

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C. I. M. E.)

Giorgio Sestini

"PRINCIPI DI MASSIMO PER LE SOLUZIONI DI EQUAZIONI
PARABOLICHE"

Corso tenuto a Varenna (Como) dal 19 al 27 settembre
1966

PRINCIPI DI MASSIMO PER LE SOLUZIONI DI EQUAZIONI
PARABOLICHE

di

Giorgio Sestini
(Università-Firenze)

Introduzione.

Questo seminario ha l'unico scopo di richiamare l'attenzione sull'importanza dei così detti "principi di massimo" nella risoluzione di problemi al contorno per l'equazioni paraboliche , ad es. della diffusione, qualunque sia la questione fisica che ha condotto a quel problema e il tipo di grandezza caratteristica del processo considerato.

E' ben noto che, dopo aver superato le notevoli difficoltà di tradurre in equazioni un problema fisico , troppo spesso anche a spese del suo stesso significato fisico, si presenta la questione della risoluzione del problema matematico cui si è giunti. Questa risoluzione, specialmente se si tratta di problema non lineare, si rivela spesso così difficile da preferire una valutazione approssimata della soluzione, in modo da potere controllare, attraverso al confronto con dati sperimentali, fino a che punto il problema matematico resti aderente al problema fisico considerato.

In ogni caso, almeno in un primo tempo, si cerca di assicurare l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema analitico in esame, seguendo di regola una via che permette anche l'istituzione di un algoritmo costruttivo della ricercata soluzione, appartenente ad una fissata classe di funzioni. Due metodi assai usati sono quello delle approssimazioni successive, generalmente applicato dopo aver trasformato il problema da differenziale in integrale o integro-differenziale, oppure quello proprio dell'analisi funzionale che conduce a considerare una conveniente trasformazione di un opportuno spazio funzionale in sé, alla quale si possa applicare il teorema del punto unito.

In tali metodi, sia per dimostrare la convergenza del processo iterativo, sia per assicurare l'esistenza del punto unito per la trasformazione

G. Sestini

funzionale individuata, è di fondamentale interesse il conoscere "a priori" valutazioni approssimate della ricercata soluzione.

I principi di massimo danno un fondamentale aiuto a questo ordine di problemi. Di rilevante interesse è poi il loro impiego nella dimostrazione di teoremi di unicità.

Sulla scorta degli studiati problemi di tipo ellittico e, in particolare delle proprietà di massimo delle funzioni armoniche, molti studi sono stati fatti per giungere a stabilire anche per le soluzioni di equazioni di tipo parabolico analoghi teoremi, atti a caratterizzare le proprietà di speciali classi di soluzioni di problemi al contorno di questo tipo.

Conviene subito osservare che se anche tali classi di soluzioni possono sembrare assai ristrette dal punto di vista analitico, esse tuttavia sono del tutto soddisfacenti a descrivere vaste categorie di fenomeni fisici del tipo di quello classico della diffusione del calore.

I primi risultati ottenuti riguardavano, come è ben naturale, le soluzioni di particolari problemi lineari. Successivamente sono state rilevate analoghe proprietà anche per classi più generali di soluzioni di problemi parabolici anche quasi lineari. Per i problemi al contorno non lineari, a quanto ne so, moltissimo resta ancora da fare. In ciò sta il carattere di "seminario" di questa lezione.

Per una sistematica, ampia e moderna trattazione delle equazioni paraboliche, accompagnata da una ricca bibliografia, è molto utile ed interessante la lettura del recente libro di A. FRIEDMAN [1] ⁽¹⁾.

I "principi di massimo".

Seguendo L. NIRENBERG [2], i "principi di massimo" si distinguono in "deboli" e in "forti".

⁽¹⁾ I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta alla termine della relazione.

G. Sestini

I principi deboli affermano che la soluzione di un problema parabolico, in un conveniente dominio e appartenente ad una certa classe di funzioni, ha i suoi massimi sul contorno del campo di definizione.

Quelli forti affermano che se una soluzione di un problema parabolico, in un certo dominio e appartenente ad una certa classe, ha un massimo interno al campo di definizione, essa è costante.

E' evidente che questo secondo tipo include i principi deboli come immediata conseguenza.

E' quasi superfluo accennare che principi analoghi valgono per i minimi. In generale le dimostrazioni di tali principi vengono date nel caso di due variabili, ed io, nell'esporre alcuni, mi atterrò alla regola, essendo immediatamente estendibili ad equazioni paraboliche in un numero qualsivoglia di variabili. Del resto dal punto di vista fisico-matematico le equazioni in due variabili coprono una vasta classe di problemi non stazionari (quando una delle due variabili sia il tempo) nei quali la dipendenza dal posto della grandezza caratteristica ricercata è affidata ad una sola variabile, cosa che si verifica tutte le volte che si ha a che fare con campi dotati di simmetria (problemi piani, cilindrici o sferici), nei quali la coordinata spaziale può interpretarsi come distanza del generico punto, in cui si cerca il valore della grandezza ad un certo istante, da un piano o da una retta o da un punto.

Il "principio di massimo" di M. GEVREY (1913)

M. GEVREY [3], che con E. E. LEVI [4] può considerarsi il fondatore dello studio sistematico dei problemi di tipo parabolico, ha stabilito che, assegnata l'equazione parabolica lineare:

$$(1) \quad Z_{xx} + a(x, y) Z_x + b(x, y) Z_y + c(x, y) Z = 0, \quad Z_a = \frac{\partial Z}{\partial a},$$

G. Sestini

con $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ funzioni continue di x ed y in una regione finita R del piano x, y , ogni soluzione regolare di (1) (cioè continua con le derivate che compaiono in (1)), non può avere in R né massimi positivi né minimi negativi, quando sia $c < 0$.

Infatti le necessarie condizioni per l'esistenza ad es. di un massimo positivo in un punto $P_0 \equiv (x_0, y_0) \in R$:

$$Z_{x_0, x_0} < 0, \quad (Z_x)_{x_0, y_0} = (Z_y)_{x_0, y_0} = 0, \quad c Z < 0,$$

rendono insoddisfatta la (1).

Nel caso in cui sia $b < 0$ (che è il caso dell'equazione della diffusione), qualunque sia il segno di c (se è $c \geq 0$ basta operare in (1) il cambiamento di funzione incognita $Z = U \exp ky$ e scegliere la costante in modo che risulti $kb + c < 0$) resta facilmente provato che per ogni campo R' interno ad un contorno regolare γ (nel senso di essere continuo, semplice e tale da formare con una caratteristica che lo incontri uno o più contorni privi di punti doppi) il valore assunto da Z in un punto $P \in R'$ risulta compreso tra il massimo positivo e il minimo negativo dei valori che la Z assume sulla parte di γ al di sotto della caratteristica per P .

Da questa proprietà discende subito, nelle condizioni specificate, il teorema di unicità per la soluzione di (1) con assegnate condizioni al contorno.

Il "principio di massimo" di M. PICONE (1929).

Un altro principio debole si deve a M. PICONE [5]. Si consideri l'equazione di tipo parabolico:

$$(2) \quad E(Z) = \sum_{h, k} a_{hk}(P) Z_{x_h x_k} + \sum_h b_h(P) Z_{x_h} - z_t + c(P) = f(P),$$

G. Sestini

con $\sum_{hk} a_{hk} \lambda_h \lambda_k$ forma quadratica definita positiva, per λ_i reali, essendo $a_{hk} = a_{kh}$ funzioni continue di $P \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n, t) \in R$, dove R è un qualunque dominio limitato e connesso di uno spazio euclideo E_{n+1} ad $n+1$ dimensioni.

Si indichi con FR la frontiera di R e con $F_{-t}R$ la parte di FR , se esiste, per i cui punti esiste la normale interna ad R avente verso opposto a quello dell'asse della variabile t e tale che un intorno circolare, convenientemente piccolo, di un suo punto P appartiene a $F_{-t}R$ (un dominio sferico non ha evidentemente $F_{-t}R$; un dominio parallelepipedo, con gli spigoli laterali paralleli all'asse della variabile t , ha come $F_{-t}R$ la base superiore). Nell'ipotesi che anche b_h, c, f siano funzioni continue di $P \in R$ e $Z(P)$ soluzione regolare (nel solito senso) di (2), si ha il seguente teorema; se $f(P) \leq 0$ (≥ 0) ed è $Z(P) \geq 0$ (≤ 0) per $P \in FR - F_{-t}R$, allora è $Z(P) \geq 0$ (≤ 0) per $P \in R$.

Discendono immediatamente, come corollari del teorema, la unicità della soluzione di (2), nelle ipotesi dichiarate, che prende assegnati valori su $FR - F_{-t}R$ e, nel caso dell'equazione omogenea ($f=0$), se $c \leq 0$ il seguente principio di massimo debole: nelle ipotesi dichiarate, ogni soluzione regolare di $E(Z) = 0$ raggiunge il massimo dei valori del suo modulo su $FR - F_{-t}R$.

Il criterio di massimo viene poi esteso al caso di campi illimitati, facendo alcune ipotesi sul campo e sul comportamento della ricercata soluzione per $P \rightarrow \infty$.

L'elegante dimostrazione del teorema si basa essenzialmente su di un Lemma di algebra (teor. di Moutard) che ci limitiamo a ricordare:

Siano $\sum_{hk} a_{hk} \lambda_h \lambda_k$, $\sum_{ij} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j$ due forme quadratiche definite o semidefinite (positive o negative). La somma

$$\sum_{hk} a_{hk} \alpha_{hk}$$

G. Sestini

è non negativa o non positiva secondo che le due forme, se non son nulle, hanno lo stesso segno o segno opposto.

Il "principio forte di massimo" di L. NIRENBERG (1953) [2] .

Sia $Z(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_m)$ una funzione di $n+m$ variabili in un dominio D ad $n+m$ dimensioni e consideriamo l'operatore differenziale :

$$(3) \quad L(Z) = \sum_{hk} a_{hk} Z_{x_h x_h} + \sum_{ij} \alpha_{ij} Z_{t_i t_j} + \sum_h b_h Z_{x_h} + \sum_i \beta_i Z_{t_i},$$

ellittico nelle variabili x_h e parabolico nelle variabili t_i , cioè tale che la forma quadratica $\sum_{hk} a_{hk} \lambda_h \lambda_k$ è definita positiva, mentre la forma quadratica $\sum_{ij} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j$ è soltanto semidefinita positiva per λ_h e ξ_i reali.

Supposti i coefficienti $a_{hk}, \alpha_{ij}, b_h, \beta_i$ funzioni continue di $P \in D$ e $Z(P) \in C^2$, si ha il seguente teorema : Se Z è tale che risulti $L(Z) \geq 0$ e in un punto $P_0 \in T$ la Z raggiunge il suo valore massimo, allora è $Z(P) = Z(P_0)$ in tutta la parte di iperpiano $t_i = \text{costante}$, passante per P_0 e appartenente a T .

Accenneremo alle linee della dimostrazione nel caso di due variabili e cioè per l'operatore :

$$L'(Z) = A Z_{xx} + B Z_{tt} + aZ_x + bZ_t, \quad A > 0, \quad B \geq 0.$$

Si dimostra da prima che, se in $P_0(x_0, t_0) \in T$ la Z assume il suo valore massimo M , allora è ancora $Z = M$ in ogni punto della caratteristica $t = t_0$, appartenente a T .

Questo teorema è una quasi immediata conseguenza del seguente Lemma: se Z assume il valore massimo in punto P' della circonferenza di

G. Sestini

un cerchio appartenente a T, l'ascissa x' di P' coincide con quella del centro del cerchio.

La proprietà vale anche per un contorno ellittico, avente gli assi paralleli agli assi x e t.

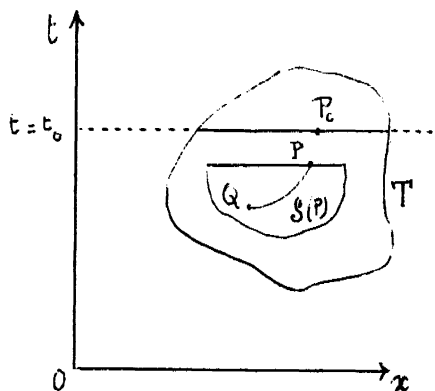
Ci riferiremo ora al caso $B=0$ e $b = -1$, cioè al caso che interessa i problemi di diffusione. Quanto ora ricordato implica che se in T è :

$$(4) \quad L''(Z) = A Z_{xx} + a Z_x - Z_t \geq 0$$

e in $P_0 \in T$ la $Z(P_0)$ raggiunge il suo valore massimo, allora si ha $Z(P) = Z(P_0)$, per ogni P appartenente alla caratteristica $t = t_0$ passante per P_0 e appartenente a T.

Premesso questo si indichi, per ogni $P \in T$, con $S(P)$ l'insieme

dei punti $Q \in T$, che possono essere collegati con P mediante curve semplici, appartenenti a T, sulle quali, nel senso da Q a P, la t è non decrescente. Ebbene se per $P_0 \in T$ è $Z(P_0)$ massima, allora si ha $Z(P) = Z(P_0)$ per $P \in S(P_0)$; in questa affermazione, valida naturalmente anche per l'operatore $L(Z)$ definito in (3), sta il principio forte di massimo. Ne segue in particolare che la soluzione



regolare della equazione $L''(Z) = 0$ può raggiungere i suoi valori massimi (o minimi) sul contorno del campo di definizione e da ciò la possibilità di limitazioni "a priori" della cercata soluzione per un particolare problema al contorno associato all'equazione $L''(Z) = 0$ o ad altra più generale dei tipi considerati ($L(Z) = 0$, $L'(Z) = 0$).

G. Sestini

Generalizzazione di T. KUSANO (1953).

Di questo molto importante "principio forte di massimo" si hanno generalizzazioni di A. FRIEDMAN [6] e di T. KUSANO [7]. Accennere-
mo soltanto a quella di KUSANO, perchè riguarda una equazione quasili-
neare e cioè del tipo:

$$(5) \quad \sum_{hk} a_{hk} (P, t, Z, \text{grad } Z) Z_{x_h x_k} - Z_t = f(P, t, Z, \text{grad } Z),$$

con a_{hk} ed f funzioni definite in un dominio $D' \equiv [(P, t) \in D, |Z| < \infty, \|\text{grad } Z\| < \infty]$ e limitate in ciascun sottoinsieme compatto di D' .

Il principio forte di massimo per la (5), la cui dimostrazione ricalca pas-
so a passo quella del criterio di NIREMBERG, è il seguente:

se esiste una funzione semicontinua, positiva $H(P, t, Z, \text{grad } Z)$

tale che:

$$\sum_{hk} a_{hk} \lambda_h \lambda_k \geq H \|\lambda\|^2, \text{ per ogni } \lambda_h \text{ reale}$$

e $Q(P, t, Z, \text{grad } Z) \in D'$; se inoltre la $f(P, t, Z, \text{grad } Z)$ è lipschitziana
rispetto a Z e $\text{grad } Z$ e si ha $f(P, t, Z, 0) \geq 0$ per $Z \geq 0$, allora, se in un
punto $P_0 \in D$ la $Z(P_0)$ è massima, si ha $Z(P) = Z(P_0)$ per $P \in S(P_0)$,
essendo $S(P)$ l'insieme appartenente a D , già definito.

Conclusione.

Questa una rapida e molto sommaria scorsa sui cosiddetti "princi-
pi di massimo" per le equazioni di tipo parabolico e un rapidissimo cen-
no sul loro utile impiego nella risoluzione di problemi al contorno origi-
nati da questioni fisico-matematiche, ad es. del tipo di quelle che hanno
formato oggetto di studio in questo Corso. Il fatto che tra il principio di
GEVREY e quello di KUSANO intercorrano cinquanta anni giusti, avvalora
l'importanza e l'attualità della questione, e, a mio avviso, giustifica l'aver-

G. Sestini

ne fatto oggetto di un seminario.

BIBLIOGRAFIA .

1. A. FRIEDMAN, Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall Inc. , Englewood Cliffs N.J. 1964 .
2. L. NIRENBERG , A strong maximum principle for parabolic equations , Comm. Pure Appl. Math. 6, 167-177 (1953).
3. M. GEVREY , Equations aux dérivées partielles du type parabolique, J. Math. Pures Appl. , (6) 9, 306 - 471 , 1913 .
4. E. E. LEVI , Sull'equazione del calore, Ann. Mat. Pura Appl. (3), 14, 187-264 , 1907 .
5. M. PICONE , Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera , conduttore, isotropo omogeneo, Math. Ann. 101, 701-712 , 1929.
6. A. FRIEDMAN. Remarks on the maximum principle for parabolic equations and its applications, Pacific J. Math. 8, 201-211, 1958.
7. T. KUSANO, On the maximum principle for quasi-linear parabolic equations, Proc . Japan Acad., 39, 211-216 , 1963.

