Leopold Kronecker

Leopold Kronecker nait en 1823 à Liegnitz (Prusse) dans une famille aisée. Après des études secondaires dans sa ville natale, il étudie à partir de 1841 les mathématiques à l'Université de Berlin où il a entre autres comme professeur Dirichlet et Steiner. En 1845, il soutient une thèse intitulée *De unitatibus complexis*. Pendant une dizaine d'année, il travaille dans l'entreprise familiale tout en continuant à effectuer des recherches. En 1855, il revient à Berlin pour s'investir dans la recherche mathématique mais sans chercher une position universitaire. En 1860, il est élu membre de l'Académie des sciences de Berlin et succède en 1883 à Kummer à l'Université de Berlin quand ce dernier prend sa retraite. Il occupe cette position jusqu'à son décès en 1891.
Les travaux de Kronecker concernent d'abord l'arithmétique, la théorie des formes quadratiques et la théorie des fonctions elliptiques. Il a aussi plusieurs contributions en analyse complexe et en théorie du potentiel. Une de ses contributions dans ces domaines est l'objet de la carte qu'il envoie à Poincaré en 1883 [1].

Kronecker à Poincaré

Berlin, W. Bellevuestr. 13.
14.Février 1883 [2]

Monsieur,

Ayant lu votre dernière communication dans les Comptes Rendus [3], je désirerais appeler votre attention à un mémoire que j'ai publié en 1869 et que je prends la liberté de vous envoyer [4]. J'y ai ajouté quelques autres de mes mémoires et en

1. Sur la vie et l'œuvre de Kronecker, voir [Weber, 1893]. Plus particulièrement, sur les travaux « qui ont pour objet l'Arithmétique et les fonctions elliptiques », voir [Hermite, 1892].

2. Cette lettre est rédigée sur une carte de l'Union postale universelle („Postkarte aus Deutschland").

3. La note de Poincaré [1883e] sur les fonctions à deux variables paraît dans le compte rendu de la séance du 22 janvier 1883. Poincaré y annonce le théorème selon lequel une fonction à deux variables méromorphe peut s'écrire comme le quotient de deux fonctions holomorphes. Ce résultat avait aussi frappé Weierstrass, voir la lettre 24 (p. 24) de [Nabonnand, 1999].

4. [Kronecker, 1869].

P. Nabonnand et al. (eds.), *La correspondance entre Henri Poincaré et les mathématiciens*, Publications des Archives Henri Poincaré Publications of the Henri Poincaré Archives,
https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8288-9_44

outre je me suis permis d'adresser à Mr Tannery un petit paquet destiné pour vous, contenant tous les exemplaires de mes mémoires, que j'ai à ma disposition. Le mémoire cité de 1869 (mois de Mars) est intitulé : Systèmes de fonctions de plusieurs variables [5]. J'y ai développé la généralisation de cet important théorème de Cauchy qui me semble contenir le vrai fondement de la théorie des fonctions [6]. Il est très remarquable, qu'il existe un théorème tout-à-fait analogue pour un nombre quelconque de variables, et mes recherches m'ont montré qu'on ne peut reconnaître les propriétés des fonctions pour lesquelles $\Delta F = 0$ sans traiter les fonctions plus générales où $\Delta >< 0$ [7].

Votre très dévoué

L. Kronecker

5. Le titre allemand est „Über Systeme von Functionnen mehrer Variabeln".

6. Kronecker parle de la formule intégrale de Cauchy. Kronecker [1869, p. 176-180] établit une formule qui généralise la formule de Cauchy aux systèmes de fonctions uniformes (réelles ou complexes) $F_0, F_1, \ldots, F_n$ de n variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$.
Pour plus de précisions sur l'utilisation par Poincaré de l'indice de Kronecker (en particulier dans ses premiers travaux sur le problème des trois corps [Poincaré, 1883b, 1884c]), voir [Mawhin, 2012].

7. Voir [Kronecker, 1869, p. 171-174 et p. 189-192].
Dans le mémoire des *Acta mathematica* dans lequel il développe sa note, Poincaré [1883f] reprend cette remarque. En partant d'une généralisation du fait que les parties réelles et imaginaires d'une fonction holomorphe à une variable sont harmoniques, Poincaré évoque les travaux de Klein et Kronecker sur cette question et le lien à faire avec la théorie du potentiel :

> On sait que la partie réelle u d'une fonction d'une variable imaginaire $x + iy$, satisfait à l'équation $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$, de sorte que l'étude des fonctions d'une seule variable se ramène à l'étude d'une attraction s'exerçant en raison inverse de la distance. On a vu dans les derniers numéros des Mathematische Annalen, quel parti M. Klein a su tirer de considérations physiques qui sont au fond tout à fait analogues. De même si nous posons
>
> $$X = x + iy \qquad Y = z + it$$
>
> la partie réelle u d'une fonction quelconque de X et de Y satisfera l'équation :
>
> $$\Delta u = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{d^2u}{dt^2} = 0$$
>
> de sorte qu'à ce point de vue l'étude des fonctions de deux variables se ramène à celle d'une *attraction s'exerçant dans l'espace à quatre dimensions en raison inverse du cube de la distance.* M. Kronecker a déjà fait voir (Monatsberichte 1869) que la considération d'une telle attraction peut être utile au géomètre qui veut étudier les fonctions de plusieurs variables. Je n'emploierai pas cependant le langage hypergéométrique ; je me bornerai à lui emprunter quelques expressions. [Poincaré, 1883f, p. 98]