Salvatore Pincherle

Salvatore Pincherle (1853-1936) was a student of Enrico Betti at the Scuola Normale Superiore in Pisa. After graduation he took Casorati's advice and spent the academic year 1877-78 in Berlin, listening to lectures by Kronecker and Weierstrass. On his return to Italy, he published his lengthy *Saggio* [1] in 1880, which gave the first presentation in Italy of Weierstrass's theory of analytic functions, and could be seen as a Weierstrassian counterpart to Casorati's Riemannian textbook [2]. In 1881, Pincherle obtained a chair at the University of Bologna, where he taught until his retirement in 1928. He quickly took the opportunity to write to Poincaré to set out his research agenda, and drew the interesting response out in Poincaré's reply [3].
The topic Pinchele mentionned in his first letter, functions that satisfy the functionnal equation

$$f(x) = f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right),$$

refers indirectly to Poincaré's work on automorphic functions ; the canonical function satisfying this equation is the Dedekind-Klein j-function. The notes seem to have been published as a single paper in 1880 [4].
Pincherle's second letter raises substantially more important points. The first cluster of questions, those in (A), as well those in (C), concern obscurities in Weierstrass's approach to complex function theory : if one starts from a power series expansion valid on a certain disc, how does one find important properties of the function thus represented ? The question in (B) strike at an important distinction between the ideas of Riemann and those of Weierstrass. Riemann had thought that every analytic function would be represented by a convergent series of some kind – not necessarily a power series – and that every such series would represent a function. But, as Pincherle probably knew from his time in Berlin, Weierstrass

1. [Pincherle, 1880b].
2. [Casorati, 1868].
3. Sur Salvatore Pincherle, on peut consulter [Pincherle, 1925; Tonelli, 1937], [Amaldi, 1938], [Bottazzini, 1991, 2012].
Sur l'histoire de l'analyse complexe au 19^{e} siècle, voir [Bottazzini, 1986], [Bottazzini et Gray, 2013] et [Gray, 2015].
4. [Pincherle, 1880a].

P. Nabonnand et al. (eds.), *La correspondance entre Henri Poincaré et les mathématiciens*,
Publications des Archives Henri Poincaré Publications of the Henri Poincaré Archives,
https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8288-9_61

had recently published examples of a power series convergent on two distinct domains where it defines two complex functions (in the sense that neither is the analytic continuation of the other). There to quote Weierstrass ; ”the concept of a monogenic function of one complex variables does not coincide completely with the concept of a dependence that can be expressed by means of (arithmetical) operations on magnitudes [5]”. They also raise the interesting question of when a series of analytic functions converges to an analytic function. This was a topic illuminated by Weierstrass’s paper of 1876 [6], where he explained the concept of uniform convergence and the French translation of his 1880 paper [7] seems to have caused quite a stir. Weierstrass observed to Schwarz on March 6, 1881, that ” My latest paper created more of a sensation among the French than it really deserves ; people seem finally to realize the signifiance of the concept of uniform convergence [8]”. The topic in (D) was also to have a long life, for a number of French mathematicians in the 1880s and 1890s, including Jacques Hadamard [9] and those in the group around Émile Borel took up the question of how a function behaves on the boundary of its disc of convergence [10].

J. J. G.

5. [Weierstrass, 1881, p. 210].
6. [Weierstrass, 1876].
7. [Weierstrass, 1880b].
8. Voir [Bottazzini et Gray, 2013].
9. [Hadamard, 1892].
10. [Painlevé, 1888; Borel, 1894; Fabry, 1896, 1898, 1899].

1 Pincherle à Poincaré

Bologne, le 17 mars 1882

Monsieur,

Bien que n'ayant pas l'honneur de vous connaître, je prends la liberté de vous adresser deux Notes d'Analyse [11] que j'ai publiées l'an dernier sur des sujets qui me semblent avoir quelque analogie avec ceux que vous traitez d'une façon si remarquable et dont j'ai pu voir une extrait dans les derniers fascicules des *Comptes rendus* [12].

J'espère que vous voudrez bien m'excuser si j'ai pensé que pareille liberté était permise entre personnes qui cultivent la même partie de la même science ; et je me permets en même temps de vous demander un exemplaire des Mémoires que vous avez déjà publiés ou que vous publierez sur des sujets analogues.

Je crois que la détermination des fonctions ayant la propriété

$$f(x) = f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)$$

(et sans autres points singuliers que ceux qui sont exigés par l'équat. précédente) résulte immédiatement de mes deux Notes.

Dans l'espoir que vous voudrez bien pardonner la liberté que j'ai prise et jeter un coup d'œil sur ces deux Notes, je vous prie d'agréer, Monsieur l'expression de mes sentiments les plus distingués.

D$^{\mathrm{r}}$ Salvatore Pincherle
professeur à l'Université Royale de Bologne (Italie)

2 Pincherle à Poincaré

Bologne, le 10 juin 1882

Monsieur le Professeur [13],

L'obligeance avec laquelle vous avez bien voulu répondre à ma lettre que j'ai pris la liberté de vous adresser l'année dernière, m'encourage à vous écrire de nouveau [14]. Je viens cette fois vous soumettre une ébauche de programme, dont le but est d'exposer (à des élèves d'un cours supérieur d'Analyse) l'énoncé des principaux problèmes dont s'occupe actuellement les spécialistes de la Théorie Générale des

11. [Pincherle, 1879, 1880a].
12. Pincherle fait allusion à la série de notes de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes.
13. Sur cette lettre et la réponse de Poincaré, voir [Bottazzini, 1991].
14. La réponse de Poincaré n'a pas été retrouvée.

Fonctions ; et c'est à vous, qui prenez place parmi les plus distingués, que je viens demander si l'insuffisance de mes connaissances ne m'a pas éloigné par trop de la vérité.

Ébauche d'une classification des Problèmes
de la Théorie générale des fonctions.

Il me semble que les principaux problèmes qui forment l'objet de la Théorie générale des fonctions puissent se partager en quatre grandes classes :

A. „Étant donné un Élément de fonction analytique, reconnaître les propriétés de la fonction qu'il définit."
On sait (Weierstrass) qu'un Élément de fonction sert à définir la fonction dans tout le champ de sa validité ; et l'on obtient la valeur, ou les valeurs de la fonction pour tous les points, au moyen de la continuation (Fortsetzung [15]) de proche en proche. Mais cette méthode est peu pratique pour faire connaître :

1° Les limites du champ de validité.

2° Si la fonction est uniforme ou multiforme.

3° Si elle satisfait à une éq. algébrique ou à une équation algébrico-différentielle, ou si elle appartient à une classe connue de fonctions.

Il semble donc que l'un des principaux problème de la Théorie des fonctions devrait être le suivant „reconnaître, par la loi des coefficients de l'Élement, les trois caractères sus-énoncés dans la fonction".
J'ignore si ce problème a été résolu, hors le cas, des séries récurrentes, et des séries hypergéométriques [16].

B. „Quelles sont les fonctions qui peuvent s'exprimer au moyen de formes arithmétiques déterminées ?"
Une forme arithmétique, qui ne contient que les 4 opérations en nombre fini, représente une fonction rationnelle et ne donne lieu à aucune observation. Mais si la forme contient des opérations en nombre infini (séries, produits infinis ou fractions continues), on se trouve en présence des problèmes de cette seconde classe :

„Convergence du développement de la forme arithmétique. Champ de convergence, à une ou deux dimensions. Si le champ est à deux dimensions, la forme représente-t-elle une fonction analytique, et dans quels cas ?"

---

15. Le prolongement analytique est le principal outil utilisé par Weierstrass pour définir la notion de fonction analytique. Dans son cours donné durant le semestre d'hiver 1882 sur les fonctions analytiques (transcription conservée à la bibliothèque universitaire de Strasbourg), la troisième partie consacrée à la théorie des fonctions analytiques commence par un chapitre intitulé „Theorie der Fortsetzung der Potenzreihen. Definition der analytischen Function einer und mehrerer Variablen".

16. Voir la réponse de Poincaré, p. 661.

Ces questions sont résolues en partie pour les séries ; j'ignore si elles ont été traitées pour les produits infinis ou les fractions continues (sauf la première).
Pour les séries, la convergence au même degré (Gleichmässig) donne un criterium pour reconnaître si la série représente une fonction analytique, quand en outre le champ de convergence est à deux dimensions (Weierstrass, Zur Functionenlehre [17]) mais c'est une condition suffisante et non-nécessaire. Je ne crois pas que cette condition ait été étendue à d'autres formes arithmétiques que les séries.
À cette classe, se rattachent encore les problèmes ayant pour but la construction de fonctions avec des zéros et des infinis déterminés, résolus par Betti, Weierstrass [18] et Mittag-Leffler [19], et récemment étendus aux fonctions multiformes par Picard [20].
Un des résultats les plus importants obtenus dans cette classe de problèmes, est le fait analytique qu'une seule et même forme arithmétique peut représenter deux fonctions analytiques différentes, c'est-à-dire qui ne peuvent se déduire l'une de l'autre par continuation.
Enfin à cette même classe de problèmes se rattache l'étude des séries de la forme $\sum a_n P_n(x)$, où les fonctions $P_n(x)$ constituent un système donné. (Séries de Fou-

17. [Weierstrass, 1880b].
18. [Weierstrass, 1876].
19. [Mittag-Leffler, 1879, 1882].
20. Pincherle fait allusion aux résultats énoncés dans une note intitulée sur une classe de fonctions non-uniformes [Picard, 1879d,e] dans laquelle Picard donne l'expression « des fonctions multiformes ayant des points critiques déterminés, mais pouvant avoir en outre un nombre quelconque de pôles situés d'une manière quelconques » [Picard, 1879d, p. 104]. Picard a contribué de manière essentielle à ces questions. On peut d'abord rappeler les théorèmes de Picard [1880a], annoncés dans une série de notes aux *Compte rendus* parues en 1879 [Picard, 1879f,c,a] :

> On sait que M. Weierstrass, dans son célèbre Mémoire sur les fonctions analytiques uniformes [...] partage en deux classes les points singuliers d'une fonction uniforme : ce sont les pôles et les points singuliers uniformes. L'illustre géomètre donne l'expression générale d'une fonction uniforme $f(x)$ ayant un nombre fini de points singuliers essentiels et des pôles en nombre quelconque, et il montre que, dans le voisinage d'un point singulier essentiel A, la fonction s'approche autant que l'on veut de toute valeur donnée, c'est-à-dire que, étant donnés deux nombres ρ et ϵ aussi petits que l'on voudra, on peut trouver, à l'intérieur du cercle ayant A pour centre et ρ pour rayon, un point pour lequel le module de $f(x) - a$ soit moindre que ϵ, a étant une constante quelconque. Je me propose de compléter ce dernier théorème en montrant qu'il y a dans le voisinage de A un nombre infini de points pour lesquels $f(x)$ devient *rigoureusement* égal à a, une exception pouvant se produire seulement pour deux valeurs particulières de a. [Picard, 1879a, p. 745]

La même année, il exhibe des fonctions doublement périodiques ayant un nombre fixé de points singuliers essentiels dans chaque parallélogramme de période [Picard, 1879b]. Picard annonce en 1882 avoir résolu la question suivante dans une note aux *Comptes rendus* :

> On sait que M. Weierstrass, dans son Mémoire célèbre sur les fonctions uniformes, a donné la forme analytique de toute fonction ayant un nombre fini de points singuliers essentiels et des pôles en nombre quelconque. Je me propose de montrer que toute cette théorie peut, avec des modifications bien simples, être étendue aux fonctions uniformes possédant un nombre fini de coupures que je supposerai rectilignes. [Picard, 1882b]

rier, de fonctions sphériques, de Frobenius [21], de Lindemann [22], etc.) En particulier ces séries peuvent-être des développements de zéro. –

C. „Recherche des fonctions qui satisfont à une propriété donnée, dans tout le champ de validité.“
Cette classe de problèmes comprend la résolution des équations finies (fonctions implicites), des équations différentielles, et des équations fonctionnelles ; et d'abord, [la] démonstration de la possibilité de la solution au moyen des fonctions analytiques (Cauchy, Weierstrass).

D. Enfin, les problèmes de la dernière classe sont ceux qui regardent la manière d'être de la fonction aux limites de son champ de validité, ainsi :

1. Manière d'être d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier (Weierstrass).
2. Manière d'être d'une fonction multiforme dans le voisinage d'un point de diramation [23] (Riemann).
3. Détermination d'une fonction uniforme ayant un nombre donné de points singuliers (Weierstrass).
4. Fonctions à espaces lacunaires (Weierstrass, Poincaré) [24].
5. Manière d'être d'une fonction le long d'une ligne, soit un contour de champ de validité, soit la circonférence de convergence de l'un de ses éléments ; – d'où les fonctions de variable réelle (Dirichlet, Dini, Cantor).

Excusez-moi, Monsieur, si je n'ai pu résister au désir de soumettre mes idées sur la théorie des fonctions à une personne compétente ; cette branche des mathématiques est un peu négligée dans le milieu où je vis, et je n'ai pas cru, en commençant ma carrière, devoir me fier exclusivement à moi-même. Dans l'espoir que vous voudrez bien pardonner mon comportement, je vous prie d'agréer, Monsieur le professeur, l'assurance de mes sentiments les plus distingués.

S. Pincherle
Professeur à l'Université royale de Bologne.

21. [Frobenius, 1871].
22. [Lindemann, 1882].
23. Il faut comprendre « ramification » qui se dit « diramazione » en Italien.
24. Voir les trois premières lettres échangées par Mittag-Leffler et Poincaré [Nabonnand, 1999, p. 51-69] ainsi que la lettre qu'adresse Goursat à Poincaré (p. 300).

3 Poincaré à Pincherle

Paris, le 15 juin 1882

Monsieur le Professeur,

Je vous remercie beaucoup de votre intéressante lettre et des aperçus nouveaux et ingénieux qu'elle renferme. C'est bien ainsi, ce me semble, qu'il convient d'exposer la théorie générale des fonctions si l'on veut bien faire comprendre le véritable sens des problèmes qu'on a à traiter.

Le problème qui consiste à reconnaître, d'après les coefficients d'un développement en séries de puissances, quelles sont les propriétés de la fonction représentée par ce développement est loin d'être résolu, comme vous le faites fort bien remarquer et il y a encore beaucoup à faire dans ce sens.

Vous citez le cas des séries récurrentes et des séries hypergéométriques ; je pense que vous comprenez sous ce dernier nom, non seulement la série de Gauss, mais toutes les séries représentant des intégrales d'équations différentielles linéaires à coefficients rationnels ; il y a en effet entre p coefficients consécutifs d'une pareille série (tout à fait analogue à la série de Gauss) une relation linéaire de récurrence dans laquelle entre le rang n du premier de ces p coefficients. Voilà donc une condition qui permet de reconnaître d'après la loi des coefficients si la série satisfait à une équation linéaire ; et par conséquent, si elle représente une fonction algébrique. Il y a aussi des cas où la loi des coefficients montre immédiatement quel est le champ de validité de la fonction ; je ne parle pas seulement ici du cas simple des séries convergentes dans tout le plan ; mais des séries telles que celles-ci

$$\sum \frac{x^{3^n}}{2^n} \qquad \text{ou} \qquad \sum \phi_p(n) x^n$$

où $\phi_p(n)$ représente la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des diviseurs de n. On voit immédiatement en effet que le champ de validité est le cercle de rayon 1 et de centre O.

Je passe au second de vos problèmes : étant donné un développement en série, ou un produit infini, ou une fraction continue, reconnaître si ce développement représente une fonction analytique. Le cas du produit infini se ramène aisément à celui de la série traité par Weierstrass ; il suffit de passer aux logarithmes. Quant au cas des fractions continues, je ne crois pas qu'il ait été approfondi comme il mériterait de l'être.

Il est encore une autre classe de problèmes qui sont un peu différents de ceux dont vous parlez, ce sont ceux qui se rattachent à l'*aehnliche Abbildung* d'un contour sur une autre et au principe de Dirichlet.

Malheureusement beaucoup de ces problèmes ont été traités sans une rigueur suffisante, mais on en trouve une solution rigoureuse dans les *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin, octobre 1870, page 767 et suivantes, dans un mémoire de M. Schwarz [25].

25. [Schwarz, 1870].

Oserais-je vous demander un service, ce serait de me dire ce que c'est que la *Revue Universelle* qui se publie à Voltri [26] ; est-ce un journal auquel un géomètre ait intérêt à s'abonner.
Veuillez agréer, Monsieur le Professeur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

4 Pincherle à Poincaré

Bologne, le 22 juin 1882

Monsieur le Professeur,

Je vous suis bien reconnaissant pour la réponse que vous avez bien voulu faire à une lettre que je craignais indiscrète ; et cette réponse a servi à compléter en plusieurs

---

26. On trouve à la page 280 du numéro 3 (1882-1883) de la revue littéraire, *Le Feu follet* cette note :

> Cette fois-ci, c'est la Revue universelle de Voltri qui nous demande une modeste cotisation de douze francs, en échange de quoi elle nous nomme « membres collaborateurs » et décernerait à nos travaux une « médaille d'honneur ».
>
> Or ça ! l'on est donc bien bête, en France, pour qu'elles prennent quelquefois, ces tentatives que nous nous lassons, à la fin, de qualifier.

L'escroquerie est de nouveau dénoncée dans *L'intermédiaire des chercheurs et des curieux* (p. 581-582) de 1885 :

> J'ai reçu, et plus d'un confrère est sans doute dans le même cas, une lettre imprimée, datée de Voltri (Italie), et ainsi conçue : « Monsieur, la direction de la *Revue universelle des sciences, des lettres et des industries* vous a nommé son membre collaborateur, en vous décernant, pour vos travaux, sa médaille d'honneur de première classe. Cette revue, publication polyglotte, compte parmi ses collaborateurs, les hommes les plus illustres du monde, et ses membres composent entre une ligue universelle pour le progrès des sciences. – Tous ceux qui ne veulent pas prendre une part active aux travaux de notre Revue sont inscrits honorairement. – J'attends, Monsieur, votre adhésion pour vous envoyer le diplôme et la médaille d'honneur qui consacrent votre nomination. »
>
> Le directeur,
> Prof. Eugène Maccary.
>
> Voilà, me disais-je en lisant cette lettre, une aimable Revue et un directeur non moins aimable, lorsque mes yeux se portèrent sur le *nota* suivant : « Les membres ne paient aucun droit d'admission ; ils sont tenus cependant à s'abonner au journal dont le prix est de 12 francs par an... Tout paiement doit être fait d'avance au moyen d'un mandat-poste de 12 francs au nom du directeur. »
> Cela me rappelle le diplôme de « *Doctor in absentia* » sur lequel notre *Intermédiaire* a donné des renseignements si topiques. Nos honorables collaborateurs du « *Giornale degli Eruditi* » ne pourraient-ils pas également nous édifier sur M. Maccary et sa Revue qui, à ma connaissance, ont été pris au sérieux par de mes compatriotes, un « industriel » et un « auteur » ?

points le Plan de mon cours. Je vous en remercie donc ; et je vous prie de m'excuser si je n'ai pas répondu plus tôt à votre demande, mais c'est que j'ai voulu m'informer au sujet du journal dont vous me parlez. Le résultat de ces informations est que ce journal est parfaitement inconnu des mathématiciens et même des bibliothécaires d'ici, en sorte qu'il ne doit avoir aucune espèce d'importance (à moins que l'on ne vous ait induit en erreur sur le titre, ou sur le lieu où il se publie.) Les seules revues de quelques importance qui se publient en Italie sont de Florence ou de Rome, et ne s'occupent que très exceptionnellement de mathématiques. Les journaux de mathématiques sont « i nuovi Annali » publié à Milan par M. Brioschi (journal que vous connaissez sans doute) et le « Giornale di Matematica » publié à Naples par M. Battaglini.

Je vous serai reconnaissant, Monsieur, si vous me permettez de continuer à vous soumettre quelques idées ou quelques difficultés que je pourrais rencontrer en Analyse ; et je compte que vous disposerez de moi, sans cérémonie, dans le cas que je puisse vous être bon à quelque chose. Dans cet espoir, je vous prie d'agréer, monsieur, l'assurance de mes sentiments les plus distingués.

S. Pincherle

5 Pincherle à Poincaré

Bologne, le 3/11/83

Monsieur le Professeur,

Je vous dois des remerciements infinis pour la bonté que vous eue de m'envoyer les beaux mémoires que vous avez publiés dans le journal de M. Mittag-Leffler [27]. J'ai lu avec grand intérêt celui sur les fonctions de deux variables [28], qui jette un nouveau jour sur la théorie si difficile de ces fonctions ; quant aux mémoires sur les groupes et les fonctions fuchsiennes [29] dont je connaissais déjà plusieurs résultats publiés dans les *Comptes rendus*, je me propose de les étudier avec soin et de les exposer dans un cours libre, à nos aspirants au doctorat.

Je suis heureux que mon mémoire [30] vous ai offert quelque intérêt ; ce n'est qu'un premier essai dans un champ qui me semble devoir être fertile, et je n'ai pas eu la prétention de résoudre, ni même d'énoncer les principaux problèmes qui peuvent se présenter sur ce sujet. Comme je le dis dans ce travail, je me propose d'examiner dans des Mémoires à suivre :

27. [Poincaré, 1882k,b, 1883f,a].
28. [Poincaré, 1883f].
29. [Poincaré, 1882k,b].
30. [Pincherle, 1883d].

1° Ce qu'on peut dire de général sur le développement de zéro (*Nullentwickelung*)

$$\sum c_n p_n(x) = 0.$$

2° Si, étant donné un système $p_n(x)$, on peut énoncer les conditions sous lesquelles une fonction $f(x)$, (holomorphe si les $p_n(x)$ le sont dans un certain champ, ou ayant des singularités dépendant de celles des $p_n(x)$) peut se développer en série

$$\sum c_n p_n(x).$$

À la première demande je donne une réponse qui me semble satisfaisante, et qui fait dépendre le nombre et la nature des *Nullentwickelung* de certains points singuliers ; les développements de genre, trouvés par M. Frobenius (Crelle, t. 73) [31] y rentrent parfaitement comme cas particulier.

Quant à la seconde, elle me semble difficile en général ; toutefois l'espère arriver à une réponse au moyen d'une généralisation de la formule de Cauchy

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} \frac{f(y}{y-x} dy,$$

qui consiste à substituer à $\frac{1}{y-x}$ une fonct. convenable de x et de y.

L'anomalie qui s'est présentée dans les séries $\sum \alpha_n U_n$ dont vous me parlez, je l'avais déjà notée dans les séries plus générales

$$\sum c_n D^n F_i$$

* [32] et même les séries m'ont conduit à d'autres, où se présentent des systèmes de polynômes qui sont une généralisation de ceux qu'a considérés M. Appell dans son mémoire du Journal de l'École Normale 1880 [33]. Ces résultats paraitront prochainement, j'espère, dans les Annali di Matematica [34].

Je serai heureux, M. le Professeur si vous voulez bien m'honorer de vos conseils et de vos observations, et vous prie d'agréer l'assurance de mon amitié et de ma plus haute estime.

S. Pincherle

31. [Frobenius, 1871].
32. *(*Note de Pincherle*) J'indique par $D^n F$ une opération sur les séries de puissances qui contient la dérivation comme cas particulier ; j'ai envoyé une note sur cette opération au journal de M. Battaglini [Pincherle, 1883a].
33. [Appell, 1880a]
34. [Pincherle, 1883b,c]

6 Pincherle à Poincaré

Bologne, le 15 février 1884

Monsieur,

Je vous remercie de l'envoi de la Notice sur vos travaux scientifiques [35], et je regrette de ne pouvoir vous exprimer mieux mon admiration sincère pour ces beaux travaux, accomplis dans un laps de temps si court. Je souhaite, pour vous et pour la Science, que ces travaux soient le prélude d'autres plus importants encore. J'espère que vous voudrez bien continuer à m'adresser vos publications, que je regrette de ne pouvoir échanger qu'avec des notes de peu d'importance.

Je me permets une petite remarque. Le théorème sur une ou plusieurs fonctions implicites d'un nombre quelconque de variables, donné dans votre thèse inaugurale (cité à [la] p. 40 de la Notice [36]) a été donné aussi par M. Weierstrass dans son cours d'Introduction à la théorie des fonctions analytiques, auquel j'ai assisté en 1878 [37]. Je ne sais pas cependant que M. Weierstrass ait jamais publié ce théorème, ni les nombreux corollaires qu'il en déduit.

Agréez, Monsieur, l'assurance de ma plus haute estime.

S. Pincherle

---

35. [Poincaré, 1884b].

36. Dans le paragraphe consacré à la théorie des fonctions de deux variables, Poincaré, après avoir exposé son théorème selon lequel une fonction méromorphe de deux variables est le quotient de deux fonctions homomorphes [Poincaré, 1883f], rappelle quelques lemmes établis dans sa thèse :

> En ce qui concerne les fonctions non uniformes, j'ai contribué à l'étude de leurs propriétés dans le voisinage d'un point donné, par les lemmes que j'ai démontrés au début de ma thèse inaugurale. Supposons qu'une équation
>
> $$F(z, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$
>
> définissant z comme fonction implicite de $x_1, x_2, \dots x_n$, soit satisfaite pour le système de valeurs
>
> $$z = x_1 = x_2 = \dots = 0$$
>
> et que nous étudiions la fonction dans un domaine voisin de ce système de valeurs. Je suppose de plus que dans ce domaine la fonction F soit holomorphe. On sait depuis longtemps que, si $\frac{dF}{dz}$ n'est pas nul, z est fonction holomorphe de $x_1, x_2, \dots x_n$. J'ai cherché ce qui se passe lorsque $\frac{dF}{dz}$ est nul en même temps que $\frac{d^2F}{dz^2}, \frac{d^3F}{dz^3}, \dots, \frac{d^{m-1}F}{dz^{m-1}}$, mais que la $m^{\text{ième}}$ dérivée $\frac{d^mF}{dz^m}$ n'est pas nulle. J'ai démontré que dans ce cas z satisfait à une équation algébrique de la forme
>
> $$z^m + B_{m-1}z^{m-1} + B_{m-2}z^{m-2} + \dots + B_1 z + B_0 = 0,$$
>
> dont les coefficients [B] sont des fonctions holomorphes des x. J'ai obtenu ensuite un résultat analogue pour le cas où l'on a p fonctions de n variables définies par p équations simultanées. [Poincaré, 1884b, p. 40]

Poincaré donne ces lemmes au début de sa thèse [Poincaré, 1879b, p. 13-18].).

37. Salvatore Pincherle étudie à l'Université de Berlin durant l'année universitaire 1877-78. Il y suit entre autres les cours de Weierstrass. À son retour en Italie, il écrit un long article dans le *Giornale di Matematiche* de Battaglini dans lequel il expose la théorie des fonctions analytiques selon le point de vue de Weierstrass [Pincherle, 1880b].

7 Pincherle à Poincaré

Montechiaro (Bologne) 18/9/85 [38]

Monsieur

Je viens de recevoir l'annonce du décès de M$^{\text{me}}$ votre belle-mère [39], et je vous en fais mes sincères condoléances.
En même temps, et puisque je viens de lire votre Mémoire de l'American Journal [40], je vous félicite d'avoir su si bien résoudre les questions analogues a celles que j'ai traitées sur les séries $\sum c_n p_n(x)$ et qui échappaient à ma méthode [41]. Ne pourrait-on pas obtenir les résultats du § 1$^{\text{er}}$ de v. mémoire en considérant l'intégrale Y de l'éq.

$$A_n \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_0 = 0,$$

et en remarquant que

$$\lim_{x=\infty} \frac{y'}{y} : \frac{Y'}{Y} = 1 \ ?$$

On obtiendrait alors de suite $\lim \frac{y'}{y} = \alpha$ [42]. –

38. Cette lettre est rédigée sur un feuillet de l'*Unione postale universale*.

39. Pauline Poulain d'Andecy, (née Geoffroy Saint-Hilaire) la mère de l'épouse de Poincaré, Louise, décède en 1885.

40. [Poincaré, 1885e].

41. Poincaré [1885e] étudie à la fin de cet article les séries de polynômes vérifiant une relation de récurrence et évoque alors les travaux de Pincherle [1883b,c]. Poincaré [1885d, p. 243] pose la question du domaine de convergence des séries $\sum_i \alpha_i P_i(x)$ où les α_i sont des « coefficients constants quelconques » et les P_i des polynômes à coefficients entiers liés par une relation de récurrence de la forme

$$\sum_{j=0}^{j=k} Q_j P_{n+j},$$

les Q_j étant des polynômes entiers en n et x. Poincaré évoque une première solution présentée lors de la séance du 1er décembre 1882 de la Société mathématique de France et exposée dans une note aux *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences de Paris* [Poincaré, 1883h]. En étudiant les points singuliers des intégrales de l'équation différentielle (E) vérifiée par la fonction

$$y = P_0 + zP_1 + z^2 P_2 + \ldots + z^n P_n + \ldots,$$

Poincaré montre que si $\sqrt[n]{\alpha_n}$ a une limite finie, le domaine de convergence de la série est le demi-plan d'équation $|z| < |\alpha|$ où α est la racine de plus petit module du coefficient principal de l'équation (E). Poincaré [1885d, p. 244] indique alors que « cette méthode a [...] l'inconvénient d'être sujette à caution lorsque que $\sqrt[n]{\alpha_n}$ ne tend pas vers une valeur déterminée ». Il rappelle que Pincherle [1883b,c] a utilisé « presque simultanément » la même méthode avec les mêmes défauts, ce qui l'amène à reprendre le problème avec les nouvelles techniques proposées dans la première partie du mémoire.

42. Dans la première partie de cet article, Poincaré [1885e] propose une étude sommaire des intégrales irrégulières de « certaines équations différentielles linéaires » du type :

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{n} P_k \frac{d^k(y)}{dx^k} = 0$$

où les P_k sont des polynômes de même degré p. En désignant par A_k le coefficient du terme de degré p de P_k et par y une intégrale de (1), Poincaré montre [Poincaré, 1885e, p. 209]que la

Permettez moi enfin de rectifier les formules à pag. 5 et 12 (au haut des pages), qui doivent être [43] :

$$X' = \alpha X - \left(AX + BY.\frac{\gamma-\beta}{\alpha-\gamma} + CZ\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}\right).$$

Excusez la hâte avec laquelle je vous ai écrit, et croyez moi, Monsieur, avec la plus haute estime.
Votre dévoué

S. Pincherle

8 Pincherle à Poincaré

Bologne le 22/2/87

Monsieur,

J'apprends en ce moment votre nomination à membre de l'Institut [44]. Je vous prie de vouloir bien agréer mes félicitations les plus sincères pour cette haute distinction, que vous avez bien méritée.
Croyez aux sentiments de la plus profonde estime de votre dévoué

S. Pincherle

9 Pincherle à Poincaré

Bologne, le 27/11 88

Monsieur le Professeur,

Il y a déjà cinq ans, à l'époque où nous nous occupions tous deux de la forme des champs de convergence des séries ordonnées selon un système donné de fonctions analytiques, vous m'avez fait l'honneur de m'écrire une lettre où, entre autres choses, vous remarquiez la difficulté de la question : développer une fonction régulière dans l'un de ces champs en série ordonnée selon un système donné de fonctions. Je me suis beaucoup occupé depuis de cette question, qui se rattache au problème de l'inversion d'une intégrale définie. Cette dernière question, qui est la résolution d'une équation

$$\int_a^b \phi(x)A(x,y)dy = f(x)$$

par rapport à la fonction inconnue $\phi(x)$, m'a toujours semblé importante.

---

dérivée logarithmique de y tend à l'infini vers une racine α du polynôme

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} A_k z^k = 0.$$

43. Pincherle a tout à fait raison ; les coefficients ont disparu dans les formules de l'article publié dans l'*American Journal of Mathematics.*

44. Poincaré avait été élu à l'Académie des sciences le 31 janvier 1887.

Tout récemment, les difficultés que présente la question dans le cas général m'ont engagé à étudier d'abord le cas particulier que vous considériez dans votre beau Mémoire du T. VII de l'Americ. Journal [45], c'est-à-dire lorsque les fonctions $p_\nu(x)$ du système donné vérifient une équation récurrente [46]. Je crois être arrivé, dans ce cas, à quelques résultats dignes d'intérêt, et puisque vous vous êtes occupé de questions analogues, je prends la liberté de vous soumettre quelques uns de ces résultats parmi les plus simples [47].

Soit d'abord une équation récurrente de la forme

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{m}(a_k(n)+xb_k(n))p_{n+k}(x)=0$$

où les $a_k(n), b_k(n)$ sont des polynômes de même degré en n et $b_m(n)=0$ identiquement. alors je trouve que l'on a un développement de la forme

$$(2) \qquad \frac{1}{y-x}=\sum\left(b_0(n)p_n+b_1(n)p_{n+1}+b_2(n)p_{n+2}+\ \dots\ b_{m-1}p_{n+m-1}\right)q_n(y)$$

où les fonctions $q_n(y)$ vérifient une équation tout à fait analogue à (1), soit

$$(3) \qquad \sum_{k=0}^{m}(a_k(n-k)+yb_k(n-k))q_{n-k}(y)=0$$

et que l'on pourrait appeler inverse de (1). Il s'ensuit que sous certaines conditions, toute fonction $f(x)$ donnée dans un champ C_α convenablement limité, est développable en série de fonctions $p_n(x)$* [48].

45. [Poincaré, 1885e].

46. Dans son article sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies, Poincaré applique les théorèmes généraux de son article au problème du domaine de convergence d'une série construite à partir d'un système de polynômes liés par une équation de récurrence :

> Soient : $P_0(x), P_1(x), P_3(x), \dots, P_n(x), \dots$ une infinité de polynômes entiers en x, liés entre eux par une relation de récurrence de la forme suivante :
>
> $$(1) \qquad Q_kP_{n+k}+Q_{k-1}P_{n+k+1}+\ \dots\ +Q_1P_{n+1}+Q_0P_n=0$$
>
> où les Q sont des polynômes entiers en n et x. Formons maintenant la série :
>
> $$(2) \qquad \alpha_0P_0+\alpha_1P_1+\ \dots\ +\alpha_nP_n+\ \dots$$
>
> où les α sont des coefficients constants quelconques. Cette série sera convergente tant que le point x restera intérieur à une certaine région du plan, et divergera quand le point x sortira de cette région. On demande quelle est la courbe qui limite cette région de convergence. [Poincaré, 1885e, p. 243]

47. Lors de la séance du 17 décembre 1888, Poincaré présentera une note de Pincherle aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences* sur cette question [Pincherle, 1888].

48. *(*Note de Pincherle*) La formule (2) contient aussi comme cas particulier celles de MM. Frobenius [1871] et Bendixson [1887] quand $p_{n+1}(x)=(x-a(n))p_n(x)$, et celles de MM. Heine [1861]

Dans un cas très particulier $(m = 2, a_0(n) = n + 2, b_0(n) = 0, a_1(n) = 0, b_1(n) = (-2n + 3), a_2(n) = n + 1, b2(n) = 0)$, on retrouve les fonctions sphériques P_n ; les fonctions q_n sont les f. sphériques de deuxième espèce, et l'équation (1) coïncide avec son inverse, enfin la (2) donne le développement bien connu de Neumann. Supposons maintenant que l'équation récurrente contienne x à un degré supérieur, p. ex. au second degré :

$$(4) \qquad \sum_{k=0}^{m} \left(a_k(n) + xb_k(n) + x^2 c_k(n)\right) p_{n+k} = 0, \quad b_0(n) = c_0(n) = 0.$$

Alors je ne trouve plus un développement de $\frac{1}{y-x}$ ordonné selon les $p_n(x)$, (et même cela ne semble pas possible a priori ; en effet, soit en particulier

$$p_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)(x - \beta_n)p_n(x),$$

si l'on a

$$F(x) = \sum C_n p_n(x),$$

il s'ensuit que $F(\alpha_n), F(\beta_n)$ doivent vérifier une certaine relation, et par conséquent $F(x)$ n'est pas quelconque.) – Mais l'on peut encore déterminer un système de fonctions $q_n(x)$ qui vérifient l'équation inverse de (4), c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{m} \left(a_k(n-k) + yb_k(n-k) + y^2 c_k(n-k)\right) q_{n-k}(y) = 0$$

et ces fonctions sont telles que

$$\begin{aligned}\frac{1}{y-x} &= \sum q_n(y) \left(b_0(n)p_n + b_1(n)p_{n+1} + \ \ldots\ b_{m-1}(n)p_{n+m-1}\right) \\ &+(y-x) \sum q_n(y) \left(c_0(n)p_n + c_1(n)p_{n+1} + \ \ldots\ c_{m-1}(n)p_{n+m-1}\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, toute fonction régulière dans un champ convenable C_α peut se développer en série de la forme

$$f(x) = \sum (C_n + xC'_n) p_n(x).$$

Il y a une généralisation analogue si l'équation contient x à un degré quelconque.

---

et Thomé [1866] pour les développements selon les numérateurs et dénominateurs des réduites d'une fraction continue.

Dans sa note, Pincherle [1888] insiste sur la généralité de sa formule :

> Cette dernière formule, comme on le voit aisément, renferme comme cas particuliers les développements de $\frac{1}{z-x}$ en série de polynômes de Legendre, donné par M. Carl Neumann [1862], en série de produits partiels d'un produit d'un nombre infini de facteurs binômes, donné par MM. Frobenius et Bendixson, en série des dénominateurs des réduites d'une fraction continue, donné par Heine, etc. [Pincherle, 1888, p. 988-989]

Naturellement, ces recherches donnent lieu à beaucoup de cas exceptionnels qu'il n'est pas aisé de démêler ; p. ex. il y a l'indétermination de fonctions arbitraires dans équations (1) et (4) et leurs inverses.
Il y a encore d'autre cas intéressants qui ne rentrent pas dans ce qui précède ; par exemple le système de fonctions qui a pour fonction génératrice le développement $\phi(x,y) = \sum y^n p_n(x)$ de l'équation (hypergéométrique à point singulier variable)

$$y(y-x)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + (\mathcal{A}y + \mathcal{B})\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathcal{C}\phi = 0.$$

Je vous prie, monsieur le Professeur, de vouloir bien m'excuser si j'ai pris la liberté de vous présenter ce petit aperçu de recherches [49], qui, en partie, s'inspirent à vos travaux dont je suis un fervent admirateur [50] ; et veuillez agréer en même temps l'expression de la plus profonde estime
de votre bien dévoué

S. Pincherle

49. Pincherle publie en 1889 sur ces questions plusieurs articles [Pincherle, 1889b,c,a,d].
50. Pincherle [1889b] utilise un théorème de Poincaré [1885e, p. 243-258] sur les séries de polynômes définies par une relation de récurrence. Pincherle est cité plusieurs fois dans cet article (voir la note 41, p. 666).