) : 261–273.

—. *Les lois de la matière : Essais de mécanique moléculaire*. Paris : Gauthier-Villars, 1884.

Mawhin, J. La Terre tourne-t-elle ? A propos de la philosophie scientifique de Poincaré. In *Le Réalisme : Contributions au Séminaire d'Histoire des Sciences 1993-1994*. Publié par J.-F. Stoffel, 215–252. Réminisciences 2. Louvain-la-Neuve : Univ. Cath. de Louvain, 1996.

—. Henri Poincaré hors de sa tour d'ivoire : Dreyfus, Galilée et Sully-Prudhomme. *Bulletin de la classe des sciences de l'Académie royale de Belgique* 15 (2004) : 81–102.

Meadows, A. J. *Science and Controversy : A Biography of Sir Norman Lockyer*. London : Macmillan, 2e édition, 2008.

Meffroy, J. Expression analytique et calcul effectif du terme séculaire pur de la perturbation du troisième ordre des grands axes. *Séminaire de mécanique analytique et de mécanique céleste fondé par Maurice Janet* 2(10) (1958) : 1–10.

Meyer, C. O. De æquilibrii formis Ellipsoidicis. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 24 (1842) : 44–59.

Michard, R. Deslandres, Henri. In *Dictionary of Scientific Biography, Volume 4 : Richard Dedekind–Firmicus Maternus*. Publié par C. C. Gillispie, 68–70. New York : Charles Scribner's Sons, 1971.

Mioc, V. et Stavinschi, M. Spiru Haret's contribution to celestial mechanics. *Romanian Astronomical Journal* 11(1) (2001) : 93–105.

Mouchez, E. Avertissement. *Bulletin astronomique* 1 (1884) : 5–7.

Moulton, F. R. George William Hill. *Popular Astronomy* 22(7) (1914) : 391–400.

Moyer, A. E. *A Scientist's Voice in American Culture : Simon Newcomb and the Rhetoric of Scientific Method*. Berkeley : University of California Press, 1992.

Myers, G. W. *Untersuchungen ueber den Lichtwechsel des Sternes β Lyræ*. Thèse, Ludwig-Maximilians-Universität zu München, Munich, 1896.

—. The system of β Lyræ. *Astrophysical Journal* 7 (1898) : 1–22.

Nabonnand, Ph., dir. *La correspondance d'Henri Poincaré, Volume 1 : La correspondance entre Henri Poincaré et Gösta Mittag-Leffler*. Basel : Birkhäuser, 1999.

Nauenberg, M. et Charpentier, E. Orbites périodiques du problème des trois corps : les origines, les contributions de Hill et de Poincaré, et quelques développements récents. In *L'héritage scientifique de Poincaré*. Publié par E. Charpentier, E. Ghys, et A. Lesne, 128–157. Paris : Belin, 2006.

Neumann, C. G. *Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential*. Leipzig : Teubner, 1877.

Newcomb, S. Théorie des perturbations de la lune qui sont dues à l'action des planètes. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 16 (1871) : 321–368.

—. On the general integrals of planetary motion. *Smithsonian Contributions to Knowledge* 21(281) (1876) : 1–31.

—. Sur les variations séculaires des orbites des quatre planètes intérieures. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences de Paris* 119(24) (1894) : 983–986.

—. *The Elements of the Four Inner Planets and the Fundamental Constants of Astronomy*. Washington : Government Printing Office, 1895.

—. *The Reminiscences of an Astronomer*. Boston/New York : Houghton, Mifflin & Co., 1903.

—. La théorie du mouvement de la lune : son histoire et son état actuel. In *Atti del IV congresso internazionale dei matematici, Volume 1*. Publié par G. Castelnuovo, 135–143. Rome : Accademia dei Lincei, 1909.

Nordmann, C. *Essai sur le rôle des ondes hertziennes en astronomie physique et sur diverses questions qui s'y rattachent*. Thèse, Faculté des sciences, Paris, 1903.

—. L'espace céleste est-il un milieu dispersif ? *Bulletin astronomique* 26(1) (1909a) : 5–37.

—. Sur la température de β Persée. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 149 (1909b) : 662–663.

North, J. Christie, William Henry Mahoney. In *Dictionary of Scientific Biography, Volume 3 : Pierre Cabanis–Heinrich Von Dechen*. Publié par C. C. Gillispie, 261. New York : Charles Scribner's Sons, 1971.

Nye, M. J. The scientific periphery in France : the faculty of sciences at Toulouse (1880–1930). *Minerva* 13(3) (1975) : 375–405.

Olsson, K.-G. Correspondance. *Bulletin astronomique* 18(6) (1901) : 247–248.

Oppenheim, S. Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren der Himmelskörper. In *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Bd. 6, Astronomie, Teil 2B*. Publié par S. Oppenheim et W. Dyck, 1–79. Leipzig : Teubner, 1922.

Oudemans, J. A. C., Asperen, J. C. A. v., Asperen, M. L, J. v., Teunissen, W. G., Nijland, A. A., et Engelenburg, E. *Die Triangulation von Java ausgeführt vom Personal des geographischen Dienstes in Niederländisch Ost-Indien*. 6 vols. The Hague : Martinus Nijhoff, 1875.

Pál, A. Spiru Haret's theorem. *Romanian Astronomical Journal* 1(1–2) (1991) : 5–11.

Parshall, K. H. et Rowe, D. E. *The Emergence of the American Mathematical Research Community, 1876–1900 : J.J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore*. Providence, RI : American Mathematical Society and London Mathematical Society, 1994.

Paul, E. R. *The Milky Way Galaxy and Statistical Cosmology 1890–1924*. Cambridge : Cambridge University Press, 1993.

Perrot, L. Éphéméride de la planète 387 Aquitania. *Bulletin astronomique* 25(4) (1908) : 150.

—. Éphéméride de la planète 313 Chaldæa. *Bulletin astronomique* 26(7) (1909) : 289–290.

Perrotin, J. *Théorie de Vesta*. Thèse, Faculté des sciences de Paris, Paris, 1879.

—. Théorie de Vesta. *Annales de l'Observatoire astronomique, magnétique et météorologique de Toulouse* 1 (1880) : B1–B90.

—. Observation des canaux de Mars ; Lettre de M. Perrotin à M. Faye. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences de Paris* 106(20) (1886) : 1393–1394.

—. Théorie de Vesta. *Annales de l'Observatoire de Nice* 3 (1890) : B1–B116.

—. Application des méthodes d'interpolation à la détermination des inégalités du premier ordre des éléments de Vesta produites par l'action de Jupiter. *Annales de l'Observatoire de Nice* 4 (1895) : A1–A71.

Petiau, G., dir. *Œuvres d'Henri Poincaré, Volume 9*. Paris : Gauthier-Villars, 1954.

Picard, E. Sur certaines équations différentielles linéaires du second ordre. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 90 (1880a) : 1479–1482.

—. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 90 (1880b) : 293–295.

—. Sur une classe d'équations différentielles linéaires. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 90 (1880c) : 128–131.

Pizzetti, P. Intorno alla determinazione teorica della gravità alla superficie terrestre. *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino* 31 (1896) : 859–870.

Poincaré, H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (1ère partie). *Journal de mathématiques pures et appliquées* 7 (1881a) : 375–422.

—. Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires I. *Journal de l'École polytechnique* 50 (1881b) : 190–253.

—. Sur l'intégration des équations linéaires par les moyens des fonctions abéliennes. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 92 (1881c) : 913–915.

—. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (2nde partie). *Journal de mathématiques pures et appliquées* 8 (1882a) : 251–296.

—. Sur les formes cubiques ternaires et quaternaires II. *Journal de l'École polytechnique* 51 (1882b) : 45–91.

—. Sur les groupes discontinus. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 94 (1882c) : 840–843.

—. Sur les séries trigonométriques. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 95 (1882d) : 766–768.

—. Sur l'intégration des équations différentielles par les séries. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 94 (1882e) : 577–578.

—. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 97 (1883a) : 251–252.

—. Sur les séries trigonométriques. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 97(26) (1883b) : 1471–1473.

—. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps. *Bulletin astronomique* 1 (1884a) : 65–74.

—. Sur la convergence des séries trigonométriques. *Bulletin astronomique* 1 (1884b) : 319–327.

—. Sur les courbes définies par les équations différentielles. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 98(5) (1884c) : 287–289.

—. Sur une équation différentielle. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 98(13) (1884d) : 793–795.

—. Note sur la stabilité de l'anneau de Saturne. *Bulletin astronomique* 2 (1885a) : 507–508.

—. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Acta Mathematica* 7(1) (1885b) : 259–380.

—. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 100(16) (1885c) : 1068–1070.

—. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 101(4) (1885d) : 307–309.

—. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Bulletin astronomique* 2 (1885e) : 109–118.

—. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Bulletin astronomique* 2 (1885f) : 405–413.

—. Sur les courbes définies par les équations différentielles (3ème partie). *Journal de mathématiques pures et appliquées* 4 (1885g) : 167–244.
—. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. *Acta Mathematica* 8(1) (1886a) : 295–344.
—. Sur une méthode de M. Lindstedt. *Bulletin astronomique* 3 (1886b) : 57–61.
—. Sur un théorème de M. Liapounoff relatif à l'équilibre d'une masse fluide en rotation. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 104 (1887) : 622–625.
—. Sur les séries de M. Lindstedt. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 108 (1889) : 21–24.
—. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica* 13 (1890a) : 1–270.
—. Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. *American Journal of Mathematics* 12 (1890b) : 211–294.
—. Les géométries non euclidiennes. *Revue générale des sciences pures et appliquées* 2 (1891a) : 769–774.
—. Sur le problème des trois corps. *Bulletin astronomique* 8 (1891b) : 12–24.
—. Les formes d'équilibre d'une masse fluide en rotation. *Revue générale des sciences pures et appliquées* 3(23) (1892a) : 809–815.
—. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Volume 1*. Paris : Gauthier-Villars, 1892b.
—. Non-Euclidian geometry. *Nature* 45 (1892c) : 404–407.
—. Poincaré's 'Thermodynamics'. *Nature* 45 (1892d) : 414–415.
—. Poincaré's 'Thermodynamics'. *Nature* 45 (1892e) : 485.
—. Poincaré's Thermodynamics. *Nature* 46 (1892f) : 76.
—. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Volume 2*. Paris : Gauthier-Villars, 1893.
—. Poincaré on Maxwell and Hertz. *Nature* 50(1279) (1894a) : 8–11.
—. Sur les équations de la physique mathématique. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 8 (1894b) : 57–156.
—. Rapport sur la proposition d'unification des jours astronomique et civil. *Annuaire du Bureau des longitudes* (1895) : E1–E10.
—. Discours prononcé aux funérailles de M. Tisserand. *Bulletin astronomique* 13(11) (1896) : 430–432.
—. La théorie de Lorentz et les expériences de Zeeman. *Éclairage électrique* 11 (1897a) : 481–489.
—. Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps. *Bulletin astronomique* 14 (1897b) : 53–67.
—. On the stability of the solar system. *Nature* 58(1495) (1898a) : 183–185.
—. Sur la stabilité du système solaire. *Annuaire du Bureau des longitudes* (1898b) : B1–B16.
—. Sur la stabilité du système solaire. *Revue scientifique* 9(20) (1898c) : 609–613.
—. Fourier's series (letter to A.A. Michelson). *Nature* 60 (1899a) : 52.

—. La théorie de Lorentz et le phénomène de Zeeman. *Éclairage électrique* 19 (1899b) : 5–15.
—. Le phénomène de Hall et la théorie de Lorentz. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 128 (1899c) : 339–341.
—. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Volume 3*. Paris : Gauthier-Villars, 1899d.
—. Sur les groupes continus. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 18 (1899e) : 220–255.
—. Discours prononcé à l'inauguration de la statue de F. Tisserand à Nuits-Saint-Georges, le 15 octobre 1899. *Annuaire du Bureau des longitudes* (1900a) : E4–E12.
—. La théorie de Lorentz et le principe de réaction. *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles* 5 (1900b) : 252–278.
—. Rapport sur le projet de révision de l'arc méridien de Quito. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 131 (1900c) : 215–236.
—. Sur le déterminant de Hill. *Bulletin astronomique* 17 (1900d) : 134–143.
—. André, Traité d'astronomie stellaire, 2[e] partie. *Bulletin astronomique* 18(1) (1901a) : 42–45.
—. *Électricité et optique : la lumière et les théories électrodynamiques*. Paris : Carré et Naud, 1901b.
—. Les mesures de gravité et la géodésie. *Bulletin astronomique* 18(1) (1901c) : 5–39.
—. Sur la stabilité de l'équilibre des figures piriformes affectées par une masse fluide en rotation. *Proceedings of the Royal Society of London* 69 (1901d) : 148–149.
—. Sur la théorie de la précession. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 132 (1901e) : 50–55.
—. *Figures d'équilibre d'une masse fluide*. Paris : C. Naud, 1902a.
—. Les solutions périodiques et les planètes du type d'Hécube. *Bulletin astronomique* 19 (1902b) : 177–198.
—. Rapport présenté au nom de la Commission chargée du contrôle scientifique des opérations géodésiques de l'Equateur. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 134(17) (1902c) : 965–972.
—. Sur la stabilité de l'équilibre des figures piriformes affectées par une masse fluide en rotation. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 198 (1902d) : 333–373.
—. Sur la vie et les travaux de M. Faye. *Bulletin de la Société Astronomique de France* 16 (1902e) : 496–501.
—. Sur les planètes du type d'Hécube. *Bulletin astronomique* 19 (1902f) : 289–310.
—. Rapport présenté au nom de la Commission chargée du contrôle scientifique des opérations géodésiques de l'Équateur. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 136(14) (1903) : 861–871.
—. La Terre tourne-t-elle ? *Bulletin de la Société Astronomique de France* 18 (1904a) : 216–217.
—. L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique. *Bulletin des sciences mathématiques* 28 (1904b) : 302–324.

—. Rapport sur les opérations géodésiques de l'Équateur. In *Comptes rendus des séances de la 14ème conférence générale de l'Association géodésique internationale réunie à Copenhague du 4 au 13 août 1903*, Volume 1. Publié par H. G. van de Sande Bakhuyzen, 113–127. Leiden : Brill, 1904c.
—. Sur la méthode horistique ; observations sur l'article de M. Backlund. *Bulletin astronomique* 21 (1904d) : 292–295.
—. Introduction. In *The Collected Mathematical Works of George William Hill, Volume 1*. Publié par G. W. Hill, VII–XVIII. Washington D.C. : Carnegie Institution of Washington, 1905a.
—. *Leçons de mécanique céleste, Volume 1 : théorie générale des perturbations planetaires*. Paris : Gauthier-Villars, 1905b.
—. Rapport présenté au nom de la Commission chargée du contrôle scientifique des opérations géodésiques de l'Equateur. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 140 (1905c) : 998–1006.
—. Sur la méthode horistique de Gyldén. *Acta Mathematica* 29(1) (1905d) : 235–271.
—. Sur des membres de l'Académie des sciences et sur des membres de la Mission géodésique à l'Équateur. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 143 (1906) : 989–998.
—. Le hasard. *Revue du Mois* 3 (1907a) : 257–276.
—. Rapport présenté au nom de la Commission chargée du contrôle scientifique des opérations géodésiques de l'Equateur. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 145 (1907b) : 366–370.
—. Die neue Mechanik. *Himmel und Erde* 23 (1910) : 97–116.
—. *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*. Paris : Hermann, 1911a.
—. Notice nécrologique sur M. Bouquet de la Grye. *Annuaire du Bureau des longitudes* (1911b) : C1–C13.
—. Discours au jubilé de M. Camille Flammarion. *Bulletin de la Société astronomique de France* 26 (1912a) : 101–103.
—. Discours prononcé aux funérailles de M. R. Radau. *Bulletin astronomique* 29 (1912b) : 88–89.
—. Fonctions modulaires et fonctions fuchsiennes. *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse* 3 (1912b) : 125–149.
—. Analyse des travaux scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même. *Acta mathematica* 38 (1921) : 1–135.
—. Rapport sur les résolutions de la Commission chargée de l'étude des projets de décimalisation du temps et de la circonférence (1897). In *Œuvres d'Henri Poincaré, Volume 8*. Publié par G. Julia et G. Petiau, 648–664. Paris : Gauthier-Villars, 1952.
—. Les limites de la loi de Newton. *Bulletin astronomique* 17(3) (1953) : 121–269.
Puiseux, P. Remarques au sujet de l'article précédent. *Bulletin astronomique* 31(6) (1914) : 272–273.
Rabioulle, E. et Besson, E. Observations méridiennes de planètes faites à l'Observatoire de Toulouse (cercle de P. Gautier). *Bulletin astronomique* 29(5) (1912) : 174–175.
Radau, R. Sur une transformation des équations différentielles de la dynamique. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* 5 (1868) : 311–375.

—. Liapounof, Sur la stabilité des formes d'équilibre ellipsoïdales d'un liquide en rotation, 1884. *Bulletin astronomique* 2 (1885) : 522–525.

—. Coculesco, Teoria refractiei astronomice, 1899. *Bulletin astronomique* 17(6) (1900) : 207–208.

Ratiu, T. S. Haretu's contribution to the *n*-body problem. *Libertas Mathematica* 5 (1985) : 1–7.

Reale Specola di Brera, dir. *Le opere di Giovanni Virginio Schiaparelli*. 11 vols. Milan : Hoepli, 1929.

Renaud, J. La vie et les travaux de l'ingénieur hydrographe en chef Philippe Hatt. *Annuaire du Bureau des longitudes* (1917) : D1–D18.

Reynolds, J. H. Max Wolf. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 93(4) (1933) : 236–238.

Rice Institute, W. M., dir. *Book of the Opening of the Rice Institute*. 3 vols. Houston : Rice Institute, 1912.

Roche, E. Mémoire sur la figure d'une masse fluide soumise à l'attraction d'un point éloigné. *Mémoires de l'Académie des sciences et lettres de Montpellier* 1 (1849) : 243–262.

Roque, T. L'originalité de Poincaré en mécanique céleste : pratique des solutions périodiques dans un réseau de textes. *Revue d'histoire des mathématiques* 21(1) (2015) : 41–109.

Roseveare, N. T. *Mercury's Perihelion : From Le Verrier to Einstein*. Oxford : Oxford University Press, 1982.

Saint-Martin, A. *L'office et le télescope : Une sociologie de l'astronomie française, 1900–1940*. Thèse, Université Paris 4, Paris, 2008.

Sarton, G. Henri Poincaré (1854–1912). *Ciel et terre* 34 (1913) : 1–11, 37–48.

Schiaparelli, G. Orbites cométaires, courants cosmiques, météorites. *Bulletin astronomique* 27 (1910a) : 194–205.

—. Orbites cométaires, courants cosmiques, météorites (suite et fin). *Bulletin astronomique* 27(7) (1910b) : 241–254.

Schiavon, M. Les officiers géodésiens du Service géographique de l'armée et la mesure de l'arc de méridien de Quito (1901–1906). *Histoire & mesure* 21(2) (2006) : 55–94.

—. Geodesy and map-making in France and Algeria : contests and collaborations between army officers and observatory scientists. In *The Heavens on Earth : Observatories and Astronomy in Nineteenth-Century Science and Culture*. Publié par D. Aubin, C. Bigg, et H. O. Sibum, 199–224. Durham, NC : Duke University Press, 2010.

—. Hervé Faye, la géodésie et le Bureau des longitudes. In Boistel et. al. (2014), 42–62, 2014a.

—. *Itinéraires de la précision : géodésiens, artilleurs, savants et fabricants d'instruments en France, 1870–1930*. Nancy : Presses universitaires de Lorraine, 2014b.

—. The Bureau des longitudes : an institutional study. In *Navigational Enterprises in Europe and its Empires, 1730–1850*. Publié par R. Dunn et R. Higgitt, 65–88. London : Palgrave-MacMillan, 2016.

Schultz-Steinheil, C. A. On the elements of the Sun's rotation. *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-akademiens förhandlingar* (1899a) : 73–94.

—. Ueber die Teilung des Kreises in der Hansen'schen Störungsteorie. *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-akademiens förhandlingar* (1899b) : 273–298.

Schwarzschild, K. *Die Poincarésche Theorie des Gleichgewichts einer homogenen rotierenden Flüssigkeitsmasse*. Thèse, Ludwig-Maximilians-Universität zu München, Munich, 1896.

—. Die Poincaré'sche Theorie des Gleichgewichts einer homogenen rotierenden Flüssigkeitsmasse. *Neue Annalen der königlichen Sternwarte in Bogenhausen bei München* 3 (1898) : 231–299.

—. Ueber die Eigenbewegung der Fixsterne. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse* (1907) : 614–632.

—. Leçons sur les hypothèses cosmogoniques by H. Poincaré. *Astrophysical Journal* 37 (1913) : 294–298.

Secchi, A. *Le soleil : exposé des principales découvertes modernes sur la structure de cet astre, son influence dans l'univers et ses relations avec les autres corps célestes*. Paris : Gauthier-Villars, 1870.

Secrétaires perpétuels de l'Académie des sciences, dir. *Œuvres de Laplace, Volume 7*. Paris : Imprimerie royale, 1847.

—. *Œuvres complètes de Laplace, Volume 4*. Paris : Gauthier-Villars, 2e édition, 1880.

—. *Œuvres complètes de Laplace, Volume 5*. Paris : Gauthier-Villars, 2e édition, 1882.

—. *Œuvres complètes de Laplace, Volume 8*. Paris : Gauthier-Villars, 2e édition, 1891.

—. *Œuvres complètes de Laplace, Volume 11*. Paris : Gauthier-Villars, 1895.

—. *Œuvres complètes de Laplace, Volume 13*. Paris : Gauthier-Villars, 1904.

—. *Œuvres complètes de Laplace, Volume 14*. Paris : Gauthier-Villars, 1912.

Seggewiss, W. Strasbourg Observatory and the Astronomische Gesellschaft. In *The Multinational History of Strasbourg Astronomical Observatory*. Publié par A. Heck, 221–225. Berlin : Springer, 2005.

Serret, J.-A., dir. *Œuvres de Lagrange, Volume 8*. Paris : Gauthier-Villars, 1879.

Servajean, R. Flammarion, Camille. In *Dictionary of Scientific Biography, Volume 5 : Emil Fischer–Gottlieb Haberlandt*. Publié par C. C. Gillispie, 21–22. New York : Charles Scribner's Sons, 1972.

Sheynin, O. B. Helmert's work in the theory of errors. *Archive for History of Exact Sciences* 49 (1995) : 73–104.

Simonin, M. Sur le mouvement des périhélies de Mercure et de Mars, et du nœud de Vénus. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 124 (1897a) : 1423–1426.

—. *Sur l'orbite de (108) Hécube*. Thèse, Faculté des sciences de Paris, Paris, 1897b.

—. Sur l'orbite de (108) Hécube. *Annales de l'Observatoire de Nice* 6 (1897c) : 1–73.

—. Lettre de M. Simonin. *Bulletin astronomique* 15(9) (1898) : 366–368.

—. Sur l'accélération du mouvement de la comète d'Encke. *Bulletin astronomique* 18 (1901) : 451–454.

—. *Notice sur les travaux scientifiques de M. Simonin*. Nice : Ventre frères, 1902a.

—. Sur les équations canoniques et la fonction perturbatrice. *Bulletin astronomique* 19 (1902b) : 129–133.

Smirnov, V. I. et Youchkevitch, A. P. Correspondance de A. M. Liapunov avec Henri Poincaré. *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* 8 (1987) : 1–18.

Sørenson, H. K. Niels Henrik Abel's professional and political legacy in Norway. In *Perspectives on Scandinavian Science in the Early Twentieth Century*. Publié par R. Siegmund-Schultze et H. K. Sørenson, 197–219. Oslo : Novus Forlag, 2004.

Stavinschi, M. Nicolae Coculescu : the first director of the Bucharest Observatory. *Romanian Astronomical Journal* 12(1) (2002) : 85–100.

—. Henri Poincaré et les Roumains. *Astronomie* 118 (2004) : 424–425.

Stavinschi, M. et Mioc, V. Astronomical researches in Poincaré's and Romanian works. http ://syrte.obspm.fr/journees2004/PDF/Stavinschi.pdf, 2004.

Stockwell, J. N. Memoir on the secular variations of the elements of the orbits of the eight principal planets. *Smithsonian Contributions to Knowledge* 18(3) (1872) : 1–199.

Stokes, G. G. On the variation of gravity on the surface of the Earth. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 8 (1849) : 672–695.

Stone, O. Simon Newcomb. *Astrophysical Journal* 30(3) (1909) : 171–177.

Strobel, F. *Adreßbuch der lebenden Physiker, Mathematiker und Astronomen des In- und Auslandes und der technischen Hilfskräfte*. Leipzig : J. A. Barth, 1905.

Szebehely, V. G. *Theory of Orbits : The Restricted Problem of Three Bodies*. New York : Academic Press, 1967.

Tagliaferri, G. et Tucci, P. Carlini and Plana on the theory of the Moon and their dispute with Laplace. *Annals of Science* 56(3) (1999) : 221–269.

Tait, P. G. Poincaré's Thermodynamics. *Nature* 45 (1892) : 245–246.

Tannery, J. Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* 5 (1875) : 113–182.

Thiele, T. N. *Undersógelse af Omlóbsbevægelsen i Dobbelstjernesystemet γ Virginis*. Thèse, University of Copenhagen, Copenhagen, 1866.

Thomson, W. On graphic solution of dynamical problems. *Philosophical Magazine* 34(210) (1892) : 443–448.

Thomson, W. et Tait, P. G. *Treatise on Natural Philosophy*. 2 vols. Cambridge : Cambridge University Press, 2e édition, 1879a.

—. *Treatise on Natural Philosophy, Volume 1, Part 1*. Cambridge : Cambridge University Press, 2e édition, 1879b.

—. *Treatise on Natural Philosophy, Volume 1, Part 2*. Cambridge : Cambridge University Press, 2e édition, 1883.

Tisserand, F.-F. *Exposition, d'après les principes de Jacobi, de la méthode suivie par M. Delaunay dans sa théorie du mouvement de la lune autour de la terre ; extension de la méthode*. Thèse, Faculté des sciences de Paris, Paris, 1868.

—. *Notice sur les titres scientifiques de M. F. Tisserand*. Paris : Gauthier-Villars, 1878.

—. Sur un cas remarquable du problème des perturbations. *Bulletin astronomique* 3 (1886) : 425–433.

—. Sur la commensurabilité des moyens mouvements dans le système solaire. *Bulletin astronomique* 4 (1887) : 183–192.

—. *Traité de mécanique céleste*. 4 vols. Paris : Gauthier-Villars, 1889a.

—. *Traité de mécanique céleste, Volume 1*. Paris : Gauthier-Villars, 1889b.

—. Sur un point de la ‘Théorie de la lune’ de Delaunay. *Bulletin astronomique* 7 (1890) : 265–271.
—. Recherches concernant l’équation différentielle $\frac{d^2x}{dt^2} + x(q^2 + 2q_1 \cos 2t) = 0$. *Bulletin astronomique* 9(3) (1892) : 102–112.
—. *Traité de mécanique céleste, Volume 3*. Paris : Gauthier-Villars, 1894.
—. *Traité de mécanique céleste, Volume 4*. Paris : Gauthier-Villars, 1896.
Todhunter, I. *A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of Earth, from the Time of Newton to that of Laplace*. 2 vols. London : Macmillan, 1873.
Trousset, J. Calculs d’orbites de petites planètes par la méthode de M. Brendel ; étude de la précision. *Annales de l’Observatoire de Bordeaux* 17 (1933) : 3–17.
Trouvelot, E.-L. Sur la variabilité des anneaux de Saturne. *Bulletin astronomique* 2 (1885) : 15–29.
Trumpler, R. J. Address of the retiring president of the Society in awarding the Bruce Gold Medal to Professor C. V. L. Charlier. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 45(263) (1933) : 5.
Turner, H. H. On the recent determination of the longitude Paris–Greenwich (reply to Colonel Bassot and Commandt Defforges). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 51 (1891) : 413–420.
—. General Gilbert Defforges. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 76 (1916) : 289–293.
Véron, P. *Dictionnaire des astronomes français (1850–1950)*. St. Michel l’Observatoire : tapuscrit inédit, 2006.
Verschaffel, A. Essai d’une contribution à l’explication de quelques faits récemment découverts dans l’astronomie stellaire. *Bulletin astronomique* 31(6) (1914) : 265–272.
Vignal, J. Charles Lallemand (1857–1938). *Annales des mines* 14 (1938) : 5–21.
Voigt, H.-H., dir. *Collected Works of Karl Schwarzschild, Volume 1*. Berlin : Springer-Verlag, 1992a.
—. *Collected Works of Karl Schwarzschild, Volume 2*. Berlin : Springer-Verlag, 1992b.
—. *Collected Works of Karl Schwarzschild, Volume 3*. Berlin : Springer-Verlag, 1992c.
Volterra, V. Henri Poincaré. In Rice Institute (1912), 899–928, 1915a.
—. Henri Poincaré. *Rice Institute Pamphlet* 1(2) (1915b) : 133–162.
Walter, S. A. Introduction. In Walter et. al. (2007), ix–xvi, 2007.
—. Henri Poincaré et l’espace-temps conventionnel. In *Réalisme et théories physiques*. Publié par I. Smadja, 87–119. Cahiers de philosophie de l’université de Caen 45. Caen : Presses universitaires de Caen, 2008.
—. Hypothesis and convention in Poincaré’s defense of Galilei spacetime. In *The Significance of the Hypothetical in the Natural Sciences*. Publié par M. Heidelberger et G. Schiemann, 193–219. Berlin : Walter de Gruyter, 2009.
Walter, S. A., Bolmont, E., et Coret, A., dir. *La correspondance d’Henri Poincaré, Volume 2 : La correspondance entre Henri Poincaré et les physiciens, chimistes et ingénieurs*. Basel : Birkhäuser, 2007.
Weierstrass, K. Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Awendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen. *Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1858) : 207–220.

Wiechert, E. Ueber die Massenverteilung im Inneren der Erde. *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse* (1897) : 221–243.
Wilkins, G. A. Sir Norman Lockyer's contributions to science. *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* 35 (1994) : 51–57.
—. The archives of the Norman Lockyer Observatory. *Journal of Astronomical Data* 10 (2004) : 153–162.
Wilson, C. *The Hill-Brown Theory of the Moon's Motion*. New York : Springer, 2010.
Wintner, A. Über die Existenz der Hillschen Mondbahn of maximum lunation und der Poincaréschen Schlingbahnen. *Mathematische Zeitschrift* 28 (1928) : 430–450.
Wodehouse, P. G. *Something Fresh : A Blandings Story*. London : Herbert Jenkins, 1915.
Wolf, M. *Die Differentialgleichung der mittleren Anomalie und die Wahrscheinlichkeit der Convergenz in der Darstellung ihres Integrals*. Thèse, Ruprecht-Karls-Universität, Heidelberg, 1888.
Woodward, R. S. George William Hill. *Astronomical Journal* 28(20) (1914) : 161–162.