

Les mathématiques en Occident musulman (IX^e–XVIII^e s.) : Panorama des travaux réalisés entre 1999 et 2011

Ahmed Djebbar

Abstract The first part of this paper presents an overview of research carried out up to 1998 on the history of mathematical activities in the Islamic West. The topics covered are algebra, the science of calculation, theory of numbers, geometry and combinatorics.

The second part covers different aspects of research carried out in the same field between 1999 and 2011: bibliographic work, the circulation of scientific writings between the Islamic East and West, the mathematical products of the Andalus and the Maghreb.

This article shows, in particular, the expansion of the scope of investigation into domains that had not been sufficiently studied before, such as mensuration, division of figures and tiling, and the science of dividing heritages.

Introduction

En 1998, à l'occasion du Colloque de Boston, intitulé « *New Perspectives on Science in Medieval Islam* », nous avons présenté un bilan des recherches qui avaient été effectuées, jusqu'à cette date, sur l'histoire des activités mathématiques en Andalus et au Maghreb [Djebbar 2003a, 309–350]. Ce travail s'inscrivait, modestement, dans le prolongement des publications de D.A. King puis de J.L. Berggren sur les recherches en histoire des mathématiques et de l'astronomie en pays d'Islam, réalisées entre 1970 et 1995 [King 1980, 10–26 ; Berggren 1985, 9–33 ; Berggren 1997, 407–440].

Au cours des dix dernières années, un certain nombre de travaux ont été réalisés sur différents aspects des mathématiques pratiquées en Occident musulman entre le IX^e et le XIX^e siècle, recherches universitaires (sous forme de masters et de thèses le plus souvent non encore publiés), articles (parus dans des revues spécialisées ou dans des Actes de colloques), éditions critiques et ouvrages biobibliographiques. Il nous a donc semblé utile de faire le point sur la nature de cette production, sur son contenu et sur ses grandes orientations. Pour fournir le maximum d'informations au lecteur, nous avons signalé, pour chaque sujet de recherche évoqué, toutes les références le concernant, sans préjuger du niveau de chacune des études parce que l'expérience montre que, dans ce domaine, il est toujours possible de trouver des informations originales sur la tradition mathématique d'al-Andalus et du Maghreb dans des articles de vulgarisation ou des travaux universitaires de niveau modeste. Mais, avant cela, il nous paraît nécessaire de rappeler les éléments essentiels qui s'étaient dégagés du premier bilan qui avait été fait en 1998 sur la production de la période antérieure.

Avant les années 80, les publications sur la tradition mathématique de l'Occident musulman, réalisées par F. Woepcke, A. Marre, M. Steinschneider, H. Suter, M. A. Cherbonneau, G. Eneström et M. Souissi, ont concerné, essentiellement, deux disciplines : la science du calcul et l'algèbre. Et les écrits analysés avaient été produits par trois auteurs seulement, tous les trois postérieurs au XI^e siècle, al-Ḥaṣṣār (XII^e s.), Ibn al-Bannā (m. 1321) et al-Qalaṣādī (m. 1486). Ces travaux avaient explicité cer-

tains aspects relatifs à la circulation, d'est en ouest, des écrits mathématiques d'Orient, ainsi que leur forte empreinte sur le contenu des écrits connus produits en Occident musulman depuis le IX^e siècle. Ils avaient également révélé deux aspects alors inconnus des pratiques mathématiques en Andalus et au Maghreb. En premier lieu, l'élaboration d'un symbolisme arithmétique et algébrique et son introduction, vers la fin du XII^e siècle, dans une partie des manuels produits dans la région. En second lieu, la présence en Andalus, dès le milieu du XI^e siècle, et sous une forme très élaborée, des outils trigonométriques produits en Orient et qui prolongeaient les traditions grecque et indienne dans ce domaine [Djebbar 1998, I, 33–60].

Les recherches réalisées à partir des années 80 du siècle précédent ont prolongé celles qui portaient sur l'algèbre et le calcul indien tout en s'intéressant à d'autres disciplines, comme la géométrie, la théorie des nombres, la science des héritages et l'analyse combinatoire.

L'algèbre

En algèbre, on a abouti à une meilleure connaissance de l'évolution de la classification des six équations canoniques du 1^e et du 2^e degré, accompagnée d'une extension du domaine des équations¹. Cette évolution semble avoir été la conséquence du développement, en Orient, de la manipulation des monômes et des polynômes avec l'émergence de la notion de puissance. La découverte et l'analyse de nouveaux textes produits au Maghreb, en particulier le *Kitāb al-uṣūl wa l-muqaddimāt fi l-jabr wa l-muqābala* [Le livre des fondements et des préliminaires en algèbre] d'Ibn al-Bannā, le *Rashfat ar-ruḍāb min thughūr a' māl al-ḥisāb* [Succion du nectar des bouches des opérations du calcul] d'al-Qaṭrawānī (XIV^e s.) et quelques fragments du traité non encore retrouvé d'Abū l-Qāsim al-Qurashī (m. vers 1185), ont confirmé la circulation de notions, de techniques ou d'écrits algébriques orientaux postérieurs à la publication du livre d'al-Khwārizmī (m. vers 850). Mais, en dehors du traité d'Abū Kāmil (m. vers 930), aucun autre ouvrage de cette époque, ou d'une époque ultérieure, n'est explicitement cité par les praticiens de l'algèbre de l'Occident musulman. Ce qui laissait en suspens la question de la circulation, de l'Orient vers l'Occident, des contributions importantes d'al-Karājī (m. vers 1029), d'as-Samaw'al (m. 1175) et d'al-Khayyām (m. 1131). Ce silence des sources connues permettait aussi de supposer la publication, en Andalus, de contributions algébriques originales à partir de la seule connaissance des travaux d'al-Khwārizmī et d'Abū Kāmil.

Un second domaine de l'algèbre a bénéficié de recherches fructueuses, celui du symbolisme. Certains de ses aspects avaient été révélés, au cours de la période antérieure, par les travaux de Woepcke [Woepcke 1854]. Les nouvelles investigations, en particulier dans un ouvrage peu connu d'Ibn al-Yāsāmīn (m. 1204), le *Talqīḥ al-afkār fi l-amal bi rushūm al-ghubār* [La fécondation des esprits sur l'utilisation des chiffres de poussière] ont permis d'avancer de plusieurs siècles la date d'utilisation des symboles connus [Zemouli 1993]. Elles ont également permis de conjecturer leur première apparition à Séville même si les recherches postérieures n'ont pas encore permis de confirmer cette hypothèse. Quoi qu'il en soit, les recherches de cette période ont établi que c'est au Maghreb, et dans des ouvrages écrits par des mathématiciens de cette région, aux XIV^e-XV^e siècles, qu'un symbolisme arithmétique et algébrique, relativement élaboré, a accompagné l'exposé rhétorique des problèmes et de leurs résolutions.

Un troisième constat concerne les différentes formes de circulation de l'algèbre après le XIII^e siècle. Les textes produits au cours des décennies 80 et 90 ont tous été produits au Maghreb. L'analyse de leurs contenus respectifs montre clairement que l'algèbre est présente essentiellement dans les commentaires aux écrits d'Ibn al-Bannā et dans les manuels de calcul. Tous ces ouvrages réservent un chapitre à l'exposé des outils de la discipline et des techniques de résolution des équations. Dans la première catégorie d'écrits, les démonstrations accompagnent, parfois, l'exposé des algorithmes de résolution.

¹ Il s'agit des équations suivantes (exprimées dans le symbolisme actuel et présentées dans l'ordre adopté par al-Khwārizmī), X étant le « bien », \sqrt{X} la « racine du bien », a , b , c , des nombres entiers ou fractionnaires positifs :

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| (1) $aX = b\sqrt{X}$; | (2) $aX = c$; | (3) $b\sqrt{X} = c$; |
| (4) $aX + b\sqrt{X} = c$; | (5) $aX + c = b\sqrt{X}$; | (6) $b\sqrt{X} + c = aX$. |

Dans la seconde, seuls les procédés sont présentés et illustrés.

La science du calcul

En science du calcul, une première orientation a concerné la description, sous forme d'articles, ou la publication sous forme de thèse ou d'ouvrages imprimés, d'un certain nombre d'écrits maghrébins des XIV^e–XV^e siècles. Une partie des travaux a révélé l'existence de copies de certains écrits considérés comme perdus, comme le *Fiqh al-ḥisāb* [La science du calcul] d'Ibn Mun'im (m. 1228) et le *Kitāb al-kāmil fī 'ilm al-ghubār* [Livre complet sur la science <des chiffres> de poussière] d'al-Ḥaṣṣār (XII^e s.). Une autre partie a permis de mettre à la disposition des chercheurs ou d'autres utilisateurs, des ouvrages qui étaient peu connus ou totalement inconnus, comme le *Raf' al-ḥijāb 'an wujūh a' māl al-ḥisāb* [Soulèvement du voile sur les formes des opérations du calcul] d'Ibn al-Bannā, le *Ḥaṭṭ an-niqāb 'an wujūh a' māl al-ḥisāb* [Abaissement de la voilette sur les formes des opérations du calcul] d'Ibn Qunfudh (m. 1407), le *Talqīh al-afkār* d'Ibn al-Yāsamin et le *Sharḥ at-Talkhīṣ* [Commentaire au Talkhīṣ] d'al-'Uqbānī (m. 1408).

Dans le prolongement de ces contributions, quelques études se sont focalisées sur certains outils arithmétiques, comme la méthode de fausse position et les algorithmes de calcul, et sur des applications à un domaine juridique, la science des héritages. Pour la première fois, les aspects mathématiques de ce vaste champ de la législation musulmane ont fait l'objet d'analyses comparatives basées sur des sources de l'Occident musulman, le *Mukhtaṣar* [Abrégé] de l'andalou al-Ḥūfī (m. 1192) et le *Sharḥ Mukhtaṣar al-Ḥūfī* [Commentaire à l'Abrégé d'al-Ḥūfī] du maghrébin al-'Uqbānī.

Il faut enfin signaler que l'ensemble des études faites sur les écrits que nous venons d'évoquer a apporté des éclairages significatifs sur deux aspects importants. Le premier concerne le phénomène de circulation de l'Orient vers l'Occident musulman de concepts et de procédures appartenant soit à la tradition du « calcul indien », soit à la tradition dite du « *ḥisāb maftūḥ* », c'est-à-dire celle du calcul digital et mental. Le second a trait aux spécificités de certaines pratiques calculatoires d'al-Andalus et du Maghreb, comme l'utilisation de la numération dite « *rūmī* » [byzantine] (appelée aussi « *chiffres de Fez* » et « *chiffre des registres* »)², ainsi que la manipulation des fractions, avec l'usage systématique d'un symbolisme relativement élaboré.

La théorie des nombres

En théorie des nombres, les recherches de cette période avaient révélé des préoccupations, des pratiques et des contributions originales. Elles ont également permis de constater que les contributions connues s'inscrivaient, essentiellement, dans le prolongement des trois grandes traditions grecques, c'est-à-dire celle des Livres VII–IX des *Eléments* d'Euclide (III^e s. av. J.C.), celle de l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque de Gérase (II^e s.) et, dans une moindre mesure, celle des *Arithmétiques* de Diophante (III^e s.). Cet héritage est arrivé, partiellement, en Andalus, enrichi par les résultats de nouvelles recherches effectuées essentiellement à Bagdad, à partir du IX^e siècle. On y trouve des preuves d'existence et des procédés permettant de déterminer des nombres premiers, parfaits, amiables et figurés ainsi que les sommes de certaines séries finies d'entiers. Au niveau des démonstrations, on remarque, à côté de différentes preuves par induction, l'introduction de l'analyse et de la synthèse dans l'établissement de résultats arithmétiques. Cette démarche, un peu artificielle pour de nombreuses propositions de théorie des nombres, nous renseigne en fait sur l'impact que semble avoir eu, par l'intermédiaire du *Kitāb al-istikmāl* [Livre du perfectionnement] d'al-Mu'taman (m. 1085), le *Kitāb at-taḥlīl wa t-tarkīb* [Livre

² Il s'agit d'un système de numération non positionnelle à 27 chiffres (9 pour les unités, 9 pour les dizaines et 9 pour les centaines), avec l'ajout, aux chiffres précédents, d'un même signe répété autant de fois qu'il y a de milliers dans chaque position).

de l'analyse et de la synthèse] d'Ibn al-Haytham (m. vers 1041).

La géométrie

En géométrie, et malgré les nombreux témoignages du biobibliographe andalou Šā'id al-Andalusī (m. après 1068), les écrits de l'Occident musulman qui étaient connus au début des années 1980 se limitaient, essentiellement, aux traductions latines ou hébraïques de quelques opuscules sur le mesurage et d'écrits sur les outils mathématiques de l'astronomie. Des investigations nouvelles ont permis d'exhumer puis d'analyser des documents de différentes formes : des épîtres, comme le *Mukhtasār fī l-misāḥa* [L'abrégé sur le mesurage] d'Ibn al-Bannā ; des résumés, comme la lettre d'Ibn Bājja (m. 1138) à son ami Ibn al-Imām, dans laquelle il synthétise les travaux originaux de son professeur Ibn Sayyid (XI^e s.) ; des fragments, comme ceux de l'ouvrage d'Ibn as-Samḥ, qui traitent du cylindre et de ses sections planes ; des parties substantielles d'un ouvrage perdu, comme le *Kitāb al-istikmāl* d'al-Mu'taman.

Ces différents écrits ont confirmé une circulation partielle mais qualitativement importante, vers l'Andalus de versions arabes d'ouvrages grecs (les *Eléments* d'Euclide, les *Coniques* d'Apollonius (III^e s. av. J.C.), les *Sphériques* de Ménélaüs (II^e s.) et de copies d'ouvrages réalisés par des mathématiciens d'Orient entre le IX^e et le XI^e siècle (comme l'*Épître sur l'aire de la parabole* d'Ibrāhīm Ibn Sinān (m. 940) et le *Livre de l'analyse et de la synthèse* d'Ibn al-Haytham) [Hogendijk 1991]. Ils ont également révélé certains aspects des pratiques géométriques de l'Occident musulman et certaines contributions, comme l'établissement du théorème dit de Ceva et l'étude de nouvelles courbes planes par projection d'une catégorie de courbes gauches, ayant pour but de réaliser la multisection d'un angle ou la détermination de n grandeurs proportionnelles entre deux grandeurs données.

L'analyse combinatoire

En combinatoire, la recherche a été plus féconde que pour les autres disciplines. Pour la première fois, des textes mathématiques arabes, produits au Maghreb, exposaient des résultats, des procédures et des applications de nature combinatoire. Il s'agit de deux écrits d'Ibn al-Bannā, le *Tanbīh al-albāb 'alā masā'il al-ḥisāb* [Avertissement aux gens intelligents sur les problèmes du calcul] et le *Raf' al-ḥijāb*, ainsi qu'un ouvrage plus ancien, le *Fiqh al-ḥisāb* d'Ibn Mun'im. Auparavant, les seuls témoignages connus attestant d'une pratique combinatoire en pays d'Islam se trouvaient, essentiellement, dans des ouvrages de lexicographie comme le *Kitāb al-'ayn* [Livre du 'ayn] d'al-Khalīl Ibn Aḥmad (m. ca. 786), de grammaire comme la *Jamharat al-'Arab* [Le recueil des Arabes] d'Ibn Durayd (m. 933) ou de philosophie, comme le *Sharḥ al-ishārāt wa t-tanbīhāt* [Commentaires sur les 'Remarques et avertissements'] de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (m. 1274). D'autres dénombrements par énumération avaient été remarqués dans des ouvrages mathématiques, mais ils étaient isolés et aucun n'avait abouti à un développement théorique connu.

L'exhumation et l'analyse des trois textes maghrébins qui viennent d'être évoqués ont permis de révéler une véritable tradition, née à Marrakech à la fin du XII^e siècle, à partir de préoccupations lexicographiques, et entretenue dans cette même ville, et sous différentes formes, tout au long des XIII^e–XIV^e siècles. Elles ont également permis de repérer des tentatives de théorisation de ces démarches combinatoires, en les accompagnant de démonstrations inductives, quand cela était possible, et en les rattachant à des résultats de l'arithmétique néopythagoricienne.

Nature et contenu des travaux réalisés après 1998

Au cours des douze dernières années, on a assisté à un développement significatif de la production dans le domaine de l'histoire des activités mathématiques en Occident musulman. Ce développement a été stimulé par l'organisation de colloques internationaux ou régionaux et par un plus grand intérêt porté à l'histoire des sciences en général de la part de quelques institutions universitaires au Maghreb. Les thèmes qui ont été étudiés au cours de cette période peuvent être regroupés en trois catégories. La première englobe des travaux à caractère « *externaliste* » comprenant des présentations générales portant sur les grandes orientations de l'activité mathématique de la région, sur leurs auteurs, sur leur production et sur sa circulation partielle. La deuxième regroupe les études, de nature « *internaliste* », qui exposent le contenu connu de la production mathématique d'al-Andalus et du Maghreb, avec ses éventuelles caractéristiques. La troisième catégorie est constituée de toutes les recherches qui se sont intéressées à l'intervention d'outils et de techniques mathématiques dans d'autres disciplines et dans différentes activités de la cité.

Les grandes orientations des mathématiques en Andalus et au Maghreb

Les nouvelles recherches dans ce domaine se sont inscrites dans le prolongement des études, faites dans les décennies 80 et 90, sur les activités mathématiques dans les deux grands espaces culturels de l'Occident musulman et dans chacune des trois régions du Maghreb. Mais elles se sont intéressées, principalement, à certaines périodes sur lesquelles les sources désormais disponibles fournissent le plus d'informations. Il y a d'abord l'Andalus des XI^e–XII^e siècles et plus précisément la production mathématique de cette période, qui s'est exprimée en hébreu. La découverte et l'exploitation de nouveaux documents ont permis de disposer d'informations supplémentaires sur les contributions de cette tradition scientifique, dans sa globalité et sur la production de certains de ses représentants les plus éminents, comme Ibn Ezra (m. ca. 1167) [Lévy 2000 ; 2001b] et Maïmonide (m. 1204) [Lévy 2004]. Au XIII^e et au XIV^e siècle, les publications en hébreu, liées à la tradition arabe, se sont poursuivies et ont concerné essentiellement, au vu des sources qui ont été analysées, l'arithmétique et la géométrie [Lévy 2002].

Quant à la tradition arabe proprement dite, c'est la période postérieure au XII^e siècle qui a fait l'objet d'études. Elle correspond à trois grands moments de l'histoire de l'Occident musulman, la phase almohade, celle des trois royaumes magrébins et celle que l'on qualifie, abusivement, de période ottomane puisque le Maghreb extrême n'a jamais été sous la tutelle de la « *Sublime porte* ». Le premier moment a été celui de la prééminence de Séville relayée à partir du XIII^e siècle par Marrakech qui profite de l'installation dans la ville de quelques hommes de sciences d'al-Andalus [Djebbar 2005a ; Laabid 2005 ; Lamrabet 2008]. Le second moment correspond aux XIV^e–XV^e siècles. Avec la disparition des derniers centres intellectuels andalous (à l'exception de celui de Grenade), les mathématiciens les plus en vue travaillent désormais à Fez, à Tunis ou à Tlemcen. Leur production est, dans l'ensemble, une reprise des thèmes et des méthodes exposés dans les écrits antérieurs, accompagnés de commentaires, d'exemples et, parfois, de justifications [Lamrabet 2007 ; Laabid 2007].

La dernière période est celle où le Maghreb est régi par deux institutions politiques distinctes, à l'ouest, une royauté qui sera assumée par plusieurs dynasties (Wattassides, Saadiens et Alaouites) ; au centre et à l'est, des beylicats sous la tutelle du pouvoir ottoman (1515–1830). Mais, au niveau de l'activité scientifique, les situations dans les deux régions sont semblables dans la mesure où elles sont le résultat d'une dynamique générale dont les prémices étaient déjà présentes dans la production du XIV^e siècle [Djebbar 2003b]. Dans le domaine mathématique, ce phénomène avait débuté par la réduction du champ de la recherche avec un ralentissement significatif et la marginalisation de certains chapitres qui étaient enseignés au cours des siècles précédents. Les nouvelles études ont montré que cette tendance a concerné toutes les régions du Maghreb, indépendamment de la nature de leurs systèmes politiques, et elle s'est accentuée après le XV^e siècle, avec un arrêt complet de la recherche [Djebbar 2000b]. Au niveau des publications, elle s'est manifestée par la multiplication d'écrits sous forme de commentaires,

d'abrégés et de gloses [Aballagh 2003].

Les travaux biobibliographiques

Ce constat global est confirmé par des études particulières concernant le profil, les activités ou le contenu de la production des mathématiciens de cette région. Dans le domaine biobibliographique, la plus importante est, incontestablement la version anglaise, de l'ouvrage de [Rosenfeld & Matvievskaia 1983] qui présente 1300 références. Dans la nouvelle version, qui regroupe 1700 références, le contenu a été actualisé et considérablement enrichi avec, en particulier, l'addition de nombreuses biographies de mathématiciens et d'astronomes de l'Occident musulman [Rosenfeld & İhsanoğlu 2003 ; Rosenfeld 2004 ; 2006].

D'autres contributions, sous forme de travaux universitaires ou de publications (articles de recherches et livres) ont été réalisées. Elles concernent, le plus souvent, des auteurs répertoriés dans l'ouvrage qui vient d'être évoqué, mais elles fournissent des informations plus détaillées sur leurs activités et sur leurs écrits mathématiques. Parmi ces scientifiques, certains ont bénéficié de publications consacrées soit à leur biographie soit à leur production mathématique soit à tous les aspects de leurs activités [Abdeljaouad 2005a ; Djebbar & Aballagh 2001 ; Lamrabet 2000 ; Marin 2004]. D'autres ont été présentés, ainsi que leurs contributions, à l'occasion de l'édition ou de l'exposé du contenu d'un de leurs ouvrages. C'est le cas d'al-Ghurbī (m. XIV^e s.), un mathématicien peu connu [Harbili 2006], et d'Ibn Haydūr, le plus important commentateur des ouvrages d'Ibn al-Bannā [Muşliḥ 2006 ; Naghsh 2007].

La circulation des écrits mathématiques arabes d'Occident vers l'Orient et vers l'Afrique subsaharienne

Pendant longtemps l'une des préoccupations des chercheurs, dans le domaine de l'histoire des mathématiques en pays d'Islam, a été la recherche des informations permettant d'écrire l'histoire de la circulation des ouvrages grecs et arabes d'Orient vers l'Occident [Djebbar 2002]. Avec le développement quantitatif des recherches sur les activités mathématiques du Maghreb et d'al-Andalus, plusieurs éléments, puisés dans les ouvrages bibliographiques et, surtout, dans les textes mathématiques eux-mêmes, ont encouragé de nouvelles investigations. Ces dernières ont permis de rassembler suffisamment de matériaux pour entreprendre des études sur un phénomène peu connu auparavant et qui concerne la présence, dans des écrits scientifiques produits en Orient, de références explicites à des auteurs occidentaux et à certains de leurs ouvrages. L'illustration la plus frappante de ce phénomène est la circulation du *Kitāb al-istikmāl* d'al-Mu'taman : des copies de cet ouvrage (publié à Saragosse au XI^e siècle) sont d'abord signalées à Marrakech puis au Caire puis à Maragha où une nouvelle rédaction de son contenu est réalisée vers la fin du XIII^e siècle ou au début du XIV^e [Djebbar 1997 ; Bouzari 2005].

On découvre aussi la diffusion, d'ouest en est, de pratiques et d'outils, caractéristiques de la tradition mathématique de l'Occident musulman, tels qu'ils nous ont été conservés dans les manuels des XII^e-XIV^e siècles produits à Séville ou à Marrakech. Au niveau des publications, il y a, en particulier, le *Kitāb al-bayān wa t-tadbkār* [Livre de la démonstration et du rappel] d'al-Ḥaṣṣār, rédigé probablement à Séville et dont une copie a été réalisée à Bagdad [Kunitzch 2002–2003], quelques décennies à peine après la mort de l'auteur. Il y a aussi le *Talkhīṣ a' māl al-ḥisāb* [L'abrégé des opérations du calcul] d'Ibn al-Bannā dont le contenu a dominé l'enseignement du calcul et de l'algèbre au Maghreb tout au long des XIV^e-XV^e siècles. Il a d'abord fait l'objet d'un résumé, à Jérusalem ou au Caire, par Ibn al-Hā'im (m. 1412) [Aballagh 2000a]. Puis il a été longuement commenté, dans cette dernière ville, par Ibn al-Majdī (m. 1447) dans un volumineux ouvrage, le *Hāwī l-lubāb fī sharḥ Talkhīṣ a' māl al-ḥisāb* [Le recueil de la moelle qui commente l'Abrégé des opérations du calcul]. Dans cet écrit, l'auteur se réfère à deux autres ouvrages du même auteur, plus importants sur le plan mathématique que le *Talkhīṣ*, le

Rafʿ al-ḥijāb et le *Kitāb al-uṣūl*. Il confirme aussi, par des citations, la circulation du poème algébrique d'Ibn al-Yāsāmīn qui avait, quelques décennies auparavant, attiré l'attention d'Ibn al-Hā'im. Ce dernier lui a même consacré un commentaire développé [Abdeljaouad 2003]. Mais une édition critique et une analyse comparative du contenu très riche du *Ḥāwī* d'Ibn al-Majdī pourraient révéler d'autres liens avec la production mathématique de l'Occident musulman [Djebbar 2006].

On peut déjà affirmer l'existence de certains de ces liens grâce à la présence, dans l'ouvrage, du symbolisme arithmétique et algébrique qui est un élément caractéristique de la pratique mathématique du Maghreb des XIII^e–XV^e siècles. Des recherches récentes ont d'ailleurs montré l'intervention de ce symbolisme dans d'autres écrits orientaux et leur utilisation jusqu'au XVIII^e siècle [Abdeljaouad 2007 ; 2011]. Il reste à identifier les manuels qui ont permis cette circulation. Parmi les sources possibles, il y a bien sûr les commentaires au *Talkhīṣ* d'Ibn al-Bannā dont nous connaissons le contenu grâce aux travaux de ces trois dernières décennies [al-Qalaṣādī 1999 ; Harbili 2006]. Mais il est possible que d'autres manuels d'enseignement, encore inconnus, aient bénéficié de cette circulation vers certains foyers scientifiques d'Orient, comme le Caire et Istanbul.

Il faut également signaler un second phénomène, peut-être plus tardif, et qui commence à faire l'objet de recherches, celui de la circulation des écrits mathématiques d'al-Andalus et du Maghreb vers les centres islamisés de l'Afrique subsaharienne. Depuis plusieurs décennies, des travaux bibliographiques ont révélé l'existence de nombreux manuscrits scientifiques dans les bibliothèques des pays de cette région. Une partie d'entre eux concerne les mathématiques. Il s'agit, au vu de ce qui est connu, de manuels d'enseignement et d'ouvrages utilisant le calcul et la géométrie pour résoudre des problèmes liés aux activités profanes ou cultuelles (mesurage, répartition des héritages, détermination des moments des prières, de la direction de la Mecque, etc.). Une première étude comparative, consacrée aux seuls écrits mathématiques et astronomiques, montre que les ouvrages maghrébins des XIV^e–XVI^e siècles tiennent une place importante dans la formation des lettrés subsahariens [Djebbar & Moyon 2011]. L'analyse, non encore faite, de nombreux manuscrits encore anonymes et l'exhumation d'autres documents appartenant à des bibliothèques ne possédant pas de catalogues, pourraient aider à expliciter les liens qui se sont tissés, dans certains domaines scientifiques, entre le nord de l'Afrique et sa partie subsaharienne.

Le contenu des mathématiques produites en occident musulman

La matière mathématique produite ou enseignée, en arabe, en Andalus et au Maghreb, entre le IX^e et le XIX^e siècle, a fait l'objet de nombreux travaux qui ont porté, en premier lieu, sur les quatre disciplines qui avaient déjà été étudiées dans la période antérieure. Mais de nouveaux thèmes ont également été abordés. Ils ont concerné des pratiques mathématiques liées aux activités quotidiennes de la cité islamique, comme le mesurage, le découpage et la répartition des héritages. Parallèlement, un certain nombre d'épîtres, d'ouvrages ou de chapitres de livre ont été édités, accompagnés parfois d'une traduction française. Il faut enfin signaler quelques études portant sur les aspects épistémologiques ou philosophiques de textes andalous ou maghrébins. Le contenu mathématique de ces écrits était connu, mais il n'avait pas encore été analysé sous cet angle et en tenant compte de l'environnement culturel dans lequel vivaient leurs auteurs [Uthmānī 1999 ; Lamrabet 2001 ; Aballagh 2007].

L'analyse combinatoire

En analyse combinatoire, une nouvelle publication du chapitre 11 du *Fiqh al-ḥisāb* d'Ibn Mun'im, qui est entièrement consacré à ce sujet, a été réalisée à l'occasion de l'édition de l'ouvrage [Ibn Mun'im 2006, 201–236]. Mais, aucun écrit nouveau et original, produit en Occident musulman, n'a été exhumé au cours de la période concernée. Toutefois, des développements, faisant intervenir des dénombrements, sont repérés dans des textes qui reprennent des sources du XII^e et du XIV^e siècle, comme celui d'Ibn al-

Bannā [Djebbar 2003c, 39–42], celui d'Ibn Haydūr (m. 1413) [Muşliḥ 2006, 536–545, 746] et celui de Ṭfayyash (m. 1914) [Ms. Banī Yazgan, Bibliothèque privée, 469–471]. Le domaine des carrés magiques pourrait révéler des pratiques combinatoires élémentaires, comme le laisse penser une note anonyme où les carrés d'ordre trois sont obtenus, par permutation, à partir d'un carré donné [Ms. Rabat, Ḥasaniya n° 53, 161]. Les ouvrages bibliographiques et les catalogues des bibliothèques maghrébines mentionnent des écrits ayant été consacrés à la construction de ces carrés. Certains n'ont pas encore été retrouvés et pour ceux qui nous sont parvenus, l'étude de leurs contenus respectifs n'en est qu'à ses débuts [Sesiano 2004, 17, 126].

L'algèbre

En algèbre, les investigations de ces dernières décennies n'ont pas permis de révéler de nouveaux documents ou d'exhumer des copies d'écrits cités par des auteurs du XIV^e siècle, comme le *Kitāb al-jabr* [Livre d'algèbre] d'al-Qurashī dont il nous est parvenu quelques fragments et des références précises. Mais les textes connus depuis longtemps, ou édités durant la période antérieure, ont alimenté des études à différents niveaux. Il y a eu d'abord une première présentation du contenu des pratiques algébriques d'expression arabe, en Andalus et au Maghreb, avec leurs prolongements en Europe à travers des traductions ou de nouvelles publications de textes en hébreu et en latin [Djebbar 2001b, 73–116 ; Moyon 2007 ; 2011]. Une seconde étude a concerné le plus ancien texte algébrique connu de l'Occident musulman, le fameux poème d'Ibn al-Yāsamīn. L'intérêt de ce texte est plus culturel et didactique que scientifique dans la mesure où son contenu est en deçà de ce que l'on connaissait en tant que savoir algébrique à l'époque de sa publication et même plus tard. Il est en fait l'illustration d'une tendance qui va s'accroître au cours des siècles, et qui va accompagner le phénomène de réduction du champ des activités mathématiques au Maghreb et de leur extinction pure et simple en Andalus. Ce poème deviendra alors un outil indispensable dans l'enseignement de base de l'algèbre [Abdeljaouad 2005c].

Ce sont peut-être aussi des préoccupations liées à l'histoire de l'enseignement des mathématiques qui sont à l'origine d'une nouvelle étude sur le symbolisme algébrique pratiqué au Maghreb depuis la fin du XII^e siècle. Cette étude confirme et explicite le rôle de ce symbolisme dans l'enseignement de l'algèbre et dans la résolution des problèmes aboutissant à des équations du premier et du second degré [Abdeljaouad 2005b].

La théorie des nombres

En théorie des nombres, l'analyse des écrits disponibles a montré la forte présence de la tradition euclidienne dans le *Kitāb al-istikmāl* d'al-Mu'taman, sous la forme d'une nouvelle rédaction des Livres VII à IX des *Eléments*, avec l'abandon d'un certain nombre de propositions, considérées comme superflues dans la nouvelle présentation, et le regroupement des propositions restantes en fonction de leurs liens logiques. D'une manière plus précise, le chapitre consacré à ce thème est divisé en quatre sections traitant, respectivement, les propriétés intrinsèques des nombres, leurs propriétés en tant que grandeurs rapportées les unes aux autres, celles qui découlent de leur similitude aux trois grandeurs géométriques (lignes, surfaces, solides) et, enfin celles qui résultent du rapport des nombres à leurs parties. Dans le prolongement de cette tradition euclidienne, al-Mu'taman a inclus, dans la quatrième partie de son exposé, le contenu de la rédaction de la *Risāla fī l-a' dād al-mutaḥābba* [Epître sur les nombres amiables] de Thābit Ibn Qurra (m. 901), sans en modifier ni la structure ni les démonstrations [Djebbar 1999]. C'est peut-être à partir de cette initiative que l'intérêt pour les nombres amiables s'est développé chez des auteurs postérieurs. Quoi qu'il en soit, on a trouvé l'évocation plus ou moins détaillée de ce thème dans des écrits d'origine andalouse, comme le *Kitāb al-kāmil* d'al-Ḥaṣṣār et le *Fiqh al-ḥisāb* d'Ibn Mun'im [Ibn Mun'im 2006, 189–192], ou dans des manuels maghrébins, comme le commentaire d'al-Ghurbi

au *Talkhīṣ* d'Ibn al-Bannā [Harbili 2006].

La tradition néopythagoricienne est absente du traité d'al-Mu'taman. Mais nous savons aujourd'hui qu'elle était bien connue en Andalus et qu'elle a inspiré de nouvelles études. La première est attribuée à Ibn Sayyid, le professeur du philosophe Ibn Bājja et la seconde à Ibn Ṭāhir (XII^e s.), probablement de Séville. Ces deux contributions ne nous sont pas parvenues. Mais nous sommes informés sur leur contenu grâce à la troisième contribution, celle d'Ibn Mun'im qu'il a exposée dans le neuvième chapitre de son *Fiqh al-ḥisāb*. L'analyse du contenu de ce chapitre a permis de lever le voile sur un aspect méconnu des pratiques arithmétiques andalouses. Il a aussi révélé le lien existant entre cette tradition et celle du Maghreb représentée par deux contributions, celle d'Ibn al-Bannā dans son *Raf' al-ḥijāb*, et celle d'Ibn Haydūr dans son *Tuḥfat at-ṭullāb fī sharḥ mā ashkala min Raf' al-ḥijāb* [La parure des étudiants sur l'explication des difficultés du Lever du voile]. Ces auteurs se sont largement inspirés des écrits de leurs prédécesseurs, avec un élément original dans la démarche d'Ibn al-Bannā qui a tenté de faire le lien entre des propositions arithmétiques et des résultats de nature combinatoire [Aballagh 2000c ; Djebbar 2000a].

Quant à la tradition diophantienne, certains aspects avaient été révélés avec l'édition du *Kitāb al-uṣūl* d'Ibn al-Bannā [Djebbar 1990]. Mais, comme pour d'autres sujets traités au Maghreb, les problèmes de ce chapitre semblent trouver leur origine dans des écrits andalous antérieurs, comme le *Fiqh al-ḥisāb* d'Ibn Mun'im [Ibn Mun'im 2006, 193–200]. En attendant d'exhumer de nouvelles sources, il serait utile de réaliser une étude comparative du contenu des matériaux disponibles.

La science du calcul

Dans le domaine de la science du calcul, les travaux récents ont permis de mieux connaître à la fois les contours des pratiques de l'Occident musulman, leurs orientations essentielles et certains aspects de leur contenu technique. Des textes connus mais qui étaient encore inédits ont été publiés. C'est le cas du *Liber Mahameleth* d'un auteur latin anonyme du XII^e siècle. On était déjà informé de certaines particularités de cet important ouvrage, en particulier de ses liens avec la tradition andalouse du *Ḥisāb al-mu'āmalāt* [Calcul des transactions] [Sesiano 1988]. L'analyse de certains chapitres révèle aussi ses liens avec l'une des traditions orientales du calcul, celle dite du *calcul ouvert*, par opposition au *calcul indien* [Vlasschaert, 2010]. Le second ouvrage, édité et accompagné, lui aussi, d'une traduction française, est le commentaire d'al-Qalaṣādī au *Talkhīṣ* d'Ibn al-Bannā. C'est un écrit tardif, réalisé par l'un des derniers mathématiciens d'al-Andalus, et qui perpétue les caractéristiques et les éléments essentiels de la science du calcul tels qu'ils avaient été fixés par les professeurs de Marrakech au XIII^e siècle [al-Qalaṣādī 1999]. Le troisième ouvrage, dont une édition vient d'être publiée, est en hébreu mais il s'inscrit dans la tradition maghrébine qui vient d'être évoquée puisqu'il puise sa matière dans des écrits d'Ibn al-Bannā, le *Talkhīṣ* et le *Raf' al-ḥijāb*, et de certains de ses commentateurs. Il s'agit de la *Iggeret ha-Mispar* [L'épître sur le nombre], réalisée à Palerme par Isaac Ibn al-Aḥdab (XIV^e s.). On y trouve un exposé des objets et des outils du calcul dans une présentation qui suit le plan adopté par Ibn al-Bannā dans son *Talkhīṣ*, sans qu'il s'agisse d'une traduction dans la mesure où l'auteur a pris le soin de rédiger un texte nouveau et d'y insérer des éléments puisés dans d'autres écrits [Lévy 2003 ; Wartenberg 2007, 4–20].

Sur le plan de l'analyse mathématique des contenus, les nouvelles études se sont intéressées à un premier thème, celui de la numération et plus précisément celle qui utilise les chiffres « *rūmī* ». Les premières publications réalisées sur ce thème, tout au long du XX^e siècle, avaient fourni de nombreuses informations sur les différents contextes de leur utilisation en Andalus et au Maghreb. Elles s'étaient également interrogées sur l'origine de ces chiffres et avaient proposé des réponses [Colin 1933 ; Labarta & Barceló 1988]. Les nouvelles études se situent dans le prolongement des précédentes en apportant de nouvelles informations sur l'utilisation de cette numération ou sur des écrits qui lui ont été consacrés au Maghreb [Guergour 2000 ; Guesdon 2002 ; Comes 2002–2003 ; Aballagh 2002 ; Lamrabet 2003]. A partir des résultats de toutes ces recherches et des sources maghrébines connues, il est devenu possible d'orienter l'étude de ce thème vers l'édition et l'analyse comparative des textes désormais disponibles et

qui ont été rédigés par des mathématiciens du Maghreb ayant vécu entre le XII^e et le XIV^e siècle.

Parmi les autres thèmes de la science du calcul, certains méritaient, au vu des sources désormais disponibles, des études particulières et des analyses comparatives reposant sur les pratiques connues dans les trois grandes régions de l'empire musulman (Asie centrale, Proche Orient et Occident musulman). C'est le cas des méthodes de simple et de double fausse position, des quatre opérations arithmétiques classiques et des procédés d'approximation. Le troisième sujet est le seul, à notre connaissance, à avoir fait l'objet, au cours de cette dernière décennie, d'études portant sur les écrits andalous et maghrébins disponibles. Ces études ont abouti à des travaux universitaires et à des publications. Les nouvelles investigations sont parties des résultats obtenus par des contributions antérieures sur les procédés d'approximation en Occident musulman [Lamrabet 1981 ; Djebbar 1986 ; Sesiano 1988 ; Aballagh 1988] et en Orient [Berggren 2002]. Elles ont ensuite profité de l'édition d'ouvrages révélés au cours des trois dernières décennies, en particulier le *Talqīḥ al-afkār* d'Ibn al-Yāsāmīn, le *Fiqh al-ḥisāb* d'Ibn Mu'īn, le *Raf' al-ḥijāb* d'Ibn al-Bannā et la *Tuḥfat aṭ-ṭullāb* d'Ibn Haydūr. Elles ont également bénéficié de l'exploitation de sources encore inédites, comme le *Bayān wa t-tadbkār* d'al-Ḥaṣṣār, le commentaire au *Talkhīṣ* d'al-Ghurbī [Harbili 2006] et le *Ḥaṭṭ an-niqāb* d'Ibn Zakariyā' (XIV^e s.). Grâce aux travaux issus de ces investigations, nous disposons aujourd'hui de l'édition de tous les fragments connus, produits ou utilisés au Maghreb, et dans lesquels sont exposées des techniques d'approximation des racines carrées et cubiques d'entiers, de fractions ou de combinaisons des deux, accompagnées parfois de démonstrations. Trois éléments essentiels se dégagent de toutes ces études : la reproduction de certains procédés d'approximation présents dans des manuels orientaux, publiés entre le IX^e et le XI^e siècle, l'élaboration de nouveaux procédés inspirés par les techniques de résolution des équations quadratiques et la justification de certains algorithmes à l'aide de preuves arithmétiques ou géométriques [Harbili 2005 ; 2011a ; 2011b].

La géométrie

En géométrie, les travaux de la dernière décennie ont concerné, en premier lieu, la circulation, vers l'Occident musulman, des versions arabes du corpus grec (*Eléments* et *Données* d'Euclide, *Coniques* d'Apollonius, *Sphériques* de Ménélaüs, *Mesure du cercle* et *Sphère et cylindre* d'Archimède) ainsi que les différents aspects de leur intervention dans les écrits andalous ou maghrébins [Guergour 2006 ; Bouzari 2009]. Certains travaux récents ont concerné le contenu de versions arabes, latines et hébraïques des *Eléments*. A partir de ce qui était connu au sujet de la circulation, vers l'Andalus, d'au moins deux versions arabes de cet ouvrage (l'une d'al-Ḥajjāj (VIII^e–IX^e s.) et l'autre d'Ishāq Ibn Ḥunayn (m. 910), révisée par Thābit Ibn Qurra [Djebbar 1996, 104–111]), les nouvelles recherches ont permis de mettre en lumière deux aspects importants, de la circulation des textes : le rôle de la tradition hébraïque dans la préservation du traité d'Euclide [Lévy 2005] et les liens existants entre le contenu des manuscrits arabes d'Occident et certaines versions latines réalisées à partir du XII^e siècle [Rommevaux, Djebbar & Vitrac 2001, 271–277].

La géométrie « savante » en Andalus

Parmi les écrits andalous qui prolongent la tradition grecque des *Eléments*, un seul texte nous est parvenu, celui d'al-Mu'taman. Il s'agit de plusieurs chapitres de son *Kitāb al-istikmāl*. C'est une rédaction abrégée de la partie proprement géométrique du traité d'Euclide, selon la démarche et le style que ce mathématicien avait adoptés pour la rédaction des Livres VII–IX [Hogendijk 1991]. Après la découverte de la partie manquante de l'ouvrage d'al-Mu'taman, dans une rédaction réalisée, au XIII^e siècle, par Ibn Sartāq, un mathématicien iranien [Djebbar 1997 ; Hogendijk 2004], le chapitre de l'ouvrage de l'*Istikmāl* correspondant aux Livres I–IV des *Eléments* a été édité et traduit en français. Son contenu est

conforme à la démarche générale de l'auteur qui semble avoir conçu son ouvrage comme un recueil de résultats, de démonstrations et de constructions tirés du corpus géométrique grec mais exposés selon une architecture différente [Guergour 2005 ; 2006 ; 2009]. Quant au chapitre qui traite de la théorie des rapports, il se présente également comme une rédaction abrégée du Livre V des *Eléments*, avec le regroupement de certaines propositions et l'abandon d'autres [Djebbar 2011b].

On sait que l'ouvrage d'al-Mu'taman a circulé au Maghreb et il est possible que le contenu de ses chapitres géométriques ait alimenté de nouveaux écrits, comme le livre d'Ibn Mun'im, *Tajrīd akhbār kutub al-bandasa 'alā ikhtilāf maqāṣidihā* [L'abstraction de matériaux des livres de géométrie sans distinction de leurs buts] et la *Risāla fī n-nisba* [Epître sur le rapport] d'Ibn Haydūr, deux textes qui n'ont pas encore été retrouvés.

La géométrie des coniques est également présente dans le livre d'al-Mu'taman qui lui a consacré deux chapitres. Le premier est intitulé « *Première section de la troisième espèce sur la détermination des sections <coniques> et sur leurs propriétés principales* ». Il reprend, partiellement, le contenu des Livres I–III du traité d'Apollonius. Il a fait l'objet d'une édition et d'une traduction française récente [Bouzari 2008]. Le second, qui n'a pas encore bénéficié d'une édition, est intitulé « *Seconde section de la troisième espèce sur les propriétés de lignes, des angles et des surfaces des sections <coniques> en combinaison* ». C'est un abrégé des Livres IV–VII du même traité.

Le second texte andalou existant, qui témoigne de l'étude des coniques, est un fragment d'un traité d'Ibn as-Samḥ (m. 1037) qui pourrait être celui qui a été décrit par Ṣā'id al-Andalusī comme un « *grand livre en géométrie où il a épuisé <l'étude de> ses parties relatives aux lignes droite, arquée et courbe* ». L'auteur y étudie les ellipses engendrées comme sections de cylindre. Il nous est parvenu dans une version hébraïque dont le contenu a fait l'objet d'une traduction française et d'une analyse comparative [Lévy 1996, 927–973, 1080–1083 ; Rashed 1996, 885–927] qui devraient être complétées par une édition critique.

Nous n'avons pas encore d'éléments permettant de décrire la genèse des études andalouses sur les sections coniques puisque les deux ouvrages qui viennent d'être évoqués sont, pour le moment, les plus anciens qui témoignent de cette activité. Mais des recherches antérieures concernant les contributions d'Ibn Sayyid et d'Ibn Bājja avaient montré qu'à la fin du XI^e siècle et au début du XII^e, les sections coniques étaient encore étudiées et utilisées à Valence et à Saragosse [Djebbar 1993] avec, peut-être, des prolongements à Marrakech à l'époque d'Ibn Mun'im et d'Ibn al-Bannā puisque la présence du traité d'Apollonius y est signalée [Djebbar & Aballagh 2001, 61]. Ainsi, avec les résultats des dernières recherches, nous disposons d'un ensemble d'éléments textuels ou de témoignages qui contribueront à la réalisation d'un premier bilan sur la tradition des sections coniques en Occident musulman.

Quant à la géométrie archimédienne, elle est également présente dans les écrits andalous et, dans une moindre mesure, dans certains écrits maghrébins [Djebbar 2011a]. Il y a d'abord des références aux deux seuls écrits complets d'Archimède qui avaient été traduits en arabe en Orient, c'est-à-dire le *Traité sur la sphère et le cylindre* et l'*Epître sur la mesure du cercle*. Une partie de leurs contenus est traitée dans l'*Istikmāl* d'al-Mu'taman. Mais on trouve aussi dans cet ouvrage des éléments de la tradition arabe des IX^e–X^e siècles qui sont parvenus en Andalus dans des écrits des frères Banū Mūsā et d'Ibrāhīm Ibn Sinān [Hogendijk 1991 ; 2004].

La géométrie du mesurage et du découpage

À côté de ce corpus géométrique savant, nourri par des œuvres de la tradition grecque et par de nouvelles contributions produites en Orient, on trouve, comme dans la science du calcul, un ensemble de textes qui témoignent de pratiques répondant à des besoins de la société. En effet, il ne s'agit pas de développements et de résultats théoriques mais de formules et de procédures permettant de trouver des solutions à des problèmes concrets. Pendant longtemps, ce corpus est resté en marge des préoccupations des chercheurs, malgré quelques publications qui en avaient révélé certains aspects. Pour l'Andalus, on peut citer le *Liber Embadorum*, version latine du *Chibbur ha-Meschicha we ha-Tischboreth* [La compo-

sition sur les mesures géométriques] d'Abraham Bar Ḥiyya (m. vers 1145) [Curtze 1902 ; Bar Ḥiyya 1912], suivie de sa traduction en catalan [Bar Ḥiyya 1931], l'étude concernant le *Liber mensurationum*, version latine d'une épître attribuée à un certain Abū Bakr [Busard 1968] et, enfin, l'édition d'une épître andalouse, plus tardive que la précédente, écrite par Ibn ar-Raqqām (m. 1315) et intitulée *at-Tanbīh wa t-tabṣīr fī qawānīn at-taksīr* [Rappel et éclaircissement au sujet des règles du mesurage] [al-Khaṭṭābī 1956, 39–42]. Pour le Maghreb, les années 60 du siècle dernier ont vu la publication de deux épîtres qui, comme la précédente, n'étaient pas accompagnées d'une analyse de leurs contenus. Il s'agit de la *Risāla fī l-ashkāl al-misāḥiya* [Epître sur les figures du mesurage] d'Ibn al-Bannā [al-Khaṭṭābī 1956, 43–47] et du *Sharḥ al-iksīr fī 'ilm at-taksīr* [Commentaire sur l'Elixir de la science du mesurage] d'Ibn al-Qādī (m. 1630) [al-Khaṭṭābī 1957, 77–87]. Mais ces initiatives n'ont pas eu de suite au niveau de la recherche.

Le plus ancien écrit arabe de cette catégorie produit en Andalus est la *Risāla fī t-taksīr* [Epître sur le mesurage]. Elle a été publiée au X^e siècle par Ibn 'Abdūn (m. après 970), un enseignant de mathématique qui fit carrière en médecine. Son contenu traite, essentiellement, de questions de mesure. On y trouve l'exposé des formules donnant les aires et les volumes d'un ensemble de figures planes et solides. On y trouve aussi une famille de problèmes dans lesquels il s'agit de déterminer un élément d'une figure à partir de la connaissance de certaines données. Cette partie de l'épître révèle, au niveau des procédures et de la terminologie, des similitudes avec des textes mathématiques de la tradition babylonienne. En effet, la résolution de certains problèmes suit les mêmes étapes et utilise les mêmes opérations qui sont à l'œuvre dans certaines tablettes cunéiformes, mais sans utiliser la terminologie algébriques que l'on trouvera plus tard dans le traité d'al-Khwārizmī [Djebbar 2005–2006].

A partir des résultats de tous les travaux antérieurs, l'étude de la géométrie pratique en Occident musulman, avec ses prolongements dans l'espace latin, s'est poursuivie selon deux directions. La première a été favorisée par la découverte et l'analyse de nouveaux écrits arabes, publiés au XIII^e siècle en Andalus, en particulier le *Kitāb at-taqrīb wa t-taysīr li ifādat al-mubtadi' bi šinā' at at-taksīr* [Livre qui vulgarise et facilite pour faire profiter le débutant de l'art du mesurage] d'Ibn al-Jayyāb et le *Kitāb al-qurb fī t-taksīr wa t-taqṭīf* [Livre qui facilite le mesurage et le découpage] de 'Abdallāh al-Mursī. Leurs contenus nous renseignent sur certains aspects des pratiques géométriques locales au cours des deux siècles qui ont suivi la rédaction de l'épître d'Ibn 'Abdūn. On y retrouve les thèmes du mesurage de la tradition arabe d'Orient dont le plus ancien témoin connu est le chapitre géométrique du livre d'algèbre d'al-Khwārizmī [Rashed 2007, 202–231]. Mais on y trouve aussi des spécificités locales au niveau du traitement de certaines figures (planes ou solides) et au niveau de la terminologie, spécificités que ces écrits partagent avec ceux d'Ibn 'Abdūn et d'Abū Bakr [Djebbar 2007, 120–133].

A côté de ces thèmes, il y a l'exposé des différents aspects d'un chapitre consacré au découpage des figures planes, en tenant compte de différentes contraintes, comme la manière de faire le découpage, la forme géométrique des parties que l'on doit découper, ou bien le rapport, du point de vue de l'aire, entre la partie à découper et la figure donnée. En Orient, deux traditions de découpages ont vu le jour ou, pour être plus précis, ont été redynamisées dans le cadre de préoccupations et de besoins nouveaux. La première pourrait être qualifiée de savante parce qu'elle semble avoir pour origine un ouvrage d'Euclide, aujourd'hui perdu, le *Livre sur les divisions (des figures)*. Un certain nombre d'écrits arabes appartiennent à cette tradition, en particulier l'épître intitulée *Fī l-ḥujja al-mansūba ilā Suqrāt fī l-murabba' wa quṭribī* [Sur la preuve attribuée à Socrate au sujet du carré et de sa diagonale] de Thābit Ibn Qurra et le *Kitāb fī mā yaḥtāju ilayhī aš-šāni' min a' mā l-bandasa* [Livre de ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques] d'Abū l-Wafā' (m. 997). La seconde tradition trouve son origine dans les problèmes d'arpentage qu'avaient à résoudre les fonctionnaires des administrations de l'empire musulman, et dans les problèmes de répartition des terres d'un héritage. Les problèmes et les activités de découpage qui en découlent sont attestés par la littérature juridique islamique depuis le VIII^e siècle.

Les deux livres andalous que nous avons évoqués mériteraient d'être édités parce qu'ils contiennent de précieuses informations sur différents domaines (techniques de résolution des problèmes, unités de mesure en usage à l'époque de leurs auteurs et dans différentes villes d'al-Andalus, statut des spécialistes du découpage, etc.). En attendant, l'analyse de leur contenu montre une perpétuation ou un prolon-

gement de plusieurs traditions. La première est celle de la géométrie savante du mesurage d'origine orientale, avec des références à Euclide (même si les résolutions ne sont jamais accompagnées de démonstrations). La seconde est celle de la tradition locale du découpage dont on ignore les premiers pas en Andalus mais dont la plus ancienne manifestation connue dans un manuel de cette région se trouve dans le chapitre III du *Chibbur ha-Meschicha* d'Abraham Bar Ḥiyya [Lévy 2001a].

La seconde orientation prise par les recherches sur la tradition du mesurage a concerné les écrits latins du moyen âge qui ont exposé ce thème. Certains d'entre eux sont des traductions de textes arabes ou hébraïques, réalisées à partir du XII^e siècle, comme le *Liber Embadorum* d'Abraham Bar Ḥiyya, le *Liber mensurationum* [Livre sur le mesurage] d'Abū Bakr, le *Liber Saydi Abuothmi* [Livre de Sa'īd Abū 'Uthmān], le *Liber Aderameti* [Livre de 'Abd ar-Raḥmān] [Busard 1969] et le *De superficierum divisionibus liber* [Livre sur les divisions des surfaces]. D'autres sont des écrits originaux qui s'inscrivent dans le prolongement de la double tradition mathématique, celle qui se rattache, d'une manière ou d'une autre, à l'ouvrage d'Euclide et celle qui résout des problèmes concrets à la manière des auteurs d'al-Andalus. Les plus importants ouvrages de cette catégorie sont le *Liber Philotegni* [Livre de l'ami de l'art] de Jordanus de Nemore (XIII^e s.) et le *De arte mensurandi* [L'art du mesurage] de Jean de Murs (m. ca. 1351).

Dans ce domaine, les investigations ont été menées selon trois orientations complémentaires : en premier lieu, un bilan détaillé des pratiques antérieures à l'avènement des mathématiques des pays d'Is-lam, en particulier celles des traditions mésopotamienne, grecque et romaine. En second lieu, un exposé des éléments essentiels obtenus par la recherche au sujet des pratiques de mesurage et de découpage dans l'Orient musulman puis en Andalus. Enfin, une analyse comparative du contenu des textes arabes et latins disponibles. Il se dégage de cette étude approfondie un ensemble de conclusions qui permettent de prolonger les résultats antérieurs en les explicitant ou en les affinant. De plus, ce travail est complété par l'édition et la traduction française des versions latines des quatre écrits arabes sur le mesurage que nous avons déjà évoqués [Moyon 2008 ; 2010]. Ceci ouvre la voie à de nouvelles investigations, en particulier dans la partie du corpus latin qui n'a pas encore fait l'objet d'une étude comparative.

Les mathématiques au service d'autres activités

Les recherches déjà effectuées sur les écrits produits en Occident musulman montrent qu'en dehors de quelques interventions ponctuelles, comme celle de la notion de rapport en rhétorique [Aballagh 2000b], celle du dénombrement en lexicographie [Djebbar 2003c] et celle des procédés arithmétiques dans la résolution de problèmes ludiques [Djebbar 2004 ; Bouzari 2003], les outils mathématiques sont présents, essentiellement dans quatre domaines, l'astronomie, l'astrologie, les transactions commerciales et la science des héritages.

L'astronomie et l'astrologie

Pour les deux premières disciplines, les travaux récents ont exploité un certain nombre d'écrits andalous et maghrébins, inédits pour la plupart. Parmi les thèmes traités dans les articles publiés et qui concernent l'Andalus, on peut citer, pour le XI^e siècle, les calculs d'Ibn Mu'ādh permettant de déterminer les maisons astrologiques et leurs aspects [Hogendijk 2005]. Pour le XII^e siècle, il y a le calcul de la grandeur des phases des éclipses solaires et lunaires par Jābir Ibn Aflaḥ (m. 1145) [Bellver 2008] et sa méthode des « quatre éclipses » pour déterminer la période d'anomalie de la Lune [Bellver 2006]. Pour le même siècle, deux contributions d'Ibn al-Hā'im (ca. 1205) ont fait l'objet de publications : le calcul de la longitude et de la latitude de la lune et l'étude de la théorie de la trépidation [Puig 2000 ; Comès 2001].

S'agissant du Maghreb, une première contribution a porté sur les outils mathématiques qui inter-

viennent dans l'ouvrage d'al-Ḥasan al-Murrākushī (m. après 1260), *Kitāb al-mabādi' wa l-ghāyāt fī 'ilm al-mīqāt* [Livre des principes et des buts sur la science du temps] [Assali 2000]. Mais, la richesse de cet ouvrage et ses liens avec la tradition antérieure de l'astronomie appliquée nécessitent une étude comparative du contenu de chacun de ses chapitres, comme cela s'est fait pour l'astrolabe universel [Puig 2005]. Il y a aussi les procédés arithmétiques exposés par deux astronomes maghrébins, Ibn al-Bannā et al-Jādirī (m. 1416), dans le but de résoudre des problèmes liés à la pratique religieuse (conversions entre calendriers lunaire et solaire, calcul des moments des prières et détermination de la direction de la Mecque) [Calvo 2004]. Il faut enfin signaler les études récentes sur les contributions d'Ibn 'Azzūz al-Qasaṭīnī (m. 1354), un astronome peu connu, originaire du Maghreb central. Ses *zīj*, qui ont été exhumés il y a moins de vingt-cinq ans, s'inscrivent, par leur contenu, dans le prolongement de la grande tradition andalouse des XI^e-XII^e siècles, en particulier dans le traitement mathématique de certains problèmes astrologiques [Samsó 2007 ; Casulleras 2007].

Les travaux qui viennent d'être évoqués révèlent l'intervention d'outils appartenant à plusieurs disciplines ou chapitres mathématiques : science du calcul, géométrie du plan et de la sphère, trigonométrie, méthodes d'approximation ou d'interpolation, etc. Ainsi, en plus des informations qu'ils fournissent sur la place de ces outils dans les pratiques astronomiques et astrologiques d'al-Andalus et du Maghreb, ils ouvrent la voie à de nouvelles recherches sur leur circulation, d'Orient en Occident, et sur les supports de cette circulation.

Les transactions

Dans le vaste domaine du « *calcul des transactions* », l'unique ouvrage qui nous soit parvenu et qui, comme son titre l'indique, est consacré à ce thème, est le *Liber Mahamelet* [Livre des transactions] que nous avons déjà évoqué. C'est un volumineux traité dont le contenu suggère de nouvelles voies de recherche. D'abord, une première évaluation du contenu de la tradition andalouse des IX^e-XII^e siècles, tant au niveau de la nature des problèmes résolus que des procédures utilisées pour ces résolutions. On sait en effet, que des ouvrages s'inscrivant dans cette problématique des « *mathématiques transactionnelles* » avaient été publiés, en Andalus, à la fin du X^e siècle et au début du XI^e. Les plus connus d'entre eux sont le *Kitāb al-mu'āmalāt* [Livre des transactions] d'Ibn as-Samḥ (m. 1035) et le *Kitāb al-arkān fī l-mu'āmalāt* [Livre des fondements des transactions par la voie de la démonstration] et qui ne sont connus que par les références à leurs contenus respectifs, fournis par des auteurs du XII^e siècle. En second lieu, la recherche, dans le corpus exposé, de ce qui est le résultat de la circulation des savoir-faire d'Orient vers l'Occident et de ce qui est l'expression mathématique de pratiques locales. En troisième lieu, des éléments de ce corpus pourraient aider à situer l'auteur et son apport personnel dans le cadre de la nouvelle dynamique scientifique d'expression latine.

A partir du XII^e siècle, les mathématiciens d'al-Andalus et du Maghreb prennent l'habitude d'exposer les problèmes de transaction dans des ouvrages de calcul ou d'algèbre, après la présentation des opérations arithmétiques classiques et les procédures de résolution des problèmes (règle des quatre grandeurs proportionnelles, méthode de double fausse position et procédé algébrique). Quant aux thèmes traités, une grande partie est inspirée de la vie économique au sens large (vente, achat, salaires, conversion de monnaies, estimation de l'aumône légale, calcul des gains ou des pertes après plusieurs transactions, etc.). Mais on trouve aussi des problèmes « *pseudo-concrets* » dont le rôle est d'illustrer des méthodes de résolution et d'exercer les apprenants à maîtriser ces méthodes (problèmes de rencontre, problèmes de volatiles, etc.). Comme aucun auteur ne revendique la paternité de l'un ou l'autre de ces problèmes ni les procédés de résolution, nous avons là un ensemble de matériaux (énoncés, procédures, terminologie) qui suggère une étude approfondie de leur circulation entre les foyers scientifiques de l'empire musulman [Djebbar 2001a ; 2005b].

La science des héritages

L'autre grand domaine d'intervention des outils mathématiques est constitué par toutes les pratiques liées à la répartition des héritages. De nombreux ouvrages ont été consacrés à ce sujet, depuis le VIII^e siècle, à la fois en Andalus et au Maghreb, à la suite de la première production orientale dans ce domaine. La plus grande partie d'entre eux traite des aspects juridiques de la répartition d'un héritage entre les ayants droit et des conditions qui permettent de bénéficier d'une donation de la part du défunt. L'autre partie traite essentiellement des aspects techniques de la répartition. Et ce sont, le plus souvent, des mathématiciens qui en sont les auteurs. Parmi les ouvrages de cette seconde catégorie, les plus célèbres en Occident musulman jusqu'au XIV^e siècle sont ceux d'al-Ḥūfī (m. 1192) et d'al-Qurashī. Ils se distinguent, essentiellement, par les méthodes utilisées pour résoudre les problèmes de répartition. L'ouvrage du premier est mentionné depuis longtemps dans les catalogues de certaines bibliothèques. Mais l'étude de son contenu n'a été réalisée que dernièrement [Laabid 2006]. Elle a été précédée par une autre étude sur l'un de ses commentaires par le mathématicien du Maghreb central Sa'īd al-ʿUqbānī [Zerrouki 2000]. L'ouvrage d'al-Qurashī n'a pas encore été retrouvé mais on sait que son contenu a fait l'objet d'un commentaire rédigé par l'andalou Ibn Ṣafwān (m. 1371) et intitulé *Kifāyat al-fāriḍ al-murtād fi at-tanbih ʿalā mā aghfalabū jumbūr al-furrād* [Le <livre> suffisant pour le répartiteur d'héritage satisfait sur le rappel de ce qu'ont négligé les spécialistes des héritages]. Ce dernier écrit a été retrouvé et son analyse a confirmé l'apport original d'al-Qurashī dans le calcul des parts des ayants droit [Laabid 2011].

L'analyse des textes aujourd'hui disponibles a permis de présenter, dans le détail, les différents types de problèmes que peut rencontrer un répartiteur d'héritage et les outils utilisés pour aboutir, dans chaque situation, à une répartition équitable. Pour nous limiter aux aspects techniques du sujet, on constate que deux démarches distinctes ont cohabité pendant des siècles. La première, que l'on pourrait qualifier de « traditionnelle », est purement arithmétique. Elle est basée sur la manipulation de fractions et sur la technique des tableaux. C'est la plus ancienne puisqu'elle remonte au premier siècle de l'islam. Elle s'est diffusée comme un « savoir-faire » par un apprentissage direct dans le cadre des activités quotidiennes des juristes qui se sont spécialisés dans la répartition des héritages. La seconde fait intervenir des outils mathématiques qui ont été diffusés, par les traductions ou par l'enseignement direct, à partir de la fin du VIII^e siècle. Cette diffusion a été relativement rapide puisque, au X^e siècle, certains juristes d'Orient, comme al-Ḥubūbī, les ont utilisés dans leurs manuels consacrés aux problèmes d'héritage [Laabid 2001 ; 2003]. Parmi ces techniques, on trouve la méthode de fausse position et les procédés algébriques. Les recherches récentes ont montré que l'exposé d'al-Ḥūfī utilise toutes ces procédures, confirmant ainsi leur circulation en Occident musulman. Elles montrent aussi que la méthode d'al-Qurashī s'inscrit dans la tradition arithmétique ancienne mais en la rénovant par une manipulation des fractions qui fait intervenir le « plus petit commun multiple » et qui introduit dans les calculs plus de souplesse et de rapidité. C'est d'ailleurs ce qu'affirmaient certains mathématiciens maghrébins, en particulier al-ʿUqbānī et al-Qalaṣādī [Laabid 2005]. Ces derniers ont permis à cette méthode, grâce à leur enseignement, et malgré la résistance de nombreux juristes, de se diffuser tout au long du XIV^e siècle et du XV^e, en particulier à Tlemcen et à Tunis. Nous savons qu'al-Qalaṣādī a séjourné un certain temps au Caire et qu'il y a enseigné. Mais nous ne savons pas encore s'il a fait connaître cette méthode de calcul et nous ignorons la réaction des juristes égyptiens face à cette « innovation ».

Il faut enfin signaler un autre aspect de l'activité de répartition des héritages qui s'est révélé avec l'étude relativement récente d'un certain nombre d'écrits de calcul maghrébins. Le statut élevé de cette activité dans la cité islamique et son développement quantitatif au cours des siècles semblent être la cause d'une modification interne d'un certain nombre de manuels de calcul, avec le gonflement du chapitre des fractions au détriment des autres chapitres. C'est ce que l'on observe, en particulier dans le *Kitāb al-bayān* d'al-Ḥaṣṣār [Ms. Rabat, B. N. 917 Q, 23–55], dans le *Talqīḥ al-afkār* d'Ibn al-Yāsāmīn et dans le *Fiqh al-ḥisāb* d'Ibn Munʿim [Zemouli 1993, 147–187 ; Ibn Munʿim 2006, 237–354]. La place qui y est réservée aux fractions représente, dans chacun d'eux, plus de 40% de la partie arithmétique de leurs contenus respectifs. Il est intéressant aussi de remarquer que, dans les manuels maghrébins de calcul postérieurs au XIII^e siècle, le volume du chapitre des fractions a été réduit d'une manière significative.

Il reste à savoir si cela est lié, directement ou indirectement, à l'enseignement de la méthode de calcul d'al-Qurashī.

Littérature

- Aballagh, M., 1988. *Raf' al-hijab d'Ibn al-Bannā*. Thèse de Doctorat. Université de Paris I-Pantheon-Sorbonne, Paris.
- 2000a. Introduction à l'étude de l'influence d'Ibn al-Bannā sur les mathématiques en Egypte à l'époque ottomane. En : İhsanoğlu, E., Günergun, F., Djebbar, A. (eds.), *Science, Technology and Industry in the Ottoman World*, vol. VI. Brepols, Turnhout, pp. 75–80.
- 2000b. L'application du rapport mathématique dans la science de la rhétorique chez Ibn al-Bannā al-Murrākushī. En : *Les outils de la démonstration en science*. Publications de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines, Rabat, pp. 63–80. (en arabe)
- 2000c. Quelques aspects de la théorie des nombres dans les mathématiques grecques et ses prolongements arabo-islamiques. Publications de la Faculté des Lettres et sciences humaines, Rabat, pp. 63–80. (en arabe)
- 2002. Découverte d'un nouvel ouvrage mathématique d'Ibn al-Bannā. *Da'wat al-ḥaqq* n° 363, 126–132. (en arabe)
- 2003. Introduction à la lecture des gloses de Muḥammad Bannīs sur le "Desir des étudiants sur le commentaire du 'Souhait des calculateurs' d'Ibn Ghāzī." En : El Bouazzati, B. (ed.), *La pensée scientifique dans le moyen âge tardif*. Publications de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines, Rabat, pp. 123–137. (en arabe)
- 2007. *Philosophie et histoire des mathématiques en Occident musulman*, Essai de synthèse. Thèse de Doctorat d'Etat. Université Mohamed V, Rabat. (en arabe)
- Abdeljaouad, M., 2003. *Commentaire sur le poème al-Yāsāmīniya de l'égyptien Ibn al-Hā'im*. Publications de l'A.T.S.M, Tunis.
- 2005a. The Eight Hundredth Anniversary of the Death of Ibn al-Yāsāmīn, Bilaterality as part of his thinking and practice. Actes du 8^e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Tunis, 18–20 décembre 2004). Publications de l'A.T.S.M., Tunis, pp. 1–30.
- 2005b. Le manuscrit mathématique de Jerba, une pratique des symboles algébriques maghrébins en pleine maturité. Actes du 7^e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Marrakech, 30 mai–1^e juin 2002), vol. 2. al-Wataniya, Marrakech, pp. 9–98.
- 2005c. Ibn al-Yāsāmīn's *Urjūza fī al-Jabr wa'l-muqābala*. *Llull* 28, n° 61, pp. 181–194.
- 2007. La circulation des symboles mathématiques maghrébins entre l'Occident et l'Orient musulmans. Actes du 9^e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Tipaza, 12–14 mai 2007). Imprimerie Fasciné, Alger, pp. 7–35.
- 2011. Seker-Zade (m. 1787), le témoin le plus tardif faisant un usage vivant des symboles mathématiques maghrébins inventés au 12^e siècle. Actes du 10^e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Tunis, 29–31 mai 2010). Publication de l'A.T.S.M., Tunis, pp. 7–32.
- Assali, S.-A., 2000. *Les outils mathématiques dans l'œuvre astronomique d'al-Ḥasan al-Murrākushī (XIII^e s.)*. Mémoire de Magister, E.N.S., Alger. (en arabe)
- Bar Ḥiyya, A., 1912. *Chibbur ha-Meschicha we ha-Tischboreth* (M. Guttmann, ed.). *Schriften des Vereins Mekize Nirdamin*, Berlin.
- 1931. *Llibre de geometria*, *Hibbur hameixihà uehatixbòret*, Millas, J. Vallicrosa (trad.). Editorial Alpha, Barcelone.
- Bellver, J., 2006. Jābir b. Aflaḥ on the four-eclipse method for finding the lunar period in anomaly. *Suhayl* 6, 159–248.
- 2008. Jābir Ibn Aflaḥ on lunar eclipses. *Suhayl* 8, 47–91.
- Berggren, J. L., 1985. History of mathematics in the Islamic world: The present state of the art. *Middle East Studies Association Bulletin* 19, 9–33. (See pp. 51–71 of this volume.)

- 1997. Mathematics and her sisters in medieval Islam: A selective review of work done from 1985 to 1995. *Historia Mathematica* 24, 407–440. (See pp. 72–99 of this volume.)
- 2002. Some Ancient and Medieval Approximations to Irrational Numbers and Their Transmission. En : Dold-Samplonius, Y., Dauben, J.W., Folkerts, M., van Dalen, B. (eds.), *From China to Paris, 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*. Franz Steiner, Stuttgart, pp. 31–44.
- Bouzari, A., 2003. Procédure et circulation des « nombres pensés » de l’Orient à l’Occident musulmans. Actes du Colloque « De la chine à l’Occitanie, Chemins entre arithmétique et algèbre » (Toulouse, 22-24 septembre 2000). Spiesser, M. et Guillemot, M. (eds.), C.I.H.S.O. - Université de Toulouse II, Toulouse, pp. 15–27.
- 2005. Les coniques de l’Istikmāl d’al Mu’taman (m. 1085) dans la rédaction d’Ibn Sartāq (XIV^e s.). Actes du 8^{ème} Colloque sur l’Histoire des Mathématiques Arabes (Tunis, 20–23 décembre 2004). Association Tunisienne des Sciences Mathématiques (ed.), Tunis, pp. 83–92
- 2008. La géométrie des coniques dans la tradition de l’Occident musulman à travers le Kitāb al-istikmāl [Livre de l’accomplissement] d’al-Mu’taman (m. 1085). Doctorat d’histoire des mathématiques. Université de Lille 1, Lille.
- 2009. Les coniques en Occident Musulman entre le XI^e et le XIV^e siècle. *Llull* 32, 59–72.
- Busard, H.L.L., 1968. L’algèbre au moyen âge. Le “Liber mensurationum” d’Abu Bekr. *Journal des savants*, Avril-Juin, 65–125.
- 1969. Die Vermessungstraktate ‘Liber Saydi Abuothmi’ und ‘Liber Aderameti.’ *Janus* 56, 161–174.
- Calvo, E., 2004. Two treatises on Mīqāt from the Maghrib (14th and 15th Centuries A. D.). *Suhayl* 4, 159–206.
- Casulleras, J., 2007. Ibn ‘Azzūz al-Qusantīnī’s tables for computing planetary aspects. *Suhayl* 7, 47–114.
- Colin, G.S., 1933. De l’origine grecque des ‘chiffres de Fès’ et de nos ‘chiffres arabes.’ *Journal Asiatique* 222, 193–215.
- Comes, M., 2001. Ibn al-Hā’im’s trepidation model. *Suhayl* 2, 291–408.
- Comes, R., 2002–2003. Arabic, Rūmī, Coptic or merely Greek alphanumerical notation ? The case of a mozarabic 10th Century Andalusī Manuscript. *Suhayl* 3, 157–186.
- Curtze, M., 1902, Der ‘Liber Embadorum’ des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli. *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance* 1, 1–183.
- Djebbar, A., 1984. Deux mathématiciens peu connus de l’Espagne du XI^e siècle, al-Mu’taman et Ibn Sayyid. En : Folkerts, M., Hogendijk, J.P. (eds.), *Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Busard*. GA, Amsterdam, pp. 79–91.
- 1986. Algorithmes et optimisation dans les mathématiques arabes, Premier Symposium International de l’ICOMIDC sur “Informatics and the teaching of mathematics in developing countries” (Monastir, 3–7 Février 1986). En : Amara, M., Boudriga, N., Harzallah, K. (eds.), *Actes du Symposium*. Tunis, Chap. 13.
- 1990. Mathématiques et mathématiciens du Maghreb médiéval (IX^e–XVI^e siècles) : Contribution à l’étude des activités scientifiques de l’Occident musulman. Thèse de Doctorat. Université de Nantes, Nantes.
- 1996. Quelques commentaires sur les versions arabes des Eléments d’Euclide et sur leur transmission à l’Occident musulman. En : Folkerts, M. (ed.), 1996. *Mathematische Probleme im Mittelalter, der lateinische und arabische Sprachbereich*. Harrassowitz Verlag, Wiesbaden, pp. 91–114.
- 1997. La rédaction de l’Istikmāl d’al-Mu’taman (XI^e s.) par Ibn Sartāq un mathématicien des XIII^e–XIV^e siècles. *Historia Mathematica*, n° 24, 185–192.
- 1998. Contribution à l’étude des activités mathématiques dans l’Occident musulman (IX^e–XVI^e siècles), Habilitation à diriger des recherches. Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris.
- 1999. Les livres arithmétiques des Eléments d’Euclide dans une rédaction du XI^e siècle, le Kitāb al-istikmāl d’al-Mu’taman (m. 1085). *Llull* 22, n° 45, 589–653.
- 2000a. Figurate Numbers in the Mathematical Tradition of Andalus and the Maghrib. *Suhayl* 1, 57–70.

- 2000b. Les activités mathématiques au Maghreb à l'époque ottomane (XVI^e–XIX^e siècles). En : İhsanoğlu, E., Günergun, F., Djebbar, A. (eds.), *Science, Technology and Industry in the Ottoman Word*, vol. VI. Brepols, Turnhout, pp. 49–66.
- 2001a. Les transactions dans les mathématiques arabes, classification, résolution et circulation. Actes du Colloque International « Commerce et mathématiques du Moyen âge à la Renaissance, autour de la Méditerranée » (Beaumont de Lomagne, 13-16 mai 1999). Editions du C.I.H.S.O., Toulouse, pp. 327–344.
- 2001b. L'algèbre arabe, genèse d'un art. Editions Vuibert-Adapt, Paris.
- 2002. La circulation des mathématiques entre l'Orient et l'Occident musulmans, interrogations anciennes et éléments nouveaux. En : Dold-Samplonius, Y., Dauben, J.W., Folkerts, M., van Dalen, B. (eds.), *From China to Paris, 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*. Franz Steiner, Stuttgart, pp. 213–236.
- 2003a. A Panorama of Research on the History of Mathematics in al-Andalus and the Maghrib between the Ninth and Sixteenth Century. En : Hogendijk, J.P., Sabra, A.I. (eds.), *The Enterprise of Science in Islam: New perspectives*. The MIT Press, Londres, pp. 309–350.
- 2003b. Les activités mathématiques au Maghreb à travers le témoignage d'Ibn Khaldūn, Actes des journées sur « Les sciences dans la phase de déclin » (Marrakech, 8-11 février 2001). Faculté des Lettres et Sciences Humaines, Rabat, pp. 7–22.
- 2003c. Mathématiques et société à travers un écrit maghrébin du XIV^e siècle. Actes du colloque international « De la Chine à l'Occitanie, chemins entre arithmétique et algèbre » (Toulouse, 22-24 septembre 2000). Editions du C.I.H.S.O., Toulouse, pp. 29–54.
- 2004. Du nombre pensé à la pensée du nombre : quelques aspects de la pratique arithmétique arabe et de ses prolongements en Andalus et au Maghreb. En : Alvarez, C., Dhombres, J., Pont, J.-C. (eds.), *Sciences et Techniques en Perspective*, II^e série, vol. 8, fascicule 1, pp. 303–322.
- 2005a. Les mathématiques dans le Maghreb impérial (XII^e–XIII^e s.), Actes du 7^e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Marrakech, 30 mai-2 juin 2002). al-Wataniya, Marrakech, pp. 97–132.
- 2005b. Savoirs mathématiques et pratiques métrologiques arabes. Actes du colloque « La juste mesure, quantifier, évaluer, mesurer, entre Orient et Occident (VIII^e–XVIII^e siècle) ». Moulinier, L., Sullimann, Verna, L.C., Weill-Parot, N. (eds.), Presses Universitaires de Vincenne, Paris, pp. 59–78.
- 2005–2006. L'épître sur le mesurage d'Ibn 'Abdūn, un témoin des pratiques antérieures à la tradition algébrique arabe. *Suhayl* 5, partie arabe, 7–68 ; 6, partie arabe, 81–86.
- 2006. Les traditions mathématiques d'al-Andalus et du Maghreb en Orient, l'exemple d'Ibn al-Majdi. Actes du 8^e colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Tunis, 18–20 décembre 2004). A.T.S.M., Graphimed, Tunis, pp. 155–184.
- 2007. La géométrie du mesurage et du découpage dans les mathématiques d'Al-Andalus (X^e–XIII^e s.). En : Radelet de Grave, P. (ed.), *Liber Amicorum Jean Dhombres, Réminiscences* 8. Brepols, Turnhout, pp. 113–147.
- 2011a. Pratiques géométriques et géométrie savante au Maghreb, L'exemple d'Ibn Haydñr. Actes du 9^e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Tipaza, 12–14 mai 2007). Imprimerie Fasciné, Alger, pp. 53–79.
- 2011b. La théorie des rapports entre Orient et Occident musulmans, L'exemple d'al-Mu'taman et d'Ibn Sartāq. Actes du 10^e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Tunis, 29–31 mai 2010). Publications de l'A.T.S.M., Tunis, pp. 104–152.
- Djebbar, A., Aballagh, M., 2001. *La vie et l'œuvre d'Ibn al-Bannā de Marrakech*, Rabat. Publications de la Faculté de Lettres et Sciences Humaines. Université Mohammad V, Rabat. (en arabe)
- Djebbar, A., Moyon, M., 2011. *Les sciences arabes en Afrique, Mathématiques et astronomie (IX^e au XIX^e siècle)*, suivie de *Nubdha fi 'ilm al-ḥisāb d'Aḥmad Bābir al-Arawānī*. Editions Grandvaux-Vecmas, Paris.
- Guergour, Y., 2000. Les différents systèmes de numération au Maghreb à l'époque ottomane : l'exemple des chiffres rūmī. En : İhsanoğlu, E., Günergun, F., Djebbar, A. (eds.), *Science, Technology and Industry in the Ottoman Word*, vol. VI. Brepols, Turnhout, pp. 67–74.

- 2005. Le roi de Saragosse Al-Mu'taman Ibn Hūd (m. 1085) et le théorème de Pythagore, ses sources et ses prolongements. *Llull* 28, n° 62, 415–434.
- 2006. La géométrie euclidienne chez al-Mu'taman Ibn Hūd (m. 478/1085), Contribution à l'étude de la tradition géométrique arabe en Andalus et au Maghreb. Thèse de Doctorat. Université Badji Mokhtar, Annaba.
- 2009. Le cinquième postulat des parallèles chez Al-Mu'taman Ibn Hūd, Roi de Saragosse (1081–1085). *Llull* 32, n° 69, 59–72.
- Guesdon, M.-G., 2002. La numérotation des cahiers et la foliotation dans les manuscrits arabes datés jusqu'à 1450. *Revue des Mondes Musulmans et de la Méditerranée* 99–100, 101–115.
- Harbili, A., 2005. Quelques procédés d'approximation dans les écrits mathématiques maghrébins des XII^e–XIV^e siècles, vol. 1. Actes du 7^e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Marrakech, 30 mai–1^e juin 2002). E.N.S., Marrakech, pp. 157–200.
- 2006. Le Takhliṣ d'al-Ghurbī, un commentaire inédit du Talkhīṣ d'Ibn al-Bannā. Actes du 8^e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Tunis, 18–20 décembre 2004). Publications de l'A.T.S.M., Tunis, pp. 199–216.
- 2011a. Les procédés d'approximation dans les ouvrages mathématiques de l'Occident Musulman. *Llull* 34, n° 73, 39–60.
- 2011b. Les procédés d'approximation dans les écrits mathématiques du Maghreb et d'al-Andalus (X^e–XV^e siècles), contribution à l'étude de la tradition mathématique de l'Occident musulman. Thèse de doctorat. Université Badji Mokhtar, Annaba.
- Hogendijk, J.P., 1991. The geometrical parts of the Istikmal of Yusuf al-Mu'taman ibn Hud (11th century). An analytical table of contents. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 41, 207–281.
- 2004. The lost geometrical parts of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century) in the redaction of Ibn Sartāq (14th century): An Analytical Table of Contents. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 53, 19–34.
- 2005. Applied mathematics in Eleventh Century al-Andalus, Ibn Mu'adh al-Jayyānī and his computation of astrological houses and aspects. *Centaurus* 47, 87–114.
- Ibn Mun'im, 2006. *Fiqh al-ḥisāb* [La science du calcul] (Lamrabet, D. Ed.). Dar al Amane, Rabat.
- al-Khaṭṭābī, M.L., 1956. Deux épîtres sur la science du mesurage d'Ibn ar-Raqqām et Ibn al-Bannā. *Da'wat al-ḥaqq* n° 256, 39–47. (en arabe)
- 1957. Commentaire de l'Elixir sur la science du mesurage. *Da'wat al-ḥaqq* n° 258, 77–87. (en arabe)
- King, D.A., 1980. The exact sciences in medieval Islam, some remarks on the present state of research. *Middle East Studies Association Bulletin* 4, 10–26.
- Kunitzsch, P., 2002–2003. A new manuscript of Abū Bakr al-Ḥaṣṣār's *Kitāb al-bayān*. *Suhayl* 3, 187–192.
- Laabid, E., 2001. Le partage proportionnel dans la tradition mathématique maghrébine. Actes du Colloque International « Commerce et mathématiques du Moyen âge à la Renaissance, autour de la Méditerranée » (Beaumont de Lomagne, 13–16 mai 1999). Editions du C.I.H.S.O., Toulouse, pp. 315–326.
- 2003. Procédés arithmétiques pouvant remplacer l'algèbre, exemples de la tradition des héritages au Maghreb médiéval. Actes du colloque international « De la Chine à l'Occitanie, chemins entre arithmétique et algèbre » (Toulouse, 22–24 septembre 2000). Editions du C.I.H.S.O., Toulouse, pp. 111–134.
- 2005. Les problèmes d'héritage et de mathématiques au Maghreb des XII^e–XIV^e siècles, essai de synthèse, vol 1. Actes du 7^e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Marrakech, 30 mai–2 juin 2002). al-Wataniya, Marrakech, pp. 241–261.
- 2006. Les techniques mathématiques dans la résolution des problèmes de partages successoraux dans le Maghreb médiéval à travers le Mukhtaṣar d'al-Hūfī (m. 1192), sources et prolongements. Thèse de Doctorat d'Etat d'histoire des mathématiques. Université de Rabat, Faculté des Sciences de l'Education, Rabat.

- 2007. Ibn Khaldūn et le ʿilm al-farāʿīd. Actes de la Table ronde sur « Les structures intellectuelles en occident musulman à l'époque d'Ibn Khaldūn » (Rabat, 23–26 février 2006). Publications de la Faculté des Lettres et des Sciences Humaines. Rabat ; Série « Colloques et Séminaires » n° 140, 15–26.
- 2011. La contribution d'al-Qurashī dans la science des héritages, Entre Ibn Ṣafwān al-Mālaqī (m. 773/1361) et Saʿīd al-ʿUqbānī at-Tilimsānī (m. 811/1408). Actes du 2^e Séminaire sur l'Histoire des Sciences (Alger, Université Bab Ezzouar, 7–9 juin 2011). A paraître.
- Labarta, A., Barceló, C., 1988. Números y cifras en los documentos arábigo-hispanos. Gráficas Canuda, Barcelone.
- Lamrabet, D., 1981. Les mathématiques maghrébines au moyen âge, Traduction de manuscrits inédits, Motivations pédagogiques de leur étude actuelle, Mémoire de Post-Graduation en didactique des mathématiques. Université Libre de Bruxelles, Bruxelles.
- 2000. Un mathématicien maghrébin méconnu, Ibn Haydūr at-Tādīlī. Publications de la Faculté des Lettres et des Sciences Humaines. Rabat ; Série « Colloques et Séminaires » n° 83, 121–129.
- 2001. Ibn Rashīq (XIII^e siècle) et la classification des sciences mathématiques. Publications de la Faculté des Lettres et des Sciences Humaines. Rabat ; Série « Colloques et Séminaires » n° 94, 43–56.
- 2003. Aperçu sur les systèmes de numération en usage au Maghreb du XVII^e siècle. Publications de la Faculté des Lettres et des Sciences Humaines. Rabat ; Série « Colloques et Séminaires », n° 104, 23–37.
- 2007. Ecrits mathématiques en circulation au Maghreb à l'époque d'Ibn Khaldūn (732–808H/1332–1406). Publications de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines. Rabat, Série « Colloques et Séminaires » n° 140, 27–57.
- 2008. Notes diverses sur l'enseignement des mathématiques au Maroc sous les Almohades (542–668h/1147–1269) et les Mérinides (668–870h/1269–1465). Publications de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines. Rabat, Série « Colloques et Séminaires » n° 150, 19–48.
- Lévy, T., 1996. Fragment d'Ibn al-Samḥ sur le cylindre et ses sections planes, conservé dans une version hébraïque. In : Rashed, R., Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle, vol. 1, Fondateurs et commentateurs. Al-Furqān, Londres, pp. 927–973 and 1080–1083.
- 2000. Abraham ibn Ezra et les mathématiques. Remarques bibliographiques et historiques. En : Tomson, P.J. (ed.), Abraham ibn Ezra, savant universel. Bruxelles, pp. 61–75.
- 2001a. Les débuts de la littérature mathématique hébraïque, la géométrie d'Abrahām bar Ḥiyya (XI^e–XII^e s.). *Micrologus IX*, pp. 35–64.
- 2001b. Hebrew and Latin Versions of an Unknown Mathematical Text by Ibn Ezra, *Aleph*, vol. 1. pp. 295–305.
- 2002. De l'arabe à l'hébreu, la constitution de la littérature mathématique hébraïque (XII^e–XVI^e siècle). En : Dold-Samplonius, Y., Dauben, J.W., Folkerts, M., van Dalen, B. (eds.), *From China to Paris, 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*. Franz Steiner, Stuttgart, pp. 307–326.
- 2003. L'algèbre arabe dans les textes hébraïques (I). Un ouvrage inédit d'Isaac ben Salomon al-Ahdab (XIV^e siècle). *Arabic sciences and philosophy* 13–1, 269–301.
- 2004. Maïmonide et les sciences mathématiques. En : Lévy, T., Rashed, R. (eds.), *Maïmonide philosophe et savant (1138–1204)*. Peeters, Louvain, pp. 219–252.
- 2005. Le manuscrit hébreu Munich 36 et ses marginalia : un témoin de l'histoire textuelle des *Eléments d'Euclide* au Moyen âge. En : Jacquart, D., Burnett, C. (eds.), *Scientia in margine. Etudes sur les marginalia dans les manuscrits scientifiques du Moyen Age à la Renaissance*. Droz, Genève, pp. 103–116.
- Marin, M., 2004. The making of a mathematician, al-Qalaṣādī and his *Riḥla*. *Suhayl* 4, 295–310.
- Moyon, M., 2007. La tradition algébrique arabe du traité d'al-Khwārizmī au Moyen âge latin et la place de la géométrie. En : Barbin, E., Bénard, D. (eds.), *Histoire et Enseignement des mathématiques : rigneurs, erreurs, raisonnements*. I.N.R.P., Lyon, pp. 289–318.

- 2008. La géométrie pratique en Europe en relation avec la tradition arabe, l'exemple de mesurage et du découpage, Contribution à l'étude des mathématiques médiévales. Thèse de doctorat en épistémologie et histoire des sciences. Université des Sciences et des Technologies, Lille.
- 2010. Le *De Superficierum Divisionibus Liber* d'al-Baghdādī et ses prolongements en Europe. Actes du 9^e colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Alger, 12–14 mai 2007). Imprimerie Fasciné, Alger, pp. 159–201.
- 2011. Algèbre & *Practica geometriae* en Occident médiéval latin : Abū Bakr, Fibonacci et Jean de Murs. En : Rommevaux, S., Spiesser, M., Massa Estève, M.-R. (eds.), *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance*. Editions Champion, Paris.
- Muṣliḥ, A., 2006. La parure des étudiants et le souhait des calculateurs sur l'explication des difficultés du *Raf^c al-ḥijāb* d'Ibn Haydūr at-Tādilī. Thèse de Doctorat en philosophie. Université Mohammed V, Faculté des Lettres et Sciences Humaines, Rabat. (en arabe)
- Naghsh, I., 2007. L'approfondissement dans le commentaire sur le *Talkhīṣ* d'Ibn Haydūr at-Tādilī. Thèse de Doctorat en philosophie. Université Mohamed V, Faculté des Lettres et Sciences Humaines, Rabat. (en arabe)
- Puig, R., 2000. The theory of the moon in the *Al-Zij al-Kāmil fī t-ta^cālīm* of Ibn al-Hā'im (ca. 1205), *Suhayl* 1, 71–99.
- 2005. La *saphea* (ṣafiḥa) d'al-Zarqālī dans le *Kitāb Jāmi^c al-mabādī' wa l-ghāyāt fī 'ilm al-mīqāt* d'Abū l-Ḥasan al-Marrākushī. Actes du 7^e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes (Marrakech, 30 mai–1^e juin 2002). Ecole Normale Supérieure, Marrakech, pp. 271–280.
- al-Qalaṣādī, 1999. *Sharḥ Talkhīṣ a^cmāl al-ḥisāb* [Commentaire sur l'Abrégé des opérations du calcul], F. Bentaleb (ed.). *Dār al-Gharb al-islāmī*, Beyrouth.
- Rommevaux, S., Djebbar, A., Vitrac, B., 2001. Remarques sur l'histoire du texte des *Eléments* d'Euclide. *Archives for the History of Sciences* 55, 221–295.
- Rashed, R., 1996. Les mathématiques infinitésimales du IX^e au XI^e siècle, vol. 1, Fondateurs et commentateurs. *Al-Furqān*, Londres.
- 2007. *Al-Khwārizmī, le commencement de l'algèbre*, Blanchard, Paris.
- Rosenfeld, B.A., 2004. A supplement to *Mathematicians, Astronomers and Other Scholars of Islamic Civilization and their Works* (7th–19th c.). *Suhayl* 4, 87–139.
- 2006. A second supplement to *Mathematicians, Astronomers and Other Scholars of Islamic Civilization and their Works* (7th–19th c.). *Suhayl* 6, 9–79.
- Rosenfeld, B.A., Matvievskaia, G., 1983. *Matematiki i astronomi musulmanskogo srednevekovya i ikh trudi* (VII–XVII vv). Nauk, Moscou.
- Rosenfeld, B.A., İhsanoğlu, E., 2003. *Mathematicians, Astronomers and other Scholars of Islamic Civilization and their Works* (7th–19th c.). IRCICA, Istanbul.
- Samsó, J., 2007. *Andalusian Astronomy in 14th Century Fez, Al-Zij al-Muwāfiq* of Ibn 'Azzūz al-Qusanṭīnī, n^o IX. *Variorum*, Aldershot.
- Sesiano, J., 1988. *Le Liber Mahameleth, un traité mathématique latin composé au XII^e siècle en Espagne*. Premier Colloque Maghrébin d'Histoire des Mathématiques Arabes (Alger, 1–3 décembre 1986). En : Actes du Colloque. Maison du Livre, Alger, pp. 69–98.
- 2004. *Les carrés magiques dans les pays islamiques*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne.
- 'Uthmānī, 'A., 1999. La philosophie des mathématiques chez Ibn al-Bannā al-Murrākushī et ses commentateurs maghrébins, Diplôme d'Etudes Approfondies en Philosophie. Université Mohammed V, Faculté de Philosophie, de Sciences sociales et de Psychologie, Rabat. (en arabe)
- Vlasschaert, A.-M., 2010. *Le Liber mahameleth, édition critique et commentaires*. Franz Steiner, Stuttgart.
- Wartenberg, I., 2007 *The Epistle of the Number by Isaac ben Solomon ben al-Aḥḍab* (Sicily, 14th century), *An Episode of Hebrew Algebra*. Thèse de Doctorat de philosophie. Université Paris VII, Paris.
- Woepcke, F., 1854. Notice sur des notations algébriques employées par les Arabes. *Journal Asiatique* 5^e série 4, 348–384.

- Zemouli, T., 1993. Les écrits mathématiques d'Ibn al-Yāsamin (m. 1204), Mémoire de Magister. E.N.S., Alger. (en arabe)
- Zerrouki, M., 2000. Mathématiques et héritages à travers le commentaire par al-^cUqbānī du Mukhtaṣar d'al-Ḥūfī, Mémoire de Magister. E.N.S., Alger.