Ludwig Schlesinger

Ludwig Schlesinger nait en 1864 à Nagyszombat, alors en Hongrie ; après des études secondaires à la *Realschule* de Bratislava, il étudie les mathématiques et la physique à Heidelberg et à Berlin. Schlesinger soutient en 1887 à l'Université de Berlin une thèse, *Über lineare homogene Differentialgleichungen vierter Ordnung, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen*[1], qui s'inscrit dans le programme d'études des équations différentielles linéaires défini par Lazarus Fuchs. Il entreprend alors une carrière universitaire qui le mène de l'Université de Berlin (1889-1897), à celle de Cluj (Kolozsvár) (1897-1911) et enfin à Giessen (1911-1930). Il est obligé par les nazis de quitter sa chaire en 1930 et décède à Giessen en 1933.

Schlesinger publie plus d'une centaines de notes et de mémoires pour l'essentiel dans des journaux allemands à l'exception de quelques notes aux *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* et de quatre mémoires dans les *Acta mathematica*. Il est aussi l'auteur de plusieurs ouvrages sur les équations différentielles linéaires[2]. Outre la théorie des équations différentielles linéaires dont il sera question dans les lettres qu'il envoie à Poincaré, Ludwig Schlesinger fait aussi œuvre d'historien des mathématiques en traduisant en allemand la *Géométrie* de Descartes, en éditant un des tomes des *Werke* de Gauß et en étant un des premiers éditeurs (avec Friedrich Engel) des *Leonhardi Euleri Opera omnia*.

Les deux lettres que Schlesinger envoie à Poincaré concernent pour la première, datée de 1892, les fonctions fuchsiennes et pour la seconde, datée de 1904, le problème de Riemann (voir p. 680 et 683) dont il démontrera plusieurs versions en utilisant dans un cas, les fonctions zétafuchsiennes de Poincaré et dans un autre, la méthode de continuité de Klein et de Poincaré. Les réponses de Poincaré sont plus laconiques et font état de la publication de notes de son correspondant aux *Comptes rendus*.

1. [Schlesinger, 1887].
2. Outre l'ouvrage dont il offre un exemplaire à Poincaré (voir la lettre 3, p. 680), Schlesinger [1909] est l'auteur d'un rapport de la *Deutschen Mathematiker-Vereinigung* sur les développements de la théorie des équations différentielles linéaires depuis 1865.

P. Nabonnand et al. (eds.), *La correspondance entre Henri Poincaré et les mathématiciens*,
Publications des Archives Henri Poincaré Publications of the Henri Poincaré Archives,
https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8288-9_63

1 Schlesinger à Poincaré

Berlin, S. W. Königgräzerstrasse 46,
le 7.5.92

Monsieur !

Dans un mémoire inséré au t. 105 du Journal de Crelle [3], dont je m'avais aussi fait l'honneur de vous offrir un tirage à part, j'ai montré, en suivant la voie que vous avez ouverte dans votre admirable mémoire du t. IV des Acta [4], que les fonctions fuchsiennes symétriques de la deuxième famille et du genre zéro, puissent être représentées comme les limites de certaines fonctions algébriques, qui correspondent à une série de sous-groupes du groupe des dites fonctions [5].

Essayant de généraliser cette mode de génération au cas des fonctions fuchsiennes non symétriques, je vous prie Monsieur de vouloir permettre que je vous fasse part de quelques lignes des résultats auxquelles je suis parvenu.

Je commence par considérer un groupe E de substitutions linéaires, composé de n substitutions fondamentales s_1, s_2, …, s_n transformantes en leurs correspondants des côtés du polygone générateur et entre lesquelles il n'existe point de relation fondamentale. Il s'agit de former une série de sous-groupes du groupe E, devenant toujours plus étroits c'est-à-dire contenant toujours moins de substitutions du groupe considéré, de manière que la limite de ces sous-groupes soit la substitution identique.

Soit E_1 le groupe composé des substitutions

$$s_k^3,\ s_k s_\lambda s_k,\ s_k s_\lambda^{-1} s_k, k, \lambda = 1, 2, \ldots, n,\ k \geq l$$

comme substitutions fondamentales et désignons ces substitutions écrites dans l'ordre suivant :

$s_1 s_1 s_1,\ s_1 s_2 s_1, \ldots,\ s_1 s_n s_1,\ s_1 s_1^{-1} s_1,\ \ldots\ \ldots,\ s_1 s_2^{-1} s_1,\ s_2 s_1^{-1} s_2, s_2 s_1 s_2, s_2 s_2 s_2,$
$\ldots,\ s_2 s_n s_2,\ s_2 s_n^{-1} s_2,\ \ldots\ s_2 s_3^{-1} s_2\ ;\ \ldots\ ;\ s_k s_{k-1}^1 s_k,\ \ldots,\ s_k s_1^{-1} s_k,\ s_k s_1 s_k,\ \ldots,$
$s_k s_n s_k,\ s_k s_n^{-1} s_k,\ \ldots\ s_k s_{k+1}^{-1} s_k\ ;\ \ldots$

par $s_1^{(1)},\ s_2^{(1)},\ \ldots, s_{n_1}^{(1)}$, où $n_1 = n(2n-1)$.

3. Cet article [Schlesinger, 1889] est consacré à l'étude des fonctions fuchsiennes.
4. [Poincaré, 1884f].
5. Dans l'introduction de son article, Schlesinger exprime la même idée :

> Durche eine von Herrn Fuchs, meinem verehrten Lehrer, im Winter-Semester 1885/6 an der Berliner Universität gehaltenen Vorlesung zur Beschäftigung mit der Theorie der *Fuchs*schen Functionen angeregt, war es insbesondere die Lectüre der §§ 16, 17 von Herrn *Poincarés* Arbeit „*Sur les groupes des équations linéaires*", die mich veranlasste, für die Erzeugerung der in Rede stehenden Functionen einen ähnlichen Weg einzuschlagen, wie ihn Gauss in der Abhandlung „*Determinatio attractionis* etc." und in den nachgelessenen Fragmenten über das arithmetisch-geometrische Mittel für die elliptischen Functionen vorgezeichnet hat, nämlich die functionale Beziehung, als deren Umkehrung sich die Fuchsschen Functionen ergeben, durch einen Grenzübergang aus einer algebraischen Beziehung herzustellen. [Schlesinger, 1889, p. 181]

Une substitution U quelconque du groupe E se met sous la forme

$$U = s_{k_1}^{\lambda_{k_1}} s_{k_2}^{\lambda_{k_2}} \dots s_{k_\tau}^{\lambda_{k_\tau}};\ k_i \leq k_{i-1},\ i = 2, 3, \dots \tau$$

$k_1, k_2, \dots k_\tau$ désignant τ quelconques des nombres $1, 2, \dots n$, λ_{k_i} des nombres entiers positifs ou négatifs et posons

$$\Sigma_{i=1}^{\tau} |\lambda_{k_i}| = Ind_0 U$$

Alors on démontre facilement à l'aide de la méthode que j'ai indiquée dans mon mémoire cité[6] (pag. 206), que

$$U = U^{(1)} s_k^{\pm i},$$

où $U^{(1)}$ représente une substitution appartenant au groupe E_1, k un certain des nombres $0,\ 1, \dots, n,\ (S_0 = 1)$, et que

$$Ind_1 U^{(1)} < Ind_0 U,$$

quand on pose :

$$U^{(1)} = \Pi_{i=1,2,\dots,\tau} \left(s_{k_i}^{(1)}\right)^{\lambda_{k_i}^{(1)}},\ k_i \geq k_{i-1},$$

et

$$Ind_1 U^{(1)} = \Sigma_{i=1}^{\tau} \left|\lambda_{k_i}^{(1)}\right|.$$

On aura donc

$$E = E_1 \left(1, s_1, \dots, s_n, s_n^{-1}, \dots s_1^{-1}\right),$$

c'est-à-dire que E_1 est un sous-groupe d'indice fini de E, dont le quotient est représenté par

$$P_1 = \left(1, s_1, \dots, s_n, s_n^{-1}, \dots s_1^{-1}\right),$$

Formons avec les substitutions $s_k^{(1)},\ k = 1, \dots, n_1$, les substitutions $s_k^{(2)},\ k = 1, \dots, n_2,\ \ n_2 = n_1(2n_1 - 1)$ de la même manière, dont les s_k^1 ont été formées avec les substitutions S_k et désignons par E_2 le groupe composé des s_k^2 comme substitution fondamentales. On trouve

$$E_1 = E_2(1, s_1^1, \dots, s_n^1, (s_k^1)^{-1}, \dots, (s_k^n)^{-1})$$

et une substitution $U^{(1)}$ quelconque de E_1 se met sous la forme

$$U^{(1)} = U^{(2)} (S_k^{(1)})^{\pm i}$$

désignant par $U^{(2)}$ une substitution appartenant au groupe E_1, par k un certain des nombres $0, 1, \dots, n_1$, $S_0^{(1)} = 1$. En introduisant le symbole $Ind_2 U^{(2)}$ à l'instar des symboles $Ind_1 U^{(1)}$, $Ind_0 U$ on démontre de plus que

$$Ind_2 U^{(2)} < Ind_1 U^{(1)}.$$

6. [Schlesinger, 1889].

Continuons ce procédé, nous parviendrons à un groupe E_λ composé des substitutions fondamentales $S_k^{(\lambda)}$, $k = 1, \ldots, n_\lambda,\ n_\lambda = (2n_{\lambda-1} - 1)n_{\lambda-1}$ et l'on aura

$$E_{\lambda-1} = E_\lambda . \mathcal{P}_\lambda$$

étant posé

$$\mathcal{P}_\lambda = \left[1, S_1^{(\lambda-1)}, \ldots, S_{n_{\lambda-1}}^{(\lambda-1)}, (S_{n_{\lambda-1}}^{(\lambda-1)})^{-1}, \ldots, (S_1^{(\lambda-1)})^{-1}\right],$$

donc

$$E = E_\lambda \mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_{\lambda-1} \ldots \mathcal{P}_1.$$

Alors chaque substitution U de E pourra être mise sous la forme

$$U = U^{(\lambda)} \Pi_{i=\lambda-1, \ldots, 2,1,0} (S_{k_i}^{(i)})^{\pm 1},\ S_k^{(0)} = S_k,\ S_0^{(i)} = 1,$$

où l'on désigne par $U^{(\lambda)}$ une substitution de E_λ un certain des nombres $0, 1, \ldots, n_i$, et de plus nous avons

$$Ind_\lambda U^{(\lambda)} < Ind_0 U - \lambda + 1$$

Par conséquent, toute substitution U de E dont l'indice $Ind_0 U$ soit plus petit que λ, doit se trouver parmi les substitutions de

$$\mathcal{Q}_\lambda = \mathcal{P}_\lambda \mathcal{P}_{\lambda-1} \ldots \mathcal{P}_1,$$

on pourra donc, quelque soit l'indice d'une substitution de E, assigner un nombre λ aussi grand, pour que cette substitution fasse partie de $\mathcal{Q}_\lambda$. Il s'en suit que

$$lim_{\lambda=\infty} \mathcal{Q}_\lambda = E,$$

donc, pour chaque τ entier positif

$$lim_{\lambda=\infty} E_\lambda = lim_{\lambda=\infty} E_{\lambda+\tau} = 1.$$

S'il s'agissait de la décomposition analogue d'un groupe Γ formé des substitutions fondamentales $S_1, \ldots, S_n$ entre lesquelles il existe des relations, on pourra, d'après le théorème que vous avez démontré Acta, t. I, pag. 47 [7] mettre ces relations sous

7. Pour étudier les isomorphismes entre groupes fuchsiens, Poincaré regarde les relations entre substitutions qui les définissent. Il établit le théorème :

> Le nombre des relations fondamentales qui existent entre les substitutions fondamentales d'un groupe fuchsien G, est précisément celui des cycle de la 1re catégorie [cycles elliptiques] du polygone R_0 correspondant. [Poincaré, 1882k, p. 47]

Comme les groupes des 2e, 3e et 4e familles ne comportent pas de cycle de 1re catégorie [Poincaré, 1882k, p. 22], Poincaré en conclut que :

> Tout groupe H dérivé de n substitutions fondamentales est isomorphe à un groupe fuchsien G de la 2e, de la 3e ou de la 4e familles, pourvu que ce groupe soit également dérivé de n substitutions fondamentales. [Poincaré, 1882k, p. 47]

L'argument de Schlesinger est développé dans la seconde des notes aux *Compte rendus* [Schlesinger, 1892b] dans lesquelles il reprend cette démonstration.

la forme

$$(a) \qquad \Sigma_k^{\beta_k} = 1 \quad , \; k = 1, 2, \ldots, n+1$$

en posant $\Sigma_1 = S_1;\ \Sigma_k = S_{k-1}^{-1} S_k,\ k = 2, 3, \ldots, n;\ \Sigma_{n+1} = S_n^{-1}$, et l'on passera du groupe E au groupe Γ en réduisant à l'aide des équations (a) ; nous écrirons donc

$$\Gamma \equiv (modd\ \Sigma_k^{\beta_k} - 1,\ k = 1, 2, \ldots, n+1)$$

Par suite l'on obtient la décomposition cherchée du groupe Γ en faisant cette même réduction dans les groupes E_λ, c'est-à-dire en formant des groupes Γ_λ définis par les congruences

$$\Gamma_\lambda \equiv (modd\ \Sigma_k^{\beta_k} - 1),$$

mais il faut remarquer qu'en général les n_λ vont se réduire par ce procédé à des nombres plus petits $\overline{n_\lambda}$.

Si vous me permettiez Monsieur de continuer mes communications, j'exposerais dans une note prochaine la formation de certaines fonctions algébriques d'une variable x, appartenantes aux groupes E_λ resp. Γ_λ et convergentes avec λ croissant vers une limite ζ, dont x est fonction fuchsienne du genre zéro.

Je vous prie Monsieur de vouloir accueillir avec indulgence ces remarques insignifiantes que j'ose vous présenter, je serais très heureux si vous les trouviez dignes d'être insérées dans les Comptes Rendus [8].

Veuillez agréer Monsieur l'expression sincère d'admiration et de haute estime. De votre dévoué serviteur

Ludwig Schlesinger,
Privat-docent à l'université de Berlin.

2 Poincaré à Schlesinger

[11/05/1892] [9]

Monsieur et cher Collègue

Les résultats que vous me communiquez me paraissent fort intéressants et si vous voulez bien m'envoyer une note pour les Comptes Rendus, je me ferai un plaisir de la présenter à l'Académie [10].

8. Le contenu de cette lettre donne lieu à deux notes, toutes deux présentées par Poincaré, [Schlesinger, 1892a] et [Schlesinger, 1892b].

9. Cette lettre est conservée à la Staatsbibliothek zu Berlin - Preußischer Kulturbesitz. Elle est datée d'après les cachets de la poste.

10. Schlesinger a dû répondre par retour de courrier ; en effet, Poincaré présente le 16 mai la première note de Schlesinger [1892a] sur les fonctions Fuchsiennes et le 13 juin la seconde [Schlesinger, 1892b].
Par ailleurs, Poincaré présente lors de la séance du 4 juillet 1892 de l'Académie des sciences une note de Schlesinger [1892c] sur les formes primaires des équations différentielles linéaires du second ordre.

Vous savez que la longueur d'une communication insérée aux Comptes Rendus ne doit pas excéder trois pages.
Veuillez agréer, Monsieur et cher Collègue, l'assurance de ma considération.

Poincaré

3 Schlesinger à Poincaré

Lettre à M. Poincaré

Kolozsvár le 14.IV.1904 [11]
Felleváridt 112.

Monsieur mon cher et illustre maître !

Je me permets de vous transmettre ci joint deux Notes [12] qui peut-être trouveront votre approbation pour être présentées à l'Institut. J'y ai réussi de démontrer l'existence des fonctions satisfaisant au problème de Riemann [13], sans imposer aux substitutions fondamentales aucune restriction, en m'appuyant sur un théorème que j'énonce dans la première note (dont la démonstration, d'ailleurs assez pénible, sera donnée dans un mémoire destiné au Journal de Crelle [14]), et en appliquant ensuite vos principes de la méthode de continuité [15].
Il me parait assez curieux que le problème de Riemann soit résoluble aussi dans le cas où les racines des équations fondamentales, appartenant aux substitutions données, ont des modules différent de l'unité, quoique vos séries Zétafuchsiennes soient divergentes dans ce cas. J'ai vainement cherché de découvrir la cause - certainement bien cachée - de cette discrépance.

11. Schlesinger était depuis 1897 professeur à l'université de Kolozsvár (Cluj) alors en Hongrie.

12. La première note proposée par Schlesinger [1904], Sur la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires, a été présentée par Poincaré. Par contre, la seconde (voir l'annexe 1 ci-dessous, p. 682) n'a pas été publiée.

13. Le problème de Riemann qui intéresse Schlesinger est énoncé dans le mémoire de Riemann [1876, p. 357-369] intitulé «Zwei allgemeine Sätze über lineäre Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten». Dans une note aux *Comptes rendus* publiée en 1898, Schlesinger [1898] l'énonce comme suit :

> Étant donnés, dans le plan de la variable x, les $\sigma+1$ points $a_1, \ldots, a_\sigma, a_{\sigma+1}$, traçons des coupures $l_1, \ldots, l_\sigma$ joignant les points $a_1, \ldots, a_\sigma$ au point $a_{\sigma+1}$; on demande n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de x, qui se comportent régulièrement pour toutes les valeurs de x, excepté les points a_k, qui subissent les substitutions linéaires données arbitrairement $A_1, A_2, \ldots, A_\sigma$, quand x franchit les coupures $l_1, \ldots, l_\sigma$ et qui, aux points a_k, ne deviennent pas infinis d'un ordre infiniment grand. [Schlesinger, 1898, p. 723]

Schlesinger avait montré l'existence de telles fonctions en posant des hypothèses techniques sur les transformations linéaires A_k [Schlesinger, 1898, 1901, 1902]. L'objet des notes qu'il propose dans cette lettre est d'annoncer que l'on peut s'affranchir de ces conditions. Voir la note 24 (p. 683) de l'annexe 1.

14. [Schlesinger, 1905c].

15. La méthode de continuité consiste à utiliser des arguments topologiques ou homologiques pour établir des théorèmes d'existence. Voir par exemple [Poincaré, 1884f, p. 233-236] et pour un point de vue moderne, [de Saint-Gervais, 2010, p. 229-248].

Mais le théorème mentionné qui me parait important au point de vue de la théorie des classes (au sens de Riemann) des équations différentielles linéaires, permet d'entrevoir encore d'autres méthodes pour la démonstration de l'existence. Notamment j'ai développé (dans un autre mémoire qui paraîtra aussi au Journal de Crelle [16]) une théorie de l'intégration des systèmes d'équations linéaires du premier ordre qui permet de considérer très nettement les parties réelles et imaginaires des intégrales comme fonctions de deux variables réelles, et il me paraît possible de traiter ces intégrales d'une manière parfaitement analogue à celle, dont Riemann traite les intégrales abéliennes. Mais comme dans cet ordre d'idées je ne sois parvenu jusqu'à présent à des résultats nouveaux, je n'ose pas de vous en parler davantage.
J'ai entrepris avec la collaboration du fils ainé de Fuchs [17] l'édition de ses Œuvres mathématiques [18] ; l'impression du tome premier contenant les mémoires parus de 1858-1874 sera achevée au cours de l'été et j'espère de pouvoir présenter ce volume au Congrès international d'Heidelberg [19].
La deuxième édition d'un petit Traité sur la théorie des équations différentielles, publié pour la première fois en 1900, vient de paraître [20] ; je vous prie de vouloir bien accepter avec indulgence l'exemplaire que j'ai l'honneur de vous offrir.
Agréez, Monsieur l'expression du respect le plus profond de votre admirateur

L. Schlesinger

4 Poincaré à Schlesinger

[23/05/1906] [21]

Mon cher Collègue,

Votre note [22] n'a pu paraître que dans le numéro du 7 mai, parce que tout est désorganisé à cause de la grève des imprimeurs [23].
Mille regrets.
Votre bien dévoué Collègue,

Poincaré

16. [Schlesinger, 1905a].
17. Lazarus Fuchs est décédé le 26 avril 1902. Son fils, Richard, est aussi mathématicien. Il avait soutenu en 1897 à l'Université de Berlin, une thèse parrainée par Georg Frobenius et Hermann Schwarz (*Über die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Verzweigungspunktes* [Fuchs, 1897]).
18. [Fuchs, 1904-1906-1909].
19. Schlesinger prononce lors du 3e congrès international des mathématiciens à Heidelberg une conférence consacrée à l'édition des Œuvres complètes de Lazarus Fuchs [Schlesinger, 1905b].
20. [Schlesinger, 1900].
21. Cette lettre est conservée à la Staatsbibliothek zu Berlin - Preußischer Kulturbesitz.
22. [Schlesinger, 1906].
23. La grève des ouvriers typographes débutent au cours du mois d'avril 1906 et durera jusqu'au mois de juin dans un contexte de tentative de grève générale et de répressions menées par le gouvernement, en particulier par le Ministre de l'Intérieur de l'époque, Georges Clémenceau.

5 Annexe : texte d'une note non-publiée envoyée à Poincaré en 1904

Sur une solution nouvelle et générale du problème de Riemann.
Par M. L. Schlesinger

En conservant les notations de ma Note précédente je vais considérer le problème de Riemann, déterminé par les affixes des points singuliers $a_1, \cdots, a_\sigma$ et par les substitutions $(A_{ik}(\nu))$ $(\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)$ données arbitrairement. Pour me débarrasser des complications algébriques qui ne touchent pas les principes de la méthode que je vais indiquer, je supposerai que les équations fondamentales

$$|A_{ik}(\nu) - \delta_{ik}\omega| = 0 \; (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma)(i, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{5}$$

n'aient pas de racines multiples ; soient $\omega_1^{(\nu)}, \cdots, \omega_n^{(\nu)}$ les racines de l'équation (5). On peut former une équation de la forme (3) (v. note précédente) de manière que les racines des équations déterminantes (4) (ibid.) soient précisément les quantités

$$r_k^\nu = \frac{\log \omega_k^{(\nu)}}{2\pi\sqrt{-1}} \; (k = 1, 2, \cdots, n),$$

ce qu'impose aux $n^2\sigma$ quantités $\mathcal{B}_{ik}^{(\nu)}$ $n\sigma$ conditions ; les $(n^2-n)\sigma$ quantités restant encore arbitraires, pourront être mises en évidence de la manière suivante. Choisissons ces $(n^2-n)\sigma$ quantités d'une manière arbitraire mais déterminée et soient $(b_{ik}^{(\nu)})$, σ matrices constantes à déterminants différents de zéro. Alors la matrice $(b_{ik}^{(\nu)})(\mathcal{B}_{ik}^{(\nu)}(b_{ik}^{(\nu)})^{-1}$ est la plus générale dont l'équation fondamentale à pour racines les r_k^ν, et elle dépende encore de n^2-n constantes parfaitement arbitraires, que nous désignerons par $b_1^{(\nu)}, \ldots, b_{n^2-n}^{(\nu)}$.
La matrice intégrale

$$(z_{ik}) = \int_{x_0}^{x} \left(\Sigma_{\nu=1}^{\sigma} \frac{\mathcal{B}_i k^(\nu)}{x - a_\nu} \right)$$

subit des substitutions bien déterminées $\left(\mathcal{M}_{ik}^{(\nu)}\right)$, si la variable a franchit les coupures l_ν, et les équations fondamentales de ces substitutions ont pour racines les $\omega_k^{(\nu)}$. De même la matrice intégrale

$$(\zeta_{ik}) = \int_{x_0}^{x} \Sigma_{\lambda=1}^{\sigma} \left(b_{ik}^{(\lambda)}\right) \left(\frac{\mathcal{B}_{ik}^{(\lambda)}}{x - a_\lambda} \right) \left(b_{ik}^{(\lambda)}\right)^{-1}$$

subira des substitutions, dont les équations fondamentales auront les mêmes racines $\omega_k^{(\nu)}$, ces substitutions pourront être mises sous la forme

$$(\beta_i k^{(\nu)})(\mathcal{M}_i k^(\nu)(\beta_i k^{(\nu)})^{-1} \; (\nu = 1, 2, \cdots, \sigma) \tag{6}$$

En considérant les $(\beta_{ik}^{(\nu)})$ comme des matrices constantes arbitraires aux déterminants différent de zéro, les matrices (6) représenterons les matrices les plus générales, dont les équations fondamentales ont pour racines les $\omega_k^{(\nu)}$, et la matrice (6) dépendra encore de $n^2 - n$ constantes arbitraires, que nous désignerons par $\beta_1^{(\nu)}, \cdots, \beta_{n^2-n}^{(\nu)}$.
Considérons la multiplicité $\mathcal{M}$ des $\sigma(n^2 - n)$ quantités $b_k^{(\nu)}$ et la multiplicité $\mathfrak{M}$ des $\sigma(n^2 - n)$ quantités $\beta_k^{(\nu)}$ $(k = 1, 2, \cdots, n^2 - n)$. À chaque point m de $\mathcal{M}$ il corresponde un point y et un seul de $\mathfrak{M}$ et d'après le théorème de M. Poincaré mentionné dans la note précédente, les coordonnées de y sont des fonctions entières des coordonnées de m. D'ailleurs, d'après le théorème que nous avons énoncé l.c., à aucun point de $\mathfrak{M}$ ne peut correspondre plus d'un point de $\mathcal{M}$. Comme les $b_k^{(\nu)}$ sont parfaitement arbitraires, la multiplicité $\mathcal{M}$ est une multiplicité fermée ne présentant pas de bord ; il s'en suit donc, d'après le principe de la méthode de continuité établie par M. Poincaré (Acta Mathem. IV, p. 234), qu'à tout point de $\mathfrak{M}$ corresponde un point de $\mathcal{M}$. Il existe donc toujours un système différentiel aux coefficients

$$\Sigma_{\nu=1}^{\sigma} \left(b_{ik}^{(\nu)}\right) \left(\frac{\mathcal{B}_{ik}^{(\nu)}}{x - a_\nu}\right) \left(b_{ik}^{(\nu)}\right)^{-1}$$

dont la matrice intégrale (3) subit les substitutions (4), quelque soient les matrices transformantes $\left(\beta_{ik}^{(nu)}\right)$. Comme les substitutions données $\left(A_{ik}^{(\nu)}\right)$ pourront être mises sous la forme (4), l'existence des fonctions, satisfaisant au problème de Riemann se trouve démontrée [24].

24. Cette note est l'une des deux qui accompagnaient la lettre 3 du 14 avril 1904 (p. 680). Au contraire de [Schlesinger, 1904], elle ne sera pas publiée. En 1908, Schlesinger [1908] publie un article dans *Acta Mathematica* dans lequel il reprend l'ensemble de ses travaux sur le problème de Riemann dont une partie de cette note :

> En poursuivant les recherches que Riemann a touchées dans son mémoire posthume sur la théorie des équations linéaires, la première tâche que j'avais à remplir était de démontrer l'existence d'un système de n fonctions d'une variable x jouissant des propriétés suivantes. Ces fonctions sont holomorphes pour chaque valeur finie de x, à l'exception de σ points données arbitrairement $a_1, \ldots a_\sigma$ et dans ces points singuliers mêmes, aussi bien que pour $x = \infty$, elles ne sont pas déterminées (au sens de Fuchs). Quand x franchit les coupures $(a_\nu \infty)$ les dites fonctions subissent des substitutions linéaires arbitrairement données
>
> $$\mathcal{U}_\nu = \left(\mathcal{U}_{ik}^{(\nu)}\right) \qquad (\nu = 1, 2 \ldots, \sigma)$$
> $$(i, k = 1, \ldots n)$$
>
> Le problème de déterminer un tel système, que j'avais nommé le problème de Riemann, a été résolu par moi en 1898 pour le cas particulier où les racines des équations fondamentales, relatives aux substitutions $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_\sigma$ et à la substitution
>
> $$\mathcal{U}_{\sigma+1} = \mathcal{U}_1^{-1} \ldots \mathcal{U}_\sigma^{-1}$$
>
> ont pour module l'unité, à l'aide des fonctions zéta-fuchsiennes de M. Poincaré. Pour le cas général où ces modules diffèrent de l'unité, l'application

des séries zétafuchsiennes devient impossible, puisque dans ce cas, ces séries sont divergentes. Plus tard, je réussis à démontrer l'existence des fonctions satisfaisant au problème de Riemann en appliquant la méthode de continuité, dont MM. Klein et Poincaré se sont servis pour la démonstration du théorème fondamental de la théorie des fonctions fuchsiennes. Comme ma démonstration se trouve répandue dans plusieurs mémoires, se rapportant pour la plus grande part à des sujets différents du problème mentionné, et comme j'ai réussi dernièrement à simplifier notablement la démonstration d'un théorème auxiliaire, je me permets d'exposer sur les quelques pages qui suivent ma démonstration sous sa forme, pour ainsi dire, définitive. [Schlesinger, 1908, p. 65-66]

Voir la note 13 (p. 680).