Lazarus Fuchs

Lazarus Fuchs nait en 1833 à Moschin rattachée administrativement au Grand Duché de Posen, une province autonome de la Prusse depuis le Traité de Vienne. Il étudie à l'Université de Berlin et suit en particulier les cours de Kummer et Weierstrass. Il soutient en 1858 une thèse sur les lignes de courbure des surfaces et s'oriente alors, sous l'influence des travaux de Weierstrass [1], vers l'analyse et en particulier la théorie des équations différentielles. Il obtient l'habilitation en 1865 avec une thèse intitulée „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coeffizienten“ [2]. Entre 1865 et 1885, il est considéré comme l'un des contributeurs majeurs à cette théorie [3].

Après l'obtention de son doctorat, il enseigne d'abord à l'École de commerce Friedrich Werder (Berlin), puis comme privatdozent à l'Université de Berlin (1865), comme professeur dans plusieurs universités (Greifswald (1869), Göttingen (1874), Heidelberg (1875)). En 1884, il succède à Kummer à l'Université de Berlin où il termine sa carrière. Il décède à Berlin en 1902.

Les travaux de Fuchs concernent l'étude des solutions des équations différentielles linéaires aux voisinages des points singuliers [4].

La correspondance de Poincaré et Fuchs date pour l'essentiel de l'année 1880 à une époque où Fuchs est un professeur reconnu titulaire d'une chaire dans une université prestigieuse à Heidelberg, entouré de plusieurs élèves à peine plus jeunes que Poincaré. Poincaré quant à lui, alors professeur à Caen, certainement encore inconnu dans les milieux mathématiques allemands [5], est en train d'élaborer son programme de recherches concernant les équations différentielles linéaires :

1. [Gray, 1984, p. 3].
2. [Fuchs, 1865] et [Fuchs, 1866].
3. « His work can profitably be seen as an attempt to impose upon the inchoate world of differential equations the conceptual order of the emerging theory of complex functions. » [Gray, 1984, p. 1]
4. Pour plus de détails sur les travaux de L. Fuchs et son influence sur ceux de Poincaré, voir [Gray, 1986] (en particulier le chapitre 2, les pages 103 et 104, ainsi que le paragraphe 6.2 du chapitre 6 consacré à la théorie des fonctions fuchsiennes de Poincaré. On peut aussi consulter l'introduction de [Poincaré, 1997].
5. À la date de sa première lettre, Poincaré n'a publié que quelques notes aux *Compte rendus* consacrées à la théorie des formes algébriques et une annonçant ses travaux sur les équations différentielles non-linéaires [Poincaré, 1880b].

P. Nabonnand et al. (eds.), *La correspondance entre Henri Poincaré et les mathématiciens*, Publications des Archives Henri Poincaré Publications of the Henri Poincaré Archives,
https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8288-9_27

> Le nombre des équations [différentielles] intégrables par quadrature est extrêmement restreint, et tant qu'on ne s'est pas décidé à étudier les propriétés des intégrales en elle-mêmes, tout ce domaine analytique n'a été qu'une vaste *terra incognita* qui semblait à jamais interdite au géomètre.
> C'est Cauchy qui y a pénétré le premier, grâce à l'invention d'une méthode ingénieuse qu'il a appelée *calcul des limites*. À sa suite, MM. Fuchs, Briot et Bouquet, et M^me^ Kowalevski ont employé avec succès la même méthode.
> Ce sont donc les travaux de ces géomètres qui m'ont servi de point de départ.
> En présence d'un problème si compliqué, ces divers savants, au lieu d'étudier la manière d'être des intégrales des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles *pour toutes les valeurs de la variable*, c'est-à-dire dans tout le plan, se sont d'abord occupés de déterminer les propriétés de ces intégrales *dans le voisinage d'un point donné*. Ils avaient ainsi reconnu que ces propriétés sont très différentes selon qu'il s'agit d'un point ordinaire ou d'un point singulier. [Poincaré, 1921a, p. 37-38]

Même si les questions posées par Poincaré font montre d'un esprit particulièrement aiguisé, on peut noter l'affabilité du ton adopté par Fuchs envers son jeune collègue, même si parfois, on peut dénoter une pointe de paternalisme.

La veille de sa première lettre adressée à Fuchs, Poincaré avait fait parvenir à l'Académie des sciences sa contribution au Grand prix des sciences mathématiques [6] dont la seconde partie est consacrée à de récents travaux de Fuchs qui feront l'objet des premières lettres échangées par Poincaré et Fuchs [7]. Ces lettres datées des mois de mai, juin et juillet 1880 concernent l'étude de la fonction inverse du quotient de deux solutions indépendantes d'une équation différentielle linéaire, un outil introduit par Hermann Schwarz [1872a] et Fuchs [1877] [8]. Poincaré interroge un article de Fuchs [1880d] dans lequel il tente de généraliser la méthode de Jacobi et Abel pour les fonctions elliptiques aux équations différentielles à coeffi-

---

6. Voir la note 7 de la lettre adressée au secrétaire perpétuel de l'Académie, Joseph Bertrand (p. 89).

7. [Poincaré, 1923].
Ce texte est accompagné d'une note de présentation de N. E. Nörlund, qui assistait à l'époque Mittag-Leffler pour la rédaction des *Acta mathematica* :

> Quant à la seconde Partie, Poincaré dit qu'il contient les réflexions que lui a inspirées la lecture d'un Mémoire de Fuchs. Poincaré a reçu ce Mémoire au commencement du mois de mai 1880 et son Mémoire est arrivé à l'Académie le 28 mai 1880. On voit par là l'extrême rapidité avec laquelle travaillait Poincaré.

8. [Gray, 1986, p. 104].

cients algébriques ; pour cela, Fuchs considère l'équation différentielle

$$(A) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + P\frac{dy}{dz} + Q = 0,$$

et un système de deux solutions indépendantes f, φ ; il définit alors u_1 et u_2 par les équations :

$$(B) \qquad \begin{cases} \int_{\zeta_1}^{z_1} f(z)dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} f(z)dz = u_1 \\ \int_{\zeta_1}^{z_1} \varphi(z)dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} \varphi(z)dz = u_2 \end{cases}$$

où ζ_1 et ζ_2 sont des constantes différentes des points singuliers de l'équation (A). En considérant z_1 et z_2 comme des fonctions de $_1$ et u_2, il se propose d'« examiner quelles propriétés doivent vérifier $f(z)$ et $\varphi(z)$ de manière que $z-1$ et z_2 soient des fonctions analytiques déterminées » [9].
Fuchs est amené à poser

$$(H) \qquad z = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

et à examiner à quelles conditions x est une fonction méromorphe de z. Poincaré montre que les conditions énoncées par Fuchs « ne sont pas nécessaires et suffisantes » et propose une condition qui implique les racines de l'équation caractéristique (« équation déterminante ») de l'équation différentielle [10].
Les deux dernières lettres de Poincaré sont datées de 1881 et 1882 ; dans la première, Poincaré annonce à Fuchs son programme de travail sur les fonctions automorphes ; la dernière évoque la polémique avec Klein et Schwarz sur la dénomination de « Fuchsiennes » que Poincaré a donnée aux fonctions automorphes [11].
La correspondance entre Fuchs et Poincaré a été publiée (sauf la lettre de 1882) dans le volume 38 des *Acta mathematica* consacré à la mémoire d'Henri Poincaré avec le commentaire suivant (p. 175) [12] :

> Les lettres que nous publions ici sont d'importance pour l'histoire de la théorie des fonctions fuchsiennes. Ce sont en effet ces lettres dont parle L. Fuchs dans les Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität, Göttingen 1882, S. 83 [13].

9. [Fuchs, 1880d, p. 153].
10. Pour plus de précisions, voir l'introduction de [Poincaré, 1997].
11. Voir la correspondance avec Felix Klein (p. 433) et les lettres 17, 18 et 19 de [Nabonnand, 1999].
12. Des traductions des deux lettres de Fuchs sont proposées dans les *Cahiers d'histoire des mathématiques* [Dugac, 1986, p. 149-153]. André Bellivier [1956, p. 208] fait état de deux lettres de Poincaré adressées en mars et juillet 1882 adressées à Fuchs.
13. Voir la note 43 (p. 288).

1 Poincaré à Fuchs

Caen, le 29 mai 1880

Monsieur le Professeur,

J'ai lu avec le plus grand intérêt le remarquable mémoire que vous avez fait insérer dans la dernière livraison du Journal de Crelle et qui a pour titre : Ueber die Verallgemeinerung des Umkehrproblems [14]. Veuillez me permettre, Monsieur, de vous demander au sujet de ce travail, quelques éclaircissements.

Vous démontrez, page 159 que la fonction z est fonction méromorphe de ζ, toutes les fois que ζ prend une valeur correspondant à une valeur donnée de z ; que cette valeur de z soit un point ordinaire ou un point singulier, qu'elle soit finie ou infinie [15]. Vous démontrez ensuite, page 160 que cela est encore vrai pour $\zeta = \infty$ [16] et comme conclusion vous dites :

... ist die durch die Gleichung (H.) [17] definirte Function z von ζ für alle Werthe von ζ meromorph. [18]

Il s'agit ici de toutes les valeurs de ζ finies ou infinies ; cet énoncé ferait donc entendre que z est fonction méromorphe dans toute l'étendue de la sphère et par conséquent fonction rationnelle de ζ ; on en conclurait que l'équation (A.) [19] est toujours intégrable algébriquement ce qui n'est pas exact comme le faites voir un peu plus loin page 168 [20].

---

14. [Fuchs, 1880d].
Poincaré signale dans les premières lignes de son travail proposé au Grand prix des sciences mathématiques [Poincaré, 1923] qu'un « Résumé [Fuchs, 1880a] se trouve dans une lettre à M. Hermite insérée dans les *Comptes rendus* ».

15. Le cas z régulier et fini résulte de la théorie générale développée par Fuchs dans sa thèse [Fuchs, 1866] :
„Die Werthe von ζ, für welche z aufhören könnte holomorph zu sein, sind ausser $\zeta = \infty$ solche Werthe derselben Variabeln, für welche z gleich einem singulären Punkte der Gleichung (A) oder $z = \infty$ wird." [Fuchs, 1880d, p. 159]
Les cas où z est un point singulier ou égal à l'infini sont traités immédiatement à la suite (p. 159 et 160).

16. „Es folgt nun aus dieser Gleichung auf bekannte Weise, dass z eine holomorphe Function von $\frac{1}{\zeta}$ in der Umbegung von $\zeta = \infty$" [Fuchs, 1880d, p. 161].

17. $(H) \qquad z = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

18. [Fuchs, 1880d, p. 161].

19. $(A) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + P\frac{dy}{dz} + Q = 0,$.

20. Fuchs réduit l'équation

$$(A) \qquad \frac{d^2y}{dz^2} + P\frac{dy}{dz} + Q = 0$$

à la forme

$$(1) \qquad \frac{d^2\omega}{dz^2} = P \cdot \omega$$

et utilise un résultat général de son étude sur les équations différentielles linéaires du second ordre qui possèdent une solution algébrique [Fuchs, 1876] pour conclure : „Die Gleichung (1) ist demnach nicht vollständig durch algebraische Functionnen integrirbar, daher auch nicht die Gleichung (A)"

À quoi tient cette contradiction ? C'est à ce que les valeurs de ζ sont de 3 sortes :

1. Celles qu'on peut faire atteindre à la fonction $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ en faisant décrire à la variable z sur la sphère un certain contour fini un nombre fini de fois.

2. Celles qu'on peut faire atteindre à cette fonction en faisant décrire à z un contour infini ou bien un contour fini un nombre infini de fois.

3. Celles qu'on ne peut jamais faire atteindre à la fonction $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ quel que soit le contour décrit par z sur la sphère.

Rien ne prouve en effet a priori qu'il n'y ait pas des valeurs de ces trois sortes et même, en général, on est certain qu'il y en a de la 2$^{\text{de}}$ ou de la 3$^{\text{e}}$ sorte, sans quoi, je le répète, l'équation (A.) serait intégrable algébriquement.
Mais alors il me semble qu'il faudrait encore démontrer que z reste méromorphe quand ζ prend une valeur de la 2$^{\text{e}}$ ou de la 3$^{\text{e}}$ sorte, et que la démonstration que la démonstration que vous avez donnée dans votre mémoire ne s'applique qu'à celles de la 1$^{\text{ère}}$ sorte [21].
On peut en effet faire plusieurs hypothèses :
1. on peut supposer que l'on n'a que des valeurs de la 1$^{\text{ère}}$ sorte et alors z est rationnel en ζ.
2. on peut supposer que l'on a des valeurs de la première et de la 2$^{\text{e}}$ sorte et que z reste monodrome [22] quand ζ prend une valeur de la 2$^{\text{e}}$ sorte. Dans cette hypothèse votre théorème trouverait encore son application.

---

21. Poincaré reprend en partie la discussion, développée dans son mémoire proposé au Grand prix des sciences mathématiques [Poincaré, 1923, p. 60-62], des conditions de Fuchs pour que z soit une fonction méromorphe de ζ. Dans son mémoire, Poincaré montre d'abord que les conditions de Fuchs ne sont pas nécessaires :

> Pour que x [ζ] soit fonction méromorphe de z, toutes les fois que z prendra une valeur correspondant : soit à une valeur finie de x qui ne soit pas un point singulier ; soit à une valeur finie de x qui soit un point singulier ; soit à une valeur infinie de x ; il faut et il suffit que pour tous les points singuliers y compris le point ∞, [la différence des racines de l'équation déterminante] soit une partie aliquote de l'unité.

Puis il interroge la suffisance des conditions de Fuchs en expliquant que ce dernier se place dans le cas où z est une valeur obtenue « en faisant décrire à x un nombre fini des contours finis sur la sphère » :

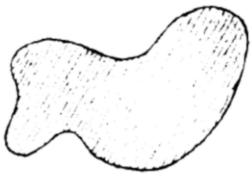
> Si cela était, si x décrivant dans le plan un contour quelconque en ne franchissant chacune des coupures (qu'on y peut pratiquer entre les points singuliers) qu'un nombre fini de fois, z prenait toutes les valeurs possibles, alors la fonction de x de z serait non seulement méromorphe dans toute l'étendue du plan, mais dans toute l'étendue de la sphère, et par conséquent rationnelle.

22. Riemann [1857] définit le terme de « monodrome » comme synonyme d'uniforme :

> Pour simplifier les désignations de ces relations, on nommera les divers prolongements d'une fonction pour une même portion du plan des z les branches de cette fonction, et un point autour duquel une branche de la fonction se prolonge en une autre un point de ramification de la fonction. Partout où il ne se trouve aucune ramification, la fonction est dite monodrome ou uniforme. ([Riemann, 1857, p. 91] cité par de Saint-Gervais [2010, p. 66])

3. on peut supposer que l'on a des valeurs de la 1ère et de la 2e sorte, mais que z ne revient pas à la même valeur, quand ζ décrit un contour infiniment petit autour d'une des valeurs de la 2e sorte.

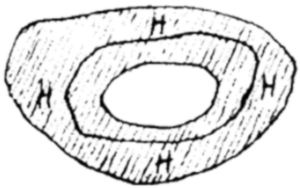
4. on peut encore imaginer que l'on ait des valeurs des trois sortes ; que la valeur de la



1ère sorte remplissent la région du plan que je couvre de hachures sur la figure, que le périmètre de cette région soit formé de valeur de la 2e sorte ; enfin que les parties extérieures à ce périmètre correspondent à des valeurs de la 3e sorte. Alors la fonction z n'existe plus quand ζ sort de ce périmètre et ne peut prendre d'une seule valeur quand ζ reste dans ce périmètre.

Alors z n'est pas, à proprement parler fonction analytique de ζ ; mais elle est eindeutig en ζ, ce qui vous suffit pour les conséquences que vous en tirez [23].

5. on peut imaginer que l'on ait des régions, disposées comme dans la région ci-contre,



où la région occupée par des valeurs de la 1ère sorte est couverte de hachures. Alors z pourrait ne pas revenir à la même valeur quand ζ décrirait un contour tel que $HHHH$.

Enfin on pourrait encore faire mille autres hypothèses.

Je dois avouer, Monsieur, que ces réflexions m'ont inspiré quelques doutes sur la généralité du résultat que vous annoncez, et j'ai pris la liberté de vous en parler, dans l'espérance que vous n'auriez pas de peine à les éclaircir.

Mon adresse est : Henri Poincaré, Professeur à la Faculté des Sciences de Caen (Calvados).

Veuillez agréer, Monsieur le Professeur, l'assurance de ma considération respectueuse.

Poincaré

2 Fuchs à Poincaré

Heidelberg 5 Juni 1880

Geehrtester Herr Collega !

Da ich aus Ihrem geschätzten Briefe ersehe, dass Sie deutsche Abhandlungen mit so tiefem Verständniss zu lesen in der Lage sind, so erlaube ich mir bei der Beant-

23. Le dernier théorème énoncé par Fuchs dans l'article discuté par Poincaré [Fuchs, 1880d, p. 169] est une sorte d'analogue du théorème d'inversion de Jacobi dont la démonstration n'utilise que l'uniformité de la fonction z.

wortung Ihres Briefes mich auch dieser Sprache zu bedienen, weil ich hoffen darf, mich auf diese Weise klarer ausdrücken zu können.
Empfangen Sie, geehrtester Herr, vor allen Dingen meinen besten Dank nicht nur für das Interesse, welches Sie die Güte haben meiner jüngsten Arbeit entgegenzubringen, sondern auch dafür, dass Sie mich durch Ihren Brief darauf aufmerksam gemacht haben, dass der Satz I, p. 161 meiner Abhandlung nicht mit genügender Präcision ausgesprochen ist.
Wenn Sie in der That das Resumé vergleichen, welches ich, vor dem Erscheinen meiner Arbeit in Borchardtschen Journal, von meinen Resultaten in den „*Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*“ Februar 1880 [24] p. 170-176 gegeben habe, so werden Sie daselbst p. 173 finden, dass ich dort denselben Satz in der Weise ausgedrückt habe, dass unter den über die Wurzeln der zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen gemachten Voraussetzungen durch die Gleichung

$$(H) \qquad \zeta = \frac{f(z)}{\varphi(z)}$$

z als eindeutig Function von ζ definirt werde.
Gestatten Sie mir nun mit wenigen Worten auf die Bedeutung des Satzes einzugehen [25].
Aus den Entwickelungen meiner Arbeit in Borchardt's Journal [26] p. 158-160 ergiebt sich Folgendes : Berechnet man für jeden Werth von z die zugehörigen Werthe von ζ, indem man z alle möglichen Umläufe machen lässt – gleichgültig ob eine endliche oder eine unendliche Anzahl mal, so erhält ζ von z abhängige Werthe, so lange die Umläufe nicht so beschaffen sind, dass dadurch $f(z)$ et $\varphi(z)$ identisch das heisst für jeden Werth von z unendlich werden.
Die Werthe von ζ für welche nicht $f(z)$ und $\varphi(z)$ identisch unendlich werden, erfüllen in der ζ-Ebene eine einfach zusammenhangende Fläche, welche ich mit S bezeichnen will. Diese Fläche bedeckt die ζ-Ebene nur einfach und an ihre Begrenzung liegen diejenigen Werthe von ζ für welche $f(z)$ et $\varphi(z)$ identisch unendlich

24. [Fuchs, 1880c].

25. Dans ce passage, Fuchs note $r_1^{(i)}, r_2^{(i)}$ les racines de l'équation fondamentale au point singulier a_i et s_1, s_2 celles de l'équation fondamentale à l'infini et s'intéresse à l'équation

$$(D) \qquad \frac{f(z_1)}{\varphi(z_1)} = \frac{f(z_2)}{\varphi(z_2)}$$

„Ich zeige alsdann, daß die Größen $r_1^{(i)}, r_2^{(i)}, s_1, s_2$ weiter so bestimmt werden können, daß durch die Gleichung

$$(F) \qquad \frac{f(z)}{\varphi(z)} = \zeta,$$

z als eindeutige Funktion von ζ definirt wird, und demnach die Gleichung (D) nur für $z_1 = z_2$ befriedigt werden kann. “ [Fuchs, 1880c, p. 173]

26. [Fuchs, 1880d].

werden. Innerhalb der Fläche S ist z überall eine meromorphe Function von ζ. Dieses ist der Sinn des Satzes I p. 161, und ein Weiteres brauche ich für die Anwendungen, welche ich von demselben mache, nicht.
Ich hoffe, dass Ihnen diese Worte zur Aufklärung über den Sinn, welchen ich dem Satze I p. 161 beilege, genügen werden, um so mehr als ich aus Ihrem Briefe ersehe, dass Sie sich der Ergründung der vorliegenden analytischen Frage bereits mit so grossem Scharfsinn gewidmet haben [27].

Genehmigen Sie, Hoschgeehrter Herr, die Versicherung meiner ausgezeichnetsten Hochachtung.

L. Fuchs

3 Poincaré à Fuchs

Caen, le 12 Juin 1880

Très-honoré Monsieur,

Je vous demande pardon d'avoir tant tardé à répondre à votre aimable lettre ; mais j'étais absent de Caen lorsqu'elle est arrivée à son adresse [28] ; je l'ai reçue ce matin seulement et je l'ai lue avec le plus grand intérêt. Je vous remercie beaucoup des éclaircissements que vous avez bien voulu me donner et qui m'ouvrent des vues nouvelles sur cette question. Cependant, si je ne craignais d'abuser de votre obligeance, je prendrais la liberté d'appeler encore votre attention sur quelques points de détail, qui me semblent encore un peu obscurs.
Je suppose que sur le plan des z, je joigne tous les points singuliers au point ∞ par des coupures, puis que je fasse mouvoir z dans son plan de telle sorte qu'il ne franchisse aucune des coupures [29]. ζ va encore erfüllen dans son plan une certaine surface S_0 qui sera évidemment zusammenhangend. Faisons maintenant mouvoir z dans son plan de telle sorte qu'il ne puisse franchir les diverses coupures plus de m fois ; ζ va rester compris dans une nouvelle surface F_m qui sera toujours zusammenhangend. Quand m augmentera la région F_m va s'étendre de plus en

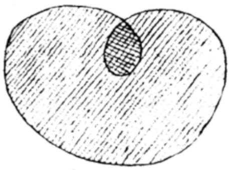
27. Fuchs donne une interprétation géométrique de son travail qui n'apparait pas au moins explicitement dans son mémoire.

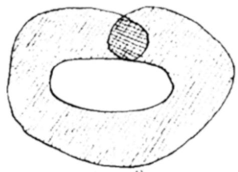
28. Poincaré est professeur d'analyse à la Faculté des sciences de Caen depuis le 1er décembre 1879. Aucune source n'indique une quelconque raison de son absence de Caen. Poincaré est certainement très occupé durant cette période ; il a remis pour la séance de l'Académie des sciences du 7 juin 1880 une note sur les formes ternaires [Poincaré, 1880c] et est en train de préparer le premier supplément à son mémoire présenté au Grand prix des sciences mathématiques qu'il déposera à l'Académie le 28 juin [Poincaré, 1997].

29. Poincaré reprend dans cette lettre le début de son développement du premier supplément : « Nous supposerons que a et b [les points singuliers finis de l'équation différentielle] sont réels et que ρ_1, ρ_2 et r sont des parties aliquotes de l'unité. Nous allons voir que dans ce cas, le théorème de M. Fuchs est vrai. [...] Joignons a et b par une coupure en ligne droite, puis b à l'infini par une seconde coupure également en ligne droite et dans le prolongement de la précédente. Faisons maintenant varier x dans son plan de telle sorte qu'il ne franchisse aucune de ces coupures et voyons comment variera z. » [Poincaré, 1997, p. 28]

plus et la surface que vous appelez F n'est autre chose que la limite de F_m pour $m = \infty$. Dire que cette surface F ne recouvre le plan que einfach, c'est dire que, quelque grand que soit m, F_m ne recouvrira le plan que einfach[30].

Or cela est-il une conséquence nécessaire de votre démonstration ? Il me semble qu'il faudrait pour le faire voir ajouter quelques explications. En effet, comment lorsque m grandit, la région F_m peut-elle arriver à se recouvrir elle-même ? Elle peut y arriver de deux manières ainsi que l'indique la figure suivante où le trait plein représente le contour de la région F_m et où cette région est recouverte d'une couche de hachures pendant que les parties du plan où F_m se recouvre elle-même sont couvertes d'une double couche de hachures[31].


1ère manière.


2e manière.

Votre démonstration, Monsieur, me paraît faire voir de la façon la plus claire, que la région F_m ne peut se recouvrir elle-même de la 1ère manière ; mais non pas qu'elle ne peut se recouvrir elle-même de la 2e manière.

Je vois bien que cela est vrai lorsqu'il n'y a que deux points singuliers à distance finie. Dans ce cas j'arrive en effet, par des considérations un peu différentes à démontrer que F_m ne peut se recouvrir elle-même ni de la 1ère ni de la 2e manière. Alors la fonction z reste eindeutig dans l'intérieur de la surface F qui est ici un cercle.

Mais il ne paraît pas évident qu'il en soit de même dans le cas général, de sorte que je me demande si le théorème est encore vrai quand il y a plus de deux points singuliers à distance finie.

Dans le cas où ces points singuliers ne sont qu'au nombre de deux je trouve que

30. Poincaré considère ce point comme fondamental. Dans le premier supplément [Poincaré, 1997, p. 33], après avoir associé un quadrilatère fondamental Q au groupe discret de transformations du disque unité d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients algébriques, il considère que le point essentiel est de faire « faire voir que l'on peut décomposer la surface du cercle HH' en un nombre fini ou en une infinité de quadrilatères », tous images de Q par une transformations du groupe. Après avoir la géométrie qu'il décrit sur le disque unité avec la géométrie non-euclidienne, il conclut :

> Donc le plan pseudogéométrique est décomposable en une infinité de quadrilatères curvilignes qui ne sont autre chose que les transformés successifs de Q. Donc le damier de ces transformés recouvre tout ce cercle et ne le recouvre qu'une fois. Donc un point quelconque situé à l'intérieur de HH' n'appartient qu'à un seul de ces quadrilatères. Donc x reste une fonction monodrome de z à l'intérieur de ce cercle. [Poincaré, 1997, p. 37]

31. Poincaré exprime la même objection dans une note du mémoire proposé au Grand prix des sciences mathématiques [Poincaré, 1923, p. 89] en proposant des figures quasi identiques. Les deux figures sont reprises à l'identique et l'analyse précisées dans le second supplément [Poincaré, 1997, p. 85] au mémoire.

la fonction que vous avez définie jouit de propriétés fort remarquables et comme j'ai l'intention de publier les résultats que j'ai obtenus, je vous demanderai la permission de lui donner le nom de fonction Fuchsienne puisque c'est vous qui l'avez découverte [32].

Je vous demandera aussi la permission de communiquer votre lettre à M. Hermite qui s'intéresse beaucoup à cette question [33].

Veuillez agréer, très honoré Monsieur, l'assurance de ma considération respectueuse.

Poincaré

4 Fuchs à Poincaré

Heidelberg 16 Juni 1880

Geehrter Herr Collega!

Empfangen Sie den herzlichsten Dank für Ihr freundliches Schreiben vom 12. Juni, wodurch Sie von Neuen ein so tief eingehendes Interesse für meine Arbeit kundzugeben die Güte gehabt haben.

32. La première mention de l'appellation « Fuchsienne » pour désigner les fonctions méromorphes sur le disque unité du plan complexe et invariantes par un sous-groupe discret de $PGL(2, \mathcal{C}$ se trouve dans le premier supplément au mémoire présenté au concours du Grand prix des sciences mathématiques (déposé le 28 juin 1880). Poincaré étudie plus particulièrement le théorème de Fuchs [1880d] dans le cas où l'équation différentielle linéaire du second ordre n'a que « deux points singuliers » finis a et b ; il note ρ_1 la différence des racines de l'équation fondamentale pour $x = a$, ρ_2 pour $x = b$ et r pour $x = \infty$. Il obtient :

> Si
> $$\rho_1 + \rho_2 + r > 1,$$
> x est fonction rationnelle de z.
> Si
> $$\rho_1 + \rho_2 + r = 1,$$
> x est fonction doublement périodique de z. Si
> $$\rho_1 + \rho_2 + r < 1,$$
> x est une fonction de z qui n'existe pas à l'extérieur du cercle HH' et qui est méromorphe à l'intérieur de ce cercle.
> Je propose d'appeler cette fonction, fonction fuchsienne. Remarquons que la fonction fuchsienne ne peut prendre qu'un seule fois la même valeur à l'intérieur de chacun des quadrilatères de Q.
> La fonction fuchsienne est à la géométrie de Lobatchevski ce que la fonction doublement périodique est à celle d'Euclide. [Le cercle HH' est le cercle unité et Q le domaine fondamental du pavage associé à la fonction fuchsienne considérée] [Poincaré, 1997, p. 37]

33. Voir la lettre adressée par Charles Hermite à Poincaré le 23 juin (p. 357).

Es würde mir ein besonderes Vergnügen bereiten in die Discussion der von Ihnen augestellten Frage einzutreten. Jedoch würde ich dadurch Ihre Geduld zum Ueberfluss in Anspruch nehmen. Denn eine Arbeit [34], welche ich schon vor der Veröffentlichung meiner Resultate in den *Göttinger Nachrichten* vom Februar dieses Jahres [35] in Angriff genommen, seitdem aber – weil mich Anderes beschätigte - liegen gelassen hatte, habe ich nun mehr zu ende geführt. Diese Arbeit enthält unter Anderem das Tableau aller Differenzialglaichungen zweiter Ordnung, welcher ausser den übrigen in meiner Abhandlung angegebenen Eigenschaften noch die p. 161 derselben Abhandlung gefordete Eigenschaft besitzt, dass die Gleichung

$$\frac{f(z_1)}{\phi(z_1} = \frac{f(z_2)}{\phi(z_2}$$

nur erfüllt wird durch $z_2 = z_1$; natürlich so lange $\frac{f(z)}{\phi(z)}$ überhaupt einen bestimmen Werth hat, d. h. so lange nicht $f(z)$ und $\phi(z)$ identisch unendlich werden. Die Arbeit enthält ausserdem die Integrale aller Differenzialgleichungen es Tableau's, und für jede derselben den analytischen Ausdruck von z als Function von ζ.
Sie sehen also, geehrter Herr, dass diese Arbeit jede weitere Discussion überflüssig macht. Ich hoffe die Resultate im Laufe der n¨chsten Wochen zu veröffentlichen, und werde mich beehren Ihnen einen Abzug zu schicken.
Es machte mir grosses Vergnügen in Ihrem Briefe zu lesen, dass Sie in Bezug auf die von mir definirten Functionen wichtige Resultate gefunden haben, welche Sie zu veröffentlichen beabsichtigen. Dass Sie die Güte haben wollen, die genannten Functionen mit meinen Namen zu bezeichnen, ist für mich sehr ehrenvoll und macht mich Ihnen zu Dank verpflichtet.
Es ist selbstverständlich, dass ich mit Ihrem Wunsche mein Schreiben dem Herrn Hermite mitzutheilen einverstanden bin.
Gereicht mir ja das Interesse, welches dieser grosse Mathematiker an meinen Arbeiten nimmt, nur zur grössten Genugthuung.
Empfangen Sie, geehrter Herr, die Versicherung meiner ausgezeichnetsten Hochachtung.

L. Fuchs

5 Poincaré à Fuchs

Caen, le 19 juin 1880

Monsieur et cher collègue,

Je ne saurais vous dire combien je suis satisfait d'apprendre que vous avez complètement résolu le problème qui fait l'objet de notre correspondance et combien

34. [Fuchs, 1880b].
35. [Fuchs, 1880c].

je suis désireux de recevoir l'extrait que vous avez bien voulu me promettre et dont je vous suis bien reconnaissant d'avance [36].
Les conditions que vous aviez posées dans votre mémoire, pour que z fût eindeutig en ζ, étaient, si je me rappelle bien, les suivantes :

$$r_{1,i} = -1 + \frac{1}{n_i},\ r_{2,i} = -1 + \frac{2}{n_i} \text{ ou } r_{1,i} = \frac{1}{2},\ r_{2,i} = \frac{1}{2}$$

et

$$s_1 = 1 + \frac{1}{n},\ s_2 = 1 + \frac{2}{n} \text{ ou } s_1 = \frac{3}{2},\ s_2 = \frac{5}{2}.$$

Or voici d'abord ce que je trouve au sujet des équations qui satisfont à ces conditions. Si on les réduit à la forme canonique, de façon à faire disparaître le terme en $\frac{dy}{dx}$, les points singuliers situés à distance finie et tels que la différence des racines de l'équation fondamentale soit 1 disparaissent.
Il peut arriver que l'on ait

$$s_1 = 0, s_2 = -1.$$

Dans ce cas on posera

$$z - a = t^{-1},$$

si a est un des points singuliers à distance finie ; puis on ramènera de nouveau l'équation à la forme canonique ; le point singulier $t = 0$ qui correspondrait au point singulier $z = \infty$ disparaît. Quand toutes ces opérations sont effectuées :
1. Pour tous les points singuliers, soit à distance finie, soit à distance infinie, la différence des racines de l'équation déterminante est une partie aliquote de l'unité et est différente de 1.
2. Le nombre des points singuliers à distance finie (qui n'ont pas disparu dans les opérations précédentes) ne peut être plus grand que 3.
Il reste alors à considérer 4 cas.
1er cas. Le nombre des points singuliers est plus petit que 2. Alors z est rationnel en ζ.
2e cas. Le nombre des points singuliers est égal à 2 ; et si ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont les différences des racines des équations fondamentales déterminantes relatives à ces deux points et à $z = \infty$, on a :

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 > 1.$$

Alors z est encore rationnel en ζ.
3e cas. Le nombre des points singuliers est 2 mais

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 1.$$

36. Comme Gray [1986] le fait remarquer dans son commentaire de la correspondance entre Poincaré et Fuchs, le contenu de cette lettre peut paraître un peu étrange, reconnaissant que l'examen des cas par Fuchs règle le point de leur discussion et explicitant en même temps les critiques concernant la démonstration du théorème proposé par Fuchs.

Alors z est une fonction doublement périodique de ζ.
4^{e} cas. Le nombre des points singuliers est 3 et il faut alors que la différence des racines de toutes les équations déterminantes soit $\frac{1}{2}$. C'est sur ce dernier cas que je prendrai la liberté d'attirer votre attention. On peut en effet former l'équation différentielle correspondante de la façon suivante ; soit $\Lambda(u)$ une fonction doublement périodique de u définie par l'équation différentielle

$$\frac{d\Lambda}{du} = \sqrt{H} = P^2,$$

H étant un polynome du 3^{e} degré en Λ. Posons

$$z = \Lambda(u),\ \eta = \sqrt{\frac{d\Lambda}{du}}e^{\alpha u},$$

on aura

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{P^2},\ \frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{2P'}{P^3},$$

η satisfera à l'équation différentielle

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} = \eta\left[\frac{P''}{P} + \frac{\alpha^2}{P^4}\right]$$

ou

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} = \eta\left[\frac{\frac{1}{4}HH'' - \frac{3}{16}H^{12} + \alpha^2 H}{H^2}\right]. \tag{1}$$

L'autre intégrale sera

$$\eta = P.e^{-\alpha u}$$

d'où

$$\zeta = e^{2\alpha u}.$$

Pour que z, c'est-à-dire Λ fût eindeutig en ζ, il faudrait que la fonction $\Lambda(u)$ admît la période $\frac{i\pi}{\alpha}$ ce qui n'a pas lieu en général.
Et pourtant si l'on pose

$$\eta = \eta_1 H^{-\frac{3}{4}}$$

η_1 se trouve lié à z par une équation linéaire (2).
L'équation (2) admet 3 points singuliers à distance finie et l'un à l'infini. Les racines de l'équation déterminante sont :
1°. pour les points à distance finie

$$-\frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} \text{ et } 0 = -1 + \frac{2}{2},$$

2°. pour le point à l'infini

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \text{ et } 2 = 1 + \frac{2}{2}.$$

L'équation satisfait donc aux conditions

$$\begin{aligned} r_1 &= -1+\frac{1}{n} \quad \text{et} \quad r_2 = -1+\frac{2}{n}, \\ s_1 &= 1+\frac{1}{n} \quad \text{et} \quad s_2 = 1+\frac{2}{n} \end{aligned}$$

et pourtant z n'est pas eindeutig en ζ, de sorte que dans ce cas particulier votre théorème me semble en défaut.

Mais ce n'est pas tout, et, si je ne craignais d'abuser de votre patience, je vous ferais part de quelques réflexions que m'a suggérées l'étude de cette question.

Les conditions que vous avez posées :

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{n}-1, \quad r_2 = \frac{2}{n}-1 \quad \text{ou} \quad r_1 = -\frac{1}{2}, \quad r_2 = \frac{1}{2}, \\ s_1 &= 1+\frac{1}{n}, \quad s_2 = 1+\frac{2}{n} \quad \text{ou} \quad s_1 = \frac{3}{2}, \quad s_2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

vous les avez trouvées en cherchant à satisfaire deux hypothèses : 1° z devait être eindeutig en ζ, 2° toute fonction rationnelle et symétrique de z_1 et de z_2 devait être eindeutig en u_1 et en u_2.

Mais si l'on ne fait que la première hypothèse (z eindeutig en ζ) ces conditions ne sont plus nécessaires. Si en effet l'objection dont je vous ai parlé dans ma dernière lettre n'existait pas, les conditions que l'on trouverait (en raisonnant tout à fait comme vous l'avez fait dans votre mémoire) seraient les suivantes : que pour tous les points singuliers la différence des racines des équations déterminantes fût une partie aliquote de l'unité. On aurait ainsi une classe d'équations beaucoup plus étendue que celle dont vous vous êtes occupé et auxquelles votre théorème s'appliquerait. Malheureusement l'objection que j'ai soulevée exige une étude plus approfondie de la question ; et cette étude, je n'ai pu la faire que dans le cas où il n'y a que deux points singuliers à distance finie.

Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les différences des racines des trois équations déterminantes. Si on a :

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3 > 1$$

z est rationnel en ζ.

Si on a

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3 = 1$$

z est doublement périodique en ζ.

Ces propriétés, je les ai énoncées plus haut et d'ailleurs vous les aviez sans doute déjà découvertes.

Tant que l'on suppose

$$\begin{aligned} r_1 &= -1+\frac{1}{n}, \quad r_2 = -1+\frac{2}{n} \quad \text{ou} \quad r_1 = -\frac{1}{2}, \quad r_2 = \frac{1}{2}, \\ s_1 &= 1+\frac{1}{n}, \quad s_2 = 1+\frac{2}{n} \quad \text{ou} \quad s_1 = \frac{3}{2}, \quad s_2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

on ne peut avoir

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 < 1.$$

Mais si l'on se borne à la première hypothèse (z eindeuting en ζ), ρ_1, ρ_2, ρ_3 ne sont plus assujettis qu'à être des parties aliquotes de l'unité, et on peut avoir :

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 < 1.$$

Alors z n'est plus ni rationnel, ni doublement périodique en ζ, mais je démontre que mon objection peut être levée et que z reste eindeutig en ζ. C'est cette fonction nouvelle que j'ai appelée fonction Fuchsienne et à l'aide de cette transcendante nouvelle et d'une autre qui s'y rattache j'intègre l'équation différentielle du 2$^{\text{d}}$ ordre à 2 points singuliers finis, non seulement quand ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont parties aliquotes de l'unité ; mais quand ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont des quantités commensurables quelconques.
La fonction Fuchsienne a beaucoup d'analogies avec les fonctions elliptiques ; elle n'existe que dans l'intérieur d'un certain cercle et reste méromorphe à l'intérieur de ce cercle. Elle s'exprime par le quotient de deux séries convergentes dans tout ce cercle.
Je ne sais rien au contraire sur les équations différentielles quand il y a plus de 2 points singuliers à distance finie.
Permettez-moi, Monsieur, de vous remercier de votre complaisance, de remercier aussi les équations linéaires auxquelles je dois le plaisir d'être entré en correspondance avec vous.
Veuillez excuser la longueur de ma lettre et agréez l'assurance de ma respectueuse considération.

Poincaré

6 Poincaré à Fuchs

Caen, le 30 juillet 1880

Monsieur

Je vous remercie beaucoup de l'envoi que vous avez bien voulu me faire de votre petit opuscule[37]. Le tableau que vous donnez des intégrales de toutes les équations différentielles lève complètement tous les doutes.

---

37. [Fuchs, 1880b].
Fuchs donne dans cette note un tableau des différents cas que l'on obtient dans l'étude de l'équation différentielle

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + p\frac{d\omega}{dz} + q\omega = 0$$

en fonction du nombre A de points singuliers.

C'est dans les cas III (1) et IV (1) que s'appliquait mon objection ; vous envisagez en effet l'équation :

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{1}{2}\frac{d\log R}{dz}\frac{d\omega}{dz} + \frac{\pi^2}{\Omega^2}\frac{1}{R}\omega = 0,$$

pour laquelle votre théorème est évidemment vrai [38] ; mais si au lieu de $\frac{\pi^2}{\Omega^2}$ vous aviez pris un coefficient numérique quelconque α, le théorème se serait trouvé en défaut, quoique les conditions que vous aviez énoncées primitivement et qui sont relatives aux racines des équations déterminantes eussent continué à être remplies. Comme vous aviez négligé d'énoncer cette condition supplémentaire, relative à la valeur du coefficient numérique de $\frac{1}{R}$, je m'y étais laissé tromper et vous voudrez bien m'en excuser.

Permettez-moi d'insister sur les fonctions auxquelles j'ai donné votre nom et que j'ai rencontrées dans ces recherches.

Ces fonctions présentent avec les fonctions elliptiques les plus grandes analogies et sont susceptibles d'être représentées par le quotient de séries convergentes, et cela d'une infinité de manières. Parmi ces séries, il y en a qui sont des séries entières et qui jouent le rôle de fonction Theta.

Elles sont convergentes dans toutes l'étendue d'un certain cercle et, en dehors de ce cercle elles cessent d'exister, ainsi que la fonction Fuchsienne elle-même.

En dehors de ces fonctions, il en est d'autres qui jouent le même rôle que les fonctions Zéta dans la théorie des fonctions elliptiques et grâce auxquelles j'intègre toutes les équations différentielles linéaires d'ordre quelconque à coefficients rationnels toutes les fois qu'il n'y a que deux points singuliers à distance finie et que les racines des trois équations déterminantes sont commensurables. J'ai imaginé aussi des fonctions qui sont aux fonctions Fuchsiennes ce que les fonctions abéliennes sont aux fonctions elliptiques et grâce auxquelles j'espère intégrer toutes les équations linéaires quand les racines des équations déterminantes seront commensurables.

Enfin des fonctions tout à fait analogues aux fonctions Fuchsiennes me donneront, je crois, les intégrales d'un grand nombre d'équations à coefficients irrationnels.

Veuillez, Monsieur, agréer encore une fois mes remerciements, ainsi que l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

38. R est égal dans le premier cas (III (1)) à $(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)$, dans le second à $(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)$; dans ces deux cas, Ω est égal à une des période de la fonction elliptique $\int R^{-\frac{1}{2}}dz$. Il s'agit de cas correspondant au quatrième cas évoqué par Poincaré dans sa lettre précédente.

7 Poincaré à Fuchs

Caen, le 20 mars 1881

Monsieur

Je vous remercie beaucoup du mémoire que vous avez eu la bonté de m'envoyer et que j'ai lu avec le plus grand intérêt [39]
J'ai continué à m'occuper des fonctions auxquelles j'ai donné votre nom et j'espère publier prochainement mes résultats [40]. Ces fonctions comprennent comme cas particulier les fonctions elliptiques d'une part, et d'autre part la fonction modulaire. Ces fonctions et d'autres que j'ai appelées zétafuchsiennes permettent d'intégrer :
1°. Toutes les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels qui ne présentent que trois points singuliers, deux à distance finie et l'un à l'infini.
2°. Toutes les équations du 2$^{\mathrm{d}}$ ordre à coefficients rationnels.
3°. Un grand nombre d'équations de divers ordres à coefficients algébriques [41].
Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

Poincaré

8 Fuchs à Poincaré

Heidelberg, 4 mars 1882

Monsieur et cher collègue,

À votre mémoire „sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires“ du 17 Décembre 1881 inséré dans les „*Mathematische Annalen*“ [42], M. F. Klein a ajouté à la fin une note datée du 30 Décembre 1881 dans laquelle il ose de vous donner une leçon à la manière de maître d'école à cause que vous avez donné mon nom aux fonctions dont il est question dans votre mémoire. Je pourrais passer sous silence les remarques malignes de M. Klein, aussi bien que

39. [Fuchs, 1881c].
C'est le seul mémoire sur ces questions publié en 1881 par Fuchs.
40. Poincaré est en train de publier une série de notes aux *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* sur ces résultats, va publier un premier mémoire dans les *Mémoires de l'Académie nationale des sciences, arts et belles lettres de Caen* [Poincaré, 1882c], un mémoire à la demande de Klein dans les *Mathematische Annalen* [Poincaré, 1882e] et les grands mémoires dans les *Acta mathematica* [Poincaré, 1882k,b].
41. Poincaré [1881f] donne la même conclusion dans sa note aux *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* du 21 février 1881. Résoudre sinon toutes, au moins une classe importante d'équations différentielles linéaires était une ambition et une motivation de Poincaré pour engager le programme de recherche lié aux fonctions Fuchsiennes (voir le témoignage de Lecornu cité par Appell [1925a, p. 33].
42. [Poincaré, 1882e].

j'en ai fait souvent à l'égard de M. Klein, depuis qu'il a pris mes travaux pour point de départ de ses études analytiques, sans m'en donner jamais quelques témoignages de sa sympathie. En effet, j'aurais passer sous silence les remarques de M. Klein, comme elles le méritent, d'autant plus qu'elles se censurent par elles-mêmes. Mais dans sa note, il a aussi osé de faire une assertion qui répugne à la vérité. Il dit que je n'ai publié en aucun lieu un mémoire concernant les fonctions qui se reproduisent par des substitutions linéaires. C'est pourquoi je crois le devoir à la dignité de la science, et aussi à vous, Monsieur, de témoigner publiquement que l'assertion de M. Klein n'est pas vraie ; et pour cela je vais publier une note dont je me fais l'honneur de vous envoyer ci-joint une copie textuelle [43]. S'il vous le trouvez convenable de faire insérer une traduction française de ma note dans un journal mathématique de Paris, j'y consentirais de bon cœur et je vous en saurais beaucoup de grâces.

Je prends avec plaisir cette occasion de vous témoigner, Monsieur, mon plus vif intérêt pour vos belles recherches dont j'étais heureux de pouvoir voir le développement dès son origine.

Agréez, Monsieur, l'assurance de mes sentiments de haute estime et d'affection.

L. Fuchs

---

43. [Fuchs, 1882].

Fuchs liste et résume dans cette note un certain nombre de ses travaux qui selon lui relèvent de la question des fonctions invariantes sous l'action de substitutions linéaires, en particulier, son travail de 1876 dans lequel il étudie l'inverse de la fonction formée par le quotient de deux solutions indépendantes d'une équation différentielle linéaire [Fuchs, 1876], le mémoire qui est l'objet de sa correspondance avec Poincaré [Fuchs, 1880d] et son travail dans lequel il fait apparaître des liens entre la théorie des invariants et les équations différentielles du second ordre qui ont des solutions algébriques [Fuchs, 1875]. Il évoque aussi sa correspondance avec Poincaré au sujet du deuxième mémoire :

> Wie aus Briefen hervorgeht, mit welchen unmittelbar nach Erscheinen meiner unter 2) bezeichneten Arbeit Herr Poincaré mich beehrte, hat dieselbe Herrn Poincaré zu seinen ausgezeichneten Untersuchungen über die Functionen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben, den directen Anlaß gegeben. [Fuchs, 1882, p. 83]