DI UN PRINCIPIO CONTROVERSO

DELLA MECCANICA ANALITICA DI LAGRANGE

E DELLE MOLTEPLICI SUE APPLICAZIONI

MEMORIA POSTUMA

DI GABRIO PIOLA

PUBBLICATA PER CURA DEL PROF. FRANCESCO BRIOSCHI

MILANO

DALLA TIPOGRAFIA DI GIUSEPPE BERNARDONI DI GIOVANNI

1856

ON A DEBATED PRINCIPLE

OF LAGRANGE'S ANALYTICAL MECHANICS

AND ON ITS MULTIPLE APPLICATIONS

POSTHUMOUS MEMOIR

BY GABRIO PIOLA

EDITED BY PROF. FRANCESCO BRIOSCHI

MILANO

TYPOGRAPHY OF GIUSEPPE BERNARDONI DI GIOVANNI

1856

Estratta dal volume VI delle Memorie dell'I.R. Istituto di scienze, lettere ed arti in Milano

Extractred from volume VI of the Memoir of the I.R. Institute[1] *of Science, letters and arts in Milan*

[1]The exact reference is the following: Piola, G., Di un principio controverso della Meccanica analitica di Lagrange e delle molteplici sue applicazioni - Memoria postuma di Gabrio Piola - (pubblicata per cura del prof. Francesco Brioschi), Memorie dell'I.R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti, 6, pp. 389-496, (1856).

DI UN PRINCIPIO CONTROVERSO

DELLA MECCANICA ANALITICA DI LAGRANGE

E DELLE MOLTEPLICI SUE APPLICAZIONI (*)

I principj ed i metodi generali esposti dal sommo Lagrange nella Meccanica Analitica vennero in molta parte abbandonati dai geometri che dopo di lui trattarono questioni di Matematica applicata. L'essere alcuni di quei principj, o non dimostrati, o dimostrati incompletamente, pare sia la cagione principale di quell'abbandono, e ne abbiamo quasi una prova nel vedere adoperate tuttora le formole date da Lagrange nella Sezione IV della seconda parte, le quali, appunto perché rigorosamente dimostrate, non vennero lasciate in disparte anche dopo i lavori di Hamilton e di Jacobi sullo stesso argomento. Fra questi principj il più importante per le applicazioni è certamente quello indicato dall'autore nella Sezione II, ed esposto con maggior chiarezza nella Sezione IV della prima parte della M. A., intorno al modo di introdurre l'effetto delle forze interne nella equazione generale per l'equilibrio e pel moto, e che il difetto di dimostrazione rese quasi sterile pei successori di Lagrange.

Il chiarissimo matematico nob. dott. Gabrio Piola, autore di altri noti lavori sulla Meccanica Analitica, ebbe per iscopo nella Memoria, la quale faccio pubblica per incarico

(*)Per l'intelligenza della seguente Memoria suppongo che il lettore abbia sott'occhio quella inserita nella Parte prima del Tomo XXIV degli Atti della Società Italiana residente in Modena. Intendo che la presente ne sia come una continuazione: epperò occorrendomi di farne frequenti citazioni, ne indicherò i numeri degli articoli, e quelli delle formole sotto ciascun articolo coll'aggiunta delle lettere *m. p.*, abbreviazione di *Memoria precedente.* Senza tale aggiunta i numeri citati si riferiscono all'attuale.

F. dell'Isola et al. (eds.), *The complete works of Gabrio Piola: Volume I*,
Advanced Structured Materials 38, DOI: 10.1007/978-3-319-00263-7_2,

ON A DEBATED PRINCIPLE

OF LAGRANGE'S ANALYTICAL MECHANICS

AND ON ITS MULTIPLE APPLICATIONS(*)

Translated by Francesco dell'Isola[a], Ugo Andreaus[a], Antonio Cazzani[b], Umberto Perego[c], Luca Placidi[c], Giuseppe Ruta[a] and Daria Scerrato[d]

[a]Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica, Università di Roma La Sapienza, Via Eudossiana 18, 00184, Roma, Italy

[b]Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale e Architettura, Università degli studi di Cagliari, Via Marengo, 2, 09123, Cagliari, Italy

[c]Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci, 32, 20133, Milano, Italy

[c]International Telematic University Uninettuno, C.so Vittorio Emanuele II, 39, 00186, Rome, Italy

[d]International Center MeMOCS "Mathematics and Mechanics of Complex System", Università degli studi dell'Aquila, Palazzo Caetani, Via San Pasquale snc, Cisterna di Latina, Italy

The general principles and methods exposed by the great Lagrange in the Analytical Mechanics have been largely abandoned by the geometers who have dealt with questions of Applied mathematics after him. The main reason for this abandon seems in being some of these principles either not proved, or incompletely proved, and we almost have a proof of this in seeing the formulæ given by Lagrange in Section IV of the second part still adopted, which, right because rigorously proved, were not left apart even after the works by Hamilton and Jacobi on the same subject. Among these principles the most important is for sure that pointed out by the author in Section II, and exposed with better clarity in Section IV of the first part of the A. M., on the way to introduce the effect of inner forces in the general equation for equilibrium and motion, whose lack of proof made it almost unfruitful for Lagrange's successors.

The most famous mathematician, noble man doctor Gabrio Piola, author of other known works on Analytical Mechanics, in this Memoir had the aim , that I render public according to a task given to me,

(*) In order to understand the following Memoir I assume the reader to have under sight the one published in the first Part of Tome XXIV of the Atti della Società Italiana with seat in Modena. I intend the present one as being its continuation: thus, since I need to make frequent quotations from it, I will indicate the number of the articles, and those of the formulæ in each article by adding the letters *p. m.*, shortening for *preceding Memoir*. Without that remark the quoted numbers refer to the present one.

affidatomi, di stabilire sopra più salde basi il principio Lagrangiano, e di offrire i mezzi onde farne uso nelle applicazioni. Il titolo di questa Memoria, alcune frasi sparse qua e là nella medesima, varie note trovate fra i suoi scritti, e la confidenza fatta a me e ad altri suoi conoscenti dell'aver già sperimentata l'utilità di questo principio, ed in generale dei metodi della Meccanica Analitica nelle quistioni fisico-matematiche, mostrano all'evidenza a quale importante meta fossero diretti ultimamente i suoi studj. La sua immatura morte lasciò il desiderio di tanta opera agli ammiratori della Meccanica Analitica.

Ho detto al cominciare del Capo IV della Memoria precedente, che per trattare del moto o dell'equilibrio di fili o superficie estensibili e contrattili, ovvero di fluidi elastici, Lagrange adottò un principio assai generale, nel quale però rimaneva alcun che di oscuro e di non dimostrato. Feci vedere che si potevano evitare le difficoltà derivanti dall'uso di un tal principio tenendo l'andamento tracciato nello stesso Capo IV, ed anche un altro del quale esposi l'analisi nel Capo VI: dopo di che ebbi a dire che quantunque fosse ora possibile spiegare il vero senso dell'anzidetto principio lagrangiano, la cosa non appariva forse di tanta utilità, come quando le altre vie per procedere alla soluzione degli stessi problemi non erano ancora state indicate. Per altro non può negarsi (e il seguito di questa Memoria lo farà vedere) che anche attualmente riesce molto vantaggiosa la restituzione del principio lagrangiano, cui qui si allude, quando esso sia ben definito nel suo uso: gli andamenti del calcolo si rendono più semplici, potendosi far di meno di ricorrere alle derivate parziali per le coordinate intermedie p, q, r, introdotte nel Capo IV, e tale semplicità giova assai più nelle complicate quistioni, di cui ci avremo in appresso ad occupare: le teoriche poi del Capo VII, relativamente ai sistemi lineari e superficiali coll'uso del mentovato principio, acquistano un compimento che può fruttare conseguenze di gran rilievo. Quindi io penso che il meglio che possa farsi presentemente sia di far concorrere le dottrine di quei Capi IV e VI alla chiara spiegazione del principio Lagrangiano, in virtù del quale, quando sia stabilito con sicurezza, le applicazioni vengono in folla, e procedono con una franchezza veramente ammirabile. Mi è cara questa occasione per rendere nuovo omaggio alla memoria del grande Geometra, di cui ho preso ad illustrare e commentare i metodi analitici, mostrando, per quanto è da me, la profonda sapienza che contengono: l'apologia che intraprendo di un principio messo in disparte o contrariato (salvo pochissime eccezioni) dai geometri successori di Lagrange, riesce tanto più toccante, in quanto ci fa vedere che gl'ingegni di to establish the Lagrangean principle on more solid bases, and to provide the means to use it in the applications. The title of this Memoir, some sentences spread here and there in it, various notes found in his writings, and the communication made to me, and to other acquaintances of his, to have already experienced the usefulness of this principle, and in general of the methods of Analytical Mechanics in physical-mathematical questions, put into evidence to what important goal were his studies recently directed. His unexpected death left the desire of such masterpiece in the admirers of Analytical Mechanics.

At the beginning of Capo IV of the preceding Memoir I said that, in order to deal with motion or equilibrium of extensible and contractable strings or surfaces, as well as of elastic fluids, Lagrange adopted a quite general principle, in which however something remained obscure and not proved. I showed that the difficulties deriving from the use of that principle could be avoided by keeping the line drawn in the same Capo IV, and also another, the analysis of which I exposed in Capo VI: after which I had to say that, even if it was now [, at the time when I said,] possible to explain the true sense of the above quoted Lagrangean principle, perhaps the matter did not appear so useful as it did at the time when the other ways to proceed to the solution of the same problems were not yet indicated. Moreover, it cannot be denied (and the following of this Memoir will show it) that also nowadays the institution of the Lagrangean principle, to which we refer here, emerges as particularly advantageous, when it is well defined in its use: the calculation procedures are made simpler, because it is possible to do without resorting of partial derivatives with respect to the intermediate coordinates $p, q, r,$ introduced in Capo IV, and such simplicity helps a lot more in the complicated questions which we will take care of in the following: the theories of Capo VII, relative to linear and superficial systems, by the use of the mentioned principle gain a completeness that may bring fruitful consequences of great relevance. Thus, I think that the best to do now is to make the doctrines of those Capos IV and VI to concur with the clear explanation of the Lagrangean principle, by virtue of which, when it is established with certainty, the applications flock, and proceed with really remarkable straightforwardness. This occasion is precious to me to render a new homage to the memory of the great Geometer, of whom I began to show and comment the analytical methods, showing, as far as it depends on me, the deep knowledge they contain: the apology I undertake of a principle put apart or opposed (but for very few exceptions) by the geometers who succeeded Lagrange, emerges as much moving, in that it makes us see that the brains quella tempra, anche quando gettano semi di teoriche rimaste imperfette, precorrono col pensiero ai tempi, e scrivono per un'altra generazione.

A giustificare l'apparente contraddizione delle mie parole intorno a quel principio, dicendolo io imperfetto e contenente alcun che di oscuro e di non dimostrato, e nello stesso tempo proclamandolo vero, grandioso e preziosissimo per le applicazioni, conviene richiamarlo quale fu esposto dall'autore all'art. 9 della Sezione II e all'art. 6 della Sezione IV (M. A., tom. 1.^{o}, pag. 37, 78). Supposta l'esistenza di forze interne fra i varii punti fisici di un sistema, non è difficile riconoscere alcune funzioni (come espressioni di distanze, di angoli, ec.), i valori delle quali vengono alterati dall'attuale esercizio di quelle forze; or bene, l'autore vuole che moltiplichiamo per coefficienti indeterminati le variate di tali funzioni, e ne introduciamo i prodotti nell'equazione generale della Meccanica Analitica, precisamente come avremmo fatto, secondo il metodo noto, se quelle funzioni avessero costituito i primi membri di equazioni di condizione ridotte a zero. Qui si capisce subito la vastità e l'eccellenza del principio: ma nello stesso tempo si sente il bisogno di una dimostrazione che ce ne persuada la realtà: e questa anche ammessa, ne troviamo tuttavia mancante l'esposizione. Infatti molte possono essere contemporaneamente le espressioni di quantità che le forze interne di un sistema tendono a far variare: quali di esse prenderemo, quali ommetteremo? Chi ci assicura che adoperando parecchie di tali funzioni soggette a mutamenti per l'azione delle forze interne, non facciamo ripetizioni inutili, esprimendo per mezzo di alcune un effetto già scritto con altre? E non potrebbe invece accadere che ommettessimo di quelle necessarie ad introdursi affinché l'effetto complessivo delle forze interne venga espresso totalmente? Ben è vero che da varii passi della M. A. si arriva ad intendere come le funzioni da adoperarsi nei casi più generali siano poi le medesime che rimangono costanti in altri casi più ristretti, quando cioè trattasi di corpi rigidi, di fili inestensibili, di fluidi incompressibili: però anche questa è una proprietà di tali funzioni intraveduta ma non dimostrata. Insomma, a bene stabilire l'uso del principio in discorso, due cose ancora ci mancano: primieramente una dimostrazione che riesca persuadente, poscia un criterio per discernere *quali* e *quante* debbano essere le funzioni da mettersi in giuoco a fine di esprimere completamente l'azione delle forze interne dei sistemi. Parmi che di presente si possa supplire a queste due mancanze; ed ecco il primario oggetto della seguente Memoria, nella quale in appresso incomincio ad esporre una qualche parte delle innumerabili conseguenze che dipendono dal principio discusso.

of such temper, even when they throw seeds of theories left imperfect, are ahead of their times with the thought, and [brains of such temper] write for another generation.

To justify the apparent contradiction of my words about that principle, in that I say it imperfect and containing something obscure and not proved, and in the same time claiming it true, magnificent and most precious for the applications, it is convenient to recall it as it was exposed by the author in art. 9 of Section II, and in art. 6 of Section IV (A. M., tome 1st, pages 37, 78). Once posed the existence of inner forces among the various physical points of a system, it is not difficult to recognize some functions (like those expressing distances, angles, and so on), the values of which are altered by the actual exercise of those forces; well, the author wants us to multiply the variations of those functions by indeterminate coefficients, and to introduce the products in the general equation of Analytical Mechanics, precisely as we would have done, according to the known method, if those functions were the left-hand sides of condition equations reduced to zero. Here we understand at once the amplitude and the excellence of the principle: but at the same time we feel the need of a proof that persuades us of its truth: and even though we suppose this, however we still find the exposition lacking. Indeed, there may be at the same time many expressions of quantities that the inner forces of a system tend to vary: which of them shall we take, which shall we omit? Who assures us that, by using many of these functions subjected to changes by the action of inner forces, we do not make useless repetitions, in expressing by means of some an effect already written by others? And cannot it happen instead that we omit some of these necessary to be introduced so that the total effect of inner forces be wholly expressed? It is well true that we come to infer by some passages of the A. M. that the functions to be adopted in the more general cases are then the same which remain constant in other more particular cases, i.e., when we deal with rigid bodies, inextensible strings, incompressible fluids: yet this also is a glimpsed, but not proved, property of such functions. To sum up, to a good establishment of the principle under discussion, we still miss two things: firstly, a proof resulting persuasive, afterwards a criterion to distinguish *which* and *how many* should be the functions to put into play with the aim of wholly describing the action of the inner forces of systems. It seems to me that presently we can compensate these two lacks; and here is the primary subject of the following Memoir, in which afterwards I start to expose some part of the innumerable consequences that depend on the discussed principle.

CAPO I.

Dichiarazione del principio: come per esso vengano a stabilirsi le equazioni più generali, pel moto e per l'equilibrio dei sistemi continui a tre dimensioni.

1. La proposizione che serve di fondamento alla dimostrazione del principio si estende a tutte le tre sorte di sistemi continui (siano essi con tre dimensioni, o superficiali, o lineari), cioè a tutti gli ammassi di molecole assoggettati alla legge di continuità dichiarata al n. 23 m. p. Se chiamansi x, y, z le coordinate del punto generico, le rispettive variazioni δx, δy, δz (quali vengono adoperate giusta il metodo lagrangiano nelle equazioni generali del moto e dell'equilibrio) possono, senza nuocere alla generalità, essere ritenute quelle somministrateci dagli aumenti piccolissimi $i\delta x$, $i\delta y$, $i\delta z$ che prenderebbero le coordinate x, y, z quando il sistema si riferisse a tre altri assi rettangolari lontani assai poco, tanto per l'origine quanto per le tre direzioni, da quelli primieramente assunti dalle x, y, z, come se questi si fossero di pochissimo smossi. Il considerare nascenti in tal maniera i valori delle variazioni δx, δy, δz, oltrecchè diventa, come si disse, il mezzo per arrivare alle desiderate conclusioni, riduce altresì semplicissimo un concetto altrimenti misterioso.

La ragione recondita di questo vero risulta pei sistemi a tre dimensioni dall'insieme delle dottrine esposte nel Capo IV m. p., il che passiamo a provare. Vedemmo colà che immaginando riferito il sistema ad altri tre assi rettangolari delle p, q, r mediante le equazioni

$$\begin{aligned} x &= f + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\ y &= g + \alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r \\ z &= k + \alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3 r \end{aligned} \tag{1}$$

l'espressione dell'equazione generalissima del moto di un sistema qualunque, che non si sapeva qual fosse prendendo gl'integrali relativamente alle variabili a, b, c dello stato precedente ideale, diventava possibile prendendo i suddetti integrali relativamente alle p, q, r. E ciò perché si videro risultare 6 equazioni di condizione sussistenti per tutti i punti del sistema (le (14) del n. 47 m. p.), le quali raccoglievano, sebbene in maniera non apparente, la espressione degli effetti delle forze interne, ed erano quelle per cui si potevano intendere fissati e determinati i valori delle variazioni δx, δy, δz. Le variate di quelle equazioni di condizione, facendo per brevità

$$l = \delta x; \quad m = \delta y; \quad n = \delta z \tag{2}$$

CAPO I.

Statement of the principle: how, according to it, the more general equations for the motion and the equilibrium of three-dimensional continuous systems are established.

1. The proposition that serves as a foundation of the proof of the principle extends to all three sorts of continuous systems (be they with three dimensions, or superficial, or linear), i.e., to all the clusters of molecules subjected to the law of continuity declared at sect. 23 p. m. If we call x, y, z the coordinates of the generic point, the pertaining variations δx, δy, δz (in the way they are used according to the lagrangean method in the general equations of motion and equilibrium) can, without endangering generality, be considered those provided by the very little increments $i\delta x$, $i\delta y$, $i\delta z$ that would take the coordinates x, y, z when the system is referred to three other rectangular axes very little far apart, both for the origin and for the three directions, from those primarily assumed by the x, y, z, like those had moved by a very little quantity. Considering the values of the variations δx, δy, δz originated in this way, besides being, as already said, the means to come to the desired conclusions, also renders an otherwise mysterious concept quite simple.

The hidden reason of this truth emerges, for three-dimensional systems, by the whole of the doctrines exposed in Capo IV p. m., which we pass to prove. We saw there that if we imagine the system referred to other three rectangular axes p, q, r by means of the equations

$$
\begin{aligned}
x &= f + \alpha_1 p + \beta_1 q + \gamma_1 r \\
y &= g + \alpha_2 p + \beta_2 q + \gamma_2 r \\
z &= k + \alpha_3 p + \beta_3 q + \gamma_3 r
\end{aligned}
\tag{1}
$$

the expression of the most general equation of the motion of any system, which we did not know what was when we took integrals with respect to the variables a, b, c of the precedent ideal state, became possible by taking the above said integrals with respect to the p, q, r. And that because we saw 6 equations of condition holding for all the points of the system (the (14) of sect. 47 p. m.), which collected, even though in a non evident manner, the expression of the effects of inner forces, and were those for which we could think the values of the variations δx, δy, δz fixed and determined. The variations of those condition equations, letting for brevity

$$
l = \delta x; \quad m = \delta y; \quad n = \delta z \tag{2}
$$

sono le seguenti

$$
(3)\qquad
\begin{gathered}
\frac{dx}{dp}\frac{dl}{dp}+\frac{dy}{dp}\frac{dm}{dp}+\frac{dz}{dp}\frac{dn}{dp}=0\\
\frac{dx}{dq}\frac{dl}{dq}+\frac{dy}{dq}\frac{dm}{dq}+\frac{dz}{dq}\frac{dn}{dq}=0\\
\frac{dx}{dr}\frac{dl}{dr}+\frac{dy}{dr}\frac{dm}{dr}+\frac{dz}{dr}\frac{dn}{dr}=0\\
\frac{dx}{dp}\frac{dl}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{dm}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dn}{dq}+\frac{dx}{dq}\frac{dl}{dp}+\frac{dy}{dq}\frac{dm}{dp}+\frac{dz}{dq}\frac{dn}{dp}=0\\
\frac{dx}{dp}\frac{dl}{dr}+\frac{dy}{dp}\frac{dm}{dr}+\frac{dz}{dp}\frac{dn}{dr}+\frac{dx}{dr}\frac{dl}{dp}+\frac{dy}{dr}\frac{dm}{dp}+\frac{dz}{dr}\frac{dn}{dp}=0\\
\frac{dx}{dq}\frac{dl}{dr}+\frac{dy}{dq}\frac{dm}{dr}+\frac{dz}{dq}\frac{dn}{dr}+\frac{dx}{dr}\frac{dl}{dq}+\frac{dy}{dr}\frac{dm}{dq}+\frac{dz}{dr}\frac{dn}{dq}=0\quad .
\end{gathered}
$$

I primi membri di queste variate moltiplicati per coefficienti indeterminati furono introdotti nell'equazione meccanica generalissima (vedi la quantità (15) del n. 47 m. p.) e ci fornirono l'analisi per la soluzione del problema inteso nel più ampio significato.

Ora, al fine di provare la nostra proposizione relativamente ai sistemi di tre dimensioni, convien dimostrare che i valori delle tre variazioni δx, δy, δz, ovvero l, m, n, quali si ricavano dalle precedenti equazioni (3), sono quei medesimi che possono altronde aversi pel semplice spostamento degli assi; il calcolo è un po' lungo, ma val la pena di effettuarlo.

2. Le l, m, n, che sono funzioni delle p, q, r, possono (in virtù di quelle equazioni che sono le inverse delle (1), cioè delle (31) n. 40 m. p.) riguardarsi ridotte funzioni delle x, y, z, vale a dire funzioni delle p, q, r in quanto lo sono prima delle x, y, z: allora avremo

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dl}{dp}&=\frac{dl}{dx}\frac{dx}{dp}+\frac{dl}{dy}\frac{dy}{dp}+\frac{dl}{dz}\frac{dz}{dp}\\
\frac{dl}{dq}&=\frac{dl}{dx}\frac{dx}{dq}+\frac{dl}{dy}\frac{dy}{dq}+\frac{dl}{dz}\frac{dz}{dq}\\
\frac{dl}{dr}&=\frac{dl}{dx}\frac{dx}{dr}+\frac{dl}{dy}\frac{dy}{dr}+\frac{dl}{dz}\frac{dz}{dr}
\end{aligned}
$$

poi altre tre equazioni affatto simili ove si vedranno equali ad espressioni trinomiali i valori delle derivate $\frac{dm}{dp}$, $\frac{dm}{dq}$, $\frac{dm}{dr}$; ed altre tre pei valori delle derivate $\frac{dn}{dp}$, $\frac{dn}{dq}$, $\frac{dn}{dr}$.

Sostituiscansi questi nove valori trinomiali nelle precedenti equazioni (3), e facendo per abbreviare

$$
(5)\qquad
\begin{gathered}
(a)=\frac{dl}{dx}\ ;\quad (b)=\frac{dm}{dy}\ ;\quad (c)=\frac{dn}{dz}\\
(d)=\frac{dm}{dx}+\frac{dl}{dy}\ ;\quad (e)=\frac{dn}{dx}+\frac{dl}{dz}\ ;\quad (f)=\frac{dn}{dy}+\frac{dm}{dz}
\end{gathered}
$$

are the following

$$
(3)\qquad
\begin{gathered}
\frac{dx}{dp}\frac{dl}{dp}+\frac{dy}{dp}\frac{dm}{dp}+\frac{dz}{dp}\frac{dn}{dp}=0\\
\frac{dx}{dq}\frac{dl}{dq}+\frac{dy}{dq}\frac{dm}{dq}+\frac{dz}{dq}\frac{dn}{dq}=0\\
\frac{dx}{dr}\frac{dl}{dr}+\frac{dy}{dr}\frac{dm}{dr}+\frac{dz}{dr}\frac{dn}{dr}=0\\
\frac{dx}{dp}\frac{dl}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{dm}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dn}{dq}+\frac{dx}{dq}\frac{dl}{dp}+\frac{dy}{dq}\frac{dm}{dp}+\frac{dz}{dq}\frac{dn}{dp}=0\\
\frac{dx}{dp}\frac{dl}{dr}+\frac{dy}{dp}\frac{dm}{dr}+\frac{dz}{dp}\frac{dn}{dr}+\frac{dx}{dr}\frac{dl}{dp}+\frac{dy}{dr}\frac{dm}{dp}+\frac{dz}{dr}\frac{dn}{dp}=0\\
\frac{dx}{dq}\frac{dl}{dr}+\frac{dy}{dq}\frac{dm}{dr}+\frac{dz}{dq}\frac{dn}{dr}+\frac{dx}{dr}\frac{dl}{dq}+\frac{dy}{dr}\frac{dm}{dq}+\frac{dz}{dr}\frac{dn}{dq}=0\quad .
\end{gathered}
$$

The left-hand sides of these varied equations, multiplied by indeterminate coefficients, were introduced in the most general mechanical equation (see the quantity (15) of sect. 47 p. m.) and furnished us the analysis for the solution of the problem in its widest meaning.

Now, with the aim of proving our proposition about three-dimensional systems, it is useful to prove that the values of the three variations δx, δy, δz, i.e., l, m, n, as obtained by the preceding equations (3), are the same as those that can be obtained by the simple shift of the axes; the calculation is a bit long, but it is worth performing it.

2. The l, m, n, which are functions of the p, q, r, may (by virtue of those equations that are inverse of (1), i.e., (31) sect. 40 p. m.) be seen as reduced functions of the x, y, z, namely, functions of the p, q, r in that they are first functions of the x, y, z: we will then have

$$
(4)\qquad
\begin{gathered}
\frac{dl}{dp}=\frac{dl}{dx}\frac{dx}{dp}+\frac{dl}{dy}\frac{dy}{dp}+\frac{dl}{dz}\frac{dz}{dp}\\
\frac{dl}{dq}=\frac{dl}{dx}\frac{dx}{dq}+\frac{dl}{dy}\frac{dy}{dq}+\frac{dl}{dz}\frac{dz}{dq}\\
\frac{dl}{dr}=\frac{dl}{dx}\frac{dx}{dr}+\frac{dl}{dy}\frac{dy}{dr}+\frac{dl}{dz}\frac{dz}{dr}
\end{gathered}
$$

then three other similar equations, where one will see the values of the derivatives $\frac{dm}{dp}, \frac{dm}{dq}, \frac{dm}{dr}$ equal to trinomial expressions; and other three for the values of the derivatives $\frac{dn}{dp}, \frac{dn}{dq}, \frac{dn}{dr}$.

Let us substitute these nine trinomial values into the preceding equations (3), and let us pose, in order to shorten,

$$
(5)\qquad
\begin{gathered}
(a)=\frac{dl}{dx}\ ;\quad (b)=\frac{dm}{dy}\ ;\quad (c)=\frac{dn}{dz}\\
(d)=\frac{dm}{dx}+\frac{dl}{dy}\ ;\quad (e)=\frac{dn}{dx}+\frac{dl}{dz}\ ;\quad (f)=\frac{dn}{dy}+\frac{dm}{dz}
\end{gathered}
$$

si troverà che da quelle sei equazioni, dopo riduzioni ovvie, si passa alle sei che seguono

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&(a)\left(\frac{dx}{dp}\right)^2+(d)\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dp}+(e)\frac{dx}{dp}\frac{dz}{dp}+(b)\left(\frac{dy}{dp}\right)^2+(f)\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dp}+(c)\left(\frac{dz}{dp}\right)^2=0\\
&(a)\left(\frac{dx}{dq}\right)^2+(d)\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dq}+(e)\frac{dx}{dq}\frac{dz}{dq}+(b)\left(\frac{dy}{dq}\right)^2+(f)\frac{dy}{dq}\frac{dz}{dq}+(c)\left(\frac{dz}{dq}\right)^2=0\\
&(a)\left(\frac{dx}{dr}\right)^2+(d)\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dr}+(e)\frac{dx}{dr}\frac{dz}{dr}+(b)\left(\frac{dy}{dr}\right)^2+(f)\frac{dy}{dr}\frac{dz}{dr}+(c)\left(\frac{dz}{dr}\right)^2=0\\
&2(a)\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq}+(d)\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{dx}{dq}\right)+(e)\left(\frac{dx}{dp}\frac{dz}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dx}{dq}\right)\\
&\qquad+2(b)\frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq}+(f)\left(\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dy}{dq}\right)+2(c)\frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq}=0\\
&2(a)\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dr}+(d)\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}+\frac{dy}{dp}\frac{dx}{dr}\right)+(e)\left(\frac{dx}{dp}\frac{dz}{dr}+\frac{dz}{dp}\frac{dx}{dr}\right)\\
&\qquad+2(b)\frac{dy}{dp}\frac{dy}{dr}+(f)\left(\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dr}+\frac{dz}{dp}\frac{dy}{dr}\right)+2(c)\frac{dz}{dp}\frac{dz}{dr}=0\\
&2(a)\frac{dx}{dq}\frac{dx}{dr}+(d)\left(\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr}+\frac{dy}{dq}\frac{dx}{dr}\right)+(e)\left(\frac{dx}{dq}\frac{dz}{dr}+\frac{dz}{dq}\frac{dx}{dr}\right)\\
&\qquad+2(b)\frac{dy}{dq}\frac{dy}{dr}+(f)\left(\frac{dy}{dq}\frac{dz}{dr}+\frac{dz}{dq}\frac{dy}{dr}\right)+2(c)\frac{dz}{dq}\frac{dz}{dr}=0\ .
\end{aligned}
$$

Da queste si possono ricavare i valori delle sei quantità (a), (b), (c), (d), (e), (f), e si trovano tutti zero. L'andamento per giungere ad una così fatta conclusione è prolisso e nojoso se si conduce per la via ordinaria della risoluzione delle sei equazioni fra le sei incognite: invece si ottiene l'intento più speditamente mediante il seguente artificio.

Si moltiplichino le equazioni (6), esclusa la prima, rispettivamente per le quantità

$$\alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha,\ \beta,\ \alpha\beta$$

essendo α,β due arbitrarie, poi si sommino: l'unica equazione risultante dalla somma può scriversi

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&(a)\left(\frac{dx}{dp}+\alpha\frac{dx}{dq}+\beta\frac{dx}{dr}\right)^2+(d)\left(\frac{dx}{dp}+\alpha\frac{dx}{dq}+\beta\frac{dx}{dr}\right)\left(\frac{dy}{dp}+\alpha\frac{dy}{dq}+\beta\frac{dy}{dr}\right)\\
&+(b)\left(\frac{dy}{dp}+\alpha\frac{dy}{dq}+\beta\frac{dy}{dr}\right)^2+(e)\left(\frac{dx}{dp}+\alpha\frac{dx}{dq}+\beta\frac{dx}{dr}\right)\left(\frac{dz}{dp}+\alpha\frac{dz}{dq}+\beta\frac{dz}{dr}\right)\quad=0\\
&+(c)\left(\frac{dz}{dp}+\alpha\frac{dz}{dq}+\beta\frac{dz}{dr}\right)^2+(f)\left(\frac{dy}{dp}+\alpha\frac{dy}{dq}+\beta\frac{dy}{dr}\right)\left(\frac{dz}{dp}+\alpha\frac{dz}{dq}+\beta\frac{dz}{dr}\right)\ .
\end{aligned}
$$

Ora s'immaginino determinate le due arbitrarie α,β in modo da verificare le due equazioni

$$
(8)\qquad \frac{dy}{dp}+\alpha\frac{dy}{dq}+\beta\frac{dy}{dr}=0\ ;\qquad \frac{dz}{dp}+\alpha\frac{dz}{dq}+\beta\frac{dz}{dr}=0\ ;
$$

from those six equations, after obvious reductions, we will find we get the following six

$$(a)\left(\frac{dx}{dp}\right)^2+(d)\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dp}+(e)\frac{dx}{dp}\frac{dz}{dp}+(b)\left(\frac{dy}{dp}\right)^2+(f)\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dp}+(c)\left(\frac{dz}{dp}\right)^2=0$$

$$(a)\left(\frac{dx}{dq}\right)^2+(d)\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dq}+(e)\frac{dx}{dq}\frac{dz}{dq}+(b)\left(\frac{dy}{dq}\right)^2+(f)\frac{dy}{dq}\frac{dz}{dq}+(c)\left(\frac{dz}{dq}\right)^2=0$$

$$(a)\left(\frac{dx}{dr}\right)^2+(d)\frac{dx}{dr}\frac{dy}{dr}+(e)\frac{dx}{dr}\frac{dz}{dr}+(b)\left(\frac{dy}{dr}\right)^2+(f)\frac{dy}{dr}\frac{dz}{dr}+(c)\left(\frac{dz}{dr}\right)^2=0$$

(6)

$$2(a)\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dq}+(d)\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dq}+\frac{dy}{dp}\frac{dx}{dq}\right)+(e)\left(\frac{dx}{dp}\frac{dz}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dx}{dq}\right)$$
$$+2(b)\frac{dy}{dp}\frac{dy}{dq}+(f)\left(\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dq}+\frac{dz}{dp}\frac{dy}{dq}\right)+2(c)\frac{dz}{dp}\frac{dz}{dq}=0$$

$$2(a)\frac{dx}{dp}\frac{dx}{dr}+(d)\left(\frac{dx}{dp}\frac{dy}{dr}+\frac{dy}{dp}\frac{dx}{dr}\right)+(e)\left(\frac{dx}{dp}\frac{dz}{dr}+\frac{dz}{dp}\frac{dx}{dr}\right)$$
$$+2(b)\frac{dy}{dp}\frac{dy}{dr}+(f)\left(\frac{dy}{dp}\frac{dz}{dr}+\frac{dz}{dp}\frac{dy}{dr}\right)+2(c)\frac{dz}{dp}\frac{dz}{dr}=0$$

$$2(a)\frac{dx}{dq}\frac{dx}{dr}+(d)\left(\frac{dx}{dq}\frac{dy}{dr}+\frac{dy}{dq}\frac{dx}{dr}\right)+(e)\left(\frac{dx}{dq}\frac{dz}{dr}+\frac{dz}{dq}\frac{dx}{dr}\right)$$
$$+2(b)\frac{dy}{dq}\frac{dy}{dr}+(f)\left(\frac{dy}{dq}\frac{dz}{dr}+\frac{dz}{dq}\frac{dy}{dr}\right)+2(c)\frac{dz}{dq}\frac{dz}{dr}=0\ .$$

From these we may obtain the values of the six quantities (a), (b), (c), (d), (e), (f), all found to be zero. The line to reach such a conclusion is verbose and boring if it is lead through the ordinary path of the resolution of six equations in six unknowns: we get the same result more quickly by means of the following trick.

Let us multiply the equations (6), except for the first, by the quantities

$$\alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha,\ \beta,\ \alpha\beta$$

respectively, α, β being two arbitrary quantities, then let us sum them: the only resulting equations of the sum may be written

$$\begin{aligned}
&(a)\left(\frac{dx}{dp}+\alpha\frac{dx}{dq}+\beta\frac{dx}{dr}\right)^2+(d)\left(\frac{dx}{dp}+\alpha\frac{dx}{dq}+\beta\frac{dx}{dr}\right)\left(\frac{dy}{dp}+\alpha\frac{dy}{dq}+\beta\frac{dy}{dr}\right)\\
&+(b)\left(\frac{dy}{dp}+\alpha\frac{dy}{dq}+\beta\frac{dy}{dr}\right)^2+(e)\left(\frac{dx}{dp}+\alpha\frac{dx}{dq}+\beta\frac{dx}{dr}\right)\left(\frac{dz}{dp}+\alpha\frac{dz}{dq}+\beta\frac{dz}{dr}\right)\quad=0\\
&+(c)\left(\frac{dz}{dp}+\alpha\frac{dz}{dq}+\beta\frac{dz}{dr}\right)^2+(f)\left(\frac{dy}{dp}+\alpha\frac{dy}{dq}+\beta\frac{dy}{dr}\right)\left(\frac{dz}{dp}+\alpha\frac{dz}{dq}+\beta\frac{dz}{dr}\right)\ .
\end{aligned}\tag{7}$$

Now let us imagine the two arbitrary parameters α, β determined so to verify the two equations

$$\frac{dy}{dp}+\alpha\frac{dy}{dq}+\beta\frac{dy}{dr}=0\ ;\qquad \frac{dz}{dp}+\alpha\frac{dz}{dq}+\beta\frac{dz}{dr}=0\ ;\tag{8}$$

tutti i termini della precedente (7) spariranno, a riserva del primo dove la quantità (a) è moltiplicata per un quadrato. Questo secondo fattore non può essere zero: se lo fosse, sostituiti per α, β i valori dedotti dalle (8), risulterebbe zero quel sestinomio che al n. 46 m. p. provammo eguale all'unità; è dunque forza che sia $(a) = 0$. Con un tutto simile ragionamento, supponendo che le arbitrarie α, β ricevano i loro valori dalle due equazioni

$$\frac{dx}{dp} + \alpha\frac{dx}{dq} + \beta\frac{dx}{dr} = 0 \ ; \qquad \frac{dz}{dp} + \alpha\frac{dz}{dq} + \beta\frac{dz}{dr} = 0$$

si prova zero la quantità (b): ed anche la (c), quando facciansi le α, β tali da soddisfare alle due equazioni

$$\frac{dx}{dp} + \alpha\frac{dx}{dq} + \beta\frac{dx}{dr} = 0 \ ; \qquad \frac{dy}{dp} + \alpha\frac{dy}{dq} + \beta\frac{dy}{dr} = 0 \ .$$

Convinti così che sono zero le quantità (a), (b), (c) cancelleremo i termini che le contengono dalla equazione (7). Allora supponendo sussistere una sola delle equazioni (8), per esempio la seconda, ci ridurremo al solo termine che contiene la (d). In esso non può essere zero la quantità che moltiplica (d), perché una delle due indeterminate α, β vi rimane ancora arbitraria: sarà pertanto zero la (d), e con analogo ragionamento proveremo la stessa cosa delle (e), (f). Richiamate adesso le denominazioni (5), rimangono dimostrate le sei equazioni

$$\begin{gathered}\frac{dl}{dx} = 0 \ ; \quad \frac{dm}{dy} = 0 \ ; \quad \frac{dn}{dz} = 0 \\ \frac{dm}{dx} + \frac{dl}{dy} = 0 \ ; \quad \frac{dn}{dx} + \frac{dl}{dz} = 0 \ ; \quad \frac{dn}{dy} + \frac{dm}{dz} = 0 \ .\end{gathered} \tag{9}$$

3. Trattiamole come segue. Derivando per y la quarta, e per z la quinta, otteniamo

$$\frac{d^2m}{dx\,dy} + \frac{d^2l}{dy^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2n}{dx\,dz} + \frac{d^2l}{dz^2} = 0 \ ,$$

ma la seconda e la terza derivate per x ci danno

$$\frac{d^2m}{dx\,dy} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2n}{dx\,dz} = 0 \ ;$$

dunque abbiamo la simultanea sussistenza delle tre

$$\frac{dl}{dx} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2l}{dy^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2l}{dz^2} = 0 \ . \tag{10}$$

all the terms of the preceding (7) will vanish except the first, where the quantity (a) is multiplied by a square. This second factor cannot be zero: if it were so, once replaced for α, β the values deduced by the (8), that sextinomial that we proved equal to unit in the sect. 46 p. m. would turn to be zero; it is then forced that $(a) = 0$. With a reasoning similar at all, by supposing that the arbitrary α, β are given their values by the two equations

$$\frac{dx}{dp} + \alpha\frac{dx}{dq} + \beta\frac{dx}{dr} = 0 \ ; \qquad \frac{dz}{dp} + \alpha\frac{dz}{dq} + \beta\frac{dz}{dr} = 0$$

we prove zero the quantity (b): and (c) as well, once we make α, β so to satisfy the two equations

$$\frac{dx}{dp} + \alpha\frac{dx}{dq} + \beta\frac{dx}{dr} = 0 \ ; \qquad \frac{dy}{dp} + \alpha\frac{dy}{dq} + \beta\frac{dy}{dr} = 0 \ .$$

Being thus certain that the quantities (a), (b), (c) are zero, we will cancel the terms containing them in equation (7). By supposing, then, that only one of equations (8) holds, for instance the second one, we reduce ourselves to the only term containing (d). The quantity multiplying (d) in it cannot be zero, since one of the two indeterminate α, β still remains arbitrary: it is then (d) that will be zero, and with an analogous reasoning we will prove the same for (e), (f). If we now recall the definitions (5), we prove the six equations

$$\begin{gathered} \frac{dl}{dx} = 0 \ ; \quad \frac{dm}{dy} = 0 \ ; \quad \frac{dn}{dz} = 0 \\ \frac{dm}{dx} + \frac{dl}{dy} = 0 \ ; \quad \frac{dn}{dx} + \frac{dl}{dz} = 0 \ ; \quad \frac{dn}{dy} + \frac{dm}{dz} = 0 \ . \end{gathered} \tag{9}$$

3. Let us deal with them as follows. By deriving with respect to y the fourth one, and with respect to z the fifth one, we get

$$\frac{d^2m}{dx\,dy} + \frac{d^2l}{dy^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2n}{dx\,dz} + \frac{d^2l}{dz^2} = 0 \ ,$$

but the second and the third ones, derived with respect to x give us

$$\frac{d^2m}{dx\,dy} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2n}{dx\,dz} = 0 \ ;$$

we then have the simultaneous existence of the three

$$\frac{dl}{dx} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2l}{dy^2} = 0 \quad ; \quad \frac{d^2l}{dz^2} = 0 \ . \tag{10}$$

Con processo molto simile deduciamo dalla (9) le analoghe

$$(11)\qquad \begin{array}{ccccc} \dfrac{d^2m}{dx^2}=0 & ; & \dfrac{dm}{dy}=0 & ; & \dfrac{d^2m}{dz^2}=0 \\ \dfrac{d^2n}{dx^2}=0 & ; & \dfrac{d^2n}{dy^2}=0 & ; & \dfrac{dn}{dz}=0\ . \end{array}$$

Le (10) sono integrabili a colpo d'occhio; la prima di esse ci prova che il valore di l non contiene la x, e dalle due seguenti apparisce che un tal valore non può contenere le y, z se non linearmente. Sarà dunque il valore di l della forma

$$l = w_1 + s_2 z + ey$$

essendo w_1, s_2, e tre costanti per riguardo alle variabili x, y, z. Allo stesso modo dedurremo dalle (11) i valori

$$m = w_2 + s_3 x + kz$$
$$n = w_3 + s_1 y + jx$$

dove le w_2, s_3, k ; w_3, s_1, j significano sei costanti della stessa natura delle w_1, s_2, e. Non tutte però queste nove costanti rimangono indeterminate, perchè se i valori ora trovati si sostituiscono nelle ultime tre delle equazioni (9), vediamo risultarne

$$s_3 + e = 0 \quad ; \quad j + s_2 = 0 \quad ; \quad s_1 + k = 0\ ,$$

dalle quali dedurremo le e, j, k date per le s_3, s_2, s_1.

Dopo di ciò i valori delle l, m, n diventano

$$(12)\qquad \begin{aligned} l &= w_1 + s_2 z - s_3 y \\ m &= w_2 + s_3 x - s_1 z \\ n &= w_3 + s_1 y - s_2 x\ . \end{aligned}$$

Sono questi i medesimi valori che per le l, m, n, ovvero δx, δy, δz (rivedi le equazioni (2)), trovammo alla fine del Capo III, equazioni (39) n. 43 m. p., facendo variare nelle equazioni (1) le dodici costanti f, g, h, α_1, ec., ossia supponendo un piccolo spostamento negli assi. Dunque è provato che con questo solo mezzo dello spostamento degli assi, o del far variare nelle (1) le dodici costanti f, g, h, α_1, ec., si raggiungono per le δx, δy, δz i valori generali appropriati alla questione, senza attribuire nelle stesse (1) variazioni anche alle p, q, r; questa osservazione è fondamentale.

By a much similar procedure we obtain from (9) the analogous ones

$$(11)\qquad \begin{array}{c} \dfrac{d^2m}{dx^2}=0 \quad ; \quad \dfrac{dm}{dy}=0 \quad ; \quad \dfrac{d^2m}{dz^2}=0 \\[2ex] \dfrac{d^2n}{dx^2}=0 \quad ; \quad \dfrac{d^2n}{dy^2}=0 \quad ; \quad \dfrac{dn}{dz}=0\ . \end{array}$$

The (10) are integrable at a glimpse; the first of them proves us that the value of l does not contain x, and from the following two it is apparent that such a value cannot contain y, z if not linearly. The value of l will thus be in the form

$$l = w_1 + s_2 z + ey$$

w_1, s_2, e being three constants with respect to the variables x, y, z. In the same way we will deduce from the (11) the values

$$m = w_2 + s_3 x + kz$$
$$n = w_3 + s_1 y + jx$$

where the w_2, s_3, k ; w_3, s_1, j stand for six constants of the same nature as the w_1, s_2, e. Not all these nine constants, however, are left undetermined, since if the values now found are substituted in the last three of equations (9), we see resulting from them

$$s_3 + e = 0 \quad ; \quad j + s_2 = 0 \quad ; \quad s_1 + k = 0\ ,$$

from which we will deduce the e, j, k given by means of the s_3, s_2, s_1.

After that, the values of the l, m, n become

$$(12)\qquad \begin{aligned} l &= w_1 + s_2 z - s_3 y \\ m &= w_2 + s_3 x - s_1 z \\ n &= w_3 + s_1 y - s_2 x\ . \end{aligned}$$

These are the same values for the l, m, n, that is, δx, δy, δz (recall the equations (2)), that we found at the end of Capo III, equations (39) sect. 43 p. m., by letting vary the twelve constants f, g, h, α_1, and so on, in the equations (1), that is, by supposing a small displacement in the axes. Thus, it is proved that by this means only, of displacing the axes, or of letting the twelve constants f, g, h, α_1, and so on, vary in (1), we obtain for the δx, δy, δz the general values suitable for the question, without attributing in the same (1) variations to the p, q, r as well; this remark is fundamental.

4. Posta la proposizione precedente, i ragionamenti ed i calcoli, come dissi fin da principio, possono prendere un andamento più semplice, giacché si può evitare d'introdurre nella equazione generalissima le derivate e gl'integrali relativamente alle variabili intermedie p, q, r e ciò perché si vede ora il modo di assegnare mediante le sole coordinate a, b, c dello stato antecedente, ed x, y, z dell'attuale, le equazioni di condizione sussistenti per ogni punto di sistemi anche variabili in conseguenza di movimenti intestini delle loro molecole. Infatti, se partendo dalle equazioni (1) cercheremo i valori dei sei trinomj t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 (equazioni (6), n. 34 m. p.), ed anche quelli degli infiniti trinomj T_1, T_2, T_3, ec., dei quali sponemmo i primi 39 nelle riunioni (14), (15) n. 73. m. p., ci formeremo (come già al n. 34, equazioni (8) m. p.) altrettante equazioni in cui i secondi membri saranno fatti colle derivate delle x, y, z per le stesse a, b, c, sparita in quei secondi ogni traccia delle quantità f, g, h, α_1, β_1, γ_1, ec.

Ora, dopo quanto vedemmo più sopra, prendere le variate di tali equazioni vuol dire (rivedi il n. 42 m. p.) attribuire alle variabili x, y, z gli aumenti $i\delta x$, $i\delta y$, $i\delta z$, ch'esse assumono pel variare delle dodici quantità f, g, h, α_1, ec. Ma comeché queste quantità non entrano in tutti i secondi membri delle equazioni in discorso, essi spariranno mentre si deriva secondo la caratteristica δ, e si avranno le variate delle infinite equazioni così espresse

$$\begin{aligned} &\delta t_1 = 0\ ;\ \delta t_2 = 0\ ;\ \delta t_3 = 0\ ;\ \delta t_4 = 0\ ;\ \delta t_5 = 0\ ;\ \delta t_6 = 0 \\ &\delta T_1 = 0\ ;\ \delta T_2 = 0\ ;\ \delta T_3 = 0\ ;\ \text{ec. all'infinito.} \end{aligned} \tag{13}$$

Notisi bene: questi secondi membri svaniscono nell'operazione indicata dalla caratteristica δ, non perché siano assolutamente costanti, come lo erano i secondi membri delle equazioni (8), n. 34 m. p. pei sistemi rigidi: sono anzi il più spesso variabili, per esempio nel caso de' fluidi, ma sono variabili pel variare di tutt'altre quantità, che non sian quelle al variar delle quali è dovuto il prodursi delle variazioni δx, δy, δz, cioè le solite dodici f, g, h, α_1, ec. Stante l'assenza di tali dodici quantità da quei secondi membri, essi vanno via mentre si deriva secondo δ, come quando sono assolutamente costanti, ed ecco la ragione di quella proprietà che nel preambolo della Memoria dicemmo intraveduta ma non dimostrata.

Le infinite equazioni di condizione (13) si riducono poi alle sole prime sei, essendosi dimostrato (n. 74 m. p.) che tutti gli infiniti trinomj T_1, T_2, T_3, ec. eguagliano espressioni fatte dei primi sei t_1, t_2, $\dots t_6$, e delle loro derivate

4. Once posed the preceding proposition, the reasonings and the calculations, as I said right from the beginning, may take a simpler course, in that we may avoid introducing in the most general equation the derivatives and the integrals with respect to the intermediate variables p, q, r, and this because we now see the way of assigning by means of the only coordinates a, b, c of the antecedent state, and x, y, z of the present one, the equations of condition existing for each point of even variable systems as a consequence of intimate movements of their molecules. Indeed, if starting from equations (1) we look for the values of the six trinomials t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6 (equations (6), sect. 34 p. m.), and also those of the infinite trinomials T_1, T_2, T_3, and so on, of which we showed the first 39 in the gatherings (14), (15) sect. 73 p. m., we will form (as already in sect. 34, equations (8) p. m.) as many equations in which the right-hand sides will be made by the derivatives of the x, y, z with respect to the same a, b, c, being disappeared in those latter ones any trace of the quantities f, g, h, α_1, β_1, γ_1, and so on.

Now, after what we saw above, to take the variations of those equation means (see sect. 42 p. m.) to attribute to the variables x, y, z the increments $i\delta x$, $i\delta y$, $i\delta z$ that they assume by varying the twelve quantities f, g, h, α_1, and so on. But since these quantities do not enter in all the right-hand sides of the equations in our speech, they will disappear when we derive according to the characteristic δ, and we will have the variations of the infinite equations so expressed

$$\begin{aligned} &\delta t_1 = 0 \;;\; \delta t_2 = 0 \;;\; \delta t_3 = 0 \;;\; \delta t_4 = 0 \;;\; \delta t_5 = 0 \;;\; \delta t_6 = 0 \\ &\delta T_1 = 0 \;;\; \delta T_2 = 0 \;;\; \delta T_3 = 0 \;;\; \text{and so on to infinity.} \end{aligned} \tag{13}$$

Please note: these right-hand sides vanish in the operation indicated by the characteristic δ not because they are absolutely constant, like the right-hand sides of the equations (8), sect. 34 p. m. for rigid systems were: on the contrary, they are most often variables, for instance in the case of fluids, but they are variables due to other completely different varying quantities, that are not those by varying which the variations δx, δy, δz are produced, that is, the usual f, g, h, α_1, and so on. Those twelve quantities being absent in those right-hand sides, they disappear when we derive according to δ, like when they are absolutely constant, and here is the motivation of that property that in the preamble of the Memoir we said glimpsed but not proved.

The infinite equations of condition (13) then reduce to the first six only, having proved (sect. 74 p. m.) that all the infinite trinomials T_1, T_2, T_3, and so on, are equal to expressions of the first six t_1, t_2, $\dots t_6$, and of their derivatives with respect per a, b, c: talché tutte le equazioni (13) dopo le prime sei si possono considerare semplici combinazioni di esse sei precedenti.

Quantunque un tale ragionamento per ridurre a sole sei le equazioni (13), sia, a parer mio, convincentissimo, amo di preferenza seguirne un altro siccome quello che, colle debite modificazioni, ci gioverà fra poco anche pei sistemi superficiali e lineari. A discernere fra le equazioni (13), prenderemo come essenzialmente diverse quelle sole che sono necessarie e bastano all'oggetto di trovare per le variazioni δx, δy, δz i valori (12): tutte le altre manifestamente non potranno essere che combinazioni di quelle assunte a fine di conseguire una tale determinazione, e dovranno riuscire identicamente soddisfatte per la sostituzione dei valori (12). Raccomando di verificare quest'ultima proprietà almeno per alcune scelte a piacimento. Delle (13) le necessarie e sufficienti per trovare i valori (12) sono le prime sei. Qui converrebbe ripetere un calcolo, il quale (dopo sostituiti per t_1, t_2, $\ldots t_6$ i trinomj equivalenti, equazioni (6), num. 34 m. p.) si trova precisamente il medesimo già eseguito più sopra sulle equazioni (3) colla differenza dell'aversi le lettere a, b, c invece delle p, q, r. Nell'andamento analitico l'unica diversità s'incontra nel luogo dove volendo dimostrare la sussistenza delle sei equazioni (9), riduciamo l'equazione simile alla (7) sì che diventa

$$(a)\left(\frac{dx}{da}+\alpha\frac{dx}{db}+\beta\frac{dx}{dc}\right)^2=0\ .$$

Ivi, a convincerci che il secondo fattore non può essere zero, non vale più il dire che si annullerebbe un sestinomio già trovato uguale all'unità: invece bisogna dire che messi i valori di α, β risulterebbe zero il sestinomio H ben conosciuto (vedi equazione (4), n. 9 m. p.) e quindi infinita la densità Γ (ivi, equazione (6)), cosa impossibile.

Assunte così per sole equazioni di condizione le prime sei fra le (13), si capisce come l'equazione (10), n. 35 m. p., non è unicamente relativa ai sistemi rigidi, ma generalissima per ogni sorta di sistemi a tre dimensioni. Si capisce inoltre (per ciò che segue nella m. p. n. 6, 37, 38) come fatte

$$(14)\qquad \begin{array}{lllllllll} \Lambda &=& \Gamma(\mathrm{I}) &;& \Xi &=& \Gamma(\mathrm{II}) &;& \Pi = \Gamma(\mathrm{III}) \\ \Sigma &=& \Gamma(\mathrm{IV}) &;& \Phi &=& \Gamma(\mathrm{V}) &;& \Psi = \Gamma(\mathrm{VI})\,, \end{array}$$

nelle quali le sei quantità (I), (II), ... (VI) hanno i valori scritti per mezzo delle equazioni (27), n. 38 m. p. (rivedi colà le equazioni (26), (28), (29)), le tre to a, b, c: so that all equations (13) after the first six may be considered simple combinations of them, the preceding six.

Although such a reasoning to reduce the equations (13) to six only is, in my opinion, very convincing, I preferably love to follow another one, just like the one which, with due modifications, will in short be useful to us for linear and superficial systems as well. In order to discern among the equations (13), we will take as substantially different only those that are necessary and enough to the goal of finding the values (12) for the variations δx, δy, δz: all the other ones will manifestly be but combinations of those assumed with the aim of getting such a determination, and shall come identically satisfied by the substitution of the values (12). I recommend to verify this last property at least for some choices at will. The necessary and sufficient ones among the (13) to find the values (12) are the first six. It would be convenient here to repeat a calculation, that (after substituting t_1, t_2, $\ldots t_6$ by the equivalent trinomials, equations (6), sect. 34 p. m.) one finds precisely the same already performed above on the equations (3), with the difference that we have the letters a, b, c instead of the p, q, r. In the analytical procedure, the only diversity is met in the place where, when we want to prove the validity of the six equations (9), we reduce the equation similar to the (7) so to become

$$(a)\left(\frac{dx}{da}+\alpha\frac{dx}{db}+\beta\frac{dx}{dc}\right)^2=0\ .$$

Here, to convince us that the second factor cannot be zero, saying that a sextinomial already found equal to unit would vanish is no longer valid: it is necessary to say instead that, once put the values α, β, the well known sextinomial H (see equation (4), sect. 9 p. m.) would result zero, and thus infinite the density Γ (ibidem, equation (6)), which is impossible.

Thus assumed as sole equations of condition the first six among the (13), we understand how the equation (10), sect. 35 p. m., is not relative to rigid systems uniquely, but most general for all sorts of three-dimensional systems. In addition, we understand (following what is in the p. m. sects. 6, 37, 38) how, once made

$$(14)\qquad \begin{aligned} \Lambda &= \Gamma(\mathrm{I}) \;;\quad \Xi = \Gamma(\mathrm{II}) \;;\quad \Pi = \Gamma(\mathrm{III}) \\ \Sigma &= \Gamma(\mathrm{IV}) \;;\quad \Phi = \Gamma(\mathrm{V}) \;;\quad \Psi = \Gamma(\mathrm{VI})\,, \end{aligned}$$

in which the six quantitities (I), (II), $\ldots$ (VI) have the values written by means of the equations (27), sect. 38 p. m. (see back there the equations (26), (28), (29)), the three che si estendono a tutti i punti della massa, sono le

$$\Gamma\left(\mathrm{X}-\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\frac{d\Lambda}{dx}+\frac{d\Sigma}{dy}+\frac{d\Phi}{dz}=0$$

(15)
$$\Gamma\left(\mathrm{Y}-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\frac{d\Sigma}{dx}+\frac{d\Xi}{dy}+\frac{d\Psi}{dz}=0$$

$$\Gamma\left(\mathrm{Z}-\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dy}+\frac{d\Pi}{dz}=0$$

già dimostrate altrimenti (equazioni (23), n. 40 m. p.); e che le tre (n. 52 m. p.)

$$\lambda(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}-\Phi+\frac{dz}{dx}\Lambda+\frac{dz}{dy}\Sigma=0$$

(16)
$$\mu(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}-\Psi+\frac{dz}{dx}\Sigma+\frac{dz}{dy}\Xi=0$$

$$\nu(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}-\Pi+\frac{dz}{dx}\Phi+\frac{dz}{dy}\Psi=0$$

sono quelle che si verificano unicamente alla superficie conterminante il corpo: dove λ, μ, ν significano le tre componenti secondo i tre assi della pressione propria del punto (x, y, z) generico in tal superficie, e (Γ) è la densità che regna fra le molecole alla stessa superficie.

5. Un'operazione analitica alquanto prolissa ma di molta importanza per le cose che avremo a dire appresso, principalmente nel Capo VI, si è quella di desumere inversamente dalle precedenti equazioni (14) le sei quantità A, B, C, D, E, F date per le sei Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ; la metteremo qui a compimento di questo primo Capo.

Primieramente conviene osservare che come già coi valori delle equazioni (27) n. 14 m. p. si verificavano colà identicamente le susseguenti nove equazioni (28), si verificano alla stessa maniera (e può provarsi colla materiale sostituzione) queste altre nove

$$l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}=H$$

$$l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}=0$$

$$l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}=0$$

$$m_1\frac{dx}{da}+m_2\frac{dy}{da}+m_3\frac{dz}{da}=0$$

(20)
$$m_1\frac{dx}{db}+m_2\frac{dy}{db}+m_3\frac{dz}{db}=H$$

ones extending to all the points of the mass are the

$$(15)\qquad \begin{aligned}
&\Gamma\left(\mathrm{X}-\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\frac{d\Lambda}{dx}+\frac{d\Sigma}{dy}+\frac{d\Phi}{dz}=0\\
&\Gamma\left(\mathrm{Y}-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\frac{d\Sigma}{dx}+\frac{d\Xi}{dy}+\frac{d\Psi}{dz}=0\\
&\Gamma\left(\mathrm{Z}-\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dy}+\frac{d\Pi}{dz}=0
\end{aligned}$$

already differently proved (equations (23), sect. 40 p. m.); and the three ones (sect. 52 p. m.)

$$(16)\qquad \begin{aligned}
&\lambda(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}-\Phi+\frac{dz}{dx}\Lambda+\frac{dz}{dy}\Sigma=0\\
&\mu(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}-\Psi+\frac{dz}{dx}\Sigma+\frac{dz}{dy}\Xi=0\\
&\nu(\Gamma)\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}-\Pi+\frac{dz}{dx}\Phi+\frac{dz}{dy}\Psi=0
\end{aligned}$$

are those holding uniquely on the surface contouring the body: where λ, μ, ν stand for the three components along the three axes of the actual pressure at the generic point (x, y, z) in that surface, and (Γ) is the density occuring among the molecules at the same surface.

5. An analytical operation, rather verbose but of much importance for the things we have to say afterwards, mainly in Capo VI, is that of deriving inversely from the preceding equations (14) the six quantities A, B, C, D, E, F provided by the six Λ, Ξ, Π, Σ, Φ, Ψ; we will put it here as a completion of this first Capo.

Firstly it is convenient to remark that, like by the values of the equations (27) sect. 14 p. m. we already identically verified there the following nine equations (28), in the same way we verify (and it can be proved by material substitution) these other nine

$$(20)\qquad \begin{aligned}
&l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}=H\\
&l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}=0\\
&l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}=0\\
&m_1\frac{dx}{da}+m_2\frac{dy}{da}+m_3\frac{dz}{da}=0\\
&m_1\frac{dx}{db}+m_2\frac{dy}{db}+m_3\frac{dz}{db}=H
\end{aligned}$$

$$m_1\frac{dx}{dc}+m_2\frac{dy}{db}+m_3\frac{dz}{dc}=0$$
$$n_1\frac{dx}{da}+n_2\frac{dy}{da}+n_3\frac{dz}{da}=0$$
$$n_1\frac{dx}{db}+n_2\frac{dy}{db}+n_3\frac{dz}{db}=0$$
$$n_1\frac{dx}{dc}+n_2\frac{dy}{dc}+n_3\frac{dz}{dc}=H \quad .$$

Poi è necessario scrivere da capo le sei equazioni (14) avendo sostituito nei secondi membri alle sei quantità (I), (II), (III), (IV), (V), (VI) i valori equivalenti (equazioni (27), n. 38 m. p.). Dopo di ciò si moltiplichino rispettivamente dette sei equazioni per le quantità

$$l_1^2,\ l_2^2,\ l_3^2,\ 2l_1l_2,\ 2l_1l_3,\ 2l_2l_3\ ;$$

indi si sommino: l'unica equazione risultante potrà scriversi

$$-\frac{1}{2\Gamma}\left\{\Lambda l_1^2+\Xi l_2^2+\Pi l_3^2+2\Sigma l_1l_2+2\Phi l_1l_3+2\Psi l_2l_3\right\}=$$

$$\begin{aligned}&A\left(l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}\right)^2+D\left(l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}\right)\left(l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}\right)\\ &B\left(l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}\right)^2+E\left(l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}\right)\left(l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}\right)\\ &C\left(l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}\right)^2+F\left(l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}\right)\left(l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}\right) \quad .\end{aligned} \tag{21}$$

Adesso le equazioni (20) provano che il secondo membro si riduce semplicemente AH^2 ovvero $\frac{A}{H^2}$ a motivo della equazione (6), num. 9 m. p. Per tal modo il valore di A è subito ricavato e risulta come nel quadro che porremo qui dopo.

Sarà poi facile per la somiglianza delle operazioni persuaderci che moltiplicando rispettivamente le sei equazioni (14) per le quantità

$$m_1^2,\ m_2^2,\ m_3^2,\ 2m_1m_2,\ 2m_1m_3,\ 2m_2m_3$$

e un'altra volta per

$$n_1^2,\ n_2^2,\ n_3^2,\ 2n_1n_2,\ 2n_1n_3,\ 2n_2n_3\ ,$$

indi sommandole e avendo l'occhio alle equazioni identiche (20), si ricavano anche per B, C i valori che qui dopo stanno registrati.

$$\begin{aligned}
m_1\frac{dx}{dc}+m_2\frac{dy}{db}+m_3\frac{dz}{dc}&=0\\
n_1\frac{dx}{da}+n_2\frac{dy}{da}+n_3\frac{dz}{da}&=0\\
n_1\frac{dx}{db}+n_2\frac{dy}{db}+n_3\frac{dz}{db}&=0\\
n_1\frac{dx}{dc}+n_2\frac{dy}{dc}+n_3\frac{dz}{dc}&=H \quad .
\end{aligned}$$

It is then necessary to write again the six equations (14), having substituted in the right-hand sides the six quantities (I), (II), (III), (IV), (V), (VI) the equivalent values (equations (27), sect. 38 p. m.). After this, let us multiply the said equations respectively by the quantities

$$l_1^2,\ l_2^2,\ l_3^2,\ 2l_1l_2,\ 2l_1l_3,\ 2l_2l_3\ ;$$

and then sum them; the only resulting equation can be written

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\Gamma}\left\{\Lambda l_1^2+\Xi l_2^2+\Pi l_3^2+2\Sigma l_1l_2+2\Phi l_1l_3+2\Psi l_2l_3\right\}=\\
&A\left(l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}\right)^2+D\left(l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}\right)\left(l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}\right)\\
&B\left(l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}\right)^2+E\left(l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}\right)\left(l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}\right)\\
&C\left(l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}\right)^2+F\left(l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}\right)\left(l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}\right) \quad .
\end{aligned} \tag{21}$$

Now the equations (20) prove that the right-hand side reduces simply to AH^2 or $\frac{A}{H^2}$ by cause of equation (6), sect. 9 p. m. In this way the value of A is found at once and results as in the table that we will list afterwards.

It will then be easy, by the similarity of the operations, to persuade us that, by multiplying the six equations (14) respectively by the quantities

$$m_1^2,\ m_2^2,\ m_3^2,\ 2m_1m_2,\ 2m_1m_3,\ 2m_2m_3$$

and once more by

$$n_1^2,\ n_2^2,\ n_3^2,\ 2n_1n_2,\ 2n_1n_3,\ 2n_2n_3\ ,$$

then summing them, and having an eye to the identical equations (20), we find for B, C the values that are recorded hereafter.

All'oggetto di avere il valore di D le sei equazioni debbono essere rispettivamente moltiplicate per

$$l_1 m_1,\ l_2 m_2,\ l_3 m_3,\ l_1 m_2 + m_1 l_2,\ l_1 m_3 + m_1 l_3,\ l_2 m_3 + m_2 l_3\ ;$$

indi sommate; la somma può scriversi

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\Gamma}\Big\{\Lambda l_1 m_1 + \Xi l_2 m_2 + \Pi l_3 m_3 + \Sigma\,(l_1 m_2 + m_1 l_2) + \Phi\,(l_1 m_3 + m_1 l_3)& \\
+\Psi\,(l_2 m_3 + m_2 l_3)\Big\}& \\
= 2A\left(l_1\frac{dx}{da} + l_2\frac{dy}{da} + l_3\frac{dz}{da}\right)\left(m_1\frac{dx}{da} + m_2\frac{dy}{da} + m_3\frac{dz}{da}\right)& \\
+2B\left(l_1\frac{dx}{db} + l_2\frac{dy}{db} + l_3\frac{dz}{db}\right)\left(m_1\frac{dx}{db} + m_2\frac{dy}{db} + m_3\frac{dz}{db}\right)& \\
+2C\left(l_1\frac{dx}{dc} + l_2\frac{dy}{dc} + l_3\frac{dz}{dc}\right)\left(m_1\frac{dx}{dc} + m_2\frac{dy}{dc} + m_3\frac{dz}{dc}\right)& \\
+D\left\{\begin{array}{c}\left(l_1\frac{dx}{da} + l_2\frac{dy}{da} + l_3\frac{dz}{da}\right)\left(m_1\frac{dx}{db} + m_2\frac{dy}{db} + m_3\frac{dz}{db}\right)\\ +\left(m_1\frac{dx}{da} + m_2\frac{dy}{da} + m_3\frac{dz}{da}\right)\left(l_1\frac{dx}{db} + l_2\frac{dy}{db} + l_3\frac{dz}{db}\right)\end{array}\right\}& \\
+E\left\{\begin{array}{c}\left(l_1\frac{dx}{da} + l_2\frac{dy}{da} + l_3\frac{dz}{da}\right)\left(m_1\frac{dx}{dc} + m_2\frac{dy}{dc} + m_3\frac{dz}{dc}\right)\\ +\left(m_1\frac{dx}{da} + m_2\frac{dy}{da} + m_3\frac{dz}{da}\right)\left(l_1\frac{dx}{dc} + l_2\frac{dy}{dc} + l_3\frac{dz}{dc}\right)\end{array}\right\}& \\
+F\left\{\begin{array}{c}\left(l_1\frac{dx}{db} + l_2\frac{dy}{db} + l_3\frac{dz}{db}\right)\left(m_1\frac{dx}{dc} + m_2\frac{dy}{dc} + m_3\frac{dz}{dc}\right)\\ +\left(m_1\frac{dx}{db} + m_2\frac{dy}{db} + m_3\frac{dz}{db}\right)\left(l_1\frac{dx}{dc} + l_2\frac{dy}{dc} + l_3\frac{dz}{dc}\right)\end{array}\right\}& \ .
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Anche nel secondo membro di questa si effettua una ben notabile riduzione per effetto delle equazioni identiche (20): esso diventa semplicemente DH^2, e per tal maniera si ottiene prontamente il valore di D cercato.

Per avere quelli delle E, F non si deve far altro che ripetere due volte un calcolo affatto simile, moltiplicando una volta le sei equazioni rispettivamente per

$$l_1 n_1,\ l_2 n_2,\ l_3 n_3,\ l_1 n_2 + n_1 l_2,\ l_1 n_3 + n_1 l_3,\ l_2 n_3 + n_2 l_3$$

e un'altra volta per

$$m_1 n_1,\ m_2 n_2,\ m_3 n_3,\ m_1 n_2 + n_1 m_2,\ m_1 n_3 + n_1 m_3,\ m_2 n_3 + n_2 m_3\ .$$

With the aim to have the value of D the six equations must be multiplied respectively by

$$l_1m_1,\ l_2m_2,\ l_3m_3,\ l_1m_2+m_1l_2,\ l_1m_3+m_1l_3,\ l_2m_3+m_2l_3\ ;$$

and then summed; the sum may be written

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{\Gamma}\big\{\Lambda l_1m_1+\Xi l_2m_2+\Pi l_3m_3+\Sigma\,(l_1m_2+m_1l_2)+\Phi\,(l_1m_3+m_1l_3)\\
&\qquad\qquad\qquad +\Psi\,(l_2m_3+m_2l_3)\big\}\\
&\quad=2A\left(l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}\right)\left(m_1\frac{dx}{da}+m_2\frac{dy}{da}+m_3\frac{dz}{da}\right)\\
&\quad+2B\left(l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}\right)\left(m_1\frac{dx}{db}+m_2\frac{dy}{db}+m_3\frac{dz}{db}\right)\\
&\quad+2C\left(l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}\right)\left(m_1\frac{dx}{dc}+m_2\frac{dy}{dc}+m_3\frac{dz}{dc}\right)\\
&+D\left\{\begin{aligned}&\left(l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}\right)\left(m_1\frac{dx}{db}+m_2\frac{dy}{db}+m_3\frac{dz}{db}\right)\\+&\left(m_1\frac{dx}{da}+m_2\frac{dy}{da}+m_3\frac{dz}{da}\right)\left(l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}\right)\end{aligned}\right\}\\
&+E\left\{\begin{aligned}&\left(l_1\frac{dx}{da}+l_2\frac{dy}{da}+l_3\frac{dz}{da}\right)\left(m_1\frac{dx}{dc}+m_2\frac{dy}{dc}+m_3\frac{dz}{dc}\right)\\+&\left(m_1\frac{dx}{da}+m_2\frac{dy}{da}+m_3\frac{dz}{da}\right)\left(l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}\right)\end{aligned}\right\}\\
&+F\left\{\begin{aligned}&\left(l_1\frac{dx}{db}+l_2\frac{dy}{db}+l_3\frac{dz}{db}\right)\left(m_1\frac{dx}{dc}+m_2\frac{dy}{dc}+m_3\frac{dz}{dc}\right)\\+&\left(m_1\frac{dx}{db}+m_2\frac{dy}{db}+m_3\frac{dz}{db}\right)\left(l_1\frac{dx}{dc}+l_2\frac{dy}{dc}+l_3\frac{dz}{dc}\right)\end{aligned}\right\}\ .
\end{aligned}\tag{22}$$

In the right-hand side of this a well remarkable reduction is also performed, by means of the identical equations (20): it simply becomes DH^2, and in this way we readily obtain the searched value of D.

To have the values of the E, F we do not have to do other than repeating twice a calculation at all similar, by multiplying once the six equations respectively by

$$l_1n_1,\ l_2n_2,\ l_3n_3,\ l_1n_2+n_1l_2,\ l_1n_3+n_1l_3,\ l_2n_3+n_2l_3$$

and once again by

$$m_1n_1,\ m_2n_2,\ m_3n_3,\ m_1n_2+n_1m_2,\ m_1n_3+n_1m_3,\ m_2n_3+n_2m_3\ .$$

Il quadro dei valori trovati, seguendo il tracciato andamento, è come segue

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{2}\Gamma\left\{\Lambda l_1^2 + \Xi l_2^2 + \Pi l_3^2 + 2\Sigma l_1 l_2 + 2\Phi l_1 l_3 + 2\Psi l_2 l_3\right\}\\
B &= -\frac{1}{2}\Gamma\left\{\Lambda m_1^2 + \Xi m_2^2 + \Pi m_3^2 + 2\Sigma m_1 m_2 + 2\Phi m_1 m_3 + 2\Psi m_2 m_3\right\}\\
C &= -\frac{1}{2}\Gamma\left\{\Lambda n_1^2 + \Xi n_2^2 + \Pi n_3^2 + 2\Sigma n_1 n_2 + 2\Phi n_1 n_3 + 2\Psi n_2 n_3\right\}\\
D &= -\ \Gamma\{\Lambda l_1 m_1 + \Xi l_2 m_2 + \Pi l_3 m_3\\
&\qquad +\Sigma(l_1 m_2 + m_1 l_2) + \Phi(l_1 m_3 + m_1 l_3) + \Psi(l_2 m_3 + m_2 l_3)\}\\
E &= -\ \Gamma\{\Lambda l_1 n_1 + \Xi l_2 n_2 + \Pi l_3 n_3\\
&\qquad +\Sigma(l_1 n_2 + n_1 l_2) + \Phi(l_1 n_3 + n_1 l_3) + \Psi(l_2 n_3 + n_2 l_3)\}\\
F &= -\ \Gamma\{\Lambda m_1 n_1 + \Xi m_2 n_2 + \Pi m_3 n_3\\
&\qquad +\Sigma(m_1 n_2 + n_1 m_2) + \Phi(m_1 n_3 + n_1 m_3) + \Psi(m_2 n_3 + n_2 m_3)\} \quad .
\end{aligned}
$$

CAPO II.

Applicazione del principio alla ricerca delle equazioni generalissime pel moto e per l'equilibrio de' sistemi lineari e superficiali.

6. Abbiamo detto al cominciare del Capo precedente che in generale per tutte tre le sorte di sistemi continui le variazioni δx, δy, δz possono considerarsi avere quei valori che si ottengono attribuendo alle coordinate x, y, z del punto generico aumenti piccolissimi cagionati da un leggier spostamento degli assi rettangolari ai quali il sistema è riferito: ma non abbiamo dimostrata la proposizione se non pei sistemi a tre dimensioni. Quanto ai lineari ed ai superficiali la dimostrazione dovrebbe farsi appoggiandoci pei primi alle equazioni (10), (11), ec., n. 78, e pei secondi alle equazioni (34), n. 82 m. p., Capo VII ed ultimo. Siccome però il numero di tali equazioni sostanzialmente diverse non fu in quel Capo da noi ben determinato, mentre invece lo era quello delle (14), n. 47 m. p., pei sistemi a tre dimensioni, è chiaro che senza un tal precedente l'accennata dimostrazione non può aver luogo. Terremo pertanto nelle circostanze attuali il seguente andamento che ci pare il più vantaggioso: supporremo dapprima (valendoci per poco dell'analogia) vera la proposizione anche pei sistemi lineari e superficiali, e, viste le conseguenze, avremo poi cura di

The table of the values found by following the outlined procedure is as follows

$$
(23)\quad
\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{2}\Gamma\left\{\Lambda l_1^2 + \Xi l_2^2 + \Pi l_3^2 + 2\Sigma l_1 l_2 + 2\Phi l_1 l_3 + 2\Psi l_2 l_3\right\}\\
B &= -\frac{1}{2}\Gamma\left\{\Lambda m_1^2 + \Xi m_2^2 + \Pi m_3^2 + 2\Sigma m_1 m_2 + 2\Phi m_1 m_3 + 2\Psi m_2 m_3\right\}\\
C &= -\frac{1}{2}\Gamma\left\{\Lambda n_1^2 + \Xi n_2^2 + \Pi n_3^2 + 2\Sigma n_1 n_2 + 2\Phi n_1 n_3 + 2\Psi n_2 n_3\right\}\\
D &= -\ \Gamma\{\Lambda l_1 m_1 + \Xi l_2 m_2 + \Pi l_3 m_3\\
&\qquad + \Sigma(l_1 m_2 + m_1 l_2) + \Phi(l_1 m_3 + m_1 l_3) + \Psi(l_2 m_3 + m_2 l_3)\}\\
E &= -\ \Gamma\{\Lambda l_1 n_1 + \Xi l_2 n_2 + \Pi l_3 n_3\\
&\qquad + \Sigma(l_1 n_2 + n_1 l_2) + \Phi(l_1 n_3 + n_1 l_3) + \Psi(l_2 n_3 + n_2 l_3)\}\\
F &= -\ \Gamma\{\Lambda m_1 n_1 + \Xi m_2 n_2 + \Pi m_3 n_3\\
&\qquad + \Sigma(m_1 n_2 + n_1 m_2) + \Phi(m_1 n_3 + n_1 m_3) + \Psi(m_2 n_3 + n_2 m_3)\} \quad .
\end{aligned}
$$

CAPO II.

Application of the principle to the search of the most general equations for the motion and the equilibrium of linear and superficial systems.

6. We said at the beginning of the preceding Capo that in general, for all three sorts of continuous systems, the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ may be considered to have those values that can be obtained by attributing to the coordinates x, y, z of the generic point very small increments caused by a slight displacement of the rectangular axes to which the system is referred: but we did not prove the proposition if not for three-dimensional systems. As for linear and superficial ones, the proof should be done by relying for the former on equations (10), (11), etc., and for the latter on equations (34), sect. 82 p. m., Capo VII and last one. Anyway, since the number of substantially different equations in those was not well determined by us in that Capo, while so was instead that of the (14), sect. 47 p. m. for three-dimensional systems, it is clear that without such a basis the said proof cannot take place. We will then keep in the present circumstances the following line, that seems more advantageous: to us we will first suppose (a little bit availing themselves of the analogy) true the proposition also for linear and superficial systems, and, once seen the consequences, we will then take care of

riconfermarle rigorosamente mediante l'altro processo analitico del Capo VI m. p., la di cui applicazione anche ai sistemi lineari e superficiali venne indicata sul principio del succitato Capo VII, ma ivi ommessa per brevità.

Alla fine del Capo III, quando sarano state esposte in più maniere le dimostrazioni delle equazioni generalissime per tutti i sistemi, riassumeremo l'ordine dei ragionamenti, presentandolo sotto quel punto di vista che lasci scorgere al lettore nulla rimanere che non sia ben dimostrato.

Pei sistemi lineari nei quali le coordinate x, y, z spettanti allo stato reale si considerano funzioni di una sola variabile a relativa allo stato precedente ideale (n. 11 m. p.), i trinomj

$$(1)\qquad \begin{array}{ccccc} \left(\frac{dx}{da}\right)^2 & + & \left(\frac{dy}{da}\right)^2 & + & \left(\frac{dz}{da}\right)^2 \\ \left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 & + & \left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2 & + & \left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2 \\ \left(\frac{d^3x}{da^3}\right)^2 & + & \left(\frac{d^3y}{da^3}\right)^2 & + & \left(\frac{d^3z}{da^3}\right)^2 \\ \left(\frac{d^4x}{da^4}\right)^2 & + & \left(\frac{d^4y}{da^4}\right)^2 & + & \left(\frac{d^4z}{da^4}\right)^2 \\ \text{ec.} & , & \text{ec.} & , & \text{ec.} \end{array}$$

all'infinito sono quelli che, sostituendo per x, y, z i valori (1) del Capo precedente, ricompajono fatti colle derivate delle p, q, r alla stessa maniera, eliminata ogni traccia delle dodici quantità f, g, h, α_1, ec. Instituite quindi altrettante equazioni fra essi e i loro valori espressi colle p, q, r, se di tali equazioni si prendono le variate, avremo

$$(2)\qquad \begin{array}{l} \delta\left\{\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\right)^2\right\} = 0 \\ \delta\left\{\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2\right\} = 0 \\ \quad \text{ec.} \qquad , \qquad \text{ec.} \qquad , \qquad \text{ec.} \end{array}$$

all'infinito: e la ragione dello sparire i secondi membri è la medesima già addotta nel Capo precedente; l'operazione δ è relativa al variare di dodici elementi analitici f, g, h, α_1, ec. che non entrano in quei secondi membri, i quali vengono quindi trattati come se fossero costanti, sebbene possano essere variabili pel variare di altri elementi.

reconfirming them rigorously by means of the other analytical process of Capo VI p. m., the application of which to linear and superficial systems also was hinted at the beginning of the above quoted Capo VII, but omitted there for brevity.

At the end of Capo III, when the proofs of the most general equations for all systems will have been exposed in many ways, we will summarize the line of reasoning, presenting it under such a point of view that leaves the reader to notice nothing remaining not well proved.

For linear systems, in which the coordinates x, y, z of the real state are considered as functions of a variable only a relative to the precedent ideal state (sect. 11 p. m.), the trinomials

$$(1)\qquad \begin{array}{ccccc}
\left(\frac{dx}{da}\right)^2 & + & \left(\frac{dy}{da}\right)^2 & + & \left(\frac{dz}{da}\right)^2 \\
\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 & + & \left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2 & + & \left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2 \\
\left(\frac{d^3x}{da^3}\right)^2 & + & \left(\frac{d^3y}{da^3}\right)^2 & + & \left(\frac{d^3z}{da^3}\right)^2 \\
\left(\frac{d^4x}{da^4}\right)^2 & + & \left(\frac{d^4y}{da^4}\right)^2 & + & \left(\frac{d^4z}{da^4}\right)^2 \\
\text{etc.} & , & \text{etc.} & , & \text{etc.}
\end{array}$$

to infinity are those that, by replacing into x, y, z the values (1) of the preceding Capo, re-appear with derivatives made with respect to p, q, r in the same way, once any trace of the twelve quantities f, g, h, α_1, etc has been eliminated. Once then built as many equations among them and their values expressed by the p, q, r, if we take the variations of such equations, we will have

$$(2)\qquad \begin{array}{l}
\delta\left\{\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\right)^2\right\} = 0 \\
\delta\left\{\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2\right\} = 0 \\
\qquad \text{etc.} \quad , \quad \text{etc.} \quad , \quad \text{etc.}
\end{array}$$

to infinity: and the reason of the vanishing of the right-hand sides is the same already presented in the preceding Capo; the operation δ is relative to the variation of twelve analytical elements f, g, h, α_1, etc., which do not enter those right-hand sides, that are then considered as they were constants, even though they may be variable by the variation of other elements.

Esprimendo anche qui più compendiosamente le variazioni δx, δy, δz per mezzo delle lettere l, m, n, le equazioni (2) diventano

$$
(3) \qquad \begin{array}{ccccccc}
\dfrac{dx}{da}\dfrac{dl}{da} & + & \dfrac{dy}{da}\dfrac{dm}{da} & + & \dfrac{dz}{da}\dfrac{dn}{da} & = & 0 \\[2ex]
\dfrac{d^2x}{da^2}\dfrac{d^2l}{da^2} & + & \dfrac{d^2y}{da^2}\dfrac{d^2m}{da^2} & + & \dfrac{d^2z}{da^2}\dfrac{d^2n}{da^2} & = & 0 \\[2ex]
\text{ec.} & , & \text{ec.} & , & \text{ec.} & &
\end{array}
$$

e queste sono quelle i cui primi membri debbono essere moltiplicati per altrettanti coefficienti indeterminati all'oggetto d'introdurne i prodotti sotto un integrale relativo alla variabile a nell'equazione generalissima del moto e dell'equilibrio de' sistemi lineari (equazione (12), n. 79 m. p.).

Ma dovranno essere infinite di numero tali equazioni (3), e quindi infiniti i moltiplicatori introdotti come sopra? No: analogamente al già detto (al n. 14) dovremo prendere delle equazioni (3) quelle sole che sono necessarie e bastano a trovare per l, m, n i valori (12) del Capo precedente; le altre non saranno che una combinazione di esse. Passiamo a vedere che per trovare gli anzidetti valori di l, m, n conviene delle equazioni (3) prendere le prime tre: queste sole adunque saranno le sostanzialmente diverse. Ciò poi si farà lucidissimo più tardi quando proveremo che tutti i trinomj (1) dopo i primi tre possono aversi espressi per questi soli tre e loro derivate.

Essendo lecito intendere cavato dalla equazione $x = x(a)$ inversamente a per x, è anche lecito considerare le cinque quantità y, z, l, m, n funzioni di a in quanto prima lo sono di x. Indicheremo con apici le loro derivate per la x, quindi

$$
\frac{dy}{da} = y'\frac{dx}{da} \quad ; \quad \frac{d^2y}{da^2} = y''\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + y'\frac{d^2x}{da^2}
$$
$$
\frac{d^3y}{da^3} = y'''\left(\frac{dx}{da}\right)^3 + 3y''\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da^2} + y'\frac{d^3x}{da^3}
$$

e similmente per le derivate delle altre quattro quantità. Ciò posto: la prima delle (3) diventa

$$
\left(\frac{dx}{da}\right)^2 (l' + y'm' + z'n') = 0
$$

e siccome $\frac{dx}{da}$ non potrebbe essere zero, perché allora la x sarebbe costante, avremo

$$
(4) \qquad l' + y'm' + z'n' = 0\ .
$$

By expressing here as well in a more convenient way the variations δx, δy, δz by means of the letters l, m, n, the equations (2) become

$$(3)\qquad \begin{array}{ccccccc} \dfrac{dx}{da}\dfrac{dl}{da} & + & \dfrac{dy}{da}\dfrac{dm}{da} & + & \dfrac{dz}{da}\dfrac{dn}{da} & = & 0 \\ \dfrac{d^2x}{da^2}\dfrac{d^2l}{da^2} & + & \dfrac{d^2y}{da^2}\dfrac{d^2m}{da^2} & + & \dfrac{d^2z}{da^2}\dfrac{d^2n}{da^2} & = & 0 \\ \text{etc.} & , & \text{etc.} & , & \text{etc.} & & \end{array}$$

and they are those whose left-hand sides shall be multiplied by as many indeterminate coefficients with the aim of introducing their products in an integral with respect to the variable a in the most general equation of the motion and equilibrium for linear systems (equation (12), sect. 79 p. m.).

Shall, however, be infinite in number those equations (3), and thus infinite the multipliers introduced as above? No: analogously to what already said (in sect. 14), we shall take from equations (3) those only that are necessary and enough to find for l, m, n the values (12) of the preceding Capo: the other ones will be but a combination of them. Let us pass on to see that, in order to find the above said values of l, m, n, it is convenient to take the first three from equations (3): these only will thus be the substantially different ones. Later this will be made most clear when we will prove that all the trinomials (1) after the first three can be made expressed by these three only and their derivatives.

Since we are permitted from equation $x = x(a)$ to extract inversely a through x, we are also permitted to consider the five quantities y, z, l, m, n as functions of a since they are functions of x before. We will denote by primes their derivatives with respect to x, thus

$$\frac{dy}{da} = y'\frac{dx}{da} \quad ; \quad \frac{d^2y}{da^2} = y''\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + y'\frac{d^2x}{da^2}$$
$$\frac{d^3y}{da^3} = y'''\left(\frac{dx}{da}\right)^3 + 3y''\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da^2} + y'\frac{d^3x}{da^3}$$

and similarly for the derivatives of the other four quantities. That posed, the first of the (3) becomes

$$\left(\frac{dx}{da}\right)^2 (l' + y'm' + z'n') = 0$$

and since $\frac{dx}{da}$ could not be zero, because x would then be constant, we will have

$$(4)\qquad l' + y'm' + z'n' = 0\ .$$

La seconda delle (3), dopo le sostituzioni, può mettersi sotto la forma

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dx}{da}\right)^2\frac{d^2x}{da^2}\left(l'+y'm'+z'n'\right)'+\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2\left(l'+y'm'+z'n'\right)\\&+\left(\frac{dx}{da}\right)^4\left(m''y''+n''z''\right)=0\end{aligned}$$

la quale si semplifica assai in forza della precedente, e ci somministra l'altra

$$m''y''+n''z''=0\ . \tag{5}$$

La terza delle (3), eseguite le sostituzioni, si presenta alquanto complicata, ma con un po' di pazienza si vede che si può ridurre alla forma

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dx}{da}\right)^3\frac{d^3x}{da^3}\left\{\left(l'+y'm'+z'n'\right)''-2\left(m''y''+n''z''\right)\right\}\\+3\ &\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^3x}{da^3}\left(l'+y'm'+z'n'\right)'+\left(\frac{d^3x}{da^3}\right)^2\left(l'+y'm'+z'n'\right)\\+3\ &\left(\frac{dx}{da}\right)^4\frac{d^2x}{da^2}\left(m''y''+n''z''\right)'+9\left(\frac{dx}{da}\right)^2\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2\left(m''y''+n''z''\right)\\+\ &\left(\frac{dx}{da}\right)^6\left(m'''y'''+n'''z'''\right)=0\ .\end{aligned}$$

Quindi, stanti le equazioni (4), (5), ne caviamo la terza

$$m'''y'''+n'''z'''=0\ . \tag{6}$$

L'integrazione delle tre equazioni (4), (5), (6), per dedurne i valori di l, m, n, è stata fatta da Lagrange (M. A., t. 1.°, pag. 168-169 2ª edizione; pag. 161 3.ª edizione): la riproduco con qualche modificazione.

Si sommi la (5) colla sua derivata moltiplicata per α, e colla (6) moltiplicata per β, essendo $\alpha\,\beta$ due arbitrarie: avremo

$$\begin{aligned}&m''\left(y''+\alpha y'''\right)+m'''\left(\alpha y''+\beta y'''\right)\\+\quad&n''\left(z''+\alpha z'''\right)+n'''\left(\alpha z''+\beta z'''\right)=0\ .\end{aligned}$$

Disponiamo delle due arbitrarie α, β col porre

$$y''+\alpha y'''=0\quad;\quad\alpha y''+\beta y'''=0\ ;$$

l'equazione precedente diventa tale che può scriversi

$$\left(z''y'''-y''z'''\right)\left(n''y'''-y''n'''\right)=0\ . \tag{7}$$

The second of the (3), after the substitutions, can be put under the form

$$\left(\frac{dx}{da}\right)^2 \frac{d^2x}{da^2}\,(l' + y'm' + z'n')' + \left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 (l' + y'm' + z'n') + \left(\frac{dx}{da}\right)^4 (m''y'' + n''z'') = 0$$

which is much simplified by virtue of the preceding one, and serves us the other

$$m''y'' + n''z'' = 0\ . \tag{5}$$

The third of the (3), once the substitutions have been performed, presents itself rather complicated, but with a bit of patience we see that it can be reduced to the form

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dx}{da}\right)^3 \frac{d^3x}{da^3} \left\{(l' + y'm' + z'n')'' - 2\,(m''y'' + n''z'')\right\} \\ +3 \quad & \frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^3x}{da^3}\,(l' + y'm' + z'n')' + \left(\frac{d^3x}{da^3}\right)^2 (l' + y'm' + z'n') \\ +3 \quad & \left(\frac{dx}{da}\right)^4 \frac{d^2x}{da^2}\,(m''y'' + n''z'')' + 9\left(\frac{dx}{da}\right)^2 \left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 (m''y'' + n''z'') \\ + \quad & \left(\frac{dx}{da}\right)^6 (m'''y''' + n'''z''') = 0\ . \end{aligned}$$

Then, according to equations (4), (5), we obtain the third

$$m'''y''' + n'''z''' = 0\ . \tag{6}$$

The integration of the three equations (4), (5), (6), to deduce the values of l, m, n, has been done by Lagrange (A. M., tome 1^{st}, pages. 168-169 2^{nd} edition; pages 161 3^{rd} edition): I reproduce it with some modifications.

Let us sum the (5) with his derivative multiplied by α, and with (6) multiplied by β, the two α, β being arbitrary: we will have

$$\begin{aligned} & m''\,(y'' + \alpha y''') + m'''\,(\alpha y'' + \beta y''') \\ + \quad & n''\,(z'' + \alpha z''') + n'''\,(\alpha z'' + \beta z''') = 0\ . \end{aligned}$$

Let us arrange the two arbitrary α, β by posing

$$y'' + \alpha y''' = 0 \quad ; \quad \alpha y'' + \beta y''' = 0\ ;$$

the preceding equation becomes so that it can be writen

$$(z''y''' - y''z''')\,(n''y''' - y''n''') = 0\ . \tag{7}$$

In questa il primo fattore non può essere zero: se lo fosse, se ne caverebbe $\frac{z'''}{z''} = \frac{y'''}{y''}$, quindi, mediante una integrazione, $z'' = Gy''$ (G costante per riguardo ad x), e con altre due integrazioni si avrebbe l'equazione di un piano a cui le coordinate della curva dovrebbero sempre soddisfare: il che non è ammissibile in generale. Dunque sarà zero l'altro fattore nella (7), cioè si avrà

$$\frac{n'''}{n''} = \frac{y'''}{y''} \ .$$

Di qui con una integrazione $\quad n'' = s_1 y''$

e con altre due $\quad n = w_3 + s_1 y - s_2 x$,

essendo s_1, $-s_2$, w_3 tre costanti arbitrarie. Il valore di n'' qui sopra trovato si ponga nella (5), ne dedurremo

$$m'' = -s_1 z''$$

e dopo due integrazioni $\quad m = w_2 - s_1 z + s_2 x$

essendo w_2, s_3 le nuove costanti da esso introdotte. Per ultimo i valori

$$m' = -s_1 z' + s_3 \quad ; \quad n' = s_1 y' - s_2$$

che incontriamo per via nelle operazioni precedenti, sostituiti nelle (4), conducono a trovare dopo una integrazione e l'introduzione di una nuova costante w_1, $l = w_1 + s_2 z - s_3 y$. Ecco ritornati per l, m, n i valori (12) del Capo precedente.

7. Risultando dal sin qui detto che le sole prime tre delle equazioni (3) sono le sostanzialmente diverse, l'equazione generalissima del moto e dell'equilibrio de' sistemi lineari sarà

$$\begin{aligned}
&\int da. \left\{\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\} \\
(8)\qquad + &\int da. \left\{ \lambda\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da}\right)\right. \\
&\quad +\mu\left(\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2\delta x}{da^2} + \frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2\delta y}{da^2} + \frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2\delta z}{da^2}\right) \\
&\quad \left. +\nu\left(\frac{d^3x}{da^3}\frac{d^3\delta x}{da^3} + \frac{d^3y}{da^3}\frac{d^3\delta y}{da^3} + \frac{d^3z}{da^3}\frac{d^3\delta z}{da^3}\right)\right\} + \Omega = 0
\end{aligned}$$

intendendo espressi colla Ω i termini introdotti da forze, se mai vi sono, applicati a punti determinati.

Praticando le solite trasformazioni a fine di liberare dalle derivazioni le δx, δy, δz sotto il segno integrale (vedi M. A., tom. 1.°, num. 54), e ponendo per

In this one the first factor cannot be zero: if it were so, we would get $\frac{z'''}{z''} = \frac{y'''}{y''}$, then, by an integration, $z'' = Gy''$ (G constant with respect to x), and by two other integrations we would have the equation of a plane, which the coordinates of the curve should always satisfy: which is not admissible in general. Thus, the other factor in (7) will be zero, that is, we will have

$$\frac{n'''}{n''} = \frac{y'''}{y''} \; .$$

From here, by an integration $\qquad n'' = s_1 y''$
and by other two $\qquad n = w_3 + s_1 y - s_2 x$,
s_1, $-s_2$, w_3 being three arbitrary constants.

Let us introduce the value of n'' found here above in (5), we will hence deduce

$$m'' = -s_1 z''$$

and after two integrations $\qquad m = w_2 - s_1 z + s_2 x$
w_2, s_3 being the new constants introduced by it. Lastly, the values

$$m' = -s_1 z' + s_3 \quad ; \quad n' = s_1 y' - s_2$$

which we meet through the preceding operations, substituted into (4), lead to find, after an integration and the introduction of a new constant w_1, $l = w_1 + s_2 z - s_3 y$. Here the values (12) of the precedent Capo come again for l, m, n.

7. Since, from what has been said until now, it results that the only first three of equations (3) are substantially different, the most general equation of the motion and equilibrium of linear systems will be

$$\begin{aligned}
& \textstyle\int da. \left\{\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\} \\
+ & \textstyle\int da. \left\{ \lambda\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da}\right)\right. \\
& \quad +\mu\left(\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2\delta x}{da^2} + \frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2\delta y}{da^2} + \frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2\delta z}{da^2}\right) \\
& \quad \left. +\nu\left(\frac{d^3x}{da^3}\frac{d^3\delta x}{da^3} + \frac{d^3y}{da^3}\frac{d^3\delta y}{da^3} + \frac{d^3z}{da^3}\frac{d^3\delta z}{da^3}\right)\right\} + \Omega = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

being expressed by Ω the terms introduced by forces, if any, applied to determined points.

Operating the usual transformations with the aim of freeing the δx, δy, δz from derivations under the integral sign (see A. M., tome 1st, sect. 54), and posing for abbreviare

$$P=\lambda\frac{dx}{da}-\frac{d\left(\mu\frac{d^2x}{da^2}\right)}{da}+\frac{d^2\left(\nu\frac{d^3x}{da^3}\right)}{da^2}$$

$$Q=\lambda\frac{dy}{da}-\frac{d\left(\mu\frac{d^2y}{da^2}\right)}{da}+\frac{d^2\left(\nu\frac{d^3y}{da^3}\right)}{da^2}$$

(9) $$R=\lambda\frac{dz}{da}-\frac{d\left(\mu\frac{d^2z}{da^2}\right)}{da}+\frac{d^2\left(\nu\frac{d^3z}{da^3}\right)}{da^2}$$

$$T=P\delta x+Q\delta y+R\delta z$$

$$+\left(\mu\frac{d^2x}{da^2}-\frac{d\left(\nu\frac{d^3x}{da^3}\right)}{da}\right)\frac{d\delta x}{da}+\left(\mu\frac{d^2y}{da^2}-\frac{d\left(\nu\frac{d^3y}{da^3}\right)}{da}\right)\frac{d\delta y}{da}+\left(\mu\frac{d^2z}{da^2}-\frac{d\left(\nu\frac{d^3z}{da^3}\right)}{da}\right)\frac{d\delta z}{da}$$

$$+\nu\frac{d^3x}{da^3}\frac{d^2\delta x}{da^2}+\nu\frac{d^3y}{da^3}\frac{d^2\delta y}{da^2}+\nu\frac{d^3z}{da^3}\frac{d^2\delta z}{da^2}\ ;$$

la quantità sottoposta nella (8) al secondo segno integrale diventa

$$-\frac{dP}{da}\delta x-\frac{dQ}{da}\delta y-\frac{dR}{da}\delta z+\frac{dT}{da}\ .$$

Pertanto, giusta il metodo conosciuto, si ricavano dalla (8) le quattro equazioni

$$X-\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dP}{da}$$

(10) $$Y-\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dQ}{da}$$

$$Z-\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dR}{da}$$

(11) $$T_2-T_1+\Omega=0$$

nell'ultima delle quali T_2, T_1 significano i valori che riceve la T ai due limiti del sistema lineare pei valori particolari ivi presi dalla variabile a.

Facile è cambiare le precedenti (10) nelle (25), n. 80 m. p., che hanno le derivate prese per la x dello stato attuale, cioè

$$\Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{dP}{dx}$$

(12) $$\Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\frac{dQ}{dx}$$

$$\Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Z-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{dR}{dx}\quad .$$

shortening

$$P=\lambda\frac{dx}{da}-\frac{d\left(\mu\frac{d^2x}{da^2}\right)}{da}+\frac{d^2\left(\nu\frac{d^3x}{da^3}\right)}{da^2}$$

$$Q=\lambda\frac{dy}{da}-\frac{d\left(\mu\frac{d^2y}{da^2}\right)}{da}+\frac{d^2\left(\nu\frac{d^3y}{da^3}\right)}{da^2}$$

(9)
$$R=\lambda\frac{dz}{da}-\frac{d\left(\mu\frac{d^2z}{da^2}\right)}{da}+\frac{d^2\left(\nu\frac{d^3z}{da^3}\right)}{da^2}$$

$$T=P\delta x+Q\delta y+R\delta z$$

$$+\left(\mu\frac{d^2x}{da^2}-\frac{d\left(\nu\frac{d^3x}{da^3}\right)}{da}\right)\frac{d\delta x}{da}+\left(\mu\frac{d^2y}{da^2}-\frac{d\left(\nu\frac{d^3y}{da^3}\right)}{da}\right)\frac{d\delta y}{da}+\left(\mu\frac{d^2z}{da^2}-\frac{d\left(\nu\frac{d^3z}{da^3}\right)}{da}\right)\frac{d\delta z}{da}$$

$$+\nu\frac{d^3x}{da^3}\frac{d^2\delta x}{da^2}+\nu\frac{d^3y}{da^3}\frac{d^2\delta y}{da^2}+\nu\frac{d^3z}{da^3}\frac{d^2\delta z}{da^2}\ ;$$

the quantity subjected in (8) to the second integral sign becomes

$$-\frac{dP}{da}\delta x-\frac{dQ}{da}\delta y-\frac{dR}{da}\delta z+\frac{dT}{da}\ .$$

Therefore, according to the known method, we obtain from (8) the four equations

$$X-\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dP}{da}$$

(10)
$$Y-\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dQ}{da}$$

$$Z-\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dR}{da}$$

(11)
$$T_2-T_1+\Omega=0$$

in the last of which T_2, T_1 mean the values that T attains at the two limits of the linear systems, for the particular values taken there by the variable a.

It is easy to change the preceding (10) into the (25), sect. 80 p. m., that have the derivatives taken with respect to x of the present state, that is,

$$\Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{dP}{dx}$$

(12)
$$\Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\frac{dQ}{dx}$$

$$\Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\left(Z-\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\frac{dR}{dx}\quad .$$

Basta a tal uopo osservare che $\frac{dP}{da} = \frac{dP}{dx}\frac{dx}{da}$; $\frac{dQ}{da} = \frac{dQ}{dx}\frac{dx}{da}$; $\frac{dR}{da} = \frac{dR}{dx}\frac{dx}{da}$; e mettere per $\frac{dx}{da}$ il suo valore cavato dall'equazione identica

$$\Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\,.\,\frac{dx}{da}=1 \tag{13}$$

che è la (13), n. 79 m. p.

Noterò che possono assumersi le tre indeterminate P, Q, R in luogo delle λ, μ, ν; ma che però entrando queste a comporre l'espressione della T che giuoca ai limiti, conviene eliminarvele sostituendo i loro valori dedotti dalle equazioni (9); su di ciò per ora non mi trattengo. Osserverò inoltre che quando μ, ν sono zero, abbiamo dalle (9) e dalla (13)

$$P=\frac{\lambda}{\Gamma V}\quad ; \quad Q=\frac{\lambda}{\Gamma V}\frac{dy}{dx}\quad ; \quad R=\frac{\lambda}{\Gamma V}\frac{dz}{dx} \tag{14}$$

stando la V in luogo del radicale visibile nella (13); e la quantità T si riduce

$$T=\frac{\lambda}{\Gamma V}\left(\delta x+\frac{dy}{dx}\delta y+\frac{dz}{dx}\delta z\right)\ .$$

Coi valori (14) sostituiti nelle (12), fatta avvertenza all'equazione identica

$$\left(\frac{1}{V}\right)'+y'\left(\frac{y'}{V}\right)'+z'\left(\frac{z'}{V}\right)'=0\ ,$$

si cava facilmente la

$$\left(\frac{\lambda}{\Gamma}\right)'=\Gamma\left\{X-\frac{d^2x}{dt^2}+y'\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+z'\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right\} \tag{15}$$

che serve alla determinazione della λ: in queste due ultime equazione gli apici indicano derivate riguardo alla x.

Ritengasi per altro che nel più dei casi giova conservare la soluzione come è espressa dalle formole (9), (10), (11): sì fatta soluzione è la più generale, talché è impossibile sianvi casi di moti lineari che in dette equazioni non restino compresi. Ritornerò più tardi a ragionare intorno alle forze interne di tali sistemi e al modo di valutarle.

8. Passiamo ai sistemi superficiali. Sono di varie sorte in tal caso i trinomj nei quali si verifica la propietà che, sostituiti per le x, y, z i valori (1) del Capo precedente, ritornano fatti colle p, q, r allo stesso modo, scomparsa ogni traccia dei dodici elementi f, g, h, α_1, ec. Siccome pe' sistemi superficiali le x, y, z si considerano funzioni di due variabili semplici a, b relative allo

It suffices for this purpose to remark that $\frac{dP}{da} = \frac{dP}{dx}\frac{dx}{da}$; $\frac{dQ}{da} = \frac{dQ}{dx}\frac{dx}{da}$; $\frac{dR}{da} = \frac{dR}{dx}\frac{dx}{da}$; and to put for $\frac{dx}{da}$ its value pulled out from the identical equation

$$\Gamma\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\cdot\frac{dx}{da}=1 \tag{13}$$

that is the (13), sect. 79 p. m.

I will notice that we may assume the three indeterminate P, Q, R in place of λ, μ, ν; but since these enter to compose the expression of T acting at the limits, it is convenient to eliminate them substituting their values deduced from equations (9); I do not dwell on this for now. Moreover, I will observe that when μ, ν are zero, we have from (9) and (13)

$$P=\frac{\lambda}{\Gamma V} \quad ; \quad Q=\frac{\lambda}{\Gamma V}\frac{dy}{dx} \quad ; \quad R=\frac{\lambda}{\Gamma V}\frac{dz}{dx} \tag{14}$$

where V stands in place of the radical visible in the (13); and the quantity T reduces to

$$T=\frac{\lambda}{\Gamma V}\left(\delta x+\frac{dy}{dx}\delta y+\frac{dz}{dx}\delta z\right) \ .$$

By the values (14) substituted into the (12), once remarked the identical equation

$$\left(\frac{1}{V}\right)'+y'\left(\frac{y'}{V}\right)'+z'\left(\frac{z'}{V}\right)'=0 \ ,$$

we easily obtain

$$\left(\frac{\lambda}{\Gamma}\right)'=\Gamma\left\{X-\frac{d^2x}{dt^2}+y'\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)+z'\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\right\} \tag{15}$$

that serves for the determination of the λ: in these two latter equations the primes stand for derivatives with respect to x.

Suppose, moreover, that in most cases it is useful to keep the solution as expressed by the formulæ (9), (10), (11): such solution is the most general one, so that it is impossible that there are cases of linear motions not included in the said equations. I will go back later to discuss about the inner forces of such systems and about the way to evaluate them.

8. Let us pass to superficial systems. In such case, of various sorts are the trinomials made in which the property is verified, that, substituted in x, y, z the values (1) of the preceding Capo, they come out made in the same way by the p, q, r, any trace of the twelve elements f, g, h, α_1, etc. being disappeared. Since for superficial systems the x, y, z are considered functions of two simple variables a, b relative to the

stato antecedente (n. 12 m. p.), di que' trinomj tre sono formati colle derivate di primo ordine, e sono:

$$(16)\qquad \begin{aligned}&\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{da}\right)^2\\ &\left(\frac{dx}{db}\right)^2+\left(\frac{dy}{db}\right)^2+\left(\frac{dz}{db}\right)^2\\ &\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dz}{da}\frac{dz}{db}\ ;\end{aligned}$$

in numero di sei constano di derivate di primo e di secondo ordine, cioè

$$(17)\qquad \begin{aligned}&\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{da^2}\\ &\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{da\,db}\\ &\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{db^2}\\ &\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{da^2}\\ &\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{da\,db}\\ &\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{db^2}\end{aligned}$$

e ve ne hanno altri sei con sole derivate di secondo ordine

$$(18)\qquad \begin{aligned}&\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2\\ &\left(\frac{d^2x}{db^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{db^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{db^2}\right)^2\\ &\left(\frac{d^2x}{da\,db}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{da\,db}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{da\,db}\right)^2\\ &\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{db^2}\\ &\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{da\,db}\\ &\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{da\,db}\ .\end{aligned}$$

Poi seguono i trinomj con derivate di terz'ordine e di ordine più elevato, all'infinito.

antecedent state (sect. 12 p. m.), of those trinomials three are formed by the derivatives of first order, and are:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\left(\frac{dz}{da}\right)^2\\
&\left(\frac{dx}{db}\right)^2+\left(\frac{dy}{db}\right)^2+\left(\frac{dz}{db}\right)^2\\
&\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dz}{da}\frac{dz}{db}\ ;
\end{aligned}
\tag{16}
$$

six in number are made of derivatives of first and second order, that is

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{da^2}\\
&\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{da\,db}\\
&\frac{dx}{da}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{da}\frac{d^2z}{db^2}\\
&\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{da^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{da^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{da^2}\\
&\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{da\,db}\\
&\frac{dx}{db}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{dy}{db}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{dz}{db}\frac{d^2z}{db^2}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

and there are six others with only second order derivatives

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{da^2}\right)^2\\
&\left(\frac{d^2x}{db^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{db^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{db^2}\right)^2\\
&\left(\frac{d^2x}{da\,db}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{da\,db}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{da\,db}\right)^2\\
&\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{db^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{db^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{db^2}\\
&\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2z}{da\,db}\\
&\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2x}{da\,db}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2y}{da\,db}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2z}{da\,db}\ .
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Then the trinomials with derivatives of third order and higher order follow, to infinity.

Qui pure, come nel caso de' trinomj segnati (1) al principio di questo Capo, possono instituirsi infinite equazioni di cui spariscono i secondi membri quando si deriva nel senso indicato dalla caratteristica δ, cioè si opera relativamente ad elementi analitici dei quali que' secondi membri sono privi, quantunque possano essere altrimenti variabili. Quindi infinite equazioni variate come le (2), (3) da trattarsi col solo metodo dei moltiplicatori. Di queste infinite equazioni però, tranne sei, tutte le altre non sono che combinazioni di esse, e le sei sostanzialmente diverse sono quelle necessarie e bastanti a fornire per le variazioni δx, δy, δz, ovvero l, m, n i soliti valori (12) del Capo precedente. Esse ci vengono somministrate dai trinomj della precedente riunione (16), e dai primi tre della riunione (18): sono cioè le sei seguenti:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{da}\frac{dl}{da}+\frac{dy}{da}\frac{dm}{da}+\frac{dz}{da}\frac{dn}{da}=0\\
&\frac{dx}{db}\frac{dl}{db}+\frac{dy}{db}\frac{dm}{db}+\frac{dz}{db}\frac{dn}{db}=0\\
&\frac{dx}{da}\frac{dl}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dm}{db}+\frac{dz}{da}\frac{dn}{db}\\
+\quad&\frac{dx}{db}\frac{dl}{da}+\frac{dy}{db}\frac{dm}{da}+\frac{dz}{db}\frac{dn}{da}=0\\
&\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2l}{da^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2m}{da^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2n}{da^2}=0\\
&\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2l}{db^2}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2m}{db^2}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2n}{db^2}=0\\
&\frac{d^2x}{da\,db}\frac{d^2l}{da\,db}+\frac{d^2y}{da\,db}\frac{d^2m}{da\,db}+\frac{d^2z}{da\,db}\frac{d^2n}{da\,db}=0\quad.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Ciò si farà manifesto pel calcolo che ora intraprendiamo, al quale si esigono tutte le equazioni (19) né più né meno.

Qui delle sei quantità x, y, z, l, m, n intenderemo le ultime quattro funzioni di a, b in quanto prima lo sono delle x, y, e indicheremo con apici in alto le derivato per x, e con apici in basso quelle per y. Ponendo poi per brevità

$$
\begin{gathered}
L=l'+n'z'\quad;\quad M=m_{\prime}+n_{\prime}z_{\prime}\\
N=l_{\prime}+m'+n_{\prime}z'+n'z_{\prime}\ ;
\end{gathered}
\tag{20}
$$

risovvenendoci che abbiamo

$$
\frac{dz}{da}=z'\frac{dx}{da}+z_{\prime}\frac{dy}{da}\quad;\quad\frac{dz}{db}=z'\frac{dx}{db}+z_{\prime}\frac{dy}{db}
$$

Here too, as in the case of the trinomials denoted (1) at the beginning of this Capo, we may establish infinite equations whose the right-hand sides disappear when we derive in the sense indicated by the characteristic δ, i.e., we operate with respect to analytical elements whose those right-hand sides are devoid, although they may be otherwise variable. Thus, infinite varied equations like (2), (3) to be manipulated only by the method of multipliers. Of these infinite equations, however, all others except six are but combinations of them, and the six substantially different are those necessary and sufficient to yield the usual values (12) of the preceding Capo for the variations δx, δy, δz, or l, m, n. They are provided by the trinomials of the preceding gathering (16), and by the first three of the gathering (18): they are so the following:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{da}\frac{dl}{da}+\frac{dy}{da}\frac{dm}{da}+\frac{dz}{da}\frac{dn}{da}=0\\
&\frac{dx}{db}\frac{dl}{db}+\frac{dy}{db}\frac{dm}{db}+\frac{dz}{db}\frac{dn}{db}=0\\
&\frac{dx}{da}\frac{dl}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dm}{db}+\frac{dz}{da}\frac{dn}{db}\\
(19)\qquad + &\frac{dx}{db}\frac{dl}{da}+\frac{dy}{db}\frac{dm}{da}+\frac{dz}{db}\frac{dn}{da}=0\\
&\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2l}{da^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2m}{da^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2n}{da^2}=0\\
&\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2l}{db^2}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2m}{db^2}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2n}{db^2}=0\\
&\frac{d^2x}{da\,db}\frac{d^2l}{da\,db}+\frac{d^2y}{da\,db}\frac{d^2m}{da\,db}+\frac{d^2z}{da\,db}\frac{d^2n}{da\,db}=0 \quad .
\end{aligned}$$

This will be manifest by the calculation that we undertake now, for which all equations (19), no more, no less, are required.

Of the six quantities x, y, z, l, m, n we intend the last four as functions of a, b as they are functions of x, y before, and will denote by superscript primes above the derivatives with respect to x, and with subscript primes below those with respect to y. Then, posing for brevity

$$(20)\qquad \begin{gathered} L=l'+n'z' \quad ; \quad M=m_{\prime}+n_{\prime}z_{\prime} \\ N=l_{\prime}+m'+n_{\prime}z'+n'z_{\prime} \ ; \end{gathered}$$

and remembering that we have

$$\frac{dz}{da}=z'\frac{dx}{da}+z_{\prime}\frac{dy}{da} \quad ; \quad \frac{dz}{db}=z'\frac{dx}{db}+z_{\prime}\frac{dy}{db}$$

ed espressioni simili per le derivate delle l, m, n: troveremo che le tre prime equazioni (19) diventano dopo le sostituzioni:

$$\left(\frac{dx}{da}\right)^2 L+\left(\frac{dy}{da}\right)^2 M+\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}N=0$$
$$\left(\frac{dx}{db}\right)^2 L+\left(\frac{dy}{db}\right)^2 M+\frac{dx}{db}\frac{dy}{db}N=0$$
$$2\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}L+2\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}M+\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)N=0\ .$$

Di queste si moltiplichi la seconda per α^2, e la terza per α, essendo α un'arbitraria, indi le tre equazioni si sommino; l'unica equazione risultante potrà scriversi

$$L\left(\frac{dx}{da}+\alpha\frac{dx}{db}\right)^2+M\left(\frac{dy}{da}+\alpha\frac{dy}{db}\right)^2+N\left(\frac{dx}{da}+\alpha\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{da}+\alpha\frac{dy}{db}\right)=0\ . \tag{21}$$

Se ora disponiamo dell'arbitraria α per verificare l'equazione

$$\frac{dy}{da}+\alpha\frac{dy}{db}=0\ ,$$

la precedente si ridurrà alla

$$L\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)^2=0$$

dove il coefficiente di L non può essere zero, altrimenti verrebbe infinita la densità superficiale (equazioni (20), (22), n. 12 m. p.): dunque convien che sia $L=0$. Per simil guisa, disponendo invece della α a fine di verificare l'equazione

$$\frac{dx}{da}+\alpha\frac{dx}{db}=0\ ,$$

si prova $M=0$; e quando in vista di questi risultati si cancellino nella (21) i due primi termini, essa ci dà altresì $N=0$, perché non può essere zero il coefficiente ove la α conserva il suo valore indeterminato.

Cominciamo pertanto ad avere

$$L=0 \quad ; \quad M=0 \quad ; \quad N=0 \tag{22}$$

ossia, viste le determinazioni (20),

$$\begin{gathered} l'+n'z'=0 \quad ; \quad m_\prime+n_\prime z_\prime=0 \\ l_\prime+m'+n_\prime z'+n'z_\prime=0\ . \end{gathered} \tag{23}$$

and similar expressions for the derivatives of the l, m, n: we will find that the first three equations (19) become, after the substitutions:

$$\left(\frac{dx}{da}\right)^2 L + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 M + \frac{dx}{da}\frac{dy}{da} N = 0$$
$$\left(\frac{dx}{db}\right)^2 L + \left(\frac{dy}{db}\right)^2 M + \frac{dx}{db}\frac{dy}{db} N = 0$$
$$2\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} L + 2\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} M + \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right) N = 0 \ .$$

Let us multiply the second of these by α^2, and the third by α, α being arbitrary, then let us sum the three equations; the only resulting equation can be written

$$(21) \qquad L\left(\frac{dx}{da} + \alpha\frac{dx}{db}\right)^2 + M\left(\frac{dy}{da} + \alpha\frac{dy}{db}\right)^2 + N\left(\frac{dx}{da} + \alpha\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{da} + \alpha\frac{dy}{db}\right) = 0 \ .$$

If we now require the arbitrary α to verify the equation

$$\frac{dy}{da} + \alpha\frac{dy}{db} = 0 \ ,$$

the preceding one will reduce to

$$L\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)^2 = 0$$

where the coefficient of L cannot be zero, otherwise the surface density would result infinite (equations (20), (22), sect. 12 p. m.): it turns out, then, that $L = 0$. By a similar manner, requiring α with the aim to verify instead the equation

$$\frac{dx}{da} + \alpha\frac{dx}{db} = 0 \ ,$$

we prove $M = 0$; and when, once these results have been seen, we cancel in (21) the first two terms, it will also provide $N = 0$, since the coefficient where α keeps its indeterminate value cannot be zero.

Let us thus begin to have

$$(22) \qquad L = 0 \quad ; \quad M = 0 \quad ; \quad N = 0$$

namely, once the definitions (20) have been seen,

$$(23) \qquad \begin{gathered} l' + n'z' = 0 \quad ; \quad m_{,} + n_{,}z_{,} = 0 \\ l_{,} + m' + n_{,}z' + n'z_{,} = 0 \ . \end{gathered}$$

Passiamo alla quarta delle (19), osservando essere

$$\frac{d^2 l}{da^2} = l'' \left(\frac{dx}{da}\right)^2 + 2l'_{\prime} \frac{dx}{da}\frac{dy}{da} + l_{\prime\prime}\frac{d^2x}{da^2} + l_{\prime}\frac{d^2y}{da^2}$$

ed aversi espressioni affatto simili per $\frac{d^2m}{da^2}$, $\frac{d^2n}{da^2}$, $\frac{d^2z}{da^2}$.

Fatte le sostituzioni ed eseguiti pazientemente i prodotti, si trova di poter mettere l'equazione risultante sotto la forma seguente

$$\begin{gathered}
\left(\frac{dx}{da}\right)^2 \frac{d^2x}{da^2} L' + 2\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}\frac{d^2x}{da^2} L_{\prime} + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 \frac{d^2x}{da^2}\left(N_{\prime} - M'\right) \\
+ \left(\frac{dx}{da}\right)^2 \frac{d^2y}{da^2}\left(N' + L_{\prime}\right) + 2\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da^2} M' + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 \frac{d^2y}{da^2} M_{\prime} \\
+ \left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 L + \left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2 M + \frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2y}{da^2} N \\
+ \left(\frac{dx}{da}\right)^4 z'' n'' + 2\left(\frac{dx}{da}\right)^3 \frac{dy}{da}\left(z'' n'_{\prime} + z'_{\prime} n''\right) \\
+ \left(\frac{dx}{da}\right)^2 \left(\frac{dy}{da}\right)^2 \left(z'' n_{\prime\prime} + 4 z'_{\prime} n'_{\prime} + z_{\prime\prime} n''\right) \\
+2\frac{dx}{da}\left(\frac{dy}{da}\right)^3 \left(z'_{\prime} n_{\prime\prime} + z_{\prime\prime} n'_{\prime}\right) + \left(\frac{dy}{da}\right)^4 z_{\prime\prime} n_{\prime\prime} = 0\ .
\end{gathered}$$

I primi nove termini di questa espressione vanno via da sé in conseguenza delle equazioni (22) sopra dimostrate: gli altri possono ridursi al prodotto di due trinomj come segue

$$\tag{24} \begin{gathered}
\left\{ n'' \left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 + 2n'_{\prime}\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} + n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{da}\right)^2 \right\} \times \\
\left\{ z'' \left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2 + 2z'_{\prime}\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} + z_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{da}\right)^2 \right\} = 0\ .
\end{gathered}$$

Senza ripetere il calcolo non ci può essere difficoltà a capire che la quinta delle (19) ci conduce a trovare l'equazione analoga

$$\tag{25} \begin{gathered}
\left\{ n'' \left(\frac{d^2x}{db^2}\right)^2 + 2n'_{\prime}\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} + n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{db}\right)^2 \right\} \times \\
\left\{ z'' \left(\frac{d^2x}{db^2}\right)^2 + 2z'_{\prime}\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} + z_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{db}\right)^2 \right\} = 0
\end{gathered}$$

giacché tutto deve procedere egualmente, colla sola differenza di avere le derivazioni per b invece che per a.

Volendo ora riconoscere che cosa ci dia la sesta delle equazioni (19), osserveremo essere

$$\frac{d^2 l}{da\,db} = l''\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} + l'_{\prime}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right) + l_{\prime\prime}\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} + l'\frac{d^2x}{da\,db} + l_{\prime}\frac{d^2y}{da\,db}$$

Let us pass to the fourth one of the (19), checking that it is

$$\frac{d^2l}{da^2}=l''\left(\frac{dx}{da}\right)^2+2l'_{,}\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}+l_{,,}\frac{d^2x}{da^2}+l_{,}\frac{d^2y}{da^2}$$

and that we have expressions at all similar for $\frac{d^2m}{da^2}$, $\frac{d^2n}{da^2}$, $\frac{d^2z}{da^2}$.

Once the substitutions have been made and the products have been patiently performed, we see that we may put the resulting equation under the following form

$$\begin{gathered}
\left(\frac{dx}{da}\right)^2\frac{d^2x}{da^2}L'+2\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}\frac{d^2x}{da^2}L_{,}+\left(\frac{dy}{da}\right)^2\frac{d^2x}{da^2}(N_{,}-M')\\
+\left(\frac{dx}{da}\right)^2\frac{d^2y}{da^2}(N'+L_{,})+2\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{da^2}M'+\left(\frac{dy}{da}\right)^2\frac{d^2y}{da^2}M_{,}\\
+\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2L+\left(\frac{d^2y}{da^2}\right)^2M+\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2y}{da^2}N\\
+\left(\frac{dx}{da}\right)^4z''n''+2\left(\frac{dx}{da}\right)^3\frac{dy}{da}(z''n'_{,}+z'_{,}n'')\\
+\left(\frac{dx}{da}\right)^2\left(\frac{dy}{da}\right)^2(z''n_{,,}+4z'_{,}n'_{,}+z_{,,}n'')\\
+2\frac{dx}{da}\left(\frac{dy}{da}\right)^3(z'_{,}n_{,,}+z_{,,}n'_{,})+\left(\frac{dy}{da}\right)^4z_{,,}n_{,,}=0\ .
\end{gathered}$$

The first nine terms of this expression vanish by themselves as a consequence of equations (22), above proved: the others may be reduced to the product of two trinomials as follows

$$\begin{gathered}\left\{n''\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2+2n'_{,}\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}+n_{,,}\left(\frac{dy}{da}\right)^2\right\}\times\\
\left\{z''\left(\frac{d^2x}{da^2}\right)^2+2z'_{,}\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}+z_{,,}\left(\frac{dy}{da}\right)^2\right\}=0\ .\end{gathered}\tag{24}$$

Without repeating the calculation, there cannot be difficulty in understanding that the fifth one of the (19) leads us to find the analogous equation

$$\begin{gathered}\left\{n''\left(\frac{d^2x}{db^2}\right)^2+2n'_{,}\frac{dx}{db}\frac{dy}{db}+n_{,,}\left(\frac{dy}{db}\right)^2\right\}\times\\
\left\{z''\left(\frac{d^2x}{db^2}\right)^2+2z'_{,}\frac{dx}{db}\frac{dy}{db}+z_{,,}\left(\frac{dy}{db}\right)^2\right\}=0\end{gathered}\tag{25}$$

since everything must proceed equally, with the only difference to have derivations with respect to b instead of a.

Wishing now to recognize what the sixth of equations (19) provides, we will see that it is

$$\frac{d^2l}{da\,db}=l''\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+l'_{,}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)+l_{,,}\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}+l'\frac{d^2x}{da\,db}+l_{,}\frac{d^2y}{da\,db}$$

ed aversi espressioni del tutto simili per $\frac{d^2m}{da\,db}$, $\frac{d^2m}{da\,db}$, $\frac{d^2z}{da\,db}$. Effettuate le sostituzioni si trova che quella equazione sesta riducesi ad una forma dove primieramente si notano i nove termini

$$\begin{gathered}\frac{d^2x}{da\,db}\left\{\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}L' + \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)L_{\prime} + \frac{dy}{da}\frac{dy}{db}(N_{\prime} - M')\right\} \\ + \frac{d^2y}{da\,db}\left\{\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}(N' + L_{\prime}) + \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)M' + \frac{dy}{da}\frac{dy}{db}M_{\prime}\right\} \\ + \left(\frac{d^2x}{da\,db}\right)^2 L + \frac{d^2x}{da\,db}\frac{d^2y}{da\,db}N + \left(\frac{d^2y}{da\,db}\right)^2 M\end{gathered}$$

i quali spariscono tutti in virtù delle equazioni (22): a ciò che resta può darsi l'espressione

$$\begin{gathered}\left\{n''\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} + n'_{\prime}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right) + n_{\prime\prime}\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}\right\}\times \\ \left\{z''\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} + z'_{\prime}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right) + z_{\prime\prime}\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}\right\} = 0\ .\end{gathered} \tag{26}$$

Le equazioni (24), (25), (26) non possono verificarsi in generale col rendere nulli i secondi fattori dei loro primi membri, perchè istituendo anche una sola di tali equazioni si porrebbero nuovi vincoli fra le x, y, z, siccome vedemmo nel caso simile dell'equazione (7); si verificheranno quindi per l'annullarsi dei primi fattori, e così avremo le tre

$$\begin{aligned}&n''\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + 2n'_{\prime}\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} + n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{da}\right)^2 = 0 \\ &n''\left(\frac{dx}{db}\right)^2 + 2n'_{\prime}\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} + n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{db}\right)^2 = 0 \\ &n''\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} + n'_{\prime}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right) + n_{\prime\prime}\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} = 0\ .\end{aligned}$$

Di queste si moltiplichino la seconda per α^2 e la terza per 2α, essendo α una arbitraria, poi si sommino: l'equazione risultante potrà scriversi

$$\begin{aligned}n''\left(\frac{dx}{da} + \alpha\frac{dx}{db}\right)^2 &+ n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{da} + \alpha\frac{dy}{db}\right)^2 \\ &+ 2n'_{\prime}\left(\frac{dx}{da} + \alpha\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{da} + \alpha\frac{dy}{db}\right) = 0\ ,\end{aligned}$$

dalla quale, con un ragionamento che è precisamente il medesimo istituito sulla (21), dedurremo le tre

$$n'' = 0 \quad ; \quad n_{\prime\prime} = 0 \quad ; \quad n'_{\prime} = 0\ . \tag{27}$$

and that we have expressions similar at all for $\frac{d^2m}{da\,db}$, $\frac{d^2m}{da\,db}$, $\frac{d^2z}{da\,db}$. Once the substitutions have been made we find that that sixth equation reduces to a form where we firstly notice the nine terms

$$\begin{gathered}\frac{d^2x}{da\,db}\left\{\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}L'+\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)L_\prime+\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}(N_\prime-M')\right\}\\+\frac{d^2y}{da\,db}\left\{\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}(N'+L_\prime)+\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)M'+\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}M_\prime\right\}\\+\left(\frac{d^2x}{da\,db}\right)^2L+\frac{d^2x}{da\,db}\frac{d^2y}{da\,db}N+\left(\frac{d^2y}{da\,db}\right)^2M\end{gathered}$$

which all disappear by virtue of the equations (22): to the remaining we may give the expression

$$\begin{gathered}\left\{n''\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+n'_\prime\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)+n_{\prime\prime}\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}\right\}\times\\\left\{z''\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+z'_\prime\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)+z_{\prime\prime}\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}\right\}=0\,.\end{gathered}\tag{26}$$

Equations (24), (25), (26) cannot in general occur by making the second factors of their left-hand sides nil, since by instituting even a single one of those equations we would pose other constraints among the x, y, z, like we saw in the similar case of the equation (7); they will then be verified by the vanishing of the first factors, and we will thus have the three

$$\begin{aligned}&n''\left(\frac{dx}{da}\right)^2+2n'_\prime\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}+n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{da}\right)^2=0\\&n''\left(\frac{dx}{db}\right)^2+2n'_\prime\frac{dx}{db}\frac{dy}{db}+n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{db}\right)^2=0\\&n''\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+n'_\prime\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)+n_{\prime\prime}\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}=0\,.\end{aligned}$$

Of these, let us multiply the second by α^2 and the third by 2α, α being arbitrary, then let us sum them: the resulting equation may be written

$$\begin{gathered}n''\left(\frac{dx}{da}+\alpha\frac{dx}{db}\right)^2+n_{\prime\prime}\left(\frac{dy}{da}+\alpha\frac{dy}{db}\right)^2\\+2n'_\prime\left(\frac{dx}{da}+\alpha\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{da}+\alpha\frac{dy}{db}\right)=0\,,\end{gathered}$$

from which, by a reasoning that is precisely the same as that instituted on the (21), we will deduce the three

$$n''=0\quad;\quad n_{\prime\prime}=0\quad;\quad n'_\prime=0\,.\tag{27}$$

Queste sono integrabili a colpo d'occhio; le due prime ci dicono che la n non può contenere se non linearmente le x, y: ma fa bisogno anche della terza per mostrare l'assenza del termine che contenesse il prodotto xy: col concorso di tutte e tre otteniamo

$$n = w_3 + s_1 y - s_2 x \tag{28}$$

essendo w_3, s_1, $-s_2$ tre costanti arbitrarie relativamente alle variabili x, y. L'essere necessarie a questa determinazione tutte tre le equazioni (27) prova che era necessario assumere le tre ultime equazioni (19), senza di che quelle (27) non sarebbero risultate.

La sostituzione dei valori $n' = -s_2$, $n_{\prime} = s_1$ nelle equazioni (23) le riduce

$$l' - s_2 z' = 0 \quad ; \quad m_{\prime} + s_1 z_{\prime} = 0$$

$$l_{\prime} + m' - s_2 z_{\prime} + s_1 z' = 0 \ .$$

L'integrazione delle prime due ci porge

$$l = s_2 z + \varphi(y) \quad ; \quad m = -s_1 z + \psi(x) \ , \tag{29}$$

$\varphi(y)$, $\psi(x)$ sono funzioni arbitrarie l'una di y, l'altra di x: ma la sostituzione dei valori risultanti da queste medesime (29)

$$l_{\prime} = s_2 z_{\prime} + \varphi'(y) \quad ; \quad m' = -s_1 z' + \psi'(x)$$

nella terza, la riduce

$$\varphi'(y) + \psi'(x) = 0 \ .$$

Or questa ci dice che $\varphi(y)$ contiene linearmente la y, e così $\psi(x)$ la x, ossia hanno valori della forma

$$\varphi(y) = Ay + \omega_1 \quad ; \quad \psi(x) = Bx + \omega_2$$

essendo A, B, ω_1, ω_2 quattro costanti. Ci dice di più che sì fatti valori sostituiti in essa, palesano sussistere tra le A, B l'equazione

$$A + B = 0 \ ,$$

talché fatta $B = s_3$ deve essere $A = -s_3$. Eseguite le sostituzioni nelle equazioni (29), vediamo con esse e colla (28) riprodotti per l, m, n i soliti valori (12) del Capo precedente.

Viene così provato che le sei equazioni variate (19) sono le necessarie e sufficienti per abbracciare in tutta la sua ampiezza il problema del moto e

These are integrable at a glance; the first two tell us that n cannot contain x, y if not linearly: but the third one as well is necessary to show the absence of the term containing the product xy: by the occurrence of all three ones we obtain

$$n = w_3 + s_1 y - s_2 x \tag{28}$$

w_3, s_1, $-s_2$ being three arbitrary constants relative to the variables x, y. All the three equations (27) being necessary to this determination proves that it was necessary to assume the last three equations (19), without which those (27) would not have come out.

The substitution of the values $n' = -s_2$, $n_{\prime} = s_1$ into equations (23) reduces them to

$$l' - s_2 z' = 0 \quad ; \quad m_{\prime} + s_1 z_{\prime} = 0$$

$$l_{\prime} + m' - s_2 z_{\prime} + s_1 z' = 0 \; .$$

The integration of the first two gives us

$$l = s_2 z + \varphi(y) \quad ; \quad m = -s_1 z + \psi(x) \; , \tag{29}$$

$\varphi(y)$, $\psi(x)$ are arbitrary functions, the one of y, the other of x: but the substitution of the values resulting from these same (29)

$$l_{\prime} = s_2 z_{\prime} + \varphi'(y) \quad ; \quad m' = -s_1 z' + \psi'(x)$$

in the third, reduces it

$$\varphi'(y) + \psi'(x) = 0 \; .$$

Now this tells us that $\varphi(y)$ contains y linearly, and so $\psi(x)$ with x, i.e., they have values of the form

$$\varphi(y) = Ay + \omega_1 \quad ; \quad \psi(x) = Bx + \omega_2$$

A, B, ω_1, ω_2 being four constants. Moreover, it tells us that those values, substituted into it, make it apparent that among the A, B the equation holds

$$A + B = 0 \; ,$$

so that, made $B = s_3$, it must be $A = -s_3$. Once the substitutions have been made in equations (29), we see reproduced by them and (28) the usual values (12) of the preceding Capo for l, m, n.

It is so proved that the six varied equations (19) are the necessary and sufficient ones to embrace in all its width the problem of motion and dell'equilibrio de' sistemi superficiali; il che riceverà una lucida riconferma più tardi quando proveremo che tutti i trinomj (17), (18) e seguenti all'infinito possono aversi espressi pei sei che ci guidarono alle equazioni (19).

9. È ora manifesto che l'equazione meccanica generalissima pei sistemi superficiali (la (35), n. 83 m. p.), usato il solito metodo dei moltiplicatori per mettere a calcolo le variate (19) nelle equazioni di condizione, sarà

$$
\begin{aligned}
&\int da \int db. \left\{\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}\\
+ \quad &\int da \int db. \left\{ \quad \lambda\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da}\right)\right.\\
&\qquad +\mu\left(\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{db} + \frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{db} + \frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{db}\right)\\
&\qquad +\nu\left(\begin{aligned} &\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{da} + \frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{da} + \frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{da}\\ + &\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{db} + \frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{db} + \frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{db}\end{aligned}\right)\\
&\qquad +\rho\left(\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2\delta x}{da^2} + \frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2\delta y}{da^2} + \frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2\delta z}{da^2}\right)\\
&\qquad +\theta\left(\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2\delta x}{db^2} + \frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2\delta y}{db^2} + \frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2\delta z}{db^2}\right)\\
&\qquad \left. +\tau\left(\frac{d^2x}{da\,db}\frac{d^2\delta x}{da\,db} + \frac{d^2y}{da\,db}\frac{d^2\delta y}{da\,db} + \frac{d^2z}{da\,db}\frac{d^2\delta z}{da\,db}\right)\right\} + \Omega = 0
\end{aligned}
\tag{30}
$$

dove in Ω s'intendono espressi i termini introdotti da forze applicate a linee o a punti determinati.

Facciansi le debite trasformazioni per ridurre la quantità sotto il secondo segno integrale alla forma

$$
(\mathrm{I})\delta x + (\mathrm{II})\delta y + (\mathrm{III})\delta z + \frac{d\Lambda}{da} + \frac{d\Theta}{db}\ ;
\tag{31}
$$

troveremo, seguendo un andamento del quale darò qui sotto un cenno, che poste per comodo

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \lambda\frac{dx}{da} + \nu\frac{dx}{db} - \frac{d.\rho\frac{d^2x}{da^2}}{da} - \frac{1}{2}.\frac{d.\tau\frac{d^2x}{da\,db}}{db}\\
M_1 &= \nu\frac{dx}{da} + \mu\frac{dx}{db} - \frac{d.\theta\frac{d^2x}{db^2}}{db} - \frac{1}{2}.\frac{d.\tau\frac{d^2x}{da\,db}}{da}\\
L_2 &= \lambda\frac{dy}{da} + \nu\frac{dy}{db} - \frac{d.\rho\frac{d^2y}{da^2}}{da} - \frac{1}{2}.\frac{d.\tau\frac{d^2y}{da\,db}}{db}\\
M_2 &= \nu\frac{dy}{da} + \mu\frac{dy}{db} - \frac{d.\theta\frac{d^2y}{db^2}}{db} - \frac{1}{2}.\frac{d.\tau\frac{d^2y}{da\,db}}{da}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

equilibrium of superficial systems; which will receive a clear confirmation later on when we will prove that all the trinomials (17), (18) and the following to infinity may be obtained expressed by the six ones that lead us to the equations (19).

9. It is now apparent that the most general mechanical equation for superficial systems ((35), sect. 83 p. m.), once the usual method of multipliers has been used to operate calculus for the variations (19) in equations of condition, will be

$$\begin{aligned}
&\textstyle\int da \int db.\left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}\\
+\;&\textstyle\int da\int db.\Bigg\{\quad \lambda\left(\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{da}\right)\\
&\qquad +\mu\left(\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{db}\right)\\
&\qquad +\nu\left(\begin{array}{c}\frac{dx}{db}\frac{d\delta x}{da}+\frac{dy}{db}\frac{d\delta y}{da}+\frac{dz}{db}\frac{d\delta z}{da}\\ +\frac{dx}{da}\frac{d\delta x}{db}+\frac{dy}{da}\frac{d\delta y}{db}+\frac{dz}{da}\frac{d\delta z}{db}\end{array}\right)\\
&\qquad +\rho\left(\frac{d^2x}{da^2}\frac{d^2\delta x}{da^2}+\frac{d^2y}{da^2}\frac{d^2\delta y}{da^2}+\frac{d^2z}{da^2}\frac{d^2\delta z}{da^2}\right)\\
&\qquad +\theta\left(\frac{d^2x}{db^2}\frac{d^2\delta x}{db^2}+\frac{d^2y}{db^2}\frac{d^2\delta y}{db^2}+\frac{d^2z}{db^2}\frac{d^2\delta z}{db^2}\right)\\
&\qquad +\tau\left(\frac{d^2x}{da\,db}\frac{d^2\delta x}{da\,db}+\frac{d^2y}{da\,db}\frac{d^2\delta y}{da\,db}+\frac{d^2z}{da\,db}\frac{d^2\delta z}{da\,db}\right)\Bigg\}+\Omega=0
\end{aligned}\tag{30}$$

where in Ω we intend expressed the terms introduced by forces applied to determined lines or points.

Let us operate the relevant transformations to reduce the quantity under the second integral sign to the form

$$(\mathrm{I})\delta x+(\mathrm{II})\delta y+(\mathrm{III})\delta z+\frac{d\Lambda}{da}+\frac{d\Theta}{db}\;;\tag{31}$$

we will find, following a line which I will hint below here, that, posed for convenience

$$\begin{aligned}
L_1&=\lambda\frac{dx}{da}+\nu\frac{dx}{db}-\frac{d.\rho\frac{d^2x}{da^2}}{da}-\frac{1}{2}.\frac{d.\tau\frac{d^2x}{da\,db}}{db}\\
M_1&=\nu\frac{dx}{da}+\mu\frac{dx}{db}-\frac{d.\theta\frac{d^2x}{db^2}}{db}-\frac{1}{2}.\frac{d.\tau\frac{d^2x}{da\,db}}{da}\\
L_2&=\lambda\frac{dy}{da}+\nu\frac{dy}{db}-\frac{d.\rho\frac{d^2y}{da^2}}{da}-\frac{1}{2}.\frac{d.\tau\frac{d^2y}{da\,db}}{db}\\
M_2&=\nu\frac{dy}{da}+\mu\frac{dy}{db}-\frac{d.\theta\frac{d^2y}{db^2}}{db}-\frac{1}{2}.\frac{d.\tau\frac{d^2y}{da\,db}}{da}
\end{aligned}\tag{32}$$

$$L_3 = \lambda \frac{dz}{da} + \nu \frac{dz}{db} - \frac{d.\rho \frac{d^2 z}{da^2}}{da} - \frac{1}{2}.\frac{d.\tau \frac{d^2 z}{da\, db}}{db}$$

$$M_3 = \nu \frac{dz}{da} + \mu \frac{dz}{db} - \frac{d.\theta \frac{d^2 z}{db^2}}{db} - \frac{1}{2}.\frac{d.\tau \frac{d^2 z}{da\, db}}{da}$$

vengono

$$\begin{aligned} (\mathrm{I}) &= -\frac{dL_1}{da} - \frac{dM_1}{db} \\ (\mathrm{II}) &= -\frac{dL_2}{da} - \frac{dM_2}{db} \\ (\mathrm{III}) &= -\frac{dL_3}{da} - \frac{dM_3}{db} \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} \Delta = L_1 \delta x &+ L_2 \delta y + L_3 \delta z \\ &+ \rho \left(\frac{d^2 x}{da^2} \frac{d\delta x}{da} + \frac{d^2 y}{da^2} \frac{d\delta y}{da} + \frac{d^2 z}{da^2} \frac{d\delta z}{da} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \tau \left(\frac{d^2 x}{da\, db} \frac{d\delta x}{db} + \frac{d^2 y}{da\, db} \frac{d\delta y}{db} + \frac{d^2 z}{da\, db} \frac{d\delta z}{db} \right) \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \Theta = M_1 \delta x &+ M_2 \delta y + M_3 \delta z \\ &+ \theta \left(\frac{d^2 x}{db^2} \frac{d\delta x}{db} + \frac{d^2 y}{db^2} \frac{d\delta y}{db} + \frac{d^2 z}{db^2} \frac{d\delta z}{db} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \tau \left(\frac{d^2 x}{da\, db} \frac{d\delta x}{da} + \frac{d^2 y}{da\, db} \frac{d\delta y}{da} + \frac{d^2 z}{da\, db} \frac{d\delta z}{da} \right). \end{aligned} \tag{35}$$

Ecco il cenno che basta per poter tener dietro alle trasformazioni: esso è limitato alla trasformazione dei termini che contengono la x, ma si estende subito alla trasformazione degli altri termini cambiando la lettera x nella y o nella z. Tutto si riduce a riconoscere vere (il che è facilissimo *a posteriori*) le seguenti sei identità che per minor complicazione ho scritte indicando qui cogli apici in alto le derivate per a e con apici in basso quelle per b:

$$\begin{aligned} &\lambda x' \delta x' = -(\lambda x')' \delta x + (\lambda x' \delta x)' \\ &\mu x_{\prime} \delta x_{\prime} = -(\mu x_{\prime}) \delta x + (\mu x_{\prime} \delta x)_{\prime} \\ &\nu x_{\prime} \delta x' + \nu x' \delta x_{\prime} = -\left[(\nu x_{\prime})' + (\nu x')_{\prime} \right] \delta x + (\nu x_{\prime} \delta x)' + (\nu x' \delta x)_{\prime} \\ &\rho x'' \delta x'' = (\rho x'')'' \delta x - \left[(\rho x'')' \delta x - \rho x'' \delta x' \right]' \\ &\theta x_{\prime\prime} \delta x_{\prime\prime} = (\theta x_{\prime\prime})_{\prime\prime} \delta x - \left[(\theta x_{\prime\prime})_{\prime} \delta x - \theta x_{\prime\prime} \delta x_{\prime} \right]_{\prime} \\ &\tau x'_{\prime} \delta x'_{\prime} = (\tau x'_{\prime})'_{\prime} \delta x - \left[\frac{1}{2} (\tau x'_{\prime})'_{\prime} \delta x - \frac{1}{2} \tau x'_{\prime} \delta x_{\prime} \right]' - \left[\frac{1}{2} (\tau x'_{\prime})' \delta x - \frac{1}{2} \tau x'_{\prime} \delta x' \right]_{\prime} . \end{aligned} \tag{36}$$

$$L_3 = \lambda \frac{dz}{da} + \nu \frac{dz}{db} - \frac{d.\rho \frac{d^2 z}{da^2}}{da} - \frac{1}{2} . \frac{d.\tau \frac{d^2 z}{da\, db}}{db}$$

$$M_3 = \nu \frac{dz}{da} + \mu \frac{dz}{db} - \frac{d.\theta \frac{d^2 z}{db^2}}{db} - \frac{1}{2} . \frac{d.\tau \frac{d^2 z}{da\, db}}{da}$$

it turns out

$$\text{(33)} \qquad \begin{aligned} (\mathrm{I}) &= -\frac{dL_1}{da} - \frac{dM_1}{db} \\ (\mathrm{II}) &= -\frac{dL_2}{da} - \frac{dM_2}{db} \\ (\mathrm{III}) &= -\frac{dL_3}{da} - \frac{dM_3}{db} \end{aligned}$$

$$\text{(34)} \qquad \begin{aligned} \Delta = L_1 \delta x &+ L_2 \delta y + L_3 \delta z \\ &+ \ \rho \left(\frac{d^2 x}{da^2} \frac{d\delta x}{da} + \frac{d^2 y}{da^2} \frac{d\delta y}{da} + \frac{d^2 z}{da^2} \frac{d\delta z}{da} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \ \tau \left(\frac{d^2 x}{da\, db} \frac{d\delta x}{db} + \frac{d^2 y}{da\, db} \frac{d\delta y}{db} + \frac{d^2 z}{da\, db} \frac{d\delta z}{db} \right) \end{aligned}$$

$$\text{(35)} \qquad \begin{aligned} \Theta = M_1 \delta x &+ M_2 \delta y + M_3 \delta z \\ &+ \ \theta \left(\frac{d^2 x}{db^2} \frac{d\delta x}{db} + \frac{d^2 y}{db^2} \frac{d\delta y}{db} + \frac{d^2 z}{db^2} \frac{d\delta z}{db} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \ \tau \left(\frac{d^2 x}{da\, db} \frac{d\delta x}{da} + \frac{d^2 y}{da\, db} \frac{d\delta y}{da} + \frac{d^2 z}{da\, db} \frac{d\delta z}{da} \right). \end{aligned}$$

Here is the hint which suffices to be able to follow the transformations: it is limited to the transformation of the terms containing x, but it extends at once to the transformation of the other terms by changing the letter x into y or into z. Everything reduces to recognize true (which is very easy *a posteriori*) the following six identities, that for less complication I have written here denoting by superscript primes the derivatives with respect to a and by subscript primes those with respect to b:

$$\text{(36)} \qquad \begin{aligned} &\lambda x' \delta x' = -(\lambda x')' \delta x + (\lambda x' \delta x)' \\ &\mu x_{\prime} \delta x_{\prime} = -(\mu x_{\prime}) \delta x + (\mu x_{\prime} \delta x)_{\prime} \\ &\nu x_{\prime} \delta x' + \nu x' \delta x_{\prime} = -\left[(\nu x_{\prime})' + (\nu x')_{\prime} \right] \delta x + (\nu x_{\prime} \delta x)' + (\nu x' \delta x)_{\prime} \\ &\rho x'' \delta x'' = (\rho x'')'' \, \delta x - \left[(\rho x'')' \, \delta x - \rho x'' \delta x' \right]' \\ &\theta x_{\prime\prime} \delta x_{\prime\prime} = (\theta x_{\prime\prime})_{\prime\prime} \, \delta x - \left[(\theta x_{\prime\prime})_{\prime} \, \delta x - \theta x_{\prime\prime} \delta x_{\prime} \right]_{\prime} \\ &\tau x'_{\prime} \delta x'_{\prime} = (\tau x'_{\prime})'_{\prime} \, \delta x - \left[\frac{1}{2} (\tau x'_{\prime})'_{\prime} \, \delta x - \frac{1}{2} \tau x'_{\prime} \delta x_{\prime} \right]' - \left[\frac{1}{2} (\tau x'_{\prime})' \, \delta x - \frac{1}{2} \tau x'_{\prime} \delta x' \right]_{\prime} . \end{aligned}$$

Sostituita nella equazione (30) l'espressione (31) e compenetrati i due integrali duplicati, sappiamo pel noto principio, e per le (33), che ne risultano le quattro

(37)
$$
\begin{aligned}
X - \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dL_1}{da} + \frac{dM_1}{db}\\
Y - \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dL_2}{da} + \frac{dM_2}{db}\\
Z - \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{dL_3}{da} + \frac{dM_3}{db}
\end{aligned}
$$

(38)
$$\int da.\,(\Theta_2 - \Theta_1) + \int db.(\Delta_2 - \Delta_1) + \Omega = 0$$

indicando Θ_2, Θ_1 i valori che riceve la Θ ai due limiti dell'integrazione per b, e Δ_2, Δ_1 i valori che riceve la Δ ai due limiti dell'integrazione per a.

10. Nelle tre equazioni (37) le derivate per a, b possono trasformarsi in derivate per x, y mediante la formola generale

(39)
$$\frac{dL}{da} + \frac{dM}{db} = \frac{1}{\omega}.\frac{d.\omega\,(Lx' + Mx_{\prime})}{dx} + \frac{1}{\omega}.\frac{d.\omega\,(Ly' + My_{\prime})}{dy}$$

dove
$$\omega = \frac{1}{x'y_{\prime} - y'x_{\prime}}$$
e x', $x_{\prime}$, y', $y_{\prime}$ stanno per le $\frac{dx}{da}$, $\frac{dx}{db}$, $\frac{dy}{da}$, $\frac{dy}{db}$.

Non ripeto la dimostrazione del principio analitico contenuto nella precedente (39) perché è quella stessa che leggesi al n. 84 m. p., e che potrebbe essere qui letteralmente inserita cambiando le lettere p, q nelle a, b. Osserveremo che per le formole (20), (22), n. 12 m. p., la ω, di cui qui sopra notammo un valore, riceve quest'altra espressione

(40)
$$\omega = \Gamma R$$

significando Γ la densità superficiale nel punto (x, y, z) e stando la R in luogo di ben noto radicale, cioè essendo
$$R = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,.$$
Dirò però in questo luogo, conformemente a ciò che si è potuto notare nel passo analogo del n. 7, che la trasformazione operata dal principio analitico (39) viene utile nel caso più ristretto in cui diventassero nulle le tre forze ρ, θ, τ tendenti a far cambiare i valori dei trinomj colle derivate di second'ordine. Allora

Once the expression (31) has been substituted into equation (30) and joined the two double integrals, we know, by the known principle, and by the (33), that from this result the four

$$
\begin{aligned}
X - \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dL_1}{da} + \frac{dM_1}{db} \\
Y - \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dL_2}{da} + \frac{dM_2}{db} \\
Z - \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{dL_3}{da} + \frac{dM_3}{db}
\end{aligned} \tag{37}
$$

$$
\int da.\,(\Theta_2 - \Theta_1) + \int db.(\Delta_2 - \Delta_1) + \Omega = 0 \tag{38}
$$

denoting Θ_2, Θ_1 the values received by Θ at the two limits of integration with respect to b, and Δ_2, Δ_1 the values received by Δ at the two limits of integration with respect to a.

10. In the three equations (37) the derivatives with respect to a, b may be transformed into derivatives with respect to x, y by means of the general formula

$$
\frac{dL}{da} + \frac{dM}{db} = \frac{1}{\omega}.\frac{d.\omega\,(Lx' + Mx_{\prime})}{dx} + \frac{1}{\omega}.\frac{d.\omega\,(Ly' + My_{\prime})}{dy} \tag{39}
$$

where

$$
\omega = \frac{1}{x'y_{\prime} - y'x_{\prime}}
$$

and x', $x_{\prime}$, y', $y_{\prime}$ stand for $\frac{dx}{da}$, $\frac{dx}{db}$, $\frac{dy}{da}$, $\frac{dy}{db}$.

I do not repeat the proof of the analytical principle contained in the preceding (39) because it is the same that can be read at sect. 84 p. m., and that could be literally inserted here changing the letters p, q into a, b. We will observe that by the formulæ (20), (22), sect. 12 p. m., ω, of which we remarked a value here above, receives this other expression

$$
\omega = \Gamma R \tag{40}
$$

Γ meaning the superficial density at the point (x, y, z), and R being in place of a well known radical, i.e., being

$$
R = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,.
$$

However, I will say here, in accordance with what was remarked in the analogous passage of sect. 7, that the transformation performed by the analytical principle (39) is useful in the more restricted case when the three forces ρ, θ, τ, tending to change the values of the trinomials with second-order derivatives, would become nil. Then, infatti le (32) si riducono

$$
(41)\qquad
\begin{aligned}
L_1 &= \lambda x' + \nu x_{\prime} \quad ; \quad M_1 = \nu x' + \mu x_{\prime} \\
L_2 &= \lambda y' + \nu y_{\prime} \quad ; \quad M_2 = \nu y' + \mu y_{\prime} \\
L_3 &= \lambda z' + \nu z_{\prime} \quad ; \quad M_3 = \nu z' + \mu z_{\prime}
\end{aligned}
$$

e queste ultime due, a motivo dei noti valori di z', $z_{\prime}$ in x', y', $x_{\prime}$, $y_{\prime}$ diventano

$$
(42)\qquad L_3 = \frac{dz}{dx} L_1 + \frac{dz}{dy} L_2 \quad ; \quad M_3 = \frac{dz}{dx} M_1 + \frac{dz}{dy} M_2 \ .
$$

Poniamo per abbreviare

$$
(43)\qquad
\begin{gathered}
A = \omega \left(L_1 x' + M_1 x_{\prime} \right) \quad ; \quad B = \omega \left(L_2 y' + M_2 y_{\prime} \right) \\
C = \omega \left(L_1 y' + M_1 y_{\prime} \right) = \omega \left(L_2 x' + M_2 x_{\prime} \right) \ ;
\end{gathered}
$$

ho dato a quest'ultima C due valori perchè realmente, sostituiti i valori (41), si trovano eguali. Notiamo di più che i due binomj

$$
\omega \left(L_3 x' + M_3 x_{\prime} \right) \quad ; \quad \omega \left(L_3 y' + M_3 y_{\prime} \right)
$$

per effetto delle (42) e delle precedenti denominazioni ricevono rispettivamente i valori

$$
\frac{dz}{dx} A + \frac{dz}{dy} C \quad ; \quad \frac{dz}{dx} C + \frac{dz}{dy} B \ ;
$$

e l'applicazione successiva del principio (39) alle tre equazioni (37) ci porgerà senza difficoltà (ricordata la (40)) le tre

$$
(44)\qquad
\begin{aligned}
\Gamma R \left(X - \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= \frac{dA}{dx} + \frac{dC}{dy} \\
\Gamma R \left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) &= \frac{dC}{dx} + \frac{dB}{dy} \\
\Gamma R \left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) &= \frac{d.\left(A \frac{d}{dx} + C \frac{dz}{dy} \right)}{dx} + \frac{d.\left(C \frac{d}{dx} + B \frac{dz}{dy} \right)}{dy} \ ;
\end{aligned}
$$

sono queste le stesse (53) del n. 85 m. p.

Volendo inoltre conoscere, per questo caso più ristretto di tre sole forze interne invece di sei, le equazioni che si verificano soltanto ai limiti, si deve, in riscontro del già detto pe' sistemi a tre dimensioni al n. 51 m. p., incominciare dal trasformare in derivate per x, y il binomio $\frac{d\Delta}{da} + \frac{d\Theta}{db}$ che forma indeed, the (32) reduce to

$$(41)\qquad \begin{aligned} L_1 &= \lambda x' + \nu x_\prime \quad ; \quad M_1 = \nu x' + \mu x_\prime \\ L_2 &= \lambda y' + \nu y_\prime \quad ; \quad M_2 = \nu y' + \mu y_\prime \\ L_3 &= \lambda z' + \nu z_\prime \quad ; \quad M_3 = \nu z' + \mu z_\prime \end{aligned}$$

and these last two, because of the known values of z', $z_\prime$ in x', y', $x_\prime$, $y_\prime$ become

$$(42)\qquad L_3 = \frac{dz}{dx}L_1 + \frac{dz}{dy}L_2 \quad ; \quad M_3 = \frac{dz}{dx}M_1 + \frac{dz}{dy}M_2 \ .$$

Let us pose, to shorten,

$$(43)\qquad \begin{gathered} A = \omega\,(L_1 x' + M_1 x_\prime) \quad ; \quad B = \omega\,(L_2 y' + M_2 y_\prime) \\ C = \omega\,(L_1 y' + M_1 y_\prime) = \omega\,(L_2 x' + M_2 x_\prime) \ ; \end{gathered}$$

I gave to this last C two values because in reality, once the values (41) have been substituted, they are found equal. In addition, we remark that the two binomials

$$\omega\,(L_3 x' + M_3 x_\prime) \quad ; \quad \omega\,(L_3 y' + M_3 y_\prime)$$

by effect of the (42) and of the preceding notations receive the values, respectively,

$$\frac{dz}{dx}A + \frac{dz}{dy}C \quad ; \quad \frac{dz}{dx}C + \frac{dz}{dy}B \ ;$$

and the subsequent application of the principle (39) to the three equations (37) will provide us without difficulty (remembering the (40)) the three

$$(44)\qquad \begin{aligned} \Gamma R\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{dA}{dx} + \frac{dC}{dy} \\ \Gamma R\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{dC}{dx} + \frac{dB}{dy} \\ \Gamma R\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \frac{d.\left(A\frac{d}{dx} + C\frac{dz}{dy}\right)}{dx} + \frac{d.\left(C\frac{d}{dx} + B\frac{dz}{dy}\right)}{dy} \ ; \end{aligned}$$

these are the same (53) of sect. 85 p. m.

Wishing besides to know, for this more restricted case of three only inner forces instead of six, the equations that hold only at the limits, in response to what already said for three-dimensional systems in sect. 51 p. m., we must begin from transforming into derivatives with respect to x, y the binomial $\frac{d\Delta}{da} + \frac{d\Theta}{db}$ that forms l'ultima parte dell'espressione (31). Esso, applicata la regola fornitaci dall'equazione (39), primieramente diventa

$$\frac{1}{\omega}.\frac{d.\omega\,(\Delta x' + \Theta x_{\prime})}{dx} + \frac{1}{\omega}.\frac{d.\omega\,(\Delta y' + \Theta y_{\prime})}{dy}$$

ossia, se si mettono per Δ, Θ i valori (34), (35) resi più semplici dall'annullamento delle parti contenenti le ρ, θ, τ;

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\omega}.\frac{d.\,\{\omega\,(L_1 x' + M_1 x_{\prime})\,\delta x + \omega\,(L_2 x' + M_2 x_{\prime})\,\delta y + \omega\,(L_3 x' + M_3 x_{\prime})\,\delta z\}}{dx} \\ + \;&\frac{1}{\omega}.\frac{d.\,\{\omega\,(L_1 y' + M_1 y_{\prime})\,\delta x + \omega\,(L_2 y' + M_2 y_{\prime})\,\delta y + \omega\,(L_3 y' + M_3 y_{\prime})\,\delta z\}}{dy} \end{aligned}$$

viste poi le denominazioni (43) e ciò che ivi dopo si disse dei due binomj simili, l'espressione risulta

$$(45)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\omega}.\frac{d.\left\{A\delta x + C\delta y + \left(A\frac{dz}{dx} + C\frac{dz}{dy}\right)\delta z\right\}}{dx} \\ + \;&\frac{1}{\omega}.\frac{d.\left\{C\delta x + B\delta y + \left(C\frac{dz}{dx} + B\frac{dz}{dy}\right)\delta z\right\}}{dy}\;. \end{aligned}$$

Questa è la quantità che nella (30) viene sottoposta ad un integrale duplicato relativo alle a, b, integrale che si cambia subito in un altro relativo alle x, y, perché il fattore $\frac{1}{\omega}$ (giusta il primo valore di ω più sopra scritto) è $\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}$, cioè, secondo il noto teorema, quale si esige che sia per l'indicata trasformazione dell'integrale. Così il binomio (45) dà sotto un integrale duplicato per x, y la somma di due derivate esatte, l'una per x, l'altra per y, di modo che una delle integrazioni si fa, e si ha la quantità

$$(46)\qquad \begin{aligned} &\int dy.\left\{A\delta x + C\delta y + \left(A\frac{dz}{dx} + C\frac{dz}{dy}\right)\delta z\right\} \\ + \;&\int dx.\left\{C\delta x + B\delta y + \left(C\frac{dz}{dx} + B\frac{dz}{dy}\right)\delta z\right\}\;; \end{aligned}$$

intendendo che nel primo di questi integrali x diventi la funzione di y data dall'equazione che insieme colla equazione $z = z(x, y)$ della superficie, determina la linea di contorno: e nel secondo sia invece y la funzione di x cavata dalle stesse equazioni. Veramente dovrebbero essere due i limiti per la x funzione di y, e due quelli per la y funzione della x, ma può bastare la considerazione di uno, giusta quanto si è asserito in un caso analogo al n. 51 m. p.

the last part of the expression (31). Firstly it becomes, when applied the rule provided by the equation (39),

$$\frac{1}{\omega}.\frac{d.\omega\,(\Delta x' + \Theta x_{\prime})}{dx} + \frac{1}{\omega}.\frac{d.\omega\,(\Delta y' + \Theta y_{\prime})}{dy}$$

i.e., if we put for Δ, Θ the values (34), (35) made simpler by the vanishing of the parts containing the ρ, θ, τ;

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\omega}.\frac{d.\left\{\omega\,(L_1x' + M_1x_{\prime})\,\delta x + \omega\,(L_2x' + M_2x_{\prime})\,\delta y + \omega\,(L_3x' + M_3x_{\prime})\,\delta z\right\}}{dx} \\ + \;&\frac{1}{\omega}.\frac{d.\left\{\omega\,(L_1y' + M_1y_{\prime})\,\delta x + \omega\,(L_2y' + M_2y_{\prime})\,\delta y + \omega\,(L_3y' + M_3y_{\prime})\,\delta z\right\}}{dy} \end{aligned}$$

then once the notations (43) have been seen and what we said thereafter of the two similar binomials, the expression becomes

$$(45)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\omega}.\frac{d.\left\{A\delta x + C\delta y + \left(A\frac{dz}{dx} + C\frac{dz}{dy}\right)\delta z\right\}}{dx} \\ + \;&\frac{1}{\omega}.\frac{d.\left\{C\delta x + B\delta y + \left(C\frac{dz}{dx} + B\frac{dz}{dy}\right)\delta z\right\}}{dy}\;. \end{aligned}$$

This is the quantity that is subjected in the (30) to a double integral relative to the a, b, integral that is changed at once into another relative to the x, y, because the factor $\frac{1}{\omega}$ (given the value of ω written above) is $\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}$, that is, according to a known theorem, what is required to be for the indicated transformation of the integral. Thus, the binomial (45) provides, under a double integral in x, y, the sum of two exact derivatives, one in x, another in y, so that one of the two integrations is performed, and we have the quantity

$$(46)\qquad \begin{aligned} &\int dy.\left\{A\delta x + C\delta y + \left(A\frac{dz}{dx} + C\frac{dz}{dy}\right)\delta z\right\} \\ + \;&\int dx.\left\{C\delta x + B\delta y + \left(C\frac{dz}{dx} + B\frac{dz}{dy}\right)\delta z\right\}\;; \end{aligned}$$

meaning that in the first of these integrals x becomes the function of y given by the equation that, together with the equation $z = z(x, y)$ of the surface, determines the boundary line: and in the second it is instead y the function of x pulled out from the same equations. In reality, two should be the limits for x as a function of y, and two for y as a function of x, but considering only one may be enough, being right what we have stated in an analogous case in sect. 51 p. m.

I due integrali della quantità (46) possono ridursi ad un solo relativo alla variabile x, scrivendo nel primo $\int dx.\frac{dy}{dx}$ invece di $\int dy$: ma bisogna avvertire che facendo una tal riduzione il segno va cambiato. La ragione si è che nell'integrale per y i due limiti sono, per primo il suo minimo valore dato dalla equazione del contorno, e per secondo il massimo: e così dei valori di x nel rispettivo integrale. Ma d'ordinario il valor massimo della y corrisponde al minimo della x e viceversa, cosicché per fare andar d'accordo i limiti quando entrambi gli integrali sono per x, conviene in quel primo rovesciare i limiti, il che si sa importare un cambiamento di segno. Pertanto la quantità (46) può anche scriversi

$$\int dx. \left\{ \left(C - A\frac{dy}{dx}\right)\delta x + \left(B - C\frac{dy}{dx}\right)\delta y \right.$$
$$\left. + \left[\left(C - A\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx} + \left(B - C\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dy}\right]\delta z \right\} \;;$$

e a questa si deve aggiungere l'integrale

$$\int dx.(\Gamma)V\left\{(\lambda)\delta x + (\mu)\delta y + (\nu)\delta z\right\}$$

che poteva intendersi compreso nella Ω dell'equazione (30): significando (Γ) la densità lineare nel punto (x, y, z) della curva di contorno, V il radicale $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$, e $(\lambda), (\mu), (\nu)$ le tre componenti rettangolari di una pressione propria del detto punto (x, y, z) e variabile di punto in punto in quella curva. Tutto il qui detto da ultimo, si rileva dai nn. 26, 27 m. p., e dalla equazione $(\Gamma)V\frac{dx}{da} = 1$ (la (14) n. 11 m. p.) adoperata all'oggetto di cambiare l'integrale preso per la a in altro preso per la x.

Riunendo i due integrali ultimamente scritti, si sa che debbono annullarsi sotto il segno unico i coefficienti totali delle $\delta x, \delta y, \delta z$; e così abbiamo le tre equazioni

$$(47) \qquad \begin{aligned} &(\lambda)(\Gamma)V + C - A\frac{dy}{dx} = 0 \\ &(\mu)(\Gamma)V + B - C\frac{dy}{dx} = 0 \\ &(\lambda)(\Gamma)V + \left(C - A\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx} + \left(B - C\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dy} = 0\ . \end{aligned}$$

Qui, per iscansare un facile equivoco, è bene osservare che la $\frac{dz}{dx}$ nel radicale V è una derivata totale per x, cioè il binomio $\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$, quando $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ esprimono le derivate parziali della $z(x, y)$, senza badare che y diventi poi

The two integrals of the quantity (46) may reduce to one only relative to the variable x, writing in the first $\int dx.\frac{dy}{dx}$ instead of $\int dy$: but we must warn that if we make such a reduction the sign shall be changed. The reason is that in the integral by y the two limits are, first the minimum value given by the equation of the boundary, and second its maximum: and so for the values of x in the pertaining integral. But usually the maximum value of y corresponds to the minimum of x and vice-versa, so that to get the two limits along when both integrals are by x, it is convenient to exchange the limits in that first one, which is known to bring a change of sign. Thus, the quantity (46) may also be written

$$\int dx.\left\{\left(C - A\frac{dy}{dx}\right)\delta x + \left(B - C\frac{dy}{dx}\right)\delta y \right. \\ \left. + \left[\left(C - A\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx} + \left(B - C\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dy}\right]\delta z\right\} ;$$

and to it we must add the integral

$$\int dx.(\Gamma)V\left\{(\lambda)\delta x + (\mu)\delta y + (\nu)\delta z\right\}$$

that could be meant included in the Ω of the equation (30): (Γ) meaning the linear density at the point (x, y, z) of the boundary curve, V the radical $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$, and $(\lambda), (\mu), (\nu)$ the three rectangular components of a pressure typical of the said point (x, y, z), and variable from point to point in that curve. At last, what is here said, can be derived in sects. 26, 27 p. m., and from equation $(\Gamma)V\frac{dx}{da} = 1$ ((14) sect. 11 p. m.), used to the aim of changing the integral taken by a in another taken by x.

Joining the two integrals written lately, we know that the total coefficients of the $\delta x, \delta y, \delta z$ must vanish under the joint sign; and so we have the three equations

$$(47) \qquad \begin{aligned} &(\lambda)(\Gamma)V + C - A\frac{dy}{dx} = 0 \\ &(\mu)(\Gamma)V + B - C\frac{dy}{dx} = 0 \\ &(\lambda)(\Gamma)V + \left(C - A\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx} + \left(B - C\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dy} = 0 \,. \end{aligned}$$

Here, to avoid an easy misunderstanding, it is good to notice that $\frac{dz}{dx}$ in the radical V is a total derivative by x, that is, the binomial $\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$, when $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ express the partial derivatives of $z(x, y)$, without caring that y becomes a funzione di x. Queste (47) sussistono simultaneamente colle (44): ma le (44) si estendono a tutti i punti del sistema anche per l'interno, mentre le (47) riguardano i soli punti della curva di contorno.

Quantunque l'analisi riferita in questo numero possa avere varie applicazioni, ricordiamoci che è ristretta al caso di tre sole forze interne invece di sei; cosicchè l'analisi veramente generale è quella che risulta dal complesso delle formole del numero precedente, ed è provato impossibile che ne esista un'altra dotata di maggiore generalità. 11. Giunto a questo punto parmi di aver già supplito alle due mancanze che nel preambolo della Memoria ho detto rimanere a togliere per poter abbracciare con sicurezza l'uso del principio lagrangiano. Circa la questione: *quali* sono le funzioni fatte variare dalle forze interne che si debbono adoperare a preferenza di altre, ho dimostrato che sono que' trinomj alle derivate, moltissimi di numero, i quali quando si sostituiscono alle x, y, z i valori (1) del Capo I ricompajono fatti colle nuove variabili p, q, r alla stessa maniera, sparita ogni traccia delle dodici quantità f, g, h, α_1, ec. : e godono anche di quest'altra proprietà conseguenza della prima, che prendendone le variate, e sostituendovi alle $\delta x, \delta y, \delta z$ i valori (12) Capo I, si riducono identicamente a zero. Relativamente all'altra questione: *quante* poi debbono essere tali funzioni, cioè quanti di que' trinomj si hanno a prendere affinché l'effetto delle forze interne abbia ad essere espresso senza ripetizioni e totalmente: ho risposto *tanti* quanti ce ne vogliono per risalire dalle variate di que' trinomj poste uguali a zero, al ritrovamento dei valori (12) Capo I per le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$: e vedemmo che sono tre pei sistemi lineari, sei pei superficiali, e sei per quelli a tre dimensioni. Circa poi al dare una persuadente dimostrazione del principio, credo d'esservi riuscito facendo vedere che tali trinomj costituiscono i primi membri di equazioni di condizione delle quali i secondi vanno via nell'operazione indicata dalla caratteristica δ, perché quantunque possano essere variabili, sono costanti in relazione colle quantità al variar delle quali è dovuta la formazione delle tre variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$. Non mi è ignoto che Lagrange ed altri autori presero per funzioni che le forze interne tendono a far variare altre espressioni più complicate dei trinomj surriferiti: ma che nella sostanza io non dissenta da loro, e con maggiore semplicità raggiunga le stesse conseguenze, è questo un argomento che verrà ben chiarito nel Capo V.

Prevedo un'objezione. Risulta dalla nostra analisi che eziandio per corpi qualunque possiamo supporre che le variazioni abbiano i valori (12) n. 3: ora Lagrange ed altri dissero tali valori appartenere soltanto ai corpi solidi, alle superficie o linee rigide: come dunque si assumono generali? Rispondo: io non dissi mai che gli aumenti delle coordinate nei sistemi fluidi o mutabili intimamente function of x after. These (47) occur simultaneously with the (44): but the (44) extend to all points of the system, also for the interior, while the (47) affect the sole points of the boundary curve.

Even if the analysis reported in this section may have various applications, let us remember that it is restricted to the case of three inner forces only instead of six; so that the really general analysis is that resulting from the complex of formulæ of the precedent section, and it is proved impossible to exist another one endowed with more generality.

11. Coming at this point it seems to me to have already compensated the two lacks that in the preamble of the Memoir I said remained to remove to be able to embrace with safety the use of the Lagrangean principle. As for the question: *which* are the functions varied by the inner forces that must be used in preference to others, I have proved they are those trinomials with derivatives, very numerous, which, when we substitute into x, y, z the values (1) of Capo I, re-appear built with the new variables p, q, r in the same way, and vanished any trace of the twelve quantities f, g, h, α_1, etc.: and they also have this other property, consequence of the first, that taking their variations, and there substituting into $\delta x, \delta y, \delta z$ the values (12) Capo I, reduce identically to zero. As for the other question: *how many* should then such functions be, i.e., how many of these trinomials should be taken so that the effect of the inner forces may be expressed totally and without repetitions: I have answered *as many* as needed to go back from the variations of those trinomials set equal to zero to find the values (12) Capo I for the variations $\delta x, \delta y, \delta z$: and we saw they are three for linear systems, six for the superficial ones, and six for the three-dimensional ones. As then for giving a persuading proof of the principle, I believe to have succeeded showing that those trinomials constitute the left-hand sides of equations of condition the right-hand sides of which disappear in the operation indicated by the characteristic δ, because even if they may be variables, they are constant relative to the quantities, to the variation of which is due the formation of the three variations $\delta x, \delta y, \delta z$. It is not unknown to me that Lagrange and other authors took other more complicated expressions than the above said trinomials as functions that the inner forces tend to vary: but in fact I do not disagree with them, and with greater simplicity I reach the same consequences, this is a subject that will be well explained in Capo V.

I foresee an objection. It comes out from our analysis that also for whatever body we may assume that the variations have the values (12) sect. 3: now, Lagrange and others said such values to belong only to solid bodies, to rigid surfaces and lines: how, then, shall they be assumed as general? I answer: I never said that the increments of coordinates in fluid systems, or internally mutable in qualsivoglia modo debbano sempre ricevere, anche in conseguenza di un moto intestino, valori della forma dei (12) succitati, come avviene nel moto vero de' sistemi rigidi; dissi che tale è la forma che ricevono in conseguenza di quel moto degli assi che dà origine alle variazioni, come sopra si è più volte spiegato. È qui essenziale una distinzione: altro è il moto vero prodotto dall'insieme delle forza sulle molecole del sistema, altro il moto fittizio degli assi: entrambi producono aumenti alle coordinate x, y, z del punto generico, ma appunto perché i moti sono diversi, questi aumenti possono comprendersi gli uni gli altri, e possono escludersi: quando si comprendono, le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ possono mutarsi nelle tre velocità u, v, w secondo i tre assi, in altri casi ciò non è più permesso. Pongasi attenzione al modo con cui abbiamo detto generarsi le equazioni variate (13) n. 4, (2) n. 6, (19) n. 8, e si capirà facilmente che tali equazioni non sussistono più per aumenti presi dalle x, y, z al mutare del tempo, se il sistema è variabile, per esempio, fluido. Infatti i secondi membri fatti colle p, q, r, come i primi colle x, y, z, mutano anch'essi al mutare del tempo, e non svaniscono, mentre svaniscono operando secondo la caratteristica δ. Svaniscono que' secondi membri anche al mutare delle x, y, z secondo il tempo, quando i sistemi sono rigidi, ed ecco il perché in tal caso il moto fittizio comprende il vero, ossia le variazioni comprendono le velocità. Generalmente parlando, ciò non succede: gli aumenti delle coordinate x, y, z al crescere del tempo, non sono vincolati da equazioni alle derivate simili di forma alle equazioni variate sopradette, quindi nessuna meraviglia se i valori loro non sono compresi nella forma dei (12) n. 3. Del resto, è già noto ai geometri e ammesso da molto tempo (vedi M. A., t. I, pag. 289) che quando le equazioni di condizione contengono il tempo esplicito, non è più lecito sostituire le velocità alle variazioni. Ecco quanto era bastante a scaltrirci che i valori delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ non sono poi così generali da abbracciare anche gli aumenti delle coordinate prodotti dai moti veri. Ora io non faccio che porre questa verità in maggior luce e mostrare ch'essa ha una maggiore estensione. L'attribuire troppa generalità ai valori delle variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ è un errore al quale veniamo facilmente indotti rammentando le altre applicazioni delle variazioni diverse dalle meccaniche: che qui invece siano que' valori ridotti più ristretti che non quelli delle derivate riguardo al tempo, non fa più urto quando si rifletta come pei primi si mettano delle equazioni di condizione le quali più non stanno pei secondi. E che si debbano mettere per le variazioni le anzidette equazioni di condizione che le costringono a prendere in tutti i casi il valore (12) n. 3, è verità la quale parmi ben rassodata dalle considerazioni fatte nei Capi IV e VII m. p., e riconfermata dalle teoriche esposte nei Capi VI m. p. e III dell'attuale: il che per quest'ultima parte passiamo a vedere.

in whatsoever way, shall always receive, also as a consequence of intimate motion, values of the form of the above quoted (12), as it happens in the true motion of rigid systems; I said that such is the form that they receive as a consequence of that motion of the axes giving origin to the variations, as we explained many times above. A distinction is essential here: the true motion produced by the set of forces on the molecules of the system is other than the fictitious motion of the axes: both produce increments of the coordinates x, y, z of the generic point, but indeed because the motions are different, these increments can be included the ones in the others, and may be excluded: when they are included, the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ may be changed into the three velocities u, v, w along the three axes, in other cases this is not possible any more. Pay attention to the way in which we said to generate the variations equations (13) sect. 4, (2) sect. 6, (19) sect. 8, and we will easily understand that such equations will not hold any more for increments taken by the x, y, z as time varies, if the system is variable, for instance, fluid. Indeed, the right-hand sides taken by the p, q, r, as the left-hand ones by the x, y, z, change as well as time varies, and do not vanish, while they do vanish when operating according to the characteristic δ. Those right-hand sides vanish also when x, y, z vary with time, when systems are rigid, and so it is why in such case the fictitious motion includes the true one, i.e., the variations include the velocities. Generally speaking, this does not happen: the increments of the coordinates x, y, z as time grows, are not constrained by differential equations with form similar to the varied equations above said, so no wonder if their values are not included in the form of the (12) sect. 3. Indeed, it is already known to geometers, and accepted since long time (see A. M., tome I, page 289) that when the equations of condition explicitly contain time, it is not anylonger permitted to substitute velocities with the variations anymore. Here it is what was sufficient to make us aware that the values of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ are then not so general to include also the increments of coordinates produced by true motions. Now I do not but pose this truth under more light and show it has more breadth. Attributing too much generality to the values of the variations $\delta x, \delta y, \delta z$ is a mistake we are easily induced into remembering other applications of the variations, different from the mechanical ones: that here these reduced values are more restricted than those of the derivatives with respect to time, does no longer hurt when we consider that the former ones imply equations of condition that no longer hold for the latter ones. And that we shall use for the variations the above said equations of condition that force them to assume in any case the values (12) sect. 3, is a truth that seems to me well confirmed by the considerations made in Capos IV and VII p. m., and reconfirmed by the theories shown in Capos VI p. m. and III of the present one: which we now go to examine for the last part.

CAPO III

Riconferma delle equazioni generalissime pei sistemi lineari e superficiali ottenute nel Capo precedente.

12. Giusta l'esposto al n. 6 cercherò ora le equazioni generali del moto dei sistemi lineari e superficiali mettendo a calcolo le azioni molecolari mediante la seconda parte dell'equazione generale della Meccanica che si riferisce alle forze interne attive (n.16 m.p.), precisamente come ho fatto nel Capo VI di detta Memoria relativamente ad un sistema dotato delle tre dimensioni. E qui supponendo che il lettore abbia percorso quel Capo VI, credo potermi dispensare dal ripetere pei sistemi lineari e superficiali i ragionamenti analoghi fino all'impianto dell'equazione generale (12), n. 72 m.p., giacchè subito si presentano le modificazioni che riducono la cosa da maggiore a minore complicazione. Così (richiamate anche le teoriche del Capo II, § 1,2 m.p.) si capirà che l'aggregato di tutti i temini somministrati da dette forze interne, invece di essere significato come là (espressione (9), n. 71 m.p.) per mezzo di una sommatoria sestupla, lo sarà pei sistemi lineari mediante la doppia

$$\sum\Delta a\sum\Delta f\cdot\frac{1}{2}m_i m_j K\delta\rho,$$

e pei sistemi superficiali mediante la quadrupla

$$\sum\Delta a\sum\Delta b\sum\Delta f\sum\Delta g\cdot\frac{1}{2}m_i m_j K\delta\rho.$$

Passando poi alle espressioni cogli integrali continui, avremo invece della equazione (12), n.72 m.p., e relativa (8): pei sistemi lineari

$$(1)\qquad \int da\cdot\left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z+\int df\cdot\Lambda\delta\rho^2\right\}+\Omega=0$$

essendo

$$(2)\qquad \rho^2=\left[x\left(a+f\right)-x\left(a\right)\right]^2+\left[y\left(a+f\right)-y\left(a\right)\right]^2+\left[z\left(a+f\right)-z\left(a\right)\right]^2;$$

e pei sistemi superficiali

$$(3)\qquad \int da\int db\cdot\left\{\left(X-\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z+\int df\int dg\cdot\Lambda\delta\rho^2\right\}+\Omega=0$$

CAPO III

New deduction of the most general equations for linear and superficial systems already obtained in the previous Capo

12. Following the methods expounded in the sect. 6, I will now look for the general equations of the motion of the linear and superficial systems including in the calculations the molecular actions by means of the second part of the general equation of Mechanics which concerns the active internal forces (sect. 16 p.m.) exactly as I did in the Capo VI of mentioned Memoir relatively to a three-dimensional system. Here, by assuming that the reader has already looked at that Capo VI, I believe I will be allowed to avoid the repetition of those reasonings which are analogous to those leading to the general equation (12), sect. 72 p.m., as it is immediately seen how to introduce the modifications needed to reduce the most complex model to a simpler one. Therefore (once one also has recalled the theories of the Capo II, sects. 1,2 p.m.) it will be easily understood that the sum of all terms involving the said internal forces instead of being given by means of a sextuple summation as it happened in the cited expression (9), sect. 71 p.m., will be expressed for linear systems by means of the double summation

$$\sum \Delta a \sum \Delta f \cdot \frac{1}{2} m_i m_j K \delta\rho,$$

and for the superficial systems by means of the quadruple summation

$$\sum \Delta a \sum \Delta b \sum \Delta f \sum \Delta g \cdot \frac{1}{2} m_i m_j K \delta\rho.$$

Then, when considering the expressions for continuous integrals, we will have, instead of the equations (12) and (8), sect. 72 p.m.: for the linear systems

$$(1) \qquad \int da \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z + \int df \cdot \Lambda \delta\rho^2 \right\} + \Omega = 0$$

being

$$(2) \qquad \rho^2 = \left[x\,(a+f) - x\,(a) \right]^2 + \left[y\,(a+f) - y\,(a) \right]^2 + \left[z\,(a+f) - z\,(a) \right]^2 ;$$

and for superficial systems

$$(3) \qquad \int da \int db \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z + \int df \int dg \cdot \Lambda \delta\rho^2 \right\} + \Omega = 0$$

essendo

$$\rho^2 = [x\,(a+f, b+g) - x\,(a,b)]^2 + [y\,(a+f, b+g) - y\,(a,b)]^2 + [z\,(a+f, b+g) - z\,(a,b)]^2 . \tag{4}$$

13. Cominciamo dai sistemi lineari. L'equazione (2), volgendo in serie sotto le parentesi, si presenta

$$\rho^2 = \left(fx' + \frac{f^2}{2}x'' + \frac{f^3}{2.3}x''' + \frac{f^4}{2.3.4}x^{IV} + \text{ec.}\right)^2 + \left(fy' + \frac{f^2}{2}y'' + \frac{f^3}{2.3}y''' + \frac{f^4}{2.3.4}y^{IV} + \text{ec.}\right)^2 + \left(fz' + \frac{f^2}{2}z'' + \frac{f^3}{2.3}z''' + \frac{f^4}{2.3.4}z^{IV} + \text{ec.}\right)^2$$

dove ho messo gli apici ad esprimere le derivate relativamente alla a. Volgendo anche i quadrati, avremo :

$$\rho^2 = f^2\alpha + \frac{f^4}{4}\beta + \frac{f^6}{36}\gamma + f^3T_1 + \frac{f^4}{3}T_2 + \frac{f^5}{12}(T_3 + 2T_4) + \frac{f^6}{120}(2T_5 + 5T_6) + \text{ec.} \tag{5}$$

avendo posto per abbreviare

$$\begin{aligned} \alpha &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ \beta &= x''^2 + y''^2 + z''^2 \\ \gamma &= x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 \end{aligned} \tag{6}$$

e assunte le T_1, T_2, T_3, *ec.* all'infinito per esprimere altri trinomj dei quali scrivo alcuni

$$\begin{aligned} T_1 &= x'x'' + y'y'' + z'z'' \\ T_2 &= x'x''' + y'y''' + z'z''' \\ T_3 &= x'x^{IV} + y'y^{IV} + z'z^{IV} \\ T_4 &= x''x''' + y''y''' + z''z''' \\ T_5 &= x'x^{V} + y'y^{V} + z'z^{V} \\ T_6 &= x''x^{IV} + y''y^{IV} + z''z^{IV} \\ &\text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \end{aligned} \tag{7}$$

La (5) sta a riscontro della (13) Capo VI citato m.p. : ne prenderemo la being

$$\rho^2 = [x(a+f,b+g) - x(a,b)]^2 + [y(a+f,b+g) - y(a,b)]^2 + [z(a+f,b+g) - z(a,b)]^2 . \tag{4}$$

13. Let us begin with the linear systems The equation (2), developing the expressions inside parentheses in Taylor series, will become:

$$\begin{aligned}\rho^2 = &\left(fx' + \frac{f^2}{2}x'' + \frac{f^3}{2.3}x''' + \frac{f^4}{2.3.4}x^{IV} + \text{etc.}\right)^2\\ &+ \left(fy' + \frac{f^2}{2}y'' + \frac{f^3}{2.3}y''' + \frac{f^4}{2.3.4}y^{IV} + \text{etc.}\right)^2\\ &+ \left(fz' + \frac{f^2}{2}z'' + \frac{f^3}{2.3}z''' + \frac{f^4}{2.3.4}z^{IV} + \text{etc.}\right)^2\end{aligned}$$

where I have used the primes to express the derivatives with respect to variable a. Evaluating also the squares, we will have

$$\begin{aligned}\rho^2 = &f^2\alpha + \frac{f^4}{4}\beta + \frac{f^6}{36}\gamma\\ &+ f^3T_1 + \frac{f^4}{3}T_2 + \frac{f^5}{12}(T_3 + 2T_4) + \frac{f^6}{120}(2T_5 + 5T_6) + \text{etc.}\end{aligned} \tag{5}$$

where this short-hand notation has been used

$$\begin{aligned}\alpha &= x'^2 + y'^2 + z'^2\\ \beta &= x''^2 + y''^2 + z''^2\\ \gamma &= x'''^2 + y'''^2 + z'''^2\end{aligned} \tag{6}$$

and where we introduced the symbols T_1, T_2, T_3, etc. for an infinite sequence of trinomials, the first ones of them I explicitly write down

$$\begin{aligned}T_1 &= x'x'' + y'y'' + z'z''\\ T_2 &= x'x''' + y'y''' + z'z'''\\ T_3 &= x'x^{IV} + y'y^{IV} + z'z^{IV}\\ T_4 &= x''x''' + y''y''' + z''z'''\\ T_5 &= x'x^{V} + y'y^{V} + z'z^{V}\\ T_6 &= x''x^{IV} + y''y^{IV} + z''z^{IV}\\ &\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}\end{aligned} \tag{7}$$

The equation (5) must be compared with the equation (13) in the already cited Capo VI p.m.: we will consider its variata in corrispondenza della (16) di quel luogo, e a riscontro di quella (17) formeremo l'espressione

$$(8) \qquad \int df \cdot \Lambda \delta \rho^2 =$$

$$(1)\ \delta\alpha + (2)\ \delta\beta + (3)\ \delta\gamma + (4)\ \delta T_1 + (5)\ \delta T_2 + (6)\ \delta T_3 + \text{ec.}$$

da introdursi sotto il segno integrale dell'equazione (1) generalissima pei sistemi lineari. I coefficienti $(1), (2), (3)$ ....sono da considerarsi funzioni di a, essendovi sparita la f per effetto delle integrazioni definite.

14. Qui, come al n.74 m.p. , faremo vedere che tutti i trinomj T_1, T_2, T_3, *ec.* all'infinito possono aversi espressi pei primi tre α, β, γ (equazioni (6)) e per le loro derivate rispetto ad a di qualunque ordine.

È facile accorgersi che sono

$$(9) \qquad \begin{array}{lll} T_1 = \frac{1}{2}\alpha'; & T_2 = \frac{1}{2}\alpha'' - \beta; & T_3 = \frac{1}{2}\alpha''' - \frac{3}{2}\beta' \\ T_4 = \frac{1}{2}\beta'; & T_5 = \frac{1}{2}\alpha^{IV} - 2\beta'' + \gamma; & T_6 = \frac{1}{2}\beta'' - \gamma; \text{ ec.} \end{array}$$

Dove s'incontra maggiore difficoltà è nel provare dipendenti dai soli tre trinomj α, β, γ e loro derivate quelli che loro terrebbero dietro nell'ordine delle equazioni (6), cioè i trinomj

$$(10) \qquad x^{IV2} + y^{IV2} + z^{IV2}; \quad x^{V2} + y^{V2} + z^{V2}; \text{ ec.}$$

A conseguire un tal fine havvi un metodo di dimostrazione generale che, quantunque un pò lungo, merita di essere riferito anche perchè ci verrà utilissimo per un passo del Capo V.

Siano tre equazioni, come le seguenti

$$(11) \qquad \begin{aligned} x'X + y'Y + z'Z &= L \\ x''X + y''Y + z''Z &= M \\ x'''X + y'''Y + z'''Z &= N. \end{aligned}$$

Cavando da queste i valori delle X, Y, Z per mezzo delle formole elementari che danno la risoluzione di tre equazioni di primo grado a tre incognite, otteniamo

$$(12) \qquad \begin{aligned} X &= \frac{1}{D}\{L(y''z''' - z''y''') + M(z'y''' - y'z''') + N(y'z'' - z'y'')\} \\ Y &= \frac{1}{D}\{L(z''x''' - x''z''') + M(x'z''' - z'x''') + N(z'x'' - x'z'')\} \\ Z &= \frac{1}{D}\{L(x''y''' - y''x''') + M(y'x''' - x'y''') + N(x'y'' - y'x'')\} \end{aligned}$$

variation which corresponds to the equation (16) in the aforementioned Capo, and we will obtain the following expression, which parallels equation (17) [again in aforementioned Capo],

$$(8)\qquad \int df \cdot \Lambda\delta\rho^2 =$$

$$(1)\ \delta\alpha + (2)\ \delta\beta + (3)\ \delta\gamma + (4)\ \delta T_1 + (5)\ \delta T_2 + (6)\ \delta T_3 + \text{etc.}$$

which has to be introduced under the integral sign of the most general equation (1) which is valid for the linear systems. The coefficients $(1), (2), (3)$ .... are to be regarded as functions of variable a, since variable f disappeared in them because of the performed definite integrations.

14. Here, exactly as it is done in the sect. 74 p.m., will we show that all infinite trinomials T_1, T_2, T_3, etc. can be expressed in terms of the first three α, β, γ (equations (6)) and in terms of their derivatives of all orders with respect to variable a.

It is easy to be persuaded that the following equalities hold:

$$(9)\qquad \begin{aligned} &T_1 = \frac{1}{2}\alpha'; \quad T_2 = \frac{1}{2}\alpha'' - \beta; \qquad\qquad T_3 = \frac{1}{2}\alpha''' - \frac{3}{2}\beta' \\ &T_4 = \frac{1}{2}\beta'; \quad T_5 = \frac{1}{2}\alpha^{IV} - 2\beta'' + \gamma; \quad T_6 = \frac{1}{2}\beta'' - \gamma; \text{ etc.} \end{aligned}$$

Where one finds more difficulties it is in demonstrating that trinomials which will follow in the derivation order in the equations (6), i.e. trinomials

$$(10)\qquad x^{IV2} + y^{IV2} + z^{IV2}; \qquad x^{V2} + y^{V2} + z^{V2}; \text{etc.}$$

also depend only on trinomials α, β, γ and their derivatives.

In order to pursue this aim it is possible to conceive a general demonstration method which, though somehow lengthy, deserves being presented also because it will be very useful in our treatment of a passage in Capo V.

Let us consider three equations, as the following

$$(11)\qquad \begin{aligned} x'X + y'Y + z'Z &= L \\ x''X + y''Y + z''Z &= M \\ x'''X + y'''Y + z'''Z &= N. \end{aligned}$$

By calculating from these the values of the unknowns X, Y, Z by means of the elementary formulae which give the solution of three linear equations in three unknown variables, we get

$$(12)\qquad \begin{aligned} X &= \frac{1}{D}\{L(y''z''' - z''y''') + M\,(z'y''' - y'z''') + N\,(y'z'' - z'y'')\} \\ Y &= \frac{1}{D}\{L(z''x''' - x''z''') + M\,(x'z''' - z'x''') + N\,(z'x'' - x'z'')\} \\ Z &= \frac{1}{D}\{L(x''y''' - y''x''') + M\,(y'x''' - x'y''') + N\,(x'y'' - y'x'')\} \end{aligned}$$

essendo

$$D = x'(y''z''' - z''y''') + x''\,(z'y''' - y'z''') + x'''\,(y'z'' - z'y'')\,. \tag{13}$$

Quadrando queste equazioni (12) e sommandole, deduciamo

$$\begin{aligned}
&D^2\left(X^2+Y^2+Z^2\right) = \\
&L^2\left\{(y''z'''-z''y''')^2+(z''x'''-x''z''')^2+(x''y'''-y''x''')^2\right\}\\
&+M^2\left\{(z'y'''-y'z''')^2+(x'z'''-z'x''')^2+(y'x'''-x'y''')^2\right\}\\
&+N^2\left\{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2\right\}\\
&+2LM\,\{(y''z'''-z''y''')(z'y'''-y'z''')+(z''x'''-x''z''')\,(x'z'''-z'x''')\\
&\qquad\qquad+(x''y'''-y''x''')\,(y'x'''-x'y''')\}\\
&+2LN\,\{(y''z'''-z''y''')(y'z''-z'y'')+(z''x'''-x''z''')\,(z'x''-x'z'')\\
&\qquad\qquad+(x''y'''-y''x''')\,(x'y''-y'x'')\}\\
&+2MN\,\{(z'y'''-y'z''')(y'z''-z'y'')+(x'z'''-z'x''')\,(z'x''-x'z'')\\
&\qquad\qquad+(y'x'''-x'y''')\,(x'y''-y'x'')\}\,.
\end{aligned} \tag{14}$$

Ora si richiamino le formole (30), (32) del n.67 m.p., e applicando pazientemente tre volte la prima a trasformare nella precedente i coefficienti di L^2, M^2, N^2, e tre volte la seconda a trasformare quelli di $2LM, 2LN, 2MN$, troveremo che il secondo membro di questa (14) (viste le denominazioni (6), (7) adottate più sopra) prende la forma

$$\begin{aligned}
&L^2\left(\beta\gamma - T_4^2\right) + M^2(\alpha\gamma - T_2^2) + N^2\left(\alpha\beta - T_1^2\right)\\
&+2LM\,(T_4T_2 - \gamma T_1) + 2LN\,(T_1T_4 - \beta T_2) + 2MN\,(T_1T_2 - \alpha T_4)\,.
\end{aligned} \tag{15}$$

Quindi, sostituendo per T_1, T_2, T_3 i valori datici dalle (9), la (14) diventerà

$$\begin{aligned}
&D^2\left(X^2+Y^2+Z^2\right) = \\
&L^2\left(\beta\gamma - \frac{1}{4}\beta'^2\right) + M^2\left(\alpha\gamma - \frac{1}{4}\,(\alpha''-2\beta)^2\right) + N^2\left(\alpha\beta - \frac{1}{4}\alpha'^2\right)\\
&+LM\left(\frac{1}{2}\beta'\,(\alpha''-2\beta) - \gamma\alpha'\right) + LN\left(\frac{1}{2}\alpha'\beta' - \beta\,(\alpha''-2\beta)\right) + MN\left(\frac{1}{2}\alpha'\,(\alpha''-2\beta) - \alpha\beta'\right).
\end{aligned} \tag{16}$$

Presentemente ci conviene trattenerci a dimostrare che la quantità D, quale è data dalla (13), può essere ridotta ad una espressione fatta delle sole α, β, γ e loro derivate. Osserviamo le tre equazioni

$$\begin{aligned}
D &= x'(y''z'''-z''y''') + x''(z'y'''-y'z''') + x'''(y'z''-z'y'')\\
0 &= y'(y''z'''-z''y''') + y''(z'y'''-y'z''') + y'''(y'z''-z'y'')\\
0 &= z'(y''z'''-z''y''') + z''(z'y'''-y'z''') + z'''(y'z''-z'y'')
\end{aligned}$$

being

$$D = x'(y''z''' - z''y''') + x''\left(z'y''' - y'z'''\right) + x'''\left(y'z'' - z'y''\right). \tag{13}$$

By calculating the square of the obtained equations (12) and summing them up we deduce

$$\begin{aligned} & D^2\left(X^2+Y^2+Z^2\right) = \\ & L^2\left\{(y''z'''-z''y''')^2+\left(z''x'''-x''z'''\right)^2+\left(x''y'''-y''x'''\right)^2\right\} \\ & +M^2\left\{(z'y'''-y'z''')^2+\left(x'z'''-z'x'''\right)^2+\left(y'x'''-x'y'''\right)^2\right\} \\ & +N^2\left\{(y'z''-z'y'')^2+\left(z'x''-x'z''\right)^2+\left(x'y''-y'x''\right)^2\right\} \\ & +2LM\left\{(y''z'''-z''y''')(z'y'''-y'z''')+\left(z''x'''-x''z'''\right)\left(x'z'''-z'x'''\right)\right. \\ & \qquad\qquad \left.+\left(x''y'''-y''x'''\right)\left(y'x'''-x'y'''\right)\right\} \\ & +2LN\left\{(y''z'''-z''y''')(y'z''-z'y'')+\left(z''x'''-x''z'''\right)\left(z'x''-x'z''\right)\right. \\ & \qquad\qquad \left.+\left(x''y'''-y''x'''\right)\left(x'y''-y'x''\right)\right\} \\ & +2MN\left\{(z'y'''-y'z''')(y'z''-z'y'')+\left(x'z'''-z'x'''\right)\left(z'x''-x'z''\right)\right. \\ & \qquad\qquad \left.+\left(y'x'''-x'y'''\right)\left(x'y''-y'x''\right)\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

By recalling now the formulas (30), (32) in the sect. 67 p.m. and applying patiently three times the first one in order to transform in the previous one the coefficients of the quantities L^2, M^2, N^2, and [applying] the second one to transform the coefficients of the quantities $2LM, 2LN, 2MN$, we will find that the right-hand side of this last equation (14) (when using the previously introduced definitions (6), (7)) assumes the form

$$\begin{aligned} & L^2\left(\beta\gamma - T_4^2\right) + M^2(\alpha\gamma - T_2^2) + N^2\left(\alpha\beta - T_1^2\right) \\ & + 2LM\left(T_4T_2 - \gamma T_1\right) + 2LN\left(T_1T_4 - \beta T_2\right) + 2MN\left(T_1T_2 - \alpha T_4\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Therefore, by replacing for quantities T_1, T_2, T_3 the values given to us by the equations (9), the equation (14) will become

$$\begin{aligned} & D^2\left(X^2+Y^2+Z^2\right) = \\ & L^2\left(\beta\gamma - \frac{1}{4}\beta'^2\right) + M^2\left(\alpha\gamma - \frac{1}{4}\left(\alpha''-2\beta\right)^2\right) + N^2\left(\alpha\beta - \frac{1}{4}\alpha'^2\right) \\ & + LM\left(\frac{1}{2}\beta'\left(\alpha''-2\beta\right) - \gamma\alpha'\right) + LN\left(\frac{1}{2}\alpha'\beta' - \beta\left(\alpha''-2\beta\right)\right) + MN\left(\frac{1}{2}\alpha'\left(\alpha''-2\beta\right) - \alpha\beta'\right). \end{aligned} \tag{16}$$

It is convenient now to engage ourselves in showing that quantity D, as it is given by (13), can be reduced to an expression where only quantities α, β, γ and all their derivatives effectively appear. Let us observe these three equations:

$$\begin{aligned} D &= x'(y''z''' - z''y''') + x''(z'y''' - y'z''') + x'''(y'z'' - z'y'') \\ 0 &= y'(y''z''' - z''y''') + y''(z'y''' - y'z''') + y'''(y'z'' - z'y'') \\ 0 &= z'(y''z''' - z''y''') + z''(z'y''' - y'z''') + z'''(y'z'' - z'y'') \end{aligned}$$

delle quali la prima è la stessa (13), e le altre due sono manifestamente identiche: queste, quadrate e sommate, danno

$$
\begin{aligned}
(17)\qquad D^2 = \alpha(y''z''' - z''y''')^2 + \beta(z'y''' - y'z''')^2 + \gamma(y'z'' - z'y'')^2 \\
+ 2T_1(y''z''' - z''y''')(z'y''' - y'z''') + 2T_2(y''z''' - z''y''')(y'z'' - z'y'') \\
+ 2T_4(z'y''' - y'z''')(y'z'' - z'y'').
\end{aligned}
$$

Notiamo queste altre tre equazioni

$$
\begin{aligned}
0 &= x'\,(z''x''' - x''z''') + x''\,(x'z''' - z'x''') + x'''\,(z'x'' - x'z'') \\
D &= y'\,(z''x''' - x''z''') + y''\,(x'z''' - z'x''') + y'''\,(z'x'' - x'z'') \\
0 &= z'\,(z''x''' - x''z''') + z''\,(x'z''' - z'x''') + z'''\,(z'x'' - x'z'')
\end{aligned}
$$

di cui la prima e la terza sono visibilmente identiche, e quella di mezzo è la stessa (13), avendone diversamente ordinati i termini nel secondo membro. Queste pure, quadrate e sommate, ci porgono

$$
\begin{aligned}
(18)\qquad D^2 = \alpha\,(z''x''' - x''z''')^2 + \beta\,(x'z''' - z'x''')^2 + \gamma\,(z'x'' - x'z'')^2 \\
+ 2T_1\,(z''x''' - x''z''')\,(x'z''' - z'x''') + 2T_2\,(z''x''' - x''z''')\,(z'x'' - x'z'') \\
+ 2T_4\,(x'z''' - z'x''')\,(z'x'' - x'z'')\,.
\end{aligned}
$$

Poniamo attenzione da ultimo alle tre equazioni

$$
\begin{aligned}
0 &= x'\,(x''y''' - y''x''') + x''\,(y'x''' - x'y''') + x'''\,(x'y'' - y'x'') \\
0 &= y'\,(x''y''' - y''x''') + y''\,(y'x''' - x'y''') + y'''\,(x'y'' - y'x'') \\
D &= z'\,(x''y''' - y''x''') + z''\,(y'x''' - x'y''') + z'''\,(x'y'' - y'x'')
\end{aligned}
$$

delle quali le prime due sono identiche, e la terza è ancora la (13) diversamente ordinata. Quadrando e sommando al solito, giungiamo alla seguente

$$
\begin{aligned}
(19)\qquad D^2 = \alpha\,(x''y''' - y''x''')^2 + \beta\,(y'x''' - x'y''')^2 + \gamma\,(x'y'' - y'x'')^2 \\
+ 2T_1\,(x''y''' - y''x''')\,(y'x''' - x'y''') + 2T_2\,(x''y''' - y''x''')\,(x'y'' - y'x'') \\
+ 2T_4\,(y'x''' - x'y''')\,(x'y'' - y'x'')\,.
\end{aligned}
$$

Sommiamo ora le tre equazioni (17), (18), (19): formeremo una equazione il cui primo membro sarà $3D^2$, ed il secondo potrà essere ordinato come quello dell'equazione (14); stando le quantità

$$\alpha, \beta, \delta, 2T_1, 2T_2, 2T_4$$

the first one of which is exactly equation (13), and the other two are manifestly true: these three equations, once squared and then summed up, give:

$$
\begin{aligned}
(17)\qquad D^2 &= \alpha(y''z''' - z''y''')^2 + \beta(z'y''' - y'z''')^2 + \gamma(y'z'' - z'y'')^2 \\
&\quad + 2T_1(y''z''' - z''y''')(z'y''' - y'z''') + 2T_2(y''z''' - z''y''')(y'z'' - z'y'') \\
&\quad + 2T_4(z'y''' - y'z''')(y'z'' - z'y'').
\end{aligned}
$$

Let us remark that also the following three equations hold:

$$
\begin{aligned}
0 &= x'\,(z''x''' - x''z''') + x''\,(x'z''' - z'x''') + x'''\,(z'x'' - x'z'') \\
D &= y'\,(z''x''' - x''z''') + y''\,(x'z''' - z'x''') + y'''\,(z'x'' - x'z'') \\
0 &= z'\,(z''x''' - x''z''') + z''\,(x'z''' - z'x''') + z'''\,(z'x'' - x'z'')
\end{aligned}
$$

the first and the third of which are manifestly verified and the second is again exactly the equation (13), the terms of its right-hand side being simply ordered differently. Again these last three equations, once squared and then summed up, give:

$$
\begin{aligned}
(18)\qquad D^2 &= \alpha\,(z''x''' - x''z''')^2 + \beta\,(x'z''' - z'x''')^2 + \gamma\,(z'x'' - x'z'')^2 \\
&\quad + 2T_1\,(z''x''' - x''z''')\,(x'z''' - z'x''') + 2T_2\,(z''x''' - x''z''')\,(z'x'' - x'z'') \\
&\quad + 2T_4\,(x'z''' - z'x''')\,(z'x'' - x'z'')\,.
\end{aligned}
$$

Let us consider finally the three equations

$$
\begin{aligned}
0 &= x'\,(x''y''' - y''x''') + x''\,(y'x''' - x'y''') + x'''\,(x'y'' - y'x'') \\
0 &= y'\,(x''y''' - y''x''') + y''\,(y'x''' - x'y''') + y'''\,(x'y'' - y'x'') \\
D &= z'\,(x''y''' - y''x''') + z''\,(y'x''' - x'y''') + z'''\,(x'y'' - y'x'')
\end{aligned}
$$

the first two of them are identically verified and the third is again the equation (13) whoese terms have been ordered differently. By squaring and summing up, as usual, we arrive at the following one

$$
\begin{aligned}
(19)\qquad D^2 &= \alpha\,(x''y''' - y''x''')^2 + \beta\,(y'x''' - x'y''')^2 + \gamma\,(x'y'' - y'x'')^2 \\
&\quad + 2T_1\,(x''y''' - y''x''')\,(y'x''' - x'y''') + 2T_2\,(x''y''' - y''x''')\,(x'y'' - y'x'') \\
&\quad + 2T_4\,(y'x''' - x'y''')\,(x'y'' - y'x'')\,.
\end{aligned}
$$

Let us sum up now the three equations (17), (18), (19): we will obtain one equation whose left-hand side will be $3D^2$, while its right-hand side can be ordered as the right-hand side of equation (14); substituting quantities

$$\alpha, \beta, \delta, 2T_1, 2T_2, 2T_4$$

rispettivamente al luogo delle

$$L^2, M^2, N^2, 2LM, 2LN, MN;$$

potremo quindi praticare le stesse trasformazioni fatte sulla (14): così (richiamata l'espressione (15)) vedremo risultare

$$\begin{aligned} 3D^2 &= \alpha\left(\beta\gamma - T_4^2\right) + \beta(\alpha\gamma - T_2^2) + \gamma\left(\alpha\beta - T_1^2\right) \\ &+ 2T_1\left(T_4T_2 - \gamma T_1\right) + 2T_2\left(T_1T_4 - \beta T_2\right) + 2T_4\left(T_1T_2 - \alpha T_4\right) \end{aligned}$$

nelle quali hanno luogo riduzioni, e per tal modo diventa

$$D^2 = \alpha\beta\gamma - \gamma T_1^2 - \beta T_2^2 - \alpha T_4^2 + 2T_1T_2T_4$$

ossia, sostituendo i valori che trovansi fra gli scritti nelle (9)

(20) $$D^2 = \alpha\beta\gamma - \frac{1}{4}\left\{\gamma\alpha'^2 + \beta\left(\alpha'' - 2\beta\right)^2 + \alpha\beta'^2\right\} + \frac{1}{4}\alpha'\beta'\left(\alpha'' - 2\beta\right);$$

è questa l'espressione di cui andavamo in cerca.

Dopo di ciò l'ispezione della equazione (16) ci renderà manifesta la verità del seguente teorema. Se nelle equazioni (11) i secondi membri L, M, N sono quantità fatte unicamente delle α, β, γ e loro derivate, anche il trinomio $X^2 + Y^2 + Z^2$, formato coi valori delle X, Y, Z dedotti da quelle equazioni (11), sarà una quantità fatta unicamente delle α, β, γ e loro derivate.

Osservinsi adesso le tre equazioni

$$\begin{aligned} x'x^{IV} + y'y^{IV} + z'z^{IV} &= \frac{1}{2}\alpha''' - \frac{3}{2}\beta' \\ x''x^{IV} + y''y^{IV} + z''z^{IV} &= \frac{1}{2}\beta'' - \gamma \\ x'''x^{IV} + y'''y^{IV} + z'''z^{IV} &= \frac{1}{2}\gamma', \end{aligned}$$

(delle quali la prima e la seconda hanno rispettivamente per primi membri i valori di $T_{3,}T_6$ dati altrimenti nelle (9), e la terza vien subito dalla derivazione del valore di γ) e si paragonino colle (11). Vedremo, quanto ai secondi membri L, M, N, adempita la condizione voluta dal precedente teorema, e ne conchiuderemo subito che il trinomio $x^{IV2} + y^{IV2} + z^{IV2}$ riducesi ad un'espressione fatta delle α, β, γ e loro derivate. Chiamiamo ϑ questo trinomio.

Osservinsi anche le equazioni

$$\begin{aligned} x'x^{V} + y'y^{V} + z'z^{V} &= \frac{1}{2}\alpha^{IV\prime} - 2\beta'' + \gamma \\ x''x^{V} + y''y^{V} + z''z^{V} &= \frac{1}{2}\beta''' - \frac{3}{2}\gamma' \\ x'''x^{V} + y'''y^{V} + z'''z^{V} &= \frac{1}{2}\gamma'' - \vartheta \end{aligned}$$

respectively at the place of the quantities

$$L^2, M^2, N^2, 2LM, 2LN, MN;$$

we will be able to apply the same transformations performed to the equation (14): therefore (by recalling the expression (15)) we will obtain

$$\begin{aligned} 3D^2 &= \alpha\left(\beta\gamma - T_4^2\right) + \beta(\alpha\gamma - T_2^2) + \gamma\left(\alpha\beta - T_1^2\right) \\ &\quad + 2T_1\left(T_4T_2 - \gamma T_1\right) + 2T_2\left(T_1T_4 - \beta T_2\right) + 2T_4\left(T_1T_2 - \alpha T_4\right) \end{aligned}$$

in which some algebraic simplifications can take place thus reducing it to the following form

$$D^2 = \alpha\beta\gamma - \gamma T_1^2 - \beta T_2^2 - \alpha T_4^2 + 2T_1T_2T_4$$

that is, by replacing the values which can be found among those found in the equations (9), it results

$$D^2 = \alpha\beta\gamma - \frac{1}{4}\left\{\gamma\alpha'^2 + \beta\left(\alpha'' - 2\beta\right)^2 + \alpha\beta'^2\right\} + \frac{1}{4}\alpha'\beta'\left(\alpha'' - 2\beta\right); \tag{20}$$

which is exactly the expression we were looking for.

After that, a simple inspection of the equation (16) will reveal the truth of the following theorem. If in the equations (11) all the quantities L, M, N on the right-hand side are quantities given exclusively in terms of the other quantities α, β, γ and of all their derivatives, also the trinomial $X^2 + Y^2 + Z^2$, which is formed with the values of the quantities X, Y, Z deduced from the equations (11), will be a quantity which can be uniquely expressed in terms of the quantities α, β, γ and of their derivatives.

One should now observe these three equations

$$\begin{aligned} x'x^{IV} + y'y^{IV} + z'z^{IV} &= \frac{1}{2}\alpha''' - \frac{3}{2}\beta' \\ x''x^{IV} + y''y^{IV} + z''z^{IV} &= \frac{1}{2}\beta'' - \gamma \\ x'''x^{IV} + y'''y^{IV} + z'''z^{IV} &= \frac{1}{2}\gamma', \end{aligned}$$

(the first and the second of which present in their left-hand side exactly the values of the quantities T_3, T_6 calculated in a different way in the equations (9), and the third one can be easily derived once the expression for γ is given) and compare them to the equations (11). We will see that, for what concerns the quantities L, M, N, appearing in the right-hand sides that the hypothesis of the previous theorem is verified and we will be able to immediately deduce that the trinomial $x^{IV2} + y^{IV2} + z^{IV2}$ can be reduced to an expression in which only quantities α, β, γ and their derivatives appear. Let us call ϑ this trinomial.

One should now observe also these equations

$$\begin{aligned} x'x^{V} + y'y^{V} + z'z^{V} &= \frac{1}{2}\alpha^{IV\prime} - 2\beta'' + \gamma \\ x''x^{V} + y''y^{V} + z''z^{V} &= \frac{1}{2}\beta''' - \frac{3}{2}\gamma' \\ x'''x^{V} + y'''y^{V} + z'''z^{V} &= \frac{1}{2}\gamma'' - \vartheta \end{aligned}$$

che prontamente si ottengono derivando le tre precedenti, e confrontandole colle (11), ne dedurremo a colpo d'occhio che la nota proprietà già verificata nel trinomio ϑ, si verifica altresì nel trinomio $x^{V2}+y^{V2}+z^{V2}$. Così derivando le ultime tre, e via via, approfittando di ciò che di mano in mano resta dimostrato, e progredendo sempre coll'applicazione del surriferito teorema, proveremo la proprietà per tutti i trinomj che sono somme di quadrati(*).

15. In vista della proprietà dimostrata nel numero precedente pei trinomj $T_1, T_2, T_3, \dots$ all'infinito non può esservi difficoltà nel passaggio dalla equazione (8) ad un'altra che fa riscontro colla (18), n.75 m.p., nella quale la quantità $\int df \cdot \Lambda\delta\rho^2$ trovasi fatta eguale ad una serie che contiene linearmente le variate $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, e le variate delle loro derivate $\delta\alpha', \delta\beta', \delta\gamma'; \delta\alpha'', \delta\beta'', \delta\gamma''$, ec. essendone i coefficienti funzioni della a e delle stesse $\alpha, \beta, \gamma;\ \alpha', \beta', \gamma';\ \alpha'', \beta'', \gamma'', ec.$ Risulta anche chiaro il secondo passaggio da una tal equazione ad altra in riscontro colla (19) , n.° citato m.p., della forma

$$\int df \cdot \Lambda\delta\rho^2 = \lambda\delta\alpha + \mu\delta\beta + \nu\delta\gamma + \frac{d\Delta}{da}; \tag{21}$$

e ciò trasformando tutti i termini che contengono le variate $\delta\alpha', \delta\beta', \delta\gamma'; \delta\alpha'', \delta\beta'', \delta\gamma''$, ec. in binomj dei quali i primi termini sono della forma $E\delta\alpha, F\delta\beta, G\delta\gamma$, e vanno a fondersi con quelli di una tal forma già esistenti, e i secondi sono derivate esatte per la a, che riescono compresi nell'ultimo termine della precedente (21). Abbiamo dato al n.79 m.p. (equazioni (18)) uno schizzo che può servire di traccia a simili trasformazioni.

Introducendo ora nella equazione generale (1) spettante ai sistemi lineari invece dell'integrale $\int df \cdot \Lambda\delta\rho^2$ la quantità equivalente dataci dalla (21), si vede che sull'ultimo termine $\frac{d\Delta}{da}$ può effettuarsi l'integrazione per a, e che quindi esso non fa che somministrare una quantità che si unisce all'altro termine Ω di quella equazione. Sotto il segno integrale rimane un trinomio il

(*) La proprietà esposta dall'autore richiede anche la considerazione delle due formole:

$$x^{IV} x^{(2r)} + y^{IV} y^{(2r)} + z^{IV} z^{(2r)} = \alpha\left(\left(x^{IV}\right)^2 + y^{(IV)^2} + z^{(IV)^2}\right)^{(2r-4)} - \beta\left(\left(x^{V}\right)^2 + \left(y^{V}\right)^2 + \left(z^{V}\right)^2\right)^{(2r-6)} + \dots$$
$$\dots\dots + (-1)^r\,\omega\left(\left(x^{(r+2)}\right)^2 + \left(y^{(r+2)}\right)^2 + \left(z^{(r+2)}\right)^2\right)$$

$$x^{IV} x^{(2r+1)} + y^{IV} y^{(2r+1)} + z^{IV} z^{(2r+1)} = \alpha_1\left(\left(x^{IV}\right)^2 + y^{(IV)^2} + z^{(IV)^2}\right)^{(2r-2)} - \beta_1\left(\left(x^{V}\right)^2 + \left(y^{V}\right)^2 + \left(z^{V}\right)^2\right)^{(2r-3)} + \dots$$
$$\dots\dots + (-1)^r\,\omega_1\left(\left(x^{(r+2)}\right)^2 + \left(y^{(r+2)}\right)^2 + \left(z^{(r+2)}\right)^2\right)$$

nelle quali $\alpha, \beta, \gamma \dots \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots$ esprimono coefficienti numerici. (Brioschi) which can be immediately deduced by deriving the three previous ones, and one can compare them with the equations (11): we will deduce by simple inspection that the well-known property verified by the trinomial ϑ, is also verified by the trinomial $x^{V2}+y^{V2}+z^{V2}$. By deriving in a similar way the last three equations, and exploiting one after the other, in a sequence, all the properties already shown and applying always the aforementioned theorem to the obtained expressions, we will prove the property [which appears in its thesis] for all trinomials which have the form of a sum of squares(*).

15. Once one has proven the property stated in the previous section 14 for the infinite sequence of the trinomials $T_1, T_2, T_3, ...$ there is no difficulty in deducing from the equation (8) to an equation which parallels the equation (18), sect. 75 p.m., where quantity $\int df\cdot\Lambda\delta\rho^2$ is seen to be equal to a series which contains linearly the variations $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, together with the variations of their derivatives $\delta\alpha', \delta\beta', \delta\gamma'; \delta\alpha'', \delta\beta'', \delta\gamma''$, etc. being the coefficients [of such a linear form] functions depending on the variable a and on the same dependent variables $\alpha,\beta,\gamma;$ $\alpha',\beta',\gamma';\ \alpha'',\beta'',\gamma''$, etc. It is also clear the second passage leading from such equation to another one which parallels the equation (19), of the cited sect. p.m., having the form

$$\int df\cdot\Lambda\delta\rho^2=\lambda\delta\alpha+\mu\delta\beta+\nu\delta\gamma+\frac{d\Delta}{da}; \tag{21}$$

and this can be done by transforming all the terms which contain the variations $\delta\alpha'$, $\delta\beta'$, $\delta\gamma'$; $\delta\alpha''$, $\delta\beta''$, $\delta\gamma''$, etc. into binomials whose first terms have the form $E\delta\alpha, F\delta\beta, G\delta\gamma$, to be added to those terms having the same form which were already calculated, while the second terms are some exact derivatives with respect to variable a, which must be included in the last term of the previous equation (21). We have already sketched in the sect. 79 p.m. (equations (18)) a reasoning path which can give a hint for performing such transformations. By introducing now in the general equation (1) which is pertinent to the linear systems instead of the integral $\int df\cdot\Lambda\delta\rho^2$ the equivalent quantity given by the equation (21), one can see that the last term $\frac{d\Delta}{da}$ can be transformed by calculating the integral with respect to the variable a, and that, as a consequence, it simply adds a quantity to the other term Ω in aforementioned equation. Under the integral sign a trinomial is left

(*) The property presented by the author requires also the consideration of the two formulas

$$x^{IV}x^{(2r)}+y^{IV}y^{(2r)}+z^{IV}z^{(2r)}=\alpha\left(\left(x^{IV}\right)^2+y^{(IV)^2}+z^{(IV)^2}\right)^{(2r-4)}-\beta\left(\left(x^{V}\right)^2+\left(y^{V}\right)^2+\left(z^{V}\right)^2\right)^{(2r-6)}+....$$
$$......+(-1)^r\,\omega\left(\left(x^{(r+2)}\right)^2+\left(y^{(r+2)}\right)^2+\left(z^{(r+2)}\right)^2\right)$$

$$x^{IV}x^{(2r+1)}+y^{IV}y^{(2r+1)}+z^{IV}z^{(2r+1)}=\alpha_1\left(\left(x^{IV}\right)^2+y^{(IV)^2}+z^{(IV)^2}\right)^{(2r-2)}-\beta_1\left(\left(x^{V}\right)^2+\left(y^{V}\right)^2+\left(z^{V}\right)^2\right)^{(2r-3)}+....$$
$$......+(-1)^r\,\omega_1\left(\left(x^{(r+2)}\right)^2+\left(y^{(r+2)}\right)^2+\left(z^{(r+2)}\right)^2\right)$$

where $\alpha,\beta,\gamma....\alpha_1,\beta_1,\gamma_1....$ express suitable numerical coefficients (Brioschi) quale è il medesimo che vedesi nella equazione (8) n.7 di questa Memoria; così una tale equazione viene riconfermata come generalissima insieme a tutte le conseguenze che ne abbiamo dedotte. Farò poi qui un'osservazione corrispondente alla già posta al n. 76 m.p., cioè che la considerazione delle forze molecolari, seguendo l'andamento tenuto ne' precedenti numeri, conduce in maniera diretta e spedita alla dimostrazione delle tre equazioni che sussistono per tutti i punti del sistema, ma ci lascia all'oscuro intorno a quelle equazioni che si verificano soltanto ai limiti di esso: le quali equazioni invece ci riescono assegnabili e piane se la trattazione del problema si effettua alla maniera esposta al n. 7.

16. Passiamo ai sistemi superficiali.

Per questi il valore della ρ^2 datoci dalla equazione (4) si volge primieramente sotto la forma

$$\begin{aligned}\rho^2 = &\left(fx' + gx_{,} + \frac{f^2}{2}x'' + fgx'_{,} + \frac{g^2}{2}x_{,,} + \text{ec.}\right)^2\\ &+\left(fy' + gy_{,} + \frac{f^2}{2}y'' + fgy'_{,} + \frac{g^2}{2}y_{,,} + \text{ec.}\right)^2\\ &+\left(fz' + gz_{,} + \frac{f^2}{2}z'' + fgz'_{,} + \frac{g^2}{2}z_{,,} + \text{ec.}\right)^2\end{aligned}$$

(gli apici in alto significano le derivate per la a e quelli a basso le derivate per b): poi, eseguendo i quadrati, sotto l'altra

$$\begin{aligned}\rho^2 = &f^2\alpha + 2fg\epsilon + g^2\vartheta + \frac{f^4}{4}\chi + \frac{g^4}{4}\varsigma + f^2g^2\omega\\ &+ f^3T_1 + f^2g\,(2T_2 + T_4) + fg^2(T_3 + 2T_5) + g^3T_6 + \text{ec.}\end{aligned} \tag{22}$$

avendo posto per abbreviare

$$\begin{aligned}\alpha &= x'^2 + y'^2 + z'^2\\ \epsilon &= x'x_{,} + y'y_{,} + z'z_{,}\\ \vartheta &= x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2\\ \chi &= x''^2 + y''^2 + z''^2\\ \varsigma &= x_{,,}^2 + y_{,,}^2 + z_{,,}^2\\ \omega &= x'^2_{,} + y'^2_{,} + z'^2_{,}\end{aligned} \tag{23}$$

e assunte le T_1, T_2, T_3, ec. all'infinito per esprimere altri trinomj di cui scrivo which is the same appearing in the equation (8) sect. 7 in the current Memoir; therefore such an equation is confirmed to be the most general one, together with all the consequences which we have deduced from it. I will then formulate here an observation which corresponds to the one already formulated in the sect. 76 p.m.: [it consists in stating that] when considering the molecular forces by following the procedure followed in the previous sections one is lead in a direct and quick way to the demonstration of the three equations which hold for all points of the system, but remains in the ignorance of those equations which hold at the boundaries of the system: however these last equations are easily found if the problem is treated in the way expounded in the sect. 7.

16. We now proceed in dealing with superficial systems.

For such systems the value of the quantity ρ^2 given to us by the equation (4) can be, first, transformed to assume the form

$$\begin{aligned}\rho^2 = &\left(fx^{'} + gx_{,} + \frac{f^2}{2}x^{''} + fgx'_{,} + \frac{g^2}{2}x_{,,} + \text{etc.}\right)^2\\ &+\left(fy^{'} + gy_{,} + \frac{f^2}{2}y^{''} + fgy'_{,} + \frac{g^2}{2}y_{,,} + \text{etc.}\right)^2\\ &+\left(fz^{'} + gz_{,} + \frac{f^2}{2}z^{''} + fgz'_{,} + \frac{g^2}{2}z_{,,} + \text{etc.}\right)^2\end{aligned}$$

(where the upper primes denote the derivatives with respect to variable a and the lower primes mean the derivatives with respect to variable b): then by calculating the squares, [the previous formula] can be transformed into the following one

$$\begin{aligned}\rho^2 = &f^2\alpha + 2fg\epsilon + g^2\vartheta + \frac{f^4}{4}\chi + \frac{g^4}{4}\varsigma + f^2g^2\omega\\ &+ f^3T_1 + f^{\,2}g\,(2T_2 + T_4) + fg^2(T_3 + 2T_5) + g^3T_6 + \text{etc.}\end{aligned} \tag{22}$$

where we have used the following short-hand notation

$$\begin{aligned}\alpha &= x^{'2} + y^{'2} + z^{'2}\\ \epsilon &= x'x_{,} + y'y_{,} + z'z_{,}\\ \vartheta &= x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2\\ \chi &= x^{''2} + y^{''2} + z^{''2}\\ \varsigma &= x_{,,}^{2} + y_{,,}^{2} + z_{,,}^{2}\\ \omega &= x_{,}^{'2} + y_{,}^{'2} + z_{,}^{'2}\end{aligned} \tag{23}$$

together with the infinite sequence of symbols T_1, T_2, T_3, etc. used to express other trinomials, among which I will write only alcuni

$$(24)\qquad \begin{aligned} T_1 &= x'x'' + y'y'' + z'z'' \\ T_2 &= x'x'_, + y'y'_, + z'z'_, \\ T_3 &= x'x_{,,} + y'y_{,,} + z'z_{,,} \\ T_4 &= x_,x'' + y_,y'' + z_,z'' \\ T_5 &= x_,x'_, + y_,y'_, + z_,z'_, \\ T_6 &= x_,x_{,,} + y_,y_{,,} + z_,z_{,,} \\ &\text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \end{aligned}$$

Dopo di ciò ci prepareremo in riscontro della equazione (8) e della (17), n.73 m.p. l'equazione

$$(25)\qquad \begin{aligned} \int df \int dg \cdot \Lambda\delta\rho^2 = (1)\delta\alpha + (2)\delta\epsilon + (3)\delta\vartheta + (4)\delta\chi + (5)\delta\varsigma + (6)\delta\omega \\ + (7)\ \delta T_1 + (8)\ \delta T_2 + (9)\ \delta T_3 + \text{ec.} \end{aligned}$$

essendo i coefficienti $(1)\,,(2)\,,(3)\ldots.(7)\,,(8)\ldots.$ da considerarsi funzioni delle sole a, b, giacchè le f, g vi si debbono intendere sparite a motivo di integrazioni effettuate e definite.

17. Vogliamo anche qui dire quanto basta a persuadere il lettore che i valori di tutti i trinomj $T_1, T_2, T_3\ldots.$ all'infinito possono aversi in funzione dei primi sei $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \varsigma, \omega$, e delle loro derivate rispetto alle a, b di tutti gli ordini.

È primieramente visibile che si hanno

$$(26)\qquad \begin{aligned} T_1 = \frac{1}{2}\alpha'; \quad T_2 = \frac{1}{2}\alpha_,; \quad T_3 = \epsilon_, - \frac{1}{2}\vartheta' \\ T_4 = \epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_,; \quad T_5 = \frac{1}{2}\vartheta'; \quad T_6 = \frac{1}{2}\vartheta_,; \text{ec.} \end{aligned}$$

Dove la dimostrazione riesce più difficile è nel provare riducibili ad espressioni fatte delle sei $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \varsigma, \omega$ e loro derivate gli altri trinomj con derivate tutte di second' ordine, cioè i tre

$$x''x'_, + y''y'_, + z''z'_, \ ; \quad x''x_{,,} + \ y''y_{,,} + \ z''z_{,,} \ ; \quad x'_,x_{,,} + y'_,y_{,,} + z'_,z_{,,}.$$

A tal fine e per non deviare in lungaggini che potrebbero farci perdere tempo, conviene governarsi con arte, introducendo alcune denominazioni.

some

(24)
$$\begin{aligned}
T_1 &= x'x'' + y'y'' + z'z'' \\
T_2 &= x'x'_{,} + y'y'_{,} + z'z'_{,} \\
T_3 &= x'x_{,,} + y'y_{,,} + z'z_{,,} \\
T_4 &= x_{,}x'' + y_{,}y'' + z_{,}z'' \\
T_5 &= x_{,}x'_{,} + y_{,}y'_{,} + z_{,}z'_{,} \\
T_6 &= x_{,}x_{,,} + y_{,}y_{,,} + z_{,}z_{,,} \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Subsequently we will prepare, to parallel equations (8) and (17), sect. 73 p.m., equation

(25)
$$\begin{aligned}
\int df \int dg \cdot \Lambda\delta\rho^2 = (1)\delta\alpha + (2)\delta\epsilon + (3)\delta\vartheta + (4)\delta\chi + (5)\delta\varsigma + (6)\delta\omega \\
+ (7)\ \delta T_1 + (8)\ \delta T_2 + (9)\ \delta T_3 + \text{etc.}
\end{aligned}$$

where coefficients $(1), (2), (3) \ldots\ldots (7), (8) \ldots\ldots$ must be regarded as functions of variables a, b only, since variables f, g no longer appear because of the performed definite integrations.

17. We want to say here, too, what is needed to persuade the reader that the values of all the infinite trinomials $T_1, T_2, T_3 \ldots\ldots$ can be expressed as functions of the first six variables $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \varsigma, \omega$, and of their derivatives of every order with respect to variables a, b.

Firstly, it is manifest that the following equations hold

(26)
$$\begin{aligned}
T_1 = \frac{1}{2}\alpha'; \quad T_2 = \frac{1}{2}\alpha_{,}; \quad T_3 = \epsilon_{,} - \frac{1}{2}\vartheta' \\
T_4 = \epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_{,}; \quad T_5 = \frac{1}{2}\vartheta'; \ T_6 = \frac{1}{2}\vartheta_{,}; \text{etc.}
\end{aligned}$$

Where the demonstration becomes more difficult is when one wants to prove that a similar dependence on the six variables $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \varsigma, \omega$ and on their derivatives holds also for the other trinomials in which all terms contain only second order derivatives, i.e. the three trinomials

$$x''x'_{,} + y''y'_{,} + z''z'_{,}\ ; \quad x''x_{,,} + \ y''y_{,,} + \ z''z_{,,}\ ; \quad x'_{,}x_{,,} + y'_{,}y_{,,} + z'_{,}z_{,,}\,.$$

To this aim, and in order not to deviate in useless and time-consuming lengthy steps, it is useful to introduce some suitable short-hand definitions.

Le equazioni da cui primieramente dedurre i valori di x'', y'', z'', sono le tre

$$(27)\qquad \begin{aligned} x'x'' + y'y'' + z'z'' &= T_1 \\ x_,x'' + y_,y'' + z_,z'' &= T_4 \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= \chi. \end{aligned}$$

Cavinsi dalle prime due i valori di due incognite date per la terza, per esempio, delle x'', y'' date per la z''. Poniamo

$$(28)\qquad p = x'y_, - y'x_, \,; \quad q = z'x_, - x'z_,; \quad r = y'z_, - z'y_,$$

$$(29)\qquad A = x_,T_1 - x'T_4 \,; \quad B = y_,T_1 - y'T_4 \,; \quad C = z_,T_1 - z'T_4$$

e troveremo

$$(30)\qquad x'' = \frac{B + rz''}{p} \;; \quad y'' = \frac{-A + qz''}{p} \;;$$

valori che, sostituiti nella terza delle (27), danno

$$\left(p^2 + q^2 + r^2\right) z'^2 - 2\,(Aq - Br)\,z'' + A^2 + B^2 = p^2\chi$$

dalla quale risulta

$$(31)\qquad z'' = \frac{Aq - Br \pm \sqrt{(Aq - Br)^2 + (p^2\chi - A^2 - B^2)\left(p^2 + q^2 + r^2\right)}}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Su questo valore si possono praticare varie riduzioni, osservando alcune equazioni identiche che si deducono dalle (28), (29).

Primieramente dalle (28) in forza della formola (30), n. 67 m.p. (che è una assai nota equazione identica) si ha

$$(32)\qquad p^2 + q^2 + r^2 = \alpha\vartheta - \epsilon^2$$

poi evidentemente queste due altre

$$(33)\qquad \begin{aligned} x'r + y'q + z'p &= 0 \\ x_,r + y_,q + z_,p &= 0; \end{aligned}$$

e siccome dalle (29) si ottiene

$$Ar + Bq + Cp = \left(x_,r + y_,q + z_,p\right) T_1 - (x'r + y'q + z'p)\,T_4;$$

The equations from which one has to start for deducing the values for quantities x'', y'', z'', are the following three

$$\begin{aligned} x'x'' + y'y'' + z'z'' &= T_1 \\ x_, x'' + y_, y'' + z_, z'' &= T_4 \\ x''^2 + y''^2 + z''^2 &= \chi. \end{aligned} \tag{27}$$

One has to calculate from the first two the values of two unknowns as functions of the third one, for instance the values of quantities x'', y'' given as functions of the quantity z''. If we introduce the notations

$$p = x'y_, - y'x_, \,; \quad q = z'x_, - x'z_,; \quad r = y'z_, - z'y_, \tag{28}$$

we will find

$$A = x_, T_1 - x'T_4 \,; \quad B = y_, T_1 - y'T_4 \,; \quad C = z_, T_1 - z'T_4 \tag{29}$$

$$x'' = \frac{B + rz''}{p} \,; \quad y'' = \frac{-A + qz''}{p} \,; \tag{30}$$

and these equalities once introduced in the third of the (27), will give

$$\left(p^2 + q^2 + r^2\right) z'^2 - 2\,(Aq - Br)\, z'' + A^2 + B^2 = p^2\chi$$

from which we can deduce

$$z'' = \frac{Aq - Br \pm \sqrt{(Aq - Br)^2 + (p^2\chi - A^2 - B^2)\left(p^2 + q^2 + r^2\right)}}{p^2 + q^2 + r^2}. \tag{31}$$

This expression can be reduced in various ways, by observing that some identities can be deduced from the equations (28), (29).

First of all from equations (28) because of formula (30), sect. 67 p.m. (this last equation is a well-known identity) we have

$$p^2 + q^2 + r^2 = \alpha\vartheta - \epsilon^2 \tag{32}$$

and then, evidently, the other tw follow

$$\begin{aligned} x'r + y'q + z'p &= 0 \\ x_, r + y_, q + z_, p &= 0; \end{aligned} \tag{33}$$

and since from the (29) one gets

$$Ar + Bq + Cp = \left(x_, r + y_, q + z_, p\right) T_1 - (x'r + y'q + z'p)\, T_4;$$

così, in virtù delle precedenti (33), si ha anche

$$Ar + Bq + Cp = 0. \tag{34}$$

Consideriamo ora la quantità sotto il radicale nella (31), essa può cambiarsi di forma senza alterazione di valore in quest'altra

$$\left(p^2 + q^2 + r^2\right) p^2 \chi - A^2 \left(p^2 + r^2\right) - 2ABqr - B^2 \left(p^2 + q^2\right);$$

ma dalla (34), trasportando Cp nel secondo membro e quadrando, abbiamo

$$A^2 r^2 + 2ABqr + B^2 q^2 = C^2 p^2;$$

quindi la quantità precedente, vista la (32), diventa

$$p^2 \left\{\chi \left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) - A^2 - B^2 - C^2\right\}$$

ossia per effetto dei valori (29)

$$p^2 \left\{x \left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) - \vartheta T_1^2 + 2\epsilon T_1 T_4 - \alpha T_4^2\right\}.$$

Per tal modo il radicale nel valore (31) di z'' può scriversi pR : avendo posto

$$R = \pm \left\{\sqrt{\chi \left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) - \vartheta T_1^2 + 2\epsilon T_1 T_4 - \alpha T_4^2}\right\}; \tag{35}$$

e avremo

$$z'' = \frac{Aq + Br + pR}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Questo valore sostituito nelle equazioni (30) ci conduce facilmente a questi altri

$$x'' = \frac{p^2 B + q\left(Ar + Bq\right) + prR}{p\left(p^2 + q^2 + r^2\right)}; \qquad y'' = \frac{-Ap^2 - r\left(Ar + Bq\right) + pqR}{p\left(p^2 + q^2 + r^2\right)};$$

nei quali, dopo aver messo in luogo del binomio $Ar + Bq$ il suo valore $-Cp$ cavato dalla (34), può effettuarsi la divisione per p: così otteniamo

$$x'' = \frac{pB - qC + rR}{p^2 + q^2 + r^2}; \qquad y'' = \frac{rC - pA + qR}{p^2 + q^2 + r^2}; \qquad z'' = \frac{qA - rB + pR}{p^2 + q^2 + r^2} \tag{36}$$

Si noti che in conseguenza dei valori (29) abbiamo

$$\begin{aligned} pB - qC &= \left(y,p - z,q\right) T_1 - \left(y'p - z'q\right) T_4 \\ rC - pA &= \left(z,r - x,p\right) T_1 - \left(z'r - x'p\right) T_4 \\ qA - rB &= \left(x,q - y,r\right) T_1 - \left(x'q - y'r\right) T_4 \end{aligned}$$

so, because of the previous (33), one also obtains

$$Ar + Bq + Cp = 0. \tag{34}$$

Let us now consider the quantity under the radical sign in the (31): it can be transformed, without changing its value, into the following one

$$\left(p^2 + q^2 + r^2\right) p^2 \chi - A^2 \left(p^2 + r^2\right) - 2ABqr - B^2 \left(p^2 + q^2\right);$$

but from the (34), by moving Cp to the right-hand side and squaring the result, we have

$$A^2 r^2 + 2ABqr + B^2 q^2 = C^2 p^2;$$

so that the previous quantity, by using the (32), becomes

$$p^2 \left\{\chi \left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) - A^2 - B^2 - C^2\right\}$$

or equivalently, because of the values (29),

$$p^2 \left\{x \left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) - \vartheta T_1^2 + 2\epsilon T_1 T_4 - \alpha T_4^2\right\}.$$

In this way the radical appearing in the expression (31) for z'' is equal to pR if we have introduced the notation

$$R = \pm\left\{\sqrt{\chi \left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) - \vartheta T_1^2 + 2\epsilon T_1 T_4 - \alpha T_4^2}\right\}; \tag{35}$$

and we will get

$$z'' = \frac{Aq + Br + pR}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

This value, once replaced in the equations (30) easily brings us to these following others

$$x'' = \frac{p^2 B + q\left(Ar + Bq\right) + prR}{p\left(p^2 + q^2 + r^2\right)}; \qquad y'' = \frac{-Ap^2 - r\left(Ar + Bq\right) + pqR}{p\left(p^2 + q^2 + r^2\right)};$$

where, after replacing the binomial $Ar + Bq$ with its value $-Cp$ as it is obtained from (34), it is possible to divide by p: in this way we obtain

$$x'' = \frac{pB - qC + rR}{p^2 + q^2 + r^2}; \qquad y'' = \frac{rC - pA + qR}{p^2 + q^2 + r^2}; \qquad z'' = \frac{qA - rB + pR}{p^2 + q^2 + r^2} \tag{36}$$

One has to remark that, as a consequence of the values given in (29) we have

$$\begin{aligned}
pB - qC &= \left(y,p - z,q\right) T_1 - \left(y'p - z'q\right) T_4 \\
rC - pA &= \left(z,r - x,p\right) T_1 - \left(z'r - x'p\right) T_4 \\
qA - rB &= \left(x,q - y,r\right) T_1 - \left(x'q - y'r\right) T_4
\end{aligned}$$

dove, per effetto delle (28), i sei coefficienti di T_1, T_4 subiscono riduzioni: ne scrivo la prima, le altre sono similissime :

$$\begin{aligned} y_, p - z_, q &= x'(y_,^2 + z_,^2) - x_,(y'y_, + z'z_,) \\ &= x'(\vartheta - x'^2) - x_,(\epsilon - x'x_,) \\ &= x'\vartheta - x_,\epsilon; \end{aligned}$$

in guisa che troviamo

$$\begin{aligned} pB - qC &= \left(x'\vartheta - x_,\epsilon\right) T_1 - \left(x'\epsilon - x_,\alpha\right) T_4 \\ rC - pA &= \left(y'\vartheta - y_,\epsilon\right) T_1 - \left(y'\epsilon - y_,\alpha\right) T_4 \\ qA - rB &= \left(z'\vartheta - z_,\epsilon\right) T_1 - \left(z'\epsilon - z_,\alpha\right) T_4 \end{aligned}$$

e possono introdursi nuove semplificazioni ponendo

$$m = \vartheta T_1 - \epsilon T_4; \qquad n = \alpha T_4 - \epsilon T_1; \tag{37}$$

dopo di che i valori (36) si riducono

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{x'm + x_, n + rR}{\alpha\vartheta - \epsilon^2} \\ y'' &= \frac{y'm + y_, n + qR}{\alpha\vartheta - \epsilon^2} \\ z'' &= \frac{z'm + z_, n + pR}{\alpha\vartheta - \epsilon^2}. \end{aligned} \tag{38}$$

Qui nei secondi membri le m, n, R sono quantità fatte delle sole $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \alpha', \alpha_,, \epsilon'$, perchè nelle (35), (37) debbono sostituirsi alle T_1, T_4 i valori equivalenti già scritti nelle (26).

Prendendo ora a determinare le tre quantità $x'_,, y'_,, z'_,$ per mezzo delle equazioni

$$\begin{aligned} x'x'_, + y'y'_, + z'z'_, &= T_2 \\ x_,x'_, + y_,y'_, + z_,z'_, &= T_5 \\ x'^2_, + y'^2_, + z'^2_, &= \omega \end{aligned}$$

il confronto di queste colle equazioni (27) ci farà capire facilmente che l'andamento della soluzione sarà il medesimo, cosicchè, senza ripetere il calcolo, potremo desumere i valori finali dalle predenti (38) introducendo le debite where, as a consequence of the (28), the six coefficients of quantities T_1, T_4 are simplified: I write here the first of such simplifications, since the others are very similar:

$$\begin{aligned} y_, p - z_, q &= x'(y_,^2 + z_,^2) - x_,(y' y_, + z' z_,) \\ &= x'(\vartheta - x'^2) - x_,(\epsilon - x' x_,) \\ &= x'\vartheta - x_, \epsilon; \end{aligned}$$

so that we find

$$\begin{aligned} pB - qC &= \left(x'\vartheta - x_,\epsilon\right) T_1 - \left(x'\epsilon - x_,\alpha\right) T_4 \\ rC - pA &= \left(y'\vartheta - y_,\epsilon\right) T_1 - \left(y'\epsilon - y_,\alpha\right) T_4 \\ qA - rB &= \left(z'\vartheta - z_,\epsilon\right) T_1 - \left(z'\epsilon - z_,\alpha\right) T_4 \end{aligned}$$

and one can introduce new simplifications by using the definitions

$$m = \vartheta T_1 - \epsilon T_4; \qquad n = \alpha T_4 - \epsilon T_1; \tag{37}$$

so that the values (36) are reduced to

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{x'm + x_, n + rR}{\alpha\vartheta - \epsilon^2} \\ y'' &= \frac{y'm + y_, n + qR}{\alpha\vartheta - \epsilon^2} \\ z'' &= \frac{z'm + z_, n + pR}{\alpha\vartheta - \epsilon^2}. \end{aligned} \tag{38}$$

In all previous equations in each right-hand side quantities m, n, R depend only on quantities $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \alpha', \alpha_,, \epsilon'$, as in the (35), (37) the quantities T_1, T_4 must be replaced by the values obtained for them in the (26).

If we now determine the three quantities $x'_,, y'_,, z'_,$ by means of the equations

$$\begin{aligned} x' x'_, + y' y'_, + z' z'_, &= T_2 \\ x_, x'_, + y_, y'_, + z_, z'_, &= T_5 \\ x_,'^2 + y_,'^2 + z_,'^2 &= \omega \end{aligned}$$

the comparison of these ones with the equations (27) will allow us to understand easily that the procedure for getting the solution will be the same, so that, without repeating the calculation, we will be able to desume the final values from the previous (38) by introducing the needed modificazioni : e saranno

$$
(39) \qquad
\begin{aligned}
x'_{,} &= \frac{x'h + x_{,}k + rS}{\alpha\vartheta - \epsilon^2} \\
y'_{,} &= \frac{y'h + y_{,}k + qS}{\alpha\vartheta - \epsilon^2} \\
z'_{,} &= \frac{z'h + z_{,}k + pS}{\alpha\vartheta - \epsilon^2}.
\end{aligned}
$$

essendo (richiaminsi le (35), (37))

$$
\begin{aligned}
&S = \pm\sqrt{\omega\left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) - \vartheta T_2^2 + 2\epsilon T_2 T_5 - \alpha T_5^2} \\
&h = \vartheta T_2 - \epsilon T_5; \qquad k = \alpha T_5 - \epsilon T_2
\end{aligned}
$$

cioè tre quantità fatte solamente di $\alpha, \vartheta, \epsilon, \omega, \alpha', \vartheta_{,}$, come si fa palese rammentando i valori di T_2, T_5 scritti nelle (26).

Se poi adoperando i valori (38), (39) cercheremo quello del trinomio $x''x'_{,} + y''y'_{,} + z''z'_{,}$, avremo una frazione il cui denominatore sarà il quadrato $\left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right)^2$, e il numeratore una quantità di 27 termini che può scriversi al seguente modo

$$
\begin{aligned}
&\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) mh + \left(x'x_{,} + y'y_{,} + z'z_{,}\right)(mk + nh) \\
&+ \left(x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2\right) nk + \left(x'r + y'q + z'r\right)(mS + hR) \\
&+ \left(x_{,}r + y_{,}q + z_{,}p\right)(nS + kR) + (p^2 + q^2 + r^2)RS.
\end{aligned}
$$

Questa, per le prime tre delle (23), per le (33), e la (32) si riduce

$$
\alpha mh + \epsilon(mk + nh) + \vartheta nk + \left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) RS;
$$

e si fa così manifesto che il trinomio $x''x'_{,} + y''y'_{,} + z''z'_{,}$ equivale ad una espressione ove non entrano che le $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \omega$ e alcune loro derivate di primo ordine.

Appoggiandoci alle equazioni

$$
\begin{aligned}
x'x_{,,} + y'y_{,,} + z'z_{,,} &= T_3 \\
x_{,}x_{,,} + y_{,}y_{,,} + z_{,}z_{,,} &= T_6 \\
x_{,,}^2 + y_{,,}^2 + z_{,,}^2 &= \varsigma
\end{aligned}
$$

e paragonandole colle (27) potremo subito formarci i valori delle $x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}$ in tutto simili a quelli espressi nelle (38), (39), e con un procedimento affatto analogo al poc'anzi descritto, provare la proprietà in discorso anche pei trinomj

$$
x''x_{,,} + y''y_{,,} + z''z_{,,}; \qquad x'_{,}x_{,,} + y'_{,}y_{,,} + z'_{,}z_{,,}.
$$

modifications: [the final equations] will be

(39)
$$\begin{aligned} x'_{,} &= \frac{x'h + x_{,}k + rS}{\alpha\vartheta - \epsilon^2} \\ y'_{,} &= \frac{y'h + y_{,}k + qS}{\alpha\vartheta - \epsilon^2} \\ z'_{,} &= \frac{z'h + z_{,}k + pS}{\alpha\vartheta - \epsilon^2}. \end{aligned}$$

where [the following definitions are used] (one has to recall the (35), (37))

$$\begin{aligned} &S = \pm\sqrt{\omega\left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) - \vartheta T_2^2 + 2\epsilon T_2 T_5 - \alpha T_5^2} \\ &h = \vartheta T_2 - \epsilon T_5; \qquad k = \alpha T_5 - \epsilon T_2 \end{aligned}$$

which introduce three quantities depending only on variables $\alpha, \vartheta, \epsilon, \omega, \alpha', \vartheta_{,}$, as it is clear when one recalls the values of T_2, T_5 found in the (26).

If we then use the values (38), (39) to look for an expression for trinomial $x''x'_{,} + y''y'_{,} + z''z'_{,}$ we will get a fraction whose denominator will be the square $\left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right)^2$ and whose numerator is a quantity of 27 terms which can be written as follows

$$\begin{aligned} &\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right) mh + \left(x'x_{,} + y'y_{,} + z'z_{,}\right)(mk + nh) \\ &+ \left(x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2\right) nk + \left(x'r + y'q + z'r\right)(mS + hR) \\ &+ \left(x_{,}r + y_{,}q + z_{,}p\right)(nS + kR) + (p^2 + q^2 + r^2)RS. \end{aligned}$$

This expression, because of the first three among (23), and because of the (33) and the (32) can be reduced to

$$\alpha mh + \epsilon\,(mk + nh) + \vartheta nk + \left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right) RS;$$

and it is thus manifest that the trinomial $x''x'_{,} + y''y'_{,} + z''z'_{,}$ is equivalent to an expression where only $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \omega$ and some of their first order derivatives appear.

By making use of the equations

$$\begin{aligned} x'x_{,,} + y'y_{,,} + z'z_{,,} &= T_3 \\ x_{,}x_{,,} + y_{,}y_{,,} + z_{,}z_{,,} &= T_6 \\ x_{,,}^2 + y_{,,}^2 + z_{,,}^2 &= \varsigma \end{aligned}$$

and comparing them with the equations (27) we will be able to obtain some expressions for the quantities $x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}$ very similar to those expressed in the equations (38), (39), and, with a procedure completely analogous to the one which has been described just before, to prove the considered property also for the trinomials

$$x''x_{,,} + y''y_{,,} + z''z_{,,}; \qquad x'_{,}x_{,,} + y'_{,}y_{,,} + z'_{,}z_{,,}.$$

Il lettore comprenderà che, senza farsi fin d'ora unico appoggio nell'analogia, è possibile, con metodi analitici simili ai precedenti, dimostrare la proprietà anche per qualunque trinomio contenente le derivate di terz'ordine o d'ordine più elevato: e che quindi è lecito venire ad una conclusione generale simile a quelle del n. 74 m.p. e n. 14 della Memoria presente.

18. Ben ponderata l'anzidetta proprietà dei trinomj $T_1, T_2, T_3 \ldots$ all'infinito, vedesi come si trasforma l'equazione (25) in un'altra simile alla (18), n.75 m.p., nella quale la quantità $\int df \int dg \cdot \Lambda \delta\rho^2$ compare eguale ad una serie che contiene linearmente le sei variate $\delta\alpha, \delta\epsilon, \delta\vartheta, \delta\chi, \delta\varsigma, \delta\omega$, e le variate delle loro derivate o per a o per b. Dopo una così fatta equazione si fa passaggio ad altra simile alla (19) del n. citato m.p. che risulta della forma

$$\int df \int dg \cdot \Lambda\delta\rho^2 = \lambda\delta\alpha + \mu\delta\vartheta + \nu\delta\epsilon + \epsilon\delta\chi + \vartheta\delta\varsigma + \tau\delta\omega + \frac{d\Delta}{da} + \frac{d\Theta}{db}. \tag{40}$$

Questo valore dell'integrale duplicato si deve introdurre nell'equazione (3) spettante ai sistemi superficiali: allora si vede che i due termini $\frac{d\Delta}{da}, \frac{d\Theta}{db}$, potendosi effettuare l'una o l'altra delle due integrazioni, non fanno che somministrare quantità che si versano ai limiti e si compenetrano colla Ω. Ciò che rimane sotto il doppio segno integrale è un sestinomio identico quanto alla forma con quello della equazione (30) n. 9. Pertanto detta equazione (30) n. 9 resta riconfermata come generalissima insieme a tutte le sue conseguenze da noi dedotte nel Capo precedente. Qui pure diremo che questo metodo per trovare l'equazione generale appartenente ai sistemi superficiali partendo dalla considerazione delle azioni molecolari, lascia imbarazzate le equazioni ai limiti, equazioni che coll'altro metodo del Capo precedente abbiamo potuto assegnare e svolgere, almeno in una supposizione più ristretta.

Avendo qui termine tutte le dimostrazioni delle equazioni generalissime per le tre sorte di sistemi, trovate e riconfermate in più maniere, esporremo l'ordine delle idee che pare il migliore all'oggetto di persuadercele vere e in nulla mancanti. Credo che converrebbe incominciare dal 2.° metodo, cioè da quello del Capo VI m.p. e Capo III di questa. Si vedono allora venire le equazioni generali ostensibili a tutti i punti del sistema, precisamente come vengono nel caso de' sistemi rigidi trattati col primo metodo delle equazioni di condizione. Una tale coincidenza ci porta naturalmente a supporre che dunque anche nel caso di sistemi qualunque sussistono le equazioni variate di condizione (13) n.4, (3) n.6, (19) n.8, come sussistono nel caso de' sistemi rigidi : il che ammesso

The reader will understand that, also without motivating uniquely the result on analogy, it is possible, with analytical methods similar to the previous ones, to show the [discussed] property also for every trinomial containing the third order derivatives or also the derivatives of higher order; and that therefore it is licit to arrive at a general conclusion similar to the one presented in the sect. 74 p.m. and in the sect. 14 of the current Memoir.

18. Once one has carefully considered the aforementioned property of the infinite sequence of trinomials $T_1, T_2, T_3 \ldots$, he will see how equation (25) transforms into another one which is similar to equation (18), sect. 75 p.m., where quantity $\int df \int dg \cdot \Lambda\delta\rho^2$ appears to be equal to a series which contains linearly the six variations $\delta\alpha, \delta\epsilon, \delta\vartheta, \delta\chi, \delta\varsigma, \delta\omega$, and the variations of their derivatives with respect to variables a or b. After such an equation it is possible to arrive at another one similar to the (19) in the cited section p.m., which takes the form:

$$\int df \int dg \cdot \Lambda\delta\rho^2 = \lambda\delta\alpha + \mu\delta\vartheta + \nu\delta\epsilon + \epsilon\delta\chi + \vartheta\delta\varsigma + \tau\delta\omega + \frac{d\Delta}{da} + \frac{d\Theta}{db}. \tag{40}$$

This value in the double integral must be introduced in the equation (3) which holds for superficial systems: then one can see that the two terms $\frac{d\Delta}{da}, \frac{d\Theta}{db}$, since either one or the other of the two integrations can be performed, represent two quantities which contribute to boundary conditions and must be added up to quantity Ω. What finally remains under the double integral sign is a sextinomial identical -for what concerns its form- to the one appearing in equation (30) sect. 9. Therefore the mentioned equation (30) sect. 9 remains valid, and actually is confirmed as the most general one together with all its consequences, which we deduced in the previous Capo. We will add here that this method to find the general equation for superficial systems, starting from the consideration of molecular actions, does not explicitly provide the boundary conditions, conditions which, with the different method presented in the previous Capo, we could explicitly assign and express, at least under a more restricted hypothesis.

Having here finished all the demonstrations of the most general equations for the three kinds of systems, which were found and confirmed in many different ways, we will expound the order of ideas which seems the best possible for persuading ourselves that they are true and not logically faulty in any aspect. I believe that it will be convenient to start from the second method, that is from the one expounded in the Capo VI p.m. and in the Capo III of this memoir. We will see then the general equations to become clearly verified in every [material] point of the system, exactly as they are verified in the case of the rigid systems treated with the first method based on the equations of condition. Such a coincidence will lead us to suppose naturally that, as a consequence, also in the case of systems whatsoever the variations of the equations of condition (13) sect. 4, (3) sect. 6, (19) sect. 8 still hold, exactly as they hold in the case of rigid systems: if we admit this [last statement is true] passiamo (siccome si disse sul fine del Capo precedente) a capire che i valori delle variazioni generiche $\delta x, \delta y, \delta z$ sono sempre i (12) n.3 per ogni sorta di sistemi soggetti alla legge di continuità e non pei soli sistemi rigidi; ossia, ciò che torna lo stesso, che la loro produzione è dovuta a quel fittizio movimento degli assi. Allora veniamo a conoscere che la quantità versata ai limiti, seguendo i metodi del Capo VI m.p. e III dell'attuale, deve annullarsi in gran parte da se e sussistervi la sola che vi si versa usando il metodo delle equazioni di condizione. L'andamento poi tenuto nei Capi IV e VII m.p., adoperando gli assi intermedj delle p, q, r, può essere riguardato come un'analisi staccata e costrutta dietro diverse considerazioni, la quale, conducendo ai medesimi risultamenti, giova assai per ribadire le deduzioni ottenute mediante l'insieme dei ragionamenti connessi all'altra maniera.

CAPO IV.

Digressione intorno alle linee di massima o minima condensazione nei sistemi a due e tre dimensioni.

19. Innanzi procedere a quella parte del presente lavoro ove ragionerò più addentro della natura delle forze inerne de' sistemi continui, mi conviene premettere una teorica utilissima a tal fine, se non pel sistema lineare, per gli altri due.

Cominciando dal sistema superficiale si è veduto fin da principio (n.12 m.p.) doversi per esso intendere che le molecole nella precedente disposizione ideale fossero distribuite regolarmente in un piano, distando fra loro di piccolissimi intervalli eguali secondo due assi rettangolari di coordinate variabili a, b, supposta costante la terza coordinata c relativa all'asse perpendicolare ai due precedenti. Di più : che ordinate poi le molecole come porta la natura dello stato reale, e dette x, y, z dopo un tale ordinamento le coordinate della molecola generica rispetto a tre assi rettangolari, s'avessero a considerare le x, y, z funzioni delle a, b

$$x = x\,(a, b) \quad ; \quad y = y\,(a, b) \quad ; \quad z = z\,(a, b) \tag{1}$$

di tal forma che significassero la legge della distribuzione delle molecole dello stato reale. Avvertiremo che, per fissare le idee, è bene (quantunque non sia necessario) ritenere che i nuovi assi rettangolari delle x, y, z coincidano con quelli dellea, b, c : cioè si parta dalla medesima origine e si proceda sulle stesse rette a segnare i valori lineari delle x, y, z che dopo l'ordinamento ci we will proceed (exactly as it was said at the end of the previous Capo) to understand that the values of the generic variations $\delta x, \delta y, \delta z$ are always given by equations (12) sect. 3 for every kind of system subject to the law of continuity and not only for rigid systems; that is, what it is equivalent, that their validity is due to the fictitious movement of axes which has been described there. Then we are able to understand that the quantity obtained at the boundaries, by following the methods of the Capo VI p.m. and Capo III of the present one, must be vanishing in its greater part and only its part obtained by using the method of the equations of conditions has to be still considered. The procedure which was then used in the Capo IV and Capo VII p.m., by introducing the intermediate axes relative to the variables p, q, r, can be regarded as a different analysis which is based on (and developed by means of) different considerations. [This last analysis], by leading to the same results, is very useful to reaffirm the deductions obtained by means of the whole set of arguments related to the alternative presented way of reasoning.

CAPO IV.

Digression about the lines of maximum and minimum condensation in the two-dimensional and three-dimensional systems

19. Before proceeding in that part of the present work where I will discuss in a more detailed way the nature of the internal forces of continuous systems, I believe it is very useful to discuss in advance a theory which is very relevant to this purpose especially for three-dimensional and two-dimensional systems.

By first considering the superficial system, it has been seen, since the very beginning (sect. 12 p.m.), how one had to assume that the molecules in the preceding ideal configuration were to be regularly distributed in a plane, being placed one after the other along the rectangular axes having coordinate variables a, b, at the endpoints of very small and equal intervals, while it is assumed that the third coordinate c relative to the axis perpendicular to the two previous ones is constant. Moreover [it has been seen] that, once the molecules are ordered as it is determined by the nature of the real state, and if the coordinates of the generic molecule with respect to the three orthogonal axes after such a re-ordering are called x, y, z, one has to consider the three variables x, y, z as given by some functions of variables a, b

$$x = x\,(a, b) \quad ; \quad y = y\,(a, b) \quad ; \quad z = z\,(a, b) \tag{1}$$

such that their form can represent the law of distribution of the molecules in the real state. We will explicitly warn that, to fix the ideas, it is useful (although it is not logically necessary) to assume that the new rectangular axes relative to the variables x, y, z coincide with those relative to variables a, b, c: in other words it is possible to start from the same origin and to proceed along the same straight lines to mark the linear values of the variables x, y, z which, after the re-ordering, will fanno trovare la molecola già determinata dai valori lineari a, b, c. Si è anche detto che immaginando eliminate le a, b dalle tre precedenti equazioni (1), si capisce come venga a nascere l'equazione

$$z = z(x, y) \tag{2}$$

esprimente la natura della superficie in cui le molecole nello stato reale vengono ad essere collocate, e che può essere la medesima anche per molte maniere diverse di distribuzione di esse molecole.

Dopo questo concetto si presenta spontaneamente l'idea di cercare sopra detta superficie le curve ove nello stato reale si dispongono le molecole per le quali nello stato antecedente erano costanti le coordinate b, ovvero le a, cioè le molecole che in quel piano si trovavano sopra rette parallele all'asse delle a o all'asse delle b. Non è difficile capire che le equazioni della prima curva saranno le due che si avranno eliminando la a fra le precedenti (1), e ritenendovi b parametro costante, in quella guisa che si disse della c sottintesa costante nelle stesse (1); e così le equazioni dell'altra curva si otterranno eliminando fra le (1) la variabile b, e ritenutavi a parametro costante.

Ecco un'altra ricerca che comprende come casi particolari le due precedenti. Nel piano che, come sopra si disse, immaginavasi contenere la primitiva disposizione delle molecole, s'intenda condotta pel punto generico (a, b) una retta qualunque : si domandano le equazioni della curva ove si collocano nello stato reale le molecole che nello stato antecedente s'imbattevano a trovarsi in quella retta. Chiamate $a + f$, $b + g$ le coordinate di un punto qualunque di tal retta, le f, g possono riguardarsi coordinate rettangole di esso punto rispetto a due assi condotti dal punto (a, b) come da origine paralleli a quelli delle a, b. Si sa che di tali variabili la g è data per la f moltiplicata per una costante esprimente la tangente dell'angolo che la retta fa con l'asse delle f o delle a : ma è meglio invece di f, g prendere i loro valori

$$f = i\xi; \quad g = i\eta; \tag{3}$$

essendo i la distanza di quel punto qualunque dal punto (a, b), e ξ, η il coseno e il seno dell'angolo anzidetto, fra i quali sta l'equazione

$$\xi^2 + \eta^2 = 1. \tag{4}$$

Designate pertanto con $x_,, y_,, z_,$ le coordinate di quel punto qualunque della retta trasportato allo stato reale avremo, in virtù delle equazioni (1),

$$x_, = x\,(a + i\xi, b + i\eta)\,; \quad y_, = y\,(a + i\xi, b + i\eta)\,; \quad z_, = z\,(a + i\xi, b + i\eta)\,; \tag{5}$$

allow us to find the molecule already labelled by the linear values a, b, c. It was also said that, by assuming that the variables a, b are eliminated from the three previous equations (1), it is easy to understand how one can get the equation

$$z = z(x, y) \tag{2}$$

which expresses the nature of the superficial in which the molecules, in their real state, are placed, and which can be the same also for many different ways in which the molecules are distributed.

After introducing this concept it naturally arises the idea of looking for, inside the mentioned surface, those curves where in the real state are placed the molecules for which, in the antecedent state, the coordinates b (or the coordinates a) were constant, i.e. the molecules which in that plane were placed along straight lines parallel to the axis of variable a or the axis of variable b. It is not difficult to understand that the equations of the first curve will be those two which will be obtained by eliminating a in the previous (1), and regarding the parameter b as a constant, exactly in the same way which was discussed, when stating that variable c were assumed implicitly to be constant in the same (1); and in this way the equations of the other curve will be obtained by eliminating variable b in (1), once variable a is assumed to be a constant parameter.

Here there is now another problem, which includes as a particular case the two previous ones. In the plane which, as it has been said before, we imagined that the original placement of the molecules was contained, one may choose, starting from the generic point (a, b) a straight line whatsoever: one is asked to find the equations of the curve where, in the real state, are placed those molecules which in the antecedent state were placed along the given straight line. Once called $a+f$, $b+g$ the coordinates of a generic point of a such straight line, the variables f and g can be regarded as the rectangular coordinates of such a point with respect to a system of two axes having the point (a, b) as their common origin and which are respectively parallel to the axes relative to variables a, b. It is known that of these variables, g is given by f multiplied by a constant which gives the tangent of the angle formed by the considered straight line and the axis of variable f or of variable a: however it is more suitable to replace variables f, g with their values

$$f = i\xi; \quad g = i\eta; \tag{3}$$

i being the distance between the considered generic point and point (a, b), and while quantities ξ, η denote the cosine and the sine of the aforementioned angle, which verify the equation

$$\xi^2 + \eta^2 = 1. \tag{4}$$

Once we have denoted by $x_,$, $y_,$, $z_,$ the coordinates of such generic point belonging to the considered straight line when transported to the real state, we will have, because of the equations (1),

$$x_, = x\,(a + i\xi, b + i\eta)\,; \quad y_, = y\,(a + i\xi, b + i\eta)\,; \quad z_, = z\,(a + i\xi, b + i\eta)\,; \tag{5}$$

e le equazioni cercate saranno quelle che risulteranno dalle precedenti dopo averne eliminata la variabile i . Ho asserito che questa ricerca involge le due precedenti : infatti, se facciansi $\xi = 1$, $\eta = 0$, la retta diventa parallela all'asse delle a : eliminare allora la i fra le

$$x, = x\,(a+i,b)\,; \qquad y, = y\,(a+i,b)\,; \qquad z, = z\,(a+i,b)$$

non si può senza eliminare tutto il binomio $a+i$, e si ha lo stesso risultato come eliminando la a fra le (1) : dicasi a un dipresso per l'altra di quelle curve quando $\xi = 0$, $\eta = 1$.

Dopo l'indicata eliminazione della i fra le (5), entrambe le a, b entreranno nelle equazioni risultanti come parametri costanti, e così pure vi entreranno le costanti ξ,η, della quale una resta indeterminata e l'altra no a motivo dell'equazione (4). Quella delle due ξ,η che rimane indeterminata, può farsi funzione qualunque delle stesse a, b, e variando tale funzione varierà la retta passante pel punto (a, b) delle cui molecole si cerca la collocazione dopo il trasporto allo stato reale.

Siccome, giusta l'ultimo concetto, una delle due funzioni di a, b da sostituirsi alle ξ,η rimane arbitraria, possiamo determinarla soddisfacendo a qualche altra ricerca, ed è così che ci facciamo strada alla seguente importante teorica.

La distanza dello stato reale di due molecole che nella distribuzione antecedente aveano rispettivamente le coordinate

$$a, b\ ; \qquad a+f, \qquad b+g$$

fu indicata per ρ ed espressa mediante l'equazione (22) n. 16 ; solamente avvertiremo che avendo ora la f, g i valori (3), essa prende la forma

$$\rho^2 = i^2\left(\alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2\right) + i^3k + \text{ec.} \tag{6}$$

Qui la i (distanza fra le due molecole) può supporsi tanto piccola che (secondo un noto principio dimostrato da Lagrange : *Thèorie des fonctions analytiques*: *2^a Partie*, *art.*3, 25) il valore del secondo membro stia sensibilmente tutto nel primo termine : e così debb'essere sicuramente se intendiamo significata da i la distanza tra la molecola (a, b) e l'altra a lei più vicina nella direzione di quella retta. Imperocchè tale distanza (e lo si vede per la stessa precedente equazione (6)) è dello stesso ordine di grandezza della ρ , e come questa in natura estremamente piccola, così debb'essere anche di quella : e non c'è dubbio che tal piccolezza possa non essere sufficiente alla virificazione del succitato principio lagrangiano, chè la piccolezza delle distanze molecolari in natura supera ogni sforzo d' immaginazione.

and the searched equations will be those which will result from the previous ones after eliminating variable i. I have stated that such a search proposes a problem of which the previous two are a particular case: indeed, if we assume that $\xi = 1$, $\eta = 0$, the straight line becomes parallel to the axis of variable a: the elimination of variable i from the equations

$$x, = x\,(a+i,b)\,; \qquad y, = y\,(a+i,b)\,; \qquad z, = z\,(a+i,b)$$

is equivalent to eliminate the whole binomial $a+i$, and one gets the same result as eliminating variable a from equations (1) : one can repeat a very similar reasoning for the other curve obtained when $\xi = 0$, $\eta = 1$.

After performing the indicated elimination of variable i from the (5), both variables a, b will appear in the resulting equations as constant parameters, and similarly it will happen for constants ξ,η, one of which is indeterminate while the other one is determined by equation (4). The one between the two variables ξ,η which remains indeterminate, can be regarded as a generic function of the same variables a, b, and by varying such a function it will vary the straight line to which point (a, b) belongs and whose molecules one is looking for the placement after the transport to the real state.

Now since, as we have just remarked, one of the two functions of variables a, b to be substituted to the ξ or η is arbitrary, we can determine it in order to solve another related problem, and it is in this way that we proceed to present the following important theory.

The distance in the real state of two molecules which, in the antecedent placement, had respectively coordinates

$$a, b\ ; \qquad a+f, \qquad b+g$$

was denoted with the symbol ρ and expressed by means of the equation (22) sect. 16; we will now simply warn that, since variables f, g take now the values given by equation (3), it will have the form

$$\rho^2 = i^2\left(\alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2\right) + i^3k + \text{etc.} \tag{6}$$

Here variable i (the distance between the two considered molecules) can be assumed to be small enough that (following a well-know principle shown by Lagrange : *Thèorie des fonctions analytiques*: *2^a Partie*, *art.*3, 25) the value of the right-hand side is given mainly by its first addend: and this is surely the case if we mean by quantity i the distance between the molecule (a, b) and the other one which is the closest one in the direction of the considered straight line. Indeed such a distance (and this can be seen by using the previous equation (6)) is of the same order of magnitude as variable ρ, and exactly as this last one it is extremely small: and it is beyond a shadow of a doubt that this smallness is sufficient to make the aforementioned Lagrangian principle applicable, since the smallness of molecular distances in nature is beyond any effort of imagination.

La proprietà che il valore della ρ stia presso che tutto nel primo termine del secondo membro della (6), quando si parla di molecole immediatamente prossime, varrà qualunque sia la retta passante pel punto(a, b), come sopra dicemmo, e avremo nello stato reale diverse ρ che tutte ne godono; per altro anche fra queste piccolissime distanze vi sarà un più e un meno che dipenderà dal coefficiente dell' i^2 nella (6) . Vogliamo dunque cercare per ξ, η quei valori che compatibilmente coll'equazione di condizione (4) rendono massimo o minimo il detto coefficiente dell' i^2. Allora la curva di cui si hanno le equazioni eliminando la i fra le (5), sarà quella dove la molecola (x, y, z) avrà più vicina o più lontana la molecola immediatamente seguente in confronto di altre innumerabili curve che possono immaginarsi sulla superficie passanti pel punto (x, y, z). Vedremo che queste curve sono due, una corrispondente al caso del massimo, l'altra a quello del minimo: e diremo le curve della massima e minima condensazione.

20. Innanzi metterci all'indicata ricerca analitica sarà bene sciogliere una difficoltà. A taluno potrebbe parere (e non a torto) che il miglior mezzo per render minima la distanza ρ fra due molecole (equazione (6)) sia quello di rendere nullo il coefficiente dell' i^2 , e quindi di determinare le ξ, η sciogliendo le due equazioni

$$\alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2 = 0 \; ; \quad \xi^2 + \eta^2 = 1.$$

Rispondiamo : si eseguisca questa soluzione e si troverà che i valori di ξ, η contengono in maniera indestruttibile il radicale $\sqrt{\epsilon^2 - \alpha\vartheta}$, il quale è immaginario, perchè la quantità sotto al segno radicale equivale alla somma di tre quadrati presi col segno negativo. Infatti (equazioni (23) n.16) abbiamo

$$\begin{aligned}\epsilon^2 - \alpha\vartheta &= \left(x'x_, + y'y_, + z'z_,\right)^2 - \left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)\left(x_,^2 + y_,^2 + z_,^2\right) \\ &= -\left(x'y_, - y'x_,\right)^2 - \left(z'x_, - x'z_,\right)^2 - \left(y'z_, - z'y_,\right)^2 .\end{aligned}$$

Questa comparsa dell'immaginario sentenziando impossibile quello che domandiamo, ci fa capire che ripugna all'indole delle presenti questioni il suppor le molecole in un quasi perfetto contatto.

21. Giusta quanto si è dapprima detto dobbiamo cercare per ξ, η quei valori che rendono massimo o minimo il trinomio $\alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2$ avuto riguardo all'equazione di condizione (4). Usando il metodo lagrangiano del moltiplicatore cercheremo quei valori di ξ, η che rendono massima o minima la quantità

$$\alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2 + \lambda\left(1 - \ \xi^2 - \eta^2\right)$$

The property that the value of the distance ρ is mainly in the first addend of the right-hand side of (6), when one considers immediately close molecules, will be valid for whatsoever straight line to which point (a, b) may belong, as we already said before, and we will have, in the real state, many different ρ which enjoy such a property; on the other hand also among these very small distances there will be some differences which will depend on the coefficient of variable i^2 in the equation (6). We will want, therefore, to look for those values of variables ξ, η which, in agreement with the equation of condition (4) will maximize or minimize the aforementioned coefficient of quantity i^2. Therefore the curve whose equations will be obtained by eliminating variable i from equations (5), will be that curve such that molecule (x, y, z) will be less distant or more distant [in the real state] from the molecule which is immediately closest to it [in the antecedent state] as compared with the innumerable other curves which one can imagine on the surface, and all passing through point (x, y, z). We will see that these curves are two, one corresponding to the case of maximum and the other corresponding to the case of minimum: and we will call them the curves of maximum and of minimum condensation.

20. Before starting the indicated analytical search it will be needed to solve one difficulty. To somebody it could seem (and with some well-grounded reason) that the better way to minimize the distance ρ between two molecules (equation (6)) would be to impose that the coefficient of the variable i^2 is vanishing, and therefore to determine the variables by solving these two equations

$$\alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2 = 0 \ ; \quad \xi^2 + \eta^2 = 1.$$

We answer: let us calculate such a solution and we will find that the values for the variables ξ, η contain, in a way which does not allow any simplification, the radical $\sqrt{\epsilon^2 - \alpha\vartheta}$, which is imaginary, since the quantity under the radical sign is equivalent to the sum of three squares with a negative sign. Indeed (equations (23) sect. 16) we have

$$\begin{aligned}\epsilon^2 - \alpha\vartheta &= \left(x'x_{,} + y'y_{,} + z'z_{,}\right)^2 - \left(x^{'2} + y^{'2} + z^{'2}\right)\left(x_{,}^2 + y_{,}^2 + z_{,}^2\right) \\ &= -\left(x'y_{,} - y'x_{,}\right)^2 - \left(z'x_{,} - x'z_{,}\right)^2 - \left(y'z_{,} - z'y_{,}\right)^2 .\end{aligned}$$

As this occurrence of imaginary quantities states that it is impossible what we are trying to obtain, we understand that it is impossible, in the present context, to assume that molecules may be in a quasi-perfect contact.

21. In view of what has been just said, we must look for those values of variables ξ, η which minimize or maximize the trinomial $\alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2$ obtained when considering the equation of condition (4). By using the method of Lagrangian multiplier we will look for those values of variables ξ, η which maximize or minimize quantity

$$\alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2 + \lambda\left(1 - \ \xi^2 - \eta^2\right)$$

considerate adesso le ξ, η fra loro indipendenti, e λ coefficiente indeterminato. Di qui le due equazioni

$$\alpha\xi + \epsilon\eta = \lambda\xi \ ; \quad \epsilon\xi + \vartheta\eta = \lambda\eta. \tag{7}$$

Scriviamole da capo al modo seguente

$$\epsilon\eta = \xi\,(\lambda - \alpha) \ ; \quad \epsilon\xi = \eta\,(\lambda - \vartheta) \tag{8}$$

e moltiplicandole fra loro, e dividendo per ξ, η, troveremo

$$\epsilon^2 = (\lambda - \alpha)\,(\lambda - \vartheta) \tag{9}$$

ossia

$$\lambda^2 - (\alpha + \vartheta)\,\lambda + \alpha\vartheta - \epsilon^2 = 0$$

dalla quale

$$\lambda = \frac{1}{2}\,(\alpha + \vartheta) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha - \vartheta)^2 + 4\epsilon^2}. \tag{10}$$

Le (8) quadrate e combinate colla (4) ci danno subito

$$\xi = \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda - \alpha)^2}} \ ; \quad \eta = \frac{\lambda - \alpha}{\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda - \alpha)^2}} \tag{11}$$

ovvero

$$\xi = \frac{\lambda - \vartheta}{\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda - \vartheta)^2}} \ ; \quad \eta = \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda - \vartheta)^2}}. \tag{12}$$

Queste due coppie di valori (11), (12), quantunque apparentemente diverse, somministrano entrambe l'unica

$$\xi = \sqrt{\frac{\lambda - \vartheta}{2\lambda - \alpha - \vartheta}}; \quad \eta = \sqrt{\frac{\lambda - \alpha}{2\lambda - \alpha - \vartheta}} \tag{13}$$

quando in esse ad ϵ^2 sostituiscasi il valore (9).

Messi nelle (13) successivamente i due valori di λ datici dalle (10) (che segnavano λ_1, λ_2) avremo per ξ, η due corrispondenti coppie di valori che indicheremo con $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$: esse fisseranno rispettivamente nel piano della disposizione antecedente le due rette passanti pel punto (a, b), delle quali le molecole del trasporto alla disposizione reale si saranno collocate sulle linee di massima e minima condensazione che s'intersecano nel punto (x, y, z).

Se si pone per abbreviare

$$K = \sqrt{(\alpha - \vartheta)^2 + 4\epsilon^2}$$

where we do now consider variables ξ, η to be independent and coefficient λ to be indeterminate. From the previous [optimization] problem we get the equations

$$\alpha\xi + \epsilon\eta = \lambda\xi \; ; \qquad \epsilon\xi + \vartheta\eta = \lambda\eta. \tag{7}$$

By rewriting them as it follows

$$\epsilon\eta = \xi\,(\lambda - \alpha) \;\; ; \qquad \epsilon\xi = \eta\,(\lambda - \vartheta) \tag{8}$$

and by multiplying each other after dividing by ξ, η, we will find

$$\epsilon^2 = (\lambda - \alpha)\,(\lambda - \vartheta) \tag{9}$$

that is

$$\lambda^2 - (\alpha + \vartheta)\,\lambda + \alpha\vartheta - \epsilon^2 = 0$$

from which we get

$$\lambda = \frac{1}{2}\,(\alpha + \vartheta) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha - \vartheta)^2 + 4\epsilon^2}. \tag{10}$$

The squares of (8), when combined with the (4) will immediately give

$$\xi = \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda - \alpha)^2}} \;\; ; \qquad \eta = \frac{\lambda - \alpha}{\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda - \alpha)^2}} \tag{11}$$

which are equivalent to

$$\xi = \frac{\lambda - \vartheta}{\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda - \vartheta)^2}} \;\; ; \qquad \eta = \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + (\lambda - \vartheta)^2}}. \tag{12}$$

These two pairs of values (11), (12), although apparently different, are equivalent to the single one

$$\xi = \sqrt{\frac{\lambda - \vartheta}{2\lambda - \alpha - \vartheta}}; \quad \eta = \sqrt{\frac{\lambda - \alpha}{2\lambda - \alpha - \vartheta}} \tag{13}$$

if one substitutes in them the value for ϵ^2 given by (9).

Once replaced in (13) one after the other the two values for variable λ given to us by the (10) (which can be denoted λ_1,λ_2) we will have, correspondingly, two pairs of values, for ξ, η which we will indicate by $\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2$: these two pairs will respectively fix, in the plane of the antecedent configuration, two straight lines passing through point (a, b), whose molecules, under the transport to the real configuration, will be placed on the lines of maximum and minimum condensation which intersect in the point (x, y, z).

If, for the seek of simplicity, we introduce the definition

$$K = \sqrt{(\alpha - \vartheta)^2 + 4\epsilon^2}$$

intendendo il radicale preso col segno positivo, si trovano

$$(14) \qquad \begin{aligned} \xi_1 &= \sqrt{\frac{\lambda-\vartheta+K}{2K}}; \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{\vartheta-\alpha+K}{2K}}; \\ \xi_2 &= \sqrt{\frac{\vartheta-\alpha+K}{2K}}; \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\alpha-\vartheta+K}{2K}}; \end{aligned}$$

alcuno di questi radicali però deve essere preso col segno negativo , come si farà manifesto fra poco.

22. Noteremo, ed è osservazione importante, che le due equazioni (7), moltiplicate rispettivamente per ξ, η e sommate, danno a motivo della (4)

$$(15) \qquad \lambda = \alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2;$$

cioè il valore di λ è quello stesso del trinomio coefficiente dell'i^2 nella (6) che diventa massimo o minimo. In conseguenza i due valori di λ datici alle (10) sono a dirittura quelli del proposto trinomio già portato al massimo e al minimo, quali risulterebbero costituendovi per ξ, η i valori corrispondenti già indicati. Può verificarsi questa proprietà sostituendo nel secondo membro della equazione (15) i valori (13), e persuadendoci che dopo alcune facili riduzioni essa compare identica.

23. Una bella proprietà di queste curve di massima e minima condensazione è che le loro tangenti tirate pel punto (x, y, z) formano fra di loro angolo retto : così hanno esse comune tal proprietà colle linee di massima e minima curvatura, non essendo però le medesime, giacchè la loro fissazione dipende, come vedemmo, dalle sole derivate di primo ordine delle coordinate del punto (x, y, z), e la fissazione delle seconde dipende, come è noto, dalle derivate di secondo ordine.

Per la dimostrazione chiameremo dalla Geometria analitica quanto segue. Allorchè le tre coordinate $x_1, y_{1,} z_1$ di una curva qualunque si considerano funzioni di una quarta variabile semplice i (appunto come nelle equazioni (5)), la tangente alla curva nel punto $(x_1, y_{1,} z_1)$ fa coi tre assi ortogonali angoli i cui coseni sono espressi da

$$(16) \qquad \frac{dx_1}{di} \cdot \frac{1}{s'(i)}; \qquad \frac{dy_1}{di} \cdot \frac{1}{s'(i)}; \qquad \frac{dz_1}{di} \cdot \frac{1}{s'(i)}$$

essendo

$$s'(i) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{di}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{di}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{di}\right)^2}.$$

Nel caso nostro useremo delle equazioni (5) avvertendo che a fine di ridurci poi dal punto $(x_1, y_{1,} z_1)$ al punto (x, y, z) conviene, dopo eseguite le and assume the chosen radical with the positive sign, we find

$$(14) \qquad \xi_1 = \sqrt{\frac{\lambda - \vartheta + K}{2K}}; \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{\vartheta - \alpha + K}{2K}};$$
$$\xi_2 = \sqrt{\frac{\vartheta - \alpha + K}{2K}}; \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\alpha - \vartheta + K}{2K}};$$

however some of these radicals must be taken with the negative sign, as it will be soon manifest.

22. We will remark, and this is an important observation, that the two equations (7), once multiplied respectively by ξ, η and then summed up will give, because of the (4),

$$(15) \qquad \lambda = \alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2;$$

this means that the value of the multiplier λ coincides with the trinomial, which is the coefficient of quantity i^2 in (6), which becomes maximum or minimum. As a consequence the two values of λ given by equations (10) are at the end those of the discussed trinomial, when attaining its maximum or minimum value, as they could be calculated replacing to variables ξ, η the already indicated corresponding values. We can verify this property by replacing in the right-hand side of equation (15) the values (13), and by persuading ourselves that after some easy reductions it becames an identity.

23. A beautiful property of these curves of maximum and minimum condensation is that their tangent lines passing through the point (x, y, z) are orthogonal: therefore they have such property in common with the curves of maximum and minimum curvature, even if they do not coincide with such other curves, as they are determined, as we have seen, only by the first order derivatives of the coordinates of the point (x, y, z), while the curves of maximum and minimum curvature are, as it is well-known, determined by the [corresponding] second order derivatives.

In order to obtain the demonstration of the stated property we will recall from Analytical Geometry what follows. When the three coordinates $x_1, y_{1,} z_1$ of a curve whatsoever are regarded as functions of a simple fourth variable i (exactly as it happens in equations (5)), the tangent to the curve in the point $(x_1, y_{1,} z_1)$ forms with the three orthogonal axes three angles whose cosines are given by

$$(16) \qquad \frac{dx_1}{di} \cdot \frac{1}{s'(i)}; \qquad \frac{dy_1}{di} \cdot \frac{1}{s'(i)}; \qquad \frac{dz_1}{di} \cdot \frac{1}{s'(i)}$$

where

$$s'(i) = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{di}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{di}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{di}\right)^2}.$$

In our case we will use equations (5) by warning that, in order to reduce point $(x_1, y_{1,} z_1)$ to point (x, y, z), it is convenient, after having calculated the derivazioni per i, fare $i=0$. Così troveremo che la tangente nel punto (x,y,z) ad una linea lasciata ancora generica per non aver per anco determinate le ξ,η, fa coi tre assi ortogonali angoli di coseni che eguagliano espressioni aventi per numeratori i binomj

$$x'\xi + x,\eta\ ; \quad y'\xi + y,\eta\ ; \quad z'\xi + z,\eta$$

e per denominator comune il radicale

$$\sqrt{\left(x'\xi + x,\eta\right)^2 + \left(\ y'\xi + y,\eta\right)^2 + \left(z'\xi + z,\eta\right)^2}.$$

Il qual radicale (richiamati i valori di $\alpha,\vartheta,\epsilon$ (equazioni (33) n.16)) svolgendo i quadrati si riduce sotto il segno al trinomio coefficiente di i^2 nella (6) : per brevità lo indicheremo con $\sqrt{\tau}$.

Se quindi le curve considerate sono due, i coseni per la tangente nel punto (x,y,z) ad una di esse potranno esprimersi con

$$\alpha_1 = \frac{x'\xi_1 + x,\eta_1}{\sqrt{\tau_1}};\ \ \beta_1 = \frac{y'\xi_1 + y,\eta_1}{\sqrt{\tau_1}};\ \ \gamma_1 = \frac{z'\xi_1 + z,\eta_1}{\sqrt{\tau_1}} \tag{17}$$

e i coseni per l'altra tangente con

$$\alpha_2 = \frac{x'\xi_2 + x,\eta_2}{\sqrt{\tau_2}};\ \ \beta_2 = \frac{y'\xi_2 + y,\eta_2}{\sqrt{\tau_2}};\ \ \gamma_2 = \frac{z'\xi_2 + z,\eta_2}{\sqrt{\tau_2}}. \tag{18}$$

L'angolo poi fatto dalle due tangenti sarà tale che il suo coseno, per teorema notissimo, avrà il valore

$$\frac{\left(x'\xi_1 + x,\eta_1\right)\left(x'\xi_2 + x,\eta_2\right) + \left(y'\xi_1 + y,\eta_1\right)\left(y'\xi_2 + y,\eta_2\right) + \left(z'\xi_1 + z,\eta_1\right)\left(z'\xi_2 + z,\eta_2\right)}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}$$

ossia, svolgendo i prodotti e rammentandoci i valori di $\alpha,\vartheta,\epsilon$,

$$\frac{\alpha\xi_1\xi_2 + \epsilon\left(\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2\right) + \vartheta\eta_1\eta_2}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}. \tag{19}$$

Ora vogliamo provare che quando $\xi_1\eta_1;\xi_2\eta_2$ hanno valori che soddisfanno alle equazioni (7) (nel qual caso i trinomj τ_1,τ_2 si riducono alle radici λ_1,λ_2 in forza della (15)), quando cioè le due curve considerate sono quelle di massima e minima condensazione, il numeratore della frazione (19) è zero : quindi essendo zero il coseno, l'angolo delle tangenti è retto, siccome ci eravamo proposti di dimostrare.

derivatives with respect to variable i, to assume $i = 0$. In this way we will find that the tangent in the point (x, y, z) to a curve which is still left undetermined (since we have not yet determined variables ξ, η) forms, with the three orthogonal coordinate axes, some angles whose cosines are equal to expressions having as numerators the binomials

$$x'\xi + x,\eta \; ; \qquad y'\xi + y,\eta \; ; \qquad z'\xi + z,\eta$$

and the denominators have as a common value the radical

$$\sqrt{\left(x'\xi + x,\eta\right)^2 + \left(\, y'\xi + y,\eta\right)^2 + \left(z'\xi + z,\eta\right)^2}.$$

This last radical (once one recalls the values of variables $\alpha, \vartheta, \epsilon$ (equations (33) sect. 16), once the squares are evaluated, will reduce under the sign to the trinomial which is the coefficient of i^2 in (6) : for the sake of brevity we will indicate it with symbol $\sqrt{\tau}$.

Then, if the curves to be considered are two, the cosines for the tangent to one of them in the point (x, y, z) can be expressed as

$$\alpha_1 = \frac{x'\xi_1 + x,\eta_1}{\sqrt{\tau_1}}; \quad \beta_1 = \frac{y'\xi_1 + y,\eta_1}{\sqrt{\tau_1}}; \quad \gamma_1 = \frac{z'\xi_1 + z,\eta_1}{\sqrt{\tau_1}} \tag{17}$$

while the cosines for the other tangent as

$$\alpha_2 = \frac{x'\xi_2 + x,\eta_2}{\sqrt{\tau_2}}; \quad \beta_2 = \frac{y'\xi_2 + y,\eta_2}{\sqrt{\tau_2}}; \quad \gamma_2 = \frac{z'\xi_2 + z,\eta_2}{\sqrt{\tau_2}}. \tag{18}$$

Then, the angle between the two tangents will be such that its cosine, because of a very well-known theorem, will assume the value

$$\frac{\left(x'\xi_1 + x,\eta_1\right)\left(x'\xi_2 + x,\eta_2\right) + \left(y'\xi_1 + y,\eta_1\right)\left(y'\xi_2 + y,\eta_2\right) + \left(z'\xi_1 + z,\eta_1\right)\left(z'\xi_2 + z,\eta_2\right)}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}$$

i.e., by calculating the products and recalling the values for quantities $\alpha, \vartheta, \epsilon$,

$$\frac{\alpha\xi_1\xi_2 + \epsilon\left(\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2\right) + \vartheta\eta_1\eta_2}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}. \tag{19}$$

We want now to prove that when variables $\xi_1\eta_1; \xi_2\eta_2$ have the values which verify equations (7) (in which case the trinomials τ_1, τ_2 are reduced, because of (15), to the roots λ_1, λ_2), that is when the two considered curves are those of maximum and minimum condensation, the numerator of fraction (19) is vanishing: therefore being equal to zero the cosine, the angle between the tangents is a right angle, as we intended to prove.

A tal fine osserviamo che quel numeratore, chiamato per un momento N, può essere scritto nell'una e nell'altra delle due maniere seguenti

$$N = \xi_1 (\alpha\xi_2 + \epsilon\eta_2) + \eta_1 (\epsilon\xi_2 + \vartheta\eta_2)$$
$$N = \xi_2 (\alpha\xi_1 + \epsilon\eta_1) + \eta_2 (\epsilon\xi_1 + \vartheta\eta_1)$$

e quindi in virtù delle equazioni (7) deve eguagliare le due espressioni

$$(20) \qquad N = \lambda_2 (\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) \quad ; \quad N = \lambda_1 (\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) .$$

Ma in questa i due fattori λ_1, λ_2 sono fra loro diversi, come vedesi per la (10) : non può dunque una stessa quantità N essere contemporaneamente eguale a queste due espressioni, se non è zero l'altro fattore comune, ossia se non è

$$(21) \qquad \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 = 0.$$

Quest'ultima equazione prova due cose : primieramente vedesi per essa e per le (20), che il numeratore N è zero, come avevamo asserito : poi che nel piano della distribuzione antecedente facevano fra loro angolo retto quelle due rette le cui molecole passarono sulle linee di massima e minima condensazione. L'ultima equazione (21) può anche verificarsi colla sostituzione dei valori (14), purchè uno di quei radicali, per esempio il valore di ξ_2, prendasi negativo. Ed è chiaro che deve essere così quando l'angolo fra le rette è retto : giacchè se dicesi μ l'angolo che fa una di quelle rette coll'asse delle a, abbiamo

$$\xi_1 = \cos\cdot\mu \quad ; \quad \eta_1 = \sin\cdot\mu \quad ; \quad \xi_2 = \cos\cdot\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right) \quad ; \quad \eta_2 = \sin\cdot\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right),$$

cioè

$$\xi_2 = -\sin\cdot\mu = -\,\eta_1 \quad ; \quad \xi_2 = \cos\cdot\mu = \xi_1 .$$

24. Prima di estendere la stessa dottrina ai sistemi a tre dimensioni ci conviene aggiungere altre cose analoghe alle già esposte per quelli di due, le quali, se non subito, ci verranno utilissime nel Capo seguente.

Quel radicale che chiamammo $S'(i)$ nelle equazioni (16) si sa essere la derivata per i dell'arco della curva : quindi posta $i = 0$, (il che indicheremo col simbolo $S'(i)_0$), questa $S'(i)_0$ equivarrà alla radice quadrata di quel trinomio che nel numero precedente segnammo con τ . I tre coseni che la tangente nel punto (x, y, z) a quella curva per la quale lasciammo le ξ, η indeterminate, fa coi tre assi, possono anche indicarsi con

$$(22) \qquad \frac{x'(i)_0}{S'(i)_0} \; ; \; \frac{y'(i)_0}{S'(i)_0} \; ; \; \frac{z'(i)_0}{S'(i)_0}$$

To this aim, let us observe that the previously considered numerator, which we call, for a while, N, can be written in the former or the latter of the following two ways

$$N = \xi_1 (\alpha \xi_2 + \epsilon \eta_2) + \eta_1 (\epsilon \xi_2 + \vartheta \eta_2)$$
$$N = \xi_2 (\alpha \xi_1 + \epsilon \eta_1) + \eta_2 (\epsilon \xi_1 + \vartheta \eta_1)$$

and therefore, because of equations (7) it must verify both expressions

(20) $$N = \lambda_2 (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2) \quad ; \quad N = \lambda_1 (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2).$$

However in this last equation the two factors λ_1, λ_2 are different from each other, as it can be seen by using (10): therefore one and the same quantity N can be simultaneously equal to these two expressions only if the other common factor vanishes, that is, only if the following equality holds

(21) $$\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 = 0.$$

This last equation proves two statements: first, one can see by means of it and because of (20) that the numerator N vanishes, as we had claimed: and, secondly, that in the plane of the antecedent configuration the two straight lines, whose molecules belong to the curves of maximum and minimum condensation, are orthogonal. Equation (21) can also be verified by substituting the values (14), under the condition that one of those radicals, for instance the value of ξ_2, is assumed to be negative. It is clear that this is the case when the angle between the straight lines is a right one: therefore if we call μ the angle which one of these straight lines forms with the axis of variable a, we will have

$$\xi_1 = \cos\cdot\mu \quad ; \quad \eta_1 = \sin\cdot\mu \quad ; \quad \xi_2 = \cos\cdot\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right) \quad ; \quad \eta_2 = \sin\cdot\left(\frac{\pi}{2} + \mu\right),$$

that is

$$\xi_2 = -\sin\cdot\mu = -\,\eta_1 \quad ; \quad \xi_2 = \cos\cdot\mu = \xi_1.$$

24. Before extending the same doctrine to the three-dimensional systems it is convenient to add some other results concerning the two-dimensional ones, results which will be, if not immediately, very useful in the following Capo.

That radical which we called $S'(i)$ in equations (16) is known to consist of the derivatives with respect to variable i of the curve arc length: therefore when assuming $i = 0$, (operation whose result we will indicate with the symbol $S'(i)_0$), this quantity $S'(i)_0$ will be equivalent to the square root of that trinomial, which in the previous section we indicated with the symbol τ. The three cosines which the tangent, in the point (x, y, z), to that curve, for which we left undetermined variables ξ, η, forms with the three coordinate axes, can be also indicated with

(22) $$\frac{x'(i)_0}{S'(i)_0} \; ; \; \frac{y'(i)_0}{S'(i)_0} \; ; \; \frac{z'(i)_0}{S'(i)_0}$$

dove i numeratori hanno rispettivamente i valori

$$x'\xi + x_1\eta \quad ; \quad y'\xi + y_1\eta \quad ; \quad z'\xi + x_1\eta \tag{23}$$

e il denominatore è $\sqrt{\tau}$, essendo

$$\tau = \alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2. \tag{24}$$

Sappiamo altresì dalla Geometria analitica (Vedi Lagrange *Thèorie des fonctions analytiques*: *2ª Partie*, *chap.*VII, n. 34) che il raggio del circolo osculatore alla curva del punto (x, y, z) viene ad aver l'espressione

$$\frac{s'(i)_0^2}{\sqrt{x''(i)_0^2 + y''(i)_0^2 + z''(i)_0^2 - s''(i)_0^2}} \tag{25}$$

e che la sua direzione fa coi tre assi angoli di coseni i cui valori sono frazioni aventi rispettivamente per numeratori i binomj

(26)

$$s'(i)_0 \; x''(i)_0 - x'(i)_0 \; s''(i)_0 \, ; \; s'(i)_0 \; y''(i)_0 - y'(i)_0 \; s''(i)_0 \, ; \; s'(i)_0 \; z''(i)_0 - z'(i)_0 \; s''(i)_0$$

e un denominator comune, che è la quantità

$$s'(i)_0 \sqrt{x''(i)_0^2 + y''(i)_0^2 + z''(i)_0^2 - s''(i)_0^2}. \tag{27}$$

Siccome

$$\begin{aligned} x''(i)_0 &= x''\xi^2 + 2x'_,\xi\eta + x_{,,}\eta^2 \\ y''(i)_0 &= y''\xi^2 + 2y'_,\xi\eta + y_{,,}\eta^2 \\ z''(i)_0 &= z''\xi^2 + 2z'_,\xi\eta + z_{,,}\eta^2, \end{aligned} \tag{28}$$

il che si fa manifesto per le equazioni (5) : e di più abbiamo, derivando per i, l'ultima delle (16), e risovvenendoci che il valore di $s'(i)_0$ è quello di $\sqrt{\tau}$ espresso mediante la (24),

$$\begin{aligned} \sqrt{\tau} \cdot s''(i)_0 = \left(x'\xi + x_,\eta\right) & \left(x''\xi^2 + 2x'_,\xi\eta + x_{,,}\eta^2\right) \\ + \left(y'\xi + y_,\eta\right) & \left(y''\xi^2 + 2y'_,\xi\eta + y_{,,}\eta^2\right) \\ + \left(z'\xi + z_,\eta\right) & \left(z''\xi^2 + 2z'_,\xi\eta + z_{,,}\eta^2\right); \end{aligned} \tag{29}$$

possiamo avere il radicale delle equazioni (25), (27) (radicale che per un momento denomineremo R) dato per la seguente

$$R^2 = \varkappa\xi^4 + 4\omega\xi^2\eta^2 + \varsigma\eta^4 + 4p\xi^3\eta + 2q\xi^2\eta^2 + 4r\xi\eta^3 - k \; ; \tag{30}$$

where the numerators have respectively the values

$$x'\xi + x_1\eta \quad ; \quad y'\xi + y_1\eta \quad ; \quad z'\xi + x_1\eta \tag{23}$$

and the denominator is given by $\sqrt{\tau}$, where

$$\tau = \alpha\xi^2 + 2\epsilon\xi\eta + \vartheta\eta^2. \tag{24}$$

We also know from Analytical Geometry (see Lagrange *Thèorie des fonctions analytiques*: *2^a^ Partie*, *chap.*VII, n. 34) that the radius of the osculator circle to the curve at point (x, y, z) has the following expression

$$\frac{s'\,(i)_0^2}{\sqrt{x''\,(i)_0^2 + y''\,(i)_0^2 + z''\,(i)_0^2 - s''\,(i)_0^2}} \tag{25}$$

and that its direction forms with the three axes angles whose cosines have values given by some fractions whose numerators are the binomials

(26)

$$s'\,(i)_0\;\; x''\,(i)_0 - x'\,(i)_0\;\; s''\,(i)_0\,;\;\; s'\,(i)_0\;\; y''\,(i)_0 - y'\,(i)_0\;\; s''\,(i)_0\,;\;\; s'\,(i)_0\;\; z''\,(i)_0 - z'\,(i)_0\;\; s''\,(i)_0$$

and having a common denominator, which is given by quantity

$$s'\,(i)_0\sqrt{x''\,(i)_0^2 + y''\,(i)_0^2 + z''\,(i)_0^2 - s''\,(i)_0^2}. \tag{27}$$

In the same way we have

$$\begin{aligned} x''\,(i)_0 &= x''\xi^2 + 2x'_{,}\xi\eta + x_{,,}\eta^2 \\ y''\,(i)_0 &= y''\xi^2 + 2y'_{,}\xi\eta + y_{,,}\eta^2 \\ z''\,(i)_0 &= z''\xi^2 + 2z'_{,}\xi\eta + z_{,,}\eta^2, \end{aligned} \tag{28}$$

which is manifest, because of equations (5): moreover we have, by deriving with respect to variable i the last of the (16), and recalling that the value of quantity $s'\,(i)_0$, which is equal to $\sqrt{\tau}$, is also expressed by (24),

$$\begin{aligned} \sqrt{\tau}\cdot s''\,(i)_0 = {} & \left(x'\xi + x_{,}\eta\right)\left(x''\xi^2 + 2x'_{,}\xi\eta + x_{,,}\eta^2\right) \\ & + \left(y'\xi + y_{,}\eta\right)\left(y''\xi^2 + 2y'_{,}\xi\eta + y_{,,}\eta^2\right) \\ & + \left(z'\xi + z_{,}\eta\right)\left(z''\xi^2 + 2z'_{,}\xi\eta + z_{,,}\eta^2\right); \end{aligned} \tag{29}$$

so that the radical of equations (25), (27) (radical which, for a while, we will denote with the symbol R) is given by the following

$$R^2 = \chi\xi^4 + 4\omega\xi^2\eta^2 + \varsigma\eta^4 + 4p\xi^3\eta + 2q\xi^2\eta^2 + 4r\xi\eta^3 - k\;; \tag{30}$$

dove χ, ω, ς hanno i valori significati nelle (23) n.16 ; p, q, r stanno invece di tre trinomj, cioè

$$
\begin{aligned}
p &= x''x'_{,} + y''y'_{,} + z''z'_{,} \\
q &= x''x_{,,} + y''y_{,,} + z''z_{,,} \\
r &= x'_{,}x_{,,} + y'_{,}y_{,,} + z'_{,}z_{,,} \,;
\end{aligned}
\tag{31}
$$

trinomj che al n. 17 provammo essere funzioni delle sei quantità $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \varsigma, \omega$ e loro derivate ; e la k è posta in luogo di $s''\,(i)_0^2$, ossia è data dal seguente valore

$$
\begin{aligned}
\tau k = \Big\{ & \frac{1}{2}\alpha'\xi^3 + \alpha_{,}\xi^2\eta + \left(\epsilon_1 - \frac{1}{2}\vartheta'\right)\xi\eta^2 \\
& + \left(\epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_{,}\right)\xi^2\eta + \vartheta'\xi\eta^2 + \frac{1}{2}\vartheta_{,}\eta^3 \Big\}^2
\end{aligned}
\tag{32}
$$

a trovare il quale bisogna aver occhio alle (24), (26) dei n^i. 16,17.

I binomj (26) vengono così rispettivamente eguali alle espressioni

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\tau\left(x''\xi^2 + 2x'_{,}\xi\eta + x_{,,}\eta^2\right) - \frac{x'\xi + x_{,}\eta}{\sqrt{\tau}}\sqrt{k}} \\
&\sqrt{\tau\left(y''\xi^2 + 2y'_{,}\xi\eta + y_{,,}\eta^2\right) - \frac{y'\xi + y_{,}\eta}{\sqrt{\tau}}\sqrt{k}} \\
&\sqrt{\tau\left(z''\xi^2 + 2z'_{,}\xi\eta + z_{,,}\eta^2\right) - \frac{z'\xi + z_{,}\eta}{\sqrt{\tau}}\sqrt{k}}
\end{aligned}
\tag{33}
$$

colle quali e con quella del radicale R data nella (29) potremo formarci i valori di quei tre coseni che fissano la direzione del summentovato raggio osculatore.

Se poi ve ne sono due di tali raggi osculatori, corrispondenti entrambi al punto (x, y, z), ma relativi a due diverse curve, per l'una delle quali le ξ, η siano ξ_1, η_1 e per l'altra ξ_2, η_2 interessa di trovare il coseno dell'angolo fatto da essi raggi. E vi ci si giunge col mezzo delle espressioni già ottenute : solo è da avvertire che bisogna scrivere τ_1, τ_2, K_1, K_2, R_1, R_2 in luogo delle quantità che si hanno dalle (24), (30), (32) quando in esse le ξ, η prendono al piede l'indice 1, o 2.

Così quel coseno dell'angolo compreso dai due raggi osculatori sarà una frazione che avrà per numeratore l'espressione

$$
\begin{aligned}
&\left\{\tau_1\left(x''\xi_1^2 + 2x'_{,}\xi_1\eta_1 + x_{,,}\eta_1^2\right) - \left(x'\xi_1 + x_{,}\eta_1\right)\sqrt{k_1}\right\} \\
&\left\{\tau_2\left(x''\xi_2^2 + 2x'_{,}\xi_2\eta_2 + x_{,,}\eta_2^2\right) - \left(x'\xi_2 + x_{,}\eta_2\right)\sqrt{k_2}\right\} \\
&+ \left\{\tau_1\left(y''\xi_1^2 + 2y'_{,}\xi_1\eta_1 + y_{,,}\eta_1^2\right) - \left(y'\xi_1 + y_{,}\eta_1\right)\sqrt{k_1}\right\} \\
&\left\{\tau_2\left(y''\xi_2^2 + 2y'_{,}\xi_2\eta_2 + y_{,,}\eta_2^2\right) - \left(y'\xi_2 + y_{,}\eta_2\right)\sqrt{k_2}\right\} \\
&+ \left\{\tau_1\left(z''\xi_1^2 + 2z'_{,}\xi_1\eta_1 + z_{,,}\eta_1^2\right) - \left(z'\xi_1 + z_{,}\eta_1\right)\sqrt{k_1}\right\} \\
&\left\{\tau_2\left(z''\xi_2^2 + 2z'_{,}\xi_2\eta_2 + z_{,,}\eta_2^2\right) - \left(z'\xi_2 + z_{,}\eta_2\right)\sqrt{k_2}\right\}
\end{aligned}
\tag{34}
$$

e per denominatore la quantità $\tau_1\tau_2\sqrt{R_1 R_2}$.

where quantities χ, ω, ς have the meaning given in (23) sect. 16; [while] p, q, r are used instead for denoting these three trinomials:

$$
\begin{aligned}
p &= x''x'_, + y''y'_, + z''z'_, \\
q &= x''x_{,,} + y''y_{,,} + z''z_{,,} \\
r &= x'_,x_{,,} + y'_,y_{,,} + z'_,z_{,,}\,;
\end{aligned} \tag{31}
$$

which are the trinomials which in sect. 17 we have proven to be functions of the six quantities $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \varsigma, \omega$ and of their derivatives; and [where] letter k is used to denote quantity $s''\,(i)_0^2$, i.e., it is given by the following value

$$
\begin{aligned}
\tau k = \Bigg\{ & \frac{1}{2}\alpha'\xi^3 + \alpha_,\xi^2\eta + \left(\epsilon_1 - \frac{1}{2}\vartheta'\right)\xi\eta^2 \\
& + \left(\epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_,\right)\xi^2\eta + \vartheta'\xi\eta^2 + \frac{1}{2}\vartheta_,\eta^3 \Bigg\}^2
\end{aligned} \tag{32}
$$

for finding which it is necessary to take into account quantities (24), (26) of the sect. 16 and sect. 17.

Binomials (26) are proven therefore to be equal to expressions

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\tau\left(x''\xi^2 + 2x'_,\xi\eta + x_{,,}\eta^2\right) - \frac{x'\xi + x_,\eta}{\sqrt{\tau}}}\sqrt{k} \\
&\sqrt{\tau\left(y''\xi^2 + 2y'_,\xi\eta + y_{,,}\eta^2\right) - \frac{y'\xi + y_,\eta}{\sqrt{\tau}}}\sqrt{k} \\
&\sqrt{\tau\left(z''\xi^2 + 2z'_,\xi\eta + z_{,,}\eta^2\right) - \frac{z'\xi + z_,\eta}{\sqrt{\tau}}}\sqrt{k}
\end{aligned} \tag{33}
$$

using which, together with the expression of radical R, given in equation (29), we will be able to obtain the values of those three cosines which give the direction of the aforementioned radius of osculator circle.

Then, if there exist two such osculator circles, both corresponding to the point (x, y, z), but relative to two different curves, for one of which variables ξ, η are given by the values ξ_1, η_1 while for the other [they are given by the values] ξ_2, η_2, it is interesting to find the cosine of the angle formed by the directions of their radii. This result is obtained by means of the already obtained expressions: it is only needed to warn that it is needed to write τ_1, τ_2, K_1, K_2, R_1, R_2 to replace the quantities which are given by (24), (30), (32) when, in them, the quantities ξ, η take in their lower index the value 1 or 2, respectively. Therefore the calculated cosine of the angle formed by the radii of the two osculator circles will be a fraction which will have as its numerator the expression

$$
\begin{aligned}
&\left\{\tau_1\left(x''\xi_1^2 + 2x'_,\xi_1\eta_1 + x_{,,}\eta_1^2\right) - \left(x'\xi_1 + x_,\eta_1\right)\sqrt{k_1}\right\} \\
&\left\{\tau_2\left(x''\xi_2^2 + 2x'_,\xi_2\eta_2 + x_{,,}\eta_2^2\right) - \left(x'\xi_2 + x_,\eta_2\right)\sqrt{k_2}\right\} \\
&+ \left\{\tau_1\left(y''\xi_1^2 + 2y'_,\xi_1\eta_1 + y_{,,}\eta_1^2\right) - \left(y'\xi_1 + y_,\eta_1\right)\sqrt{k_1}\right\} \\
&\left\{\tau_2\left(y''\xi_2^2 + 2y'_,\xi_2\eta_2 + y_{,,}\eta_2^2\right) - \left(y'\xi_2 + y_,\eta_2\right)\sqrt{k_2}\right\} \\
&+ \left\{\tau_1\left(z''\xi_1^2 + 2z'_,\xi_1\eta_1 + z_{,,}\eta_1^2\right) - \left(z'\xi_1 + z_,\eta_1\right)\sqrt{k_1}\right\} \\
&\left\{\tau_2\left(z''\xi_2^2 + 2z'_,\xi_2\eta_2 + z_{,,}\eta_2^2\right) - \left(z'\xi_2 + z_,\eta_2\right)\sqrt{k_2}\right\}
\end{aligned} \tag{34}
$$

and as its denominator the quantity $\tau_1\tau_2\sqrt{R_1R_2}$.

Che il detto denominatore, oltre le quattro quantità arbitrarie $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ legate da due equazioni come la (4), non contenga se non le sei quantità $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \varsigma, \omega$ e loro derivate, è cosa che si rende manifesta osservando le equazioni (24), (30), (32) e richiamando ciò che si è detto della (31). Ma vorrebbesi provare la stessa proprietà anche di tutta l'espressione (34) che costituisce il numeratore. A tale effetto osserveremo che svolgendo l'espressione (34) essa prende la forma

$$A\tau_1\tau_2 - B\tau_1\sqrt{k_2} - C\tau_2\sqrt{k_1} + D\sqrt{k_1 k_2} \tag{35}$$

risultando a operazioni terminate

$$\begin{aligned}
A &= \chi\xi_1^2\xi_2^2 + 4\omega\xi_1\eta_1\xi_2^2\eta_2 + \varsigma\eta_1^2\eta_2^2 \\
&\quad + 2p\xi_1\xi_2(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + q\left(\xi_1^2\eta_2^2 + \xi_2^2\eta_1^2\right) + 2r\eta_1\eta_2(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) \\
B &= \frac{1}{2}\alpha'\xi_1^2\xi_2 + \left(\epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_1\right)\xi_1^2\eta_2 + \alpha_1\xi_1\eta_1\xi_2 \\
&\quad + \vartheta'\xi_1\eta_1\eta_2 + \left(\epsilon_1 - \frac{1}{2}\vartheta'\right)\eta_1^2\xi_2 + \frac{1}{2}\vartheta_1\eta_1^2\eta_2 \\
C &= \frac{1}{2}\alpha'\xi_1\xi_2^2 + \left(\epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_1\right)\eta_1\xi_2^2 + \alpha_1\xi_1\xi_2\eta_2 \\
&\quad + \vartheta'\eta_1\xi_2\eta_2 + \left(\epsilon_1 - \frac{1}{2}\vartheta'\right)\xi_1\eta_2^2 + \frac{1}{2}\vartheta_1\eta_1\eta_2^2 \\
D &= \alpha\xi_1\xi_2 + \epsilon(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + \vartheta\eta_1\eta_2
\end{aligned} \tag{36}$$

dopo di che, se ben si considera, la dimostrazione è compiuta.

La proprietà di cui qui si parla sta, come si disse, in generale colle $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ qualunque : ma si fa più manifesta nel caso particolare delle due curve per le quali sono $\xi_1 = 1$, $\eta_1 = 0$; $\xi_2 = 0, \eta_2 = 1$, giusta le spiegazioni date al principio del presente Capo. In tale supposizione abbiamo dalle equazioni (24), (32), (30), $\tau_1 = \alpha$; $\tau_2 = \vartheta$; $\sqrt{k_1} = \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha}}$; $\sqrt{k_2} = \frac{1}{2}\frac{\vartheta_{\prime}}{\sqrt{\vartheta}}$

$$R_1 = \chi - \frac{\alpha'^3}{4\alpha}; \quad R_2 = \varsigma - \frac{\vartheta_{\prime}^3}{4\vartheta}.$$

Quindi per la formola (25) la grandezza dei due raggi osculatori è data rispettivamente dai due valori

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\chi - \frac{\alpha'^3}{4\alpha}}} \quad ; \quad \frac{\vartheta}{\sqrt{\varsigma - \frac{\vartheta_{\prime}^3}{4\vartheta}}} \tag{37}$$

That above-mentioned denominator, besides the four arbitrary quantities $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ (which are related by two equations similar to the one given by (4)), contains only the six quantities $\alpha, \epsilon, \vartheta, \chi, \varsigma, \omega$ and their derivatives is a statement which can be made manifest by observing equations (24), (30), (32) and recalling what has been said in the (31). However it would be desirable to prove the same property also for all expression (34) which gives the [aforementioned] numerator. To this aim we will observe that, by developing expression (34), it becomes

$$A\tau_1\tau_2 - B\tau_1\sqrt{k_2} - C\tau_2\sqrt{k_1} + D\sqrt{k_1 k_2} \tag{35}$$

where it is possible to identify, once all the operation are performed,

$$\begin{aligned}
A &= \chi\xi_1^2\xi_2^2 + 4\omega\xi_1\eta_1\xi_2^2\eta_2 + \varsigma\eta_1^2\eta_2^2 \\
&\quad + 2p\xi_1\xi_2\left(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1\right) + q\left(\xi_1^2\eta_2^2 + \xi_2^2\eta_1^2\right) + 2r\eta_1\eta_2\left(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1\right) \\
B &= \frac{1}{2}\alpha'\xi_1^2\xi_2 + \left(\epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_1\right)\xi_1^2\eta_2 + \alpha_1\xi_1\eta_1\xi_2 \\
&\quad + \vartheta'\xi_1\eta_1\eta_2 + \left(\epsilon_1 - \frac{1}{2}\vartheta'\right)\eta_1^2\xi_2 + \frac{1}{2}\vartheta_1\eta_1^2\eta_2 \\
C &= \frac{1}{2}\alpha'\xi_1\xi_2^2 + \left(\epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_1\right)\eta_1\xi_2^2 + \alpha_1\xi_1\xi_2\eta_2 \\
&\quad + \vartheta'\eta_1\xi_2\eta_2 + \left(\epsilon_1 - \frac{1}{2}\vartheta'\right)\xi_1\eta_2^2 + \frac{1}{2}\vartheta_1\eta_1\eta_2^2 \\
D &= \alpha\xi_1\xi_2 + \epsilon\left(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1\right) + \vartheta\eta_1\eta_2
\end{aligned} \tag{36}$$

so that, if one ponders well, the demonstration is completed. The property of which we are talking about holds, as we said, in general for all $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$: but it becomes clearer in the particular case of the two curves for which the following equalities hold $\xi_1 = 1$, $\eta_1 = 0$; $\xi_2 = 0, \eta_2 = 1$, in view of the considerations given at the beginning of the present Capo. Under such hypothesis we have from equations (24), (32), (30), $\tau_1 = \alpha$; $\tau_2 = \vartheta$; $\sqrt{k_1} = \frac{1}{2}\frac{\alpha'}{\sqrt{\alpha}}$; $\sqrt{k_2} = \frac{1}{2}\frac{\vartheta_,}{\sqrt{\vartheta}}$

$$R_1 = \chi - \frac{\alpha'^3}{4\alpha}; \qquad R_2 = \varsigma - \frac{\vartheta_,^3}{4\vartheta}.$$

Therefore, according to formulae (25) the two radii of the osculator circles are given by the values

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\chi - \frac{\alpha'^3}{4\alpha}}} \quad ; \quad \frac{\vartheta}{\sqrt{\varsigma - \frac{\vartheta_,^3}{4\vartheta}}} \tag{37}$$

e il coseno dell'angolo da essi compreso, in conseguenza delle espressioni (34), (35), (36), risulta eguale alla frazione

$$(38) \qquad \frac{4q\,(\alpha\vartheta)^{\frac{3}{2}} - \alpha^{\frac{3}{2}}\left(2\epsilon' - \alpha_,\right)\vartheta_, - \vartheta^{\frac{3}{2}}\,(2\epsilon_, - \vartheta')\,\alpha' + \epsilon\alpha'\vartheta_,}{\alpha\vartheta\sqrt{4\alpha\chi - \alpha'^2}\sqrt{4\vartheta\varsigma - \vartheta_,^2}}.$$

La dipendenza di questi ultimi tre valori dalle sole sei quantità più volte ricordate è visibile, avvertendo che la q è quel trinomio di mezzo fra i segnati (31), pei quali la stessa proprietà è provata a parte(∗). Ci persuaderemo nel Capo seguente l'utilità di queste conclusioni.

25. Presentemente ci proponiamo di estendere anche ai sistemi a tre dimensioni la teorica esposta nei precedenti numeri di questo Capo, escluso l'ultimo perchè l'analisi relativa non fa bisogno.

Per tal sorta di sistemi le coordinate x, y, z di una molecola qualunque dello stato reale debbono considerarsi (n.3 m.p.) funzioni

$$(39) \qquad x = x\,(a,b,c)\,; \quad y = y\,(a,b,c)\,; \quad z = z\,(a,b,c)$$

delle coordinate a, b, c della stessa molecola nella precedente distribuzione immaginata a fondamento di queste ricerche. Se cercasi la curva dove per entro alla massa nello stato reale si collocano le molecole dapprima distribuite in una retta parallela all'asse delle a, non avremo che ad eliminare la a fra le poc'anzi scritte equazioni (39), ritenendovi b, c parametri costanti. Così ne elimineremo la b, o la c se vorremo le equazioni delle curve reali per le due fila di molecole antecedentemente esistenti in una retta parallela all'asse delle b o all'asse delle c.

S'immagini pel punto (a, b, c) nello stato precedente tirata una retta qualunque, la quale faccia coi tre assi angoli di coseni ξ, η, ζ, fra i quali sta l'equazione

$$(40) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1;$$

prendasi in quella retta alla distanza i dal punto(a, b, c) un altro punto di coordinate

$$a + f\ ,\quad b + g\ ,\quad c + h\ ; \qquad \text{ovvero} \qquad a + i\xi\ ,\quad b + i\eta\ ,\quad c + i\zeta$$

(∗) Vedi la Nota in appendice. B.

and the cosine of the angle which they form, as a consequence of expressions (34), (35), (36), is equal to this fraction

$$(38) \qquad \frac{4q\,(\alpha\vartheta)^{\frac{3}{2}} - \alpha^{\frac{3}{2}}\left(2\epsilon' - \alpha_,\right)\vartheta_, - \vartheta^{\frac{3}{2}}\left(2\epsilon_, - \vartheta'\right)\alpha' + \epsilon\alpha'\vartheta_,}{\alpha\vartheta\sqrt{4\alpha\chi - \alpha'^2}\sqrt{4\vartheta\varsigma - \vartheta_,^2}}.$$

The dependence of these three values on the six quantities repeatedly recalled only, can be seen when considering that variable q is the second trinomial between those labelled as equation (31), for which the same property has been separately proven(∗). We will be persuaded about the usefulness of these conclusions in the next Capo.

25. We want now to extend also to the three-dimensional systems the theory presented in the previous sections of this Capo, with the exclusion of the last one, since the corresponding analysis is not needed.

For this kind of systems the coordinates x, y, z of a molecule whatsoever in the real state must be regarded (sect. 3 p.m.) as three functions

$$(39) \qquad x = x\,(a, b, c)\,; \quad y = y\,(a, b, c)\,; \quad z = z\,(a, b, c)$$

of the coordinates a, b, c of the same molecule in the antecedent configuration, whose existence has been imagined in order to lay the foundations of these researches. If one looks for the curve where, inside the body, in its real state are placed the molecules which [before the deformation] were placed along a straight line parallel to the axis of variable a, we will need simply to eliminate variable a from the above-written equations (39), assuming in them that variables b, c constitute some constant parameters. In the same way we will eliminate variable b, or variable c if we will want the equations of the real curves [i.e. the placement in the actual configuration] for the two rows of molecules which in the antecedent reference configuration were placed on a straight line parallel to the axis of variable b or to the axis of variable c.

Let us imagine that a straight line whatsoever is drawn through point (a, b, c) in the antecedent state, and that this line forms with the three coordinate axes some angles, whose cosines are denoted ξ, η, ζ, which verify the equation

$$(40) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1;$$

let us choose along that straight line, at a distance i from point (a, b, c), another point having coordinates

$$a + f\ , \quad b + g\ , \quad c + h\ ; \qquad \text{that is} \qquad a + i\xi\ , \quad b + i\eta\ , \quad c + i\zeta$$

(∗) See the footnote in the appendix. B.

essendo, in corrispondenza colle equazioni (3),

$$f = i\xi \; ; \quad g = i\eta \; ; \quad h = i\zeta. \tag{41}$$

Le coordinate di un tal punto nello stato reale saranno espresse per mezzo delle equazioni

$$\begin{aligned} x, &= x\,(a + i\xi \;, \quad b + i\eta \;, \quad c + i\zeta) \\ y, &= y\,(a + i\xi \;, \quad b + i\eta \;, \quad c + i\zeta) \\ z, &= z\,(a + i\xi \;, \quad b + i\eta \;, \quad c + i\zeta) \end{aligned} \tag{42}$$

le quali stanno a riscontro delle (5); e supponendo di variabile la i, e quindi eliminata fra esse, avremo le equazioni della curva dove nello stato reale saranno collocate le molecole che nel precedente si trovavano sull'ideata retta. In siffatte equazioni si curan come parametri costanti tanto le a, b, c quanto le ξ, η, ζ. Di queste seconde, due qualunque (e dico due a motivo dell'equazione (40)) possono tenersi indeterminate a nostro piacimento, e possono anche supporsi funzioni arbitrarie delle a, b, c, funzioni che cambiate in infiniti modi daranno quanto si vogliono rette tutte passanti pel punto (a, b, c). Le corrispondenti curve dello stato reale passeranno tutte pel punto (x, y, z) e se ne avranno le equazioni al modo sopra indicato. Alle tre ipotesi di

$$\xi = 1, \ \eta = 0, \ \zeta = 0; \quad \xi = 0, \ \eta = 1, \ \zeta = 0; \quad \xi = 0, \ \eta = 0, \ \zeta = 1 \tag{43}$$

corrispondono le tre particolari curve delle quali si è fatta parola al principio di questo numero.

Le due funzioni di a, b, c che dicemmo rimanere arbitrarie riguardo a due dei tre coseni ξ, η, ζ, le determineremo alla seguente maniera.

La distanza nello stato reale di due molecole, che nella distribuzione precedente aveano rispettivamente le coordinate

$$a, b, c \quad ; \quad a + f \quad , \quad b + g \quad ; \quad c + h$$

l'abbiamo segnata con ρ , ed espessa mediante l'equazione (12) n. 73 m.p. Qui avvertiremo che a motivo dei valori (41) quella espressione prende la forma

$$\begin{aligned} \rho^2 &= i^2 \left(t_1\xi^2 + t_2\eta^2 + t_3\zeta^2 + 2t_4\xi\eta + 2t_5\xi\zeta + 2t_6\eta\zeta \right) \\ &\quad + i^3 k + \text{ec.} \end{aligned} \tag{44}$$

where, similarly to what has been seen in equations (3),

$$f = i\xi \ ; \quad g = i\eta \ ; \quad h = i\zeta. \tag{41}$$

The coordinates of such a point in the real state will be expressed by means of equations

$$\begin{aligned} x, &= x\,(a + i\xi \ , \quad b + i\eta \ , \quad c + i\zeta) \\ y, &= y\,(a + i\xi \ , \quad b + i\eta \ , \quad c + i\zeta) \\ z, &= z\,(a + i\xi \ , \quad b + i\eta \ , \quad c + i\zeta) \end{aligned} \tag{42}$$

which must be compared with (5); and assuming as a new variable quantity i, and subsequently eliminating it from them, we will obtain the equations of the curve where, in the real state, those molecules will be placed, which in the antecedent configuration were lying along the imagined straight line. In such equations one can consider as constant parameters both variables a, b, c and variables ξ, η, ζ. Among these second ones, we can arbitrarily choose two generic ones (and I say two because of equation (40)) to be indeterminate, but they can also be assumed as arbitrary functions of variables a, b, c, and these functions, when changed in infinite ways, will be able to give all the straight lines which are passing through the point (a, b, c). The corresponding curves in the real state will all pass through point (x, y, z) and one can get their equations in the way which has been indicated above. To the three hypotheses expressed by equations

$$\xi = 1, \ \eta = 0, \ \zeta = 0; \quad \xi = 0, \ \eta = 1, \ \zeta = 0; \quad \xi = 0, \ \eta = 0, \ \zeta = 1 \tag{43}$$

will correspond the three particular curves which we have discussed at the beginning of this section.

We will determine in the following way the two functions of variables a, b, c which, as we said, could still remain to be specified, in order to fix two of the three cosines ξ, η, ζ.

We have denoted with the symbol ρ, and we have expressed it by means of equation (12) sect. 73 p.m the distance in the real state between two molecules which in the reference configuration had respectively coordinates

$$a, b, c \ ; \quad a + f \ , \quad b + g \ ; \quad c + h$$

We remark here that, because of values (41), the aforementioned expression will take this form:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= i^2 \left(t_1\xi^2 + t_2\eta^2 + t_3\zeta^2 + 2t_4\xi\eta + 2t_5\xi\zeta + 2t_6\eta\zeta\right) \\ &\quad + i^3 k + \text{etc.} \end{aligned} \tag{44}$$

i valori de'sei trinomj $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ furono scritti nelle equazioni (6) n. 34 m.p.: gioverà ripeterli adesso scrivendo

$$
\begin{aligned}
t_1 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad ; \quad t_4 = x'x_, + y'y_, + z'z_, \\
t_2 &= x_,^2 + y_,^2 + z_,^2 \quad ; \quad t_5 = x'\dot{x} + y'\dot{y} + z'\dot{z} \\
t_3 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \quad ; \quad t_6 = \dot{x}x_, + \dot{y}y_, + \dot{z}z_,
\end{aligned} \tag{45}
$$

ove si vedono indicate cogli apici in alto le derivate per a, cogli apici abbasso quelle per b, e coi punti quelle per c, giacchè l'esprimere queste terze derivate con apici precedenti genera alcune volte confusione.

Supporremo nella (44) la distanza i sommamente piccola, quale conviene che sia se per essa s'intende la distanza tra la molecola (a, b, c) e la immediatamente prossima, dapprima secondo la traccia di una di quelle rette, poi secondo la traccia di una di quelle curve. Allora, per ragioni già addotte, nella (44) il valore di ρ^2 sarà sensibilmente tutto raccolto nella qualità che ha i^2 per coefficiente. Ciò si avvererà sempre, qualunque sia la molecola che s'immagina messa in coppia colla (a, b, c) seguendo le diverse infinite direzioni rese possibili dal variare dei coseni ξ, η, ζ. Ma anche fra tali piccolissime distanze ρ dello stato reale, vi sarà un più e un meno proveniente dalla grandezza del coefficiente di i^2 nella (44). Determineremo pertanto i coseni ξ, η, ζ per modo che il sestinomio coefficiente di i^2 nella (44) raggiunga un valor massimo o minimo, compatibilmente coll'equazione di condizione (40). Questa operazione ci fornirà tre terne di valori da darsi ai coseni ξ, η, ζ : quindi verranno assegnate tre rette nello stato precedente, le cui molecole trasportate allo stato reale, si saranno collocate in tre differenti curve, che chiameremo della massima e minima condensazione.

26. La parte analitica del problema consiste nel cercare, giusta il metodo noto, i valori di ξ, η, ζ che rendono massima o minima la quantità

$$
\begin{aligned}
&t_1\xi^2 + t_2\eta^2 + t_3\zeta^2 + 2t_4\xi\eta + 2t_5\xi\zeta + 2t_6\eta\zeta \\
&+ \lambda\left(1 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2\right)
\end{aligned}
$$

considerando ξ, η, ζ fra di loro indipendenti, e λ un coefficiente indeterminato.

Si ottengono per tal modo le tre equazioni

$$
\begin{aligned}
\xi t_1 + \eta t_4 + \zeta t_5 &= \lambda\xi \\
\xi t_4 + t_2\eta + \zeta t_6 &= \lambda\eta \\
\xi t_5 + \eta t_6 + \zeta t_3 &= \lambda\zeta.
\end{aligned} \tag{46}
$$

the values of the six trinomials $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ were written in equations (6) sect. 34 p.m.: it will be useful to rewrite them here:

$$
\begin{array}{llll}
(45) \qquad & t_1 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \;\; ; & t_4 = x'x_, + y'y_, + z'z_, \\
& t_2 = x_,^2 + y_,^2 + z_,^2 \;\; ; & t_5 = x'\dot{x} + y'\dot{y} + z'\dot{z} \\
& t_3 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \;\; ; & t_6 = \dot{x}x_, + \dot{y}y_, + \dot{z}z_,
\end{array}
$$

where one can see that derivatives with respect to a are denoted by upper primes, derivatives with respect to b are denoted by lower primes and derivatives with respect to c are denoted by dots, since expressing this third kind of derivatives with the previous primes could generate sometimes confusion.

We will assume in equation (44) that distance i is very small, as it is necessarily true when it represents the distance between molecule (a, b, c) and the other molecule which is immediately closest to it [in the reference configuration] along one of the above-said straight lines and then [in the real state] along one of the above-mentioned curves. Then, for the reasons already presented, in (44), the value of ρ^2 will be mainly given by the term which contains as a factor the quantity i^2. This will be always true, whatsoever will be the molecule which will follow the one placed in (a, b, c) along any of the different infinite directions which are spanned when the cosines ξ, η, ζ take all their possible values. However, also among these very small distances ρ in the real state there will be differences determined by the values taken by the i^2 coefficient in equation (44). We will therefore determine the cosines ξ, η, ζ in such a way, that the sextinomial which is the coefficient of i^2 in (44) will attain a maximum or minimum value, compatibly with the equation of condition (40). This operation will give us three triples of values for the cosines ξ, η, ζ : therefore three straight lines will be determined in the antecedent state, whose molecules, once transported to the real state, will be placed along three different curves which we will call curves of maximum and minimum condensation.

26. The analytical part of the problem consists, by using the well-known method, in looking for values of cosines ξ, η, ζ such that a maximum or minimum value is attained by quantity

$$
\begin{aligned}
& t_1\xi^2 + t_2\eta^2 + t_3\zeta^2 + 2t_4\xi\eta + 2t_5\xi\zeta + 2t_6\eta\zeta \\
& + \lambda\left(1 - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2\right)
\end{aligned}
$$

when quantities ξ, η, ζ are assumed to be independent, and λ to be an indeterminate coefficient.

In this way the following three equations are obtained

$$
\begin{array}{ll}
(46) \qquad & \xi t_1 + \eta t_4 + \zeta t_5 = \lambda\xi \\
& \xi t_4 + t_2\eta + \zeta t_6 = \lambda\eta \\
& \xi t_5 + \eta t_6 + \zeta t_3 = \lambda\zeta.
\end{array}
$$

Divise queste per una delle tre incognite, ver. gr. per ζ , ed eliminati fra esse i rapporti $\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}$, si arriva ad una equazione di terzo grado in λ, cioè alla

$$\lambda^3 - (t_1 + t_2 + t_3)\lambda^3 + \left(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 - t_4^2 - t_5^2 - t_6^2\right)\lambda \tag{47}$$
$$- \left(t_1 t_2 t_3 + 2t_4 t_5 t_6 - t_1 t_6^2 - t_2 t_5^2 - t_3 t_4^3\right) = 0.$$

Più volte in meccanica occorre un'equazione di terzo grado della forma ora trovata, e noi già l'incontrammo al n. 57 m.p. Sappiamo di una tale equazione (e lo dicemmo in quel luogo) che tutte tre le sue radici sono reali : qui però c'è qualch'altra osservazione curiosa da fare. Richiamando la formola (34) n. 67 m.p. vediamo che l'ultima parte negativa della equazione (47), quella che non è moltiplicata per l'incognita λ, equivale all'unità divisa pel quadrato della densità del corpo nel punto (x, y, z). Veduto anche quanto colà soggiungemmo per le densità degli altri sistemi, riconosciamo che il coefficiente di λ è la somma di tre frazioni che hanno per numeratore l'unità, e per denominatori i quadrati di tre densità superficiali, la prima per la superficie la cui equazione risulta dalle (39) eliminando le a, b e tenendovi parametro costante la c ; la seconda per la superficie che si ottiene similmente fatte variabili le a, c, e costante la b; la terza per la superficie colle variabili b, c, e colla costante a. Il coefficiente poi di λ^2 nella (47) è la somma di tre frazioni che hanno per numeratore l'unità e per denominatori i quadrati di tre densità lineari per le tre curve indicate nel numero precedente, per le quali i tre coseni hanno i valori particolari (43). Anche tutte queste ultime sei densità s'intendono ridotte al punto (x, y, z).

27. I valori dei tre coseni ξ, η, ζ si ricavano combinando due delle equazioni (46) colla (40) : di qui tre combinazioni che conducono a tre maniere di espressione apparentemente diverse, ma che possono tutte ridursi ad una medesima. A stendere senza incomodo questo tratto d'analisi giova stabilire le sei denominazioni

$$\begin{aligned}
G &= \lambda^2 - (t_2 + t_3)\lambda + t_2 t_3 - t_6^2 \\
O &= \lambda^2 - (t_1 + t_3)\lambda + t_1 t_3 - t_5^2 \\
P &= \lambda^2 - (t_1 + t_2)\lambda + t_1 t_2 - t_4^2 \\
Q &= \lambda t_4 + t_5 t_6 - t_3 t_4 \\
R &= \lambda t_5 + t_4 t_6 - t_2 t_5 \\
S &= \lambda t_6 + t_4 t_5 - t_1 t_6;
\end{aligned} \tag{48}$$

Once we divide these last equations by one of the three unknowns, e.g. by variable ζ, and once we eliminate from them the ratios $\frac{\xi}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}$, it is possible to get a third order algebraic equation in terms of variable λ, i.e. equation

$$\lambda^3 - (t_1 + t_2 + t_3)\,\lambda^3 + \left(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 - t_4^2 - t_5^2 - t_6^2\right)\lambda \tag{47}$$
$$- \left(t_1 t_2 t_3 + 2t_4 t_5 t_6 - t_1 t_6^2 - t_2 t_5^2 - t_3 t_4^3\right) = 0.$$

Many times in Mechanics a third order equation occurs having the same form which is found now, and we found it already in sect. 57 p.m. We know about such an equation (and we already said this in that place) that all its three roots are real: here, however, some more particular observations are needed. By recalling formula (34) sect. 67 p.m. we will see that the last part of equation (47), i.e. the term carrying the minus sign which is not multiplied by the unknown λ, is equal to the unit divided by the square of the mass density of the body in point (x, y, z). Considering also what we said in the same place for the densities of the other systems, we can recognize that the coefficient of λ is given by the sum of three fractions whose numerator is the unit and whose denominators are the squares of three surface densities, the first one is relative to the surface whose equation is given by (39) by eliminating variables a, b and considering variable c as a constant parameter; the second one is relative to the surface which is similarly obtained when eliminating variables a, c, and considering b as constant; the third one relative to the surface with variables b, c, and constant a. Then the coefficient of λ^2 in (47) is the sum of three fractions which have a unit numerator and whose denominators are the squares of the three linear densities for the three curves indicated in the previous section, for which the three cosines have the particular values (43). Also all these six densities are those calculated in point (x, y, z).

27. The values of the three cosines ξ, η, ζ are calculated by combining two among equations (46) with (40) : in this way we get three combinations leading to three expressions which are apparently different, but which can all be reduced to a unique one. In order to show without difficulties this part of the analysis it is useful to introduce these six short-hand definitions

$$\begin{aligned}
G &= \lambda^2 - (t_2 + t_3)\,\lambda + t_2 t_3 - t_6^2 \\
O &= \lambda^2 - (t_1 + t_3)\,\lambda + t_1 t_3 - t_5^2 \\
P &= \lambda^2 - (t_1 + t_2)\,\lambda + t_1 t_2 - t_4^2 \\
Q &= \lambda t_4 + t_5 t_6 - t_3 t_4 \\
R &= \lambda t_5 + t_4 t_6 - t_2 t_5 \\
S &= \lambda t_6 + t_4 t_5 - t_1 t_6 \ ;
\end{aligned} \tag{48}$$

dove osserveremo che tutti i secondi membri terminano con binomj già venutici sott'occhio al n. 67 m.p., e che fanno bel giuoco anche altrove. Se prendiamo a due a due le equazioni (46) e le trattiamo col metodo con cui si risolvono le equazioni di primo grado a due incognite, otteniamo quest'altre

$$\begin{aligned} &\frac{\xi}{G}=\frac{\eta}{Q}=\frac{\zeta}{R} \\ &\frac{\xi}{Q}=\frac{\eta}{O}=\frac{\zeta}{S} \\ &\frac{\xi}{R}=\frac{\eta}{S}=\frac{\zeta}{P}. \end{aligned} \tag{49}$$

Di queste le prime due combinate con la (40) danno prontamente

$$\xi=\frac{G}{\sqrt{G^2+Q^2+R^2}}\ ;\ \eta=\frac{Q}{\sqrt{G^2+Q^2+R^2}}\ ;\ \zeta=\frac{R}{\sqrt{G^2+Q^2+R^2}}\ ; \tag{50}$$

ed è facile vedere le altre due maniere di espressione apparentemente diverse pei valori di ξ, η, ζ che si deducessero dalle seguenti equazioni (49) combinate similmente colla (40).

Ora usando le denominazioni (48)convien verificare pazientemente l'identità delle tre equazioni

$$Q^2=GO\ ;\ R^2=GP\ ;\ S^2=OP \tag{51}$$

che tutte riconducono l'equazione di terzo grado (47). Per esempio, la prima, eseguite le moltiplicazioni, risulta apparentemente di quarto grado, ma si ritrova tutta divisibile per $\lambda-t_3$, dopo di che si ha l'equazione (47) ; così per le altre due dividendole per $\lambda-t_2, \lambda-t_1$.

Queste (51), moltiplicate fra loro, conducono, dopo estratta la radice quadrata, alla

$$QRS=GOP\ ; \tag{52}$$

per la quale si ricavano dalle (51) le altre tre

$$PQ=RS\ ;\ OR=QS\ ;\ GS=QR\ ; \tag{53}$$

per esempio, a trovare la prima si moltiplica la prima delle (51) per P, e si confronta il suo primo membro col primo membro della (52), dividendo per Q.

Giovandoci delle (51), i valori (50) si riducono prontamente ai seguenti

$$\xi=\sqrt{\frac{G}{G+O+P}}\ ;\ \eta\sqrt{\frac{O}{G+O+P}}\ ;\ \zeta=\sqrt{\frac{P}{G+O+P}} \tag{54}$$

where we will observe that all the right-hand sides end with some binomials which we already met in the sect. 67 p.m. and which are very useful also in other circumstances. If we take two by two equations (46) and we treat them with the method which is used when solving equations of first order in two unknowns, we will get these other ones

$$(49)\qquad \begin{gathered} \frac{\xi}{G}=\frac{\eta}{Q}=\frac{\zeta}{R} \\ \frac{\xi}{Q}=\frac{\eta}{O}=\frac{\zeta}{S} \\ \frac{\xi}{R}=\frac{\eta}{S}=\frac{\zeta}{P}. \end{gathered}$$

Among these equations the first two can be combined with (40) to give immediately

$$(50)\qquad \xi=\frac{G}{\sqrt{G^2+Q^2+R^2}}\ ;\ \eta=\frac{Q}{\sqrt{G^2+Q^2+R^2}}\ ;\ \zeta=\frac{R}{\sqrt{G^2+Q^2+R^2}}\ ;$$

and it is easy to see the other two ways to get some apparently different expressions for the values of ξ,η,ζ which can be deduced from equations (49) once they are similarly combined with (40).

Now by using definition (48) it is convenient to verify patiently that these three equations which are identically satisfied

$$(51)\qquad Q^2=GO\ ;\ R^2=GP\ ;\ S^2=OP$$

all lead to the third order equation (47). For instance the first one, once the multiplications are performed, seems apparently to be of fourth order, but it results to be divisible by $\lambda-t_3$, so that one obtains equation (47); and the same happens for the other two once they are respectively divided by $\lambda-t_2,\lambda-t_1$.

Equations (51), multiplied one by the other, after extracting the square root, lead to equation

$$(52)\qquad QRS=GOP\ ;$$

from which one can deduce, by using (51), these other three

$$(53)\qquad PQ=RS\ ;\ OR=QS\ ;\ GS=QR\ ;$$

for instance, to find the first one the first equation among (51) has been multiplied by P, and its left-hand side with the left-hand side of equation (52), dividing it by Q.

By exploiting equations (51), values (50) can be readily reduced to the following

$$(54)\qquad \xi=\sqrt{\frac{G}{G+O+P}}\ ;\ \eta\sqrt{\frac{O}{G+O+P}}\ ;\ \zeta=\sqrt{\frac{P}{G+O+P}}$$

e questi sarebbero poi sempre risultati i medesimi anche quando invece delle equazioni (50) avessimo adoperate quelle altre due maniere di espressione che già dicemmo apparentemente diverse.

Mettendo nelle (54) in luogo di λ le tre radici $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dell'equazione (47), ne dedurremo tre diversi sistemi di valori pei tre coseni, e li indicheremo per mezzo delle espressioni

$$
(55) \qquad
\begin{aligned}
\xi_1 &= \sqrt{\frac{G_1}{G_1+O_1+P_1}} \; ; \; \eta_1\sqrt{\frac{O_1}{G_1+O_1+P_1}} \; ; \; \zeta_1 = \sqrt{\frac{P_1}{G_1+O_1+P_1}} \\
\xi_2 &= \sqrt{\frac{G_2}{G_2+O_2+P_2}} \; ; \; \eta_2\sqrt{\frac{O_2}{G_2+O_2+P_2}} \; ; \; \zeta_2 = \sqrt{\frac{P_2}{G_2+O_2+P_2}} \\
\xi_3 &= \sqrt{\frac{G_3}{G_3+O_3+P_3}} \; ; \; \eta_3\sqrt{\frac{O_3}{G_3+O_3+P_3}} \; ; \; \zeta_3 = \sqrt{\frac{P_3}{G_3+O_3+P_3}}
\end{aligned}
$$

questi poi servono alla fissazione delle tre curve di massima e minima condensazione, come meglio apparirà dal progresso.

28. Ha qui luogo una proprietà analoga alla già dimostrata nel n. 22. Se moltiplichiamo rispettivamente per ξ, η, ζ le tre equazioni (46) e poi le sommiamo, troviamo a motivo della (40) l'equazione

$$
(56) \qquad \lambda = t_1\xi^2 + t_2\eta^2 + t_3\zeta^2 + 2t_4\xi\eta + 2t_5\xi\zeta + 2t_6\eta\zeta
$$

il cui secondo membro è lo stesso sestinomio coefficiente di i^2 nella (44) che ci siamo proposti a ridurre massimo o minimo; dunque le tre radici dell'equazione (47) sono a dirittura i tre valori del sestinomio già portato al massimo o al minimo nei tre casi, quali sarebbero risultati sostituendovi ogni volta i rispettivi valori (55) dei tre coseni. La notabile equazione (56) può anche verificarsi a *posteriori* sostituendovi i valori (54). In questa operazione, usando delle equazioni (51), si giunge alla

$$
\lambda(G+O+P) = t_1G + t_2O + t_3P + 2t_4Q + 2t_5R + 2t_6S
$$

la quale si riconosce identica col mettevi i valori (48).

29. Sussiste altresì in questo caso di un sistema a tre dimensioni altra proprietà notevolissima corrispondente alla dimostrata al n. 23 pei sistemi superficiali, cioè che le tangenti alle tre curve di massima o minima condensazione, tirate pel punto (x, y, z), fanno fra di loro angoli retti, ossia costituiscono un vero sistema di tre assi ortogonali.

Per veder ciò conviene prendere dapprima la cosa più in generale, e supporre che i tre sistemi di coseni ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; ξ_3, η_3, ζ_3 (dei quali and these last values would result to be the same ones also when, instead of equations (50) we had used the two other expressions, which we already said to be apparently different.

Substituting in (54) variable λ with the three roots $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ of equation (47), we will deduce three different systems of values for the three cosines, and we will indicate them by means of these expressions

$$(55)\qquad \begin{aligned} \xi_1 &= \sqrt{\frac{G_1}{G_1+O_1+P_1}}\ ;\quad \eta_1\sqrt{\frac{O_1}{G_1+O_1+P_1}}\ ;\quad \zeta_1 = \sqrt{\frac{P_1}{G_1+O_1+P_1}} \\ \xi_2 &= \sqrt{\frac{G_2}{G_2+O_2+P_2}}\ ;\quad \eta_2\sqrt{\frac{O_2}{G_2+O_2+P_2}}\ ;\quad \zeta_2 = \sqrt{\frac{P_2}{G_2+O_2+P_2}} \\ \xi_3 &= \sqrt{\frac{G_3}{G_3+O_3+P_3}}\ ;\quad \eta_3\sqrt{\frac{O_3}{G_3+O_3+P_3}}\ ;\quad \zeta_3 = \sqrt{\frac{P_3}{G_3+O_3+P_3}} \end{aligned}$$

these values will be then used to determine the three curves of minimum and maximum condensation, as it will be better apparent in what follows.

28. It is here appropriate to discuss a property which is analogous to the one already proven in the sect. 22. If we multiply respectively by ξ, η, ζ the three equations (46) and we sum up them, we find, because of (40) the other equation

$$(56)\qquad \lambda = t_1\xi^2 + t_2\eta^2 + t_3\zeta^2 + 2t_4\xi\eta + 2t_5\xi\zeta + 2t_6\eta\zeta$$

whose right-hand side is the same sextinomial which is the coefficient of quantity i^2 in (44) and which we intend to reduce to its minimum and maximum values; therefore the three roots of the equation (47) are indeed the three values of the sextinomial already estimated in its maximum or minimum values in the three cases which would result if one had substituted every time the relative values (55) of the three cosines. The remarkable equation (56) can also be verified *a posteriori* by substituting in it values (54). When this operation is performed, by using equations (51), we will get the equality

$$\lambda(G + O + P) = t_1 G + t_2 O + t_3 P + 2t_4 Q + 2t_5 R + 2t_6 S$$

which is identically verified, as it can be checked by replacing in it values (48).

29. Another most remarkable property holds also in the treated case of a three-dimensional system, which corresponds to the similar one demonstrated in sect. 23 for superficial systems and it states that the tangent straight lines to the three curves of maximum or minimum condensation considered in point (x, y, z), are pairwise orthogonal, which means that they constitute a true orthogonal system of axes. To prove this it is convenient to start from a more general statement, and assume that the three systems of cosines ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; ξ_3, η_3, ζ_3 (of which

uno qualunque è indicato colle semplici lettere ξ, η, ζ) siano affatto arbitrarj, cioè non vincolati a soddisfare alle equazioni (46). Richiamato il principio geometrico scritto nelle equazioni (16), e fatta attenzione essere nel caso attuale le (42) che danno x_1, y_1, z_1 in funzione della quarta variabile i, riconosceremo facilmente che i tre coseni degli angoli fatti coi tre assi rettangolari dalla tangente ad una qualunque di quelle tre curve nel punto (x, y, z) , hanno valori espressi da frazioni i cui numeratori sono rispettivamente i trinomj

$$(57) \qquad x'\xi + x_, \eta + \dot{x}\,\zeta \quad ; \quad y'\xi + y_, \eta + \dot{y}\,\zeta \quad ; \quad z'\xi + z_, \eta + \dot{z}\,\zeta$$

e il denominator comune è la radice quadrata della somma dei quadrati di questi trinomj. Una tal somma di quadrati, stanti le denominazioni (45), riproduce il sestinomio coefficiente di i^2 nella (44), sestinomio che designeremo con τ . Conchiuderemo pertanto che una di quelle tangenti farà coi tre assi rettangolari angoli di coseni

$$(58) \quad \alpha_1 = \frac{x'\xi_1 + x_, \eta_1 + \dot{x}\,\zeta_1}{\sqrt{\tau_1}} \quad ; \quad \beta_1 = \frac{y'\xi_1 + y_, \eta_1 + \dot{y}\,\zeta_1}{\sqrt{\tau_1}} \quad ; \quad \gamma_1 = \frac{z'\xi_1 + z_, \eta_1 + \dot{z}\,\zeta_1}{\sqrt{\tau_1}};$$

una seconda tangente tirata medesimamente pel punto (x, y, z) ad altra di quelle curve farà cogli stessi tre assi angoli di coseni

$$(59) \quad \alpha_2 = \frac{x'\xi_2 + x_, \eta_2 + \dot{x}\,\zeta_2}{\sqrt{\tau_2}} \quad ; \quad \beta_2 = \frac{y'\xi_2 + y_, \eta_2 + \dot{y}\,\zeta_2}{\sqrt{\tau_2}} \quad ; \quad \gamma_2 = \frac{z'\xi_2 + z_, \eta_2 + \dot{z}\,\zeta_2}{\sqrt{\tau_2}};$$

e la terza tangente alla terza curva angoli di coseni

$$(60) \quad \alpha_3 = \frac{x'\xi_3 + x_, \eta_3 + \dot{x}\,\zeta_3}{\sqrt{\tau_3}} \quad ; \quad \beta_3 = \frac{y'\xi_3 + y_, \eta_3 + \dot{y}\,\zeta_3}{\sqrt{\tau_3}} \quad ; \quad \gamma_3 = \frac{z'\xi_3 + z_, \eta_3 + \dot{z}\,\zeta_3}{\sqrt{\tau_3}}.$$

Queste frazioni (58), (59), (60) sono valori di coseni che fissano direzioni spettanti allo stato reale, mentre i nove coseni ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, ec. determinavano posizioni dirette tirate pel punto (a, b, c) nella solita supposizione di una distribuzione precedente ideale.

Se ora vogliamo conoscere il coseno dell'angolo compreso dalla retta dei coseni (58) e da quella dei coseni (59), sappiamo che potremo scriverne il valore per mezzo della frazione

$$(61) \qquad \frac{V}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}},$$

the generic one is indicated simply with letters ξ, η, ζ) are completely arbitrary, i.e. they do not necessarily verify equations (46). Once recalled the geometrical principle written in equations (16), and after having remarked that, in the present case, (42) are the relationships which give quantities x_1, y_1, z_1 as functions of the fourth variable, i, we will easily recognize that the three cosines of the angles formed with the three orthogonal axes by the tangent of one among the considered curves at point (x, y, z), are given by fractions whose numerators are given respectively by trinomials

$$(57) \qquad x'\xi + x_{,}\eta + \dot{x}\,\zeta \quad ; \quad y'\xi + y_{,}\eta + \dot{y}\,\zeta \quad ; \quad z'\xi + z_{,}\eta + \dot{z}\,\zeta$$

and whose common denominator is equal to the square root of the sum of the squares of these trinomials. Such a sum of squares, because of definitions (45), reproduces the sextinomial which is the coefficient of i^2 in equation (44), sextinomial which we will denote by τ . We can therefore conclude that one of the mentioned tangents will form with the three orthogonal axes angles having the following cosines

$$(58) \quad \alpha_1 = \frac{x'\xi_1 + x_{,}\eta_1 + \dot{x}\,\zeta_1}{\sqrt{\tau_1}} \quad ; \quad \beta_1 = \frac{y'\xi_1 + y_{,}\eta_1 + \dot{y}\,\zeta_1}{\sqrt{\tau_1}} \quad ; \quad \gamma_1 = \frac{z'\xi_1 + z_{,}\eta_1 + \dot{z}\,\zeta_1}{\sqrt{\tau_1}};$$

while a second tangent, passing in the same way through point (x, y, z), to another one of the considered curves will form with the same axes three angles having cosines

$$(59) \quad \alpha_2 = \frac{x'\xi_2 + x_{,}\eta_2 + \dot{x}\,\zeta_2}{\sqrt{\tau_2}} \quad ; \quad \beta_2 = \frac{y'\xi_2 + y_{,}\eta_2 + \dot{y}\,\zeta_2}{\sqrt{\tau_2}} \quad ; \quad \gamma_2 = \frac{z'\xi_2 + z_{,}\eta_2 + \dot{z}\,\zeta_2}{\sqrt{\tau_2}};$$

and the third tangent to the third curve will form angles having cosines

$$(60) \quad \alpha_3 = \frac{x'\xi_3 + x_{,}\eta_3 + \dot{x}\,\zeta_3}{\sqrt{\tau_3}} \quad ; \quad \beta_3 = \frac{y'\xi_3 + y_{,}\eta_3 + \dot{y}\,\zeta_3}{\sqrt{\tau_3}} \quad ; \quad \gamma_3 = \frac{z'\xi_3 + z_{,}\eta_3 + \dot{z}\,\zeta_3}{\sqrt{\tau_3}}.$$

Fractions (58), (59), (60) supply the values of those cosines which determine directions relative to the real state, while the nine cosines $\xi_1, \eta_1, \zeta_1,\ \xi_2$, etc. are relative to straight lines passing through point (a, b, c) in the usually considered antecedent ideal configuration.

If we want now to consider the cosine of the angle formed by the straight line having cosines given by equation (58) and the straight line having cosines given in (59), we know that we can find its value by means of this fraction

$$(61) \qquad \frac{V}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}},$$

stando la V in luogo della quantità che forma il secondo membro dell'equazione seguente

$$\begin{aligned} V = & (x'\xi_1 + x,\eta_1 + \dot{x}\ \zeta_1)(x'\xi_2 + x,\eta_2 + \dot{x}\ \zeta_2) \\ & + (y'\xi_1 + y,\eta_1 + \dot{y}\ \zeta_1)(y'\xi_2 + y,\eta_2 + \dot{y}\ \zeta_2) \\ & + (z'\xi_1 + z,\eta_1 + \dot{z}\ \zeta_1)(z'\xi_2 + z,\eta_2 + \dot{z}\ \zeta_2), \end{aligned}$$

e che, dopo eseguiti i prodotti e ricordate le denominazioni (45), può anche scriversi

$$\begin{aligned} V = & \xi_1\xi_2 t_1 + \eta_1\eta_2 t_2 + \zeta_1\zeta_2 t_3 + (\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2) t_4 + (\xi_1\zeta_2 + \zeta_1\xi_2) t_5 + \\ & + (\eta_1\zeta_2 + \zeta_1\eta_2) t_6 . \end{aligned} \tag{62}$$

Nel caso particolare in cui le tre curve contemplate siano quelle della massima e minima condensazione, gioverà osservare in primo luogo che il precedente valore di V può mettersi tanto sotto la forma

$$V = \xi_1 (\xi_2 t_1 + \eta_2 t4 + \zeta_2 t_5) + \eta_1 (\xi_2 t_4 + \eta_2 t_2 + \zeta_2 t_6) + \zeta_1 (\xi_2 t_5 + \eta_2 t_6 + \zeta_2 t_3) . \tag{63}$$

quanto sotto l'altra

$$V = \xi_2 (\xi_1 t_1 + \eta_1 t4 + \zeta_1 t_5) + \eta_2 (\xi_1 t_4 + \eta_1 t_2 + \zeta_1 t_6) + \zeta_2 (\xi_1 t_5 + \eta_1 t_6 + \zeta_1 t_3) . \tag{64}$$

Poscia noteremo che i trinomj fra parentesi nella (63), in forza delle equazioni (46) che sussistono per tutti e tre i sistemi dei coseni (55), hanno rispettivamente i valori $\lambda_2\xi_2, \lambda_2\eta_2, \lambda_2\zeta_2,$ talchè la (63) può mutarsi nella

$$V = \lambda_2 (\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2) . \tag{65}$$

Similmente i trinomj fra parentesi nella (64), per le stesse equazioni (46), hanno rispettivamente i valori $\lambda_1\xi_1, \lambda_1\eta_1, \lambda_1\zeta_1,$ e ne risulta per V quest'altra espressione

$$V = \lambda_1 (\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2) . \tag{66}$$

Pertanto una stessa quantità V (equazioni (65), (66)) sarebbe eguale a due quantità di diverso valore, giacchè sono diverse, generalmente parlando, le due radici λ_1, λ_2, e il secondo fattor trinomiale è il medesimo in ambe le espressioni. Ciò non potendo essere, viene di necessità che un tal fattore trinomiale sia zero, e quindi zero la stessa V.

Allo stesso modo, combinando i coseni (58) coi (60), e i coseni (59) coi (60), si provano zero i coseni cogli angoli formati dalla prima e terza, e dalla seconda where quantity V given by the right-hand side of the following equation

$$\begin{aligned} V = & (x'\xi_1 + x,\eta_1 + \dot{x}\ \zeta_1)(x'\xi_2 + x,\eta_2 + \dot{x}\ \zeta_2) \\ & + (y'\xi_1 + y,\eta_1 + \dot{y}\ \zeta_1)(y'\xi_2 + y,\eta_2 + \dot{y}\ \zeta_2) \\ & + (z'\xi_1 + z,\eta_1 + \dot{z}\ \zeta_1)(z'\xi_2 + z,\eta_2 + \dot{z}\ \zeta_2), \end{aligned}$$

can also be, after computing the products and recalling the definitions (45), rewritten as

(62) $$V = \xi_1\xi_2 t_1 + \eta_1\eta_2 t_2 + \zeta_1\zeta_2 t_3 + (\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2)\,t_4 + (\xi_1\zeta_2 + \zeta_1\xi_2)\,t_5 + + (\eta_1\zeta_2 + \zeta_1\eta_2)\,t_6 .$$

In the particular case where the three curves considered are those of minimum and maximum condensation, it will be useful to observe first that the previous value of V can be equivalently given by equation

(63) $$V = \xi_1\,(\xi_2 t_1 + \eta_2 t4 + \zeta_2 t_5) + \eta_1\,(\xi_2 t_4 + \eta_2 t_2 + \zeta_2 t_6) + \zeta_1\,(\xi_2 t_5 + \eta_2 t_6 + \zeta_2 t_3) .$$

or by equation

(64) $$V = \xi_2\,(\xi_1 t_1 + \eta_1 t4 + \zeta_1 t_5) + \eta_2\,(\xi_1 t_4 + \eta_1 t_2 + \zeta_1 t_6) + \zeta_2\,(\xi_1 t_5 + \eta_1 t_6 + \zeta_1 t_3) .$$

We will observe then that the trinomials inside parentheses in (63), because of equations (46) which hold for all three triples of cosines (55), have respectively the values $\lambda_2\xi_2, \lambda_2\eta_2, \lambda_2\zeta_2$, so that (63) can be transformed into the following one

(65) $$V = \lambda_2\,(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2) .$$

In a similar way the trinomials inside parentheses in (64), because of the same equations (46), have respectively the values $\lambda_1\xi_1, \lambda_1\eta_1, \lambda_1\zeta_1$, and as a consequence one gets for quantity V this other expression

(66) $$V = \lambda_1\,(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2) .$$

Therefore one and the same quantity V (equations (65), (66)) would be equal to two quantities which could assume different values, since, in general, the two roots λ_1, λ_2 are different, while the second trinomial factor is the same in both expressions. As this cannot be obviously true, then, necessarily that such a trinomial factor has to be zero, so that the same quantity V is zero.

In the same way, by combining cosines (58) with cosines (60), and cosines (59) with cosines (60), one can be prove that the cosines of the angles formed by the first and the third and by the second e terza tangente: quindi tutti questi angoli sono retti, come ci eravamo proposti a dimostrare.

La precedente dimostrazione prova altresì che le rette passanti pel punto (a, b, c) nello stato antecedente (le cui molecole si misero poi nello stato reale sulle linee di massima e minima condensazione relativamente al punto (x, y, z)) formavano anch'esse fra di loro angoli retti. Infatti , oltre le tre equazioni

$$(67) \qquad \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 1; \quad \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 = 1; \quad \xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2 = 1;$$

tutte vere per effetto della (40), hanno luogo, come ultimamente abbiamo potuto persuaderci, anche le altre tre

$$(68) \qquad \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2 = 0; \quad \xi_1\xi_3 + \eta_1\eta_3 + \zeta_1\zeta_3 = 0; \quad \xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \zeta_2\zeta_3 = 0;$$

e la simultanea sussistenza di queste ultime sei equazioni prova l'ortogonalità delle tre rette : il che è notissimo.

CAPO V.

Assegnamento delle quantità fatte variare dalle forze interne dei sistemi, e idee più adequate intorno a tali forze.

30. Il concetto che Lagrange voleva ci formassimo delle forze, e che esponemmo nel prologo, è più generale di quello universalmente ammesso. S'intende facilmente da tutti essere la forza una causa che mediante la sua azione altera la grandezza di certe quantità. Nel caso più ovvio, avvicinando un corpo o un punto materiale ad un altro, cambia distanze, ossia fa variare lunghezze di linee rette: ma può invece far variare un angolo, una densità, ec. In questi altri casi il modo di agire delle forze ci riesce oscuro, mentre ci par chiaro nel primo: ma forse la ragione di ciò è estrinseca alla natura delle forze. Per verità anche in quel primo caso non si capisce come faccia la forza a infondere la sua azione nel corpo sì da diminuirne od accrescerne la distanza da un altro corpo: nondimeno noi vediamo continuamente il fatto: l'osservazione giornaliera sopisce in noi la voglia di cercare più in là. Se però sottilmente esaminando si trova che qui pure il modo di agire delle forze è misterioso, nessuna meraviglia ch'esso ci appaja oscuro negli altri casi. Voler ridurre in ogni caso l'azione delle forze a quella che diminuisce una distanza, è impiccolire un concetto più

and the third tangent are vanishing: therefore all these angles are right ones, as we intended to prove.

The previous demonstration also proves that the straight lines passing through point (a, b, c) in the antecedent state (whose molecules, then, placed themselves in the real state to form the lines of maximum and minimum condensation relatively to point (x, y, z)) were also forming between themselves right angles. Indeed, together with equations

$$\text{(67)} \qquad \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 1; \quad \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 = 1; \quad \xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2 = 1;$$

which are all true because of (40), also the following three hold, as we could persuade ourselves by the previous last reasonings,

$$\text{(68)} \qquad \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2 = 0; \quad \xi_1\xi_3 + \eta_1\eta_3 + \zeta_1\zeta_3 = 0; \quad \xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \zeta_2\zeta_3 = 0;$$

and the simultaneous validity of these last six equations proves the orthogonality of the three straight lines: and this is well-known.

CAPO V.

Assignment of the quantities which are varied by the inner forces of systems, and more suitable ideas about such forces.

30. The concept that Lagrange wanted us to figure about forces, and which we presented in the foreword, is more general than the universally accepted one. It is easily understood by everybody that the force is a cause which, by its action, changes the magnitude of certain quantities. In the most obvious case, when it brings a body or a material point close to another, it changes distances, that is, it makes lengths of straight lines to vary: but it may instead make an angle, a density, and so on, change. In these other cases the way forces act remains obscure, while it seems clear to us in the first case: but maybe the reason of this is extrinsic to the nature of the forces. Indeed, even in that first case we do not understand how the force can instill its action in the body so that it decreases or increases the distance from another body: nevertheless, we continuously see the fact: daily observation quells in us the will to search further. If, then, carefully investigating, we find that also here the way forces act is mysterious, no wonder that it appears obscure to us in the other cases. Wishing to reduce the action of forces to that decreasing a distance is making a wider concept

vasto, è un non voler riconoscere che una classe particolare di forze. Generalmente parlando, a qual punto possono essere spinte le nostre cognizioni intorno alle cause che sottoponiamo a misura? forse a comprenderne l'intima natura, e il vero modo con cui agiscono? mainò. Scriveva Newton: *Caveat lector ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quæ sunt puncta mathematica) vires vere et physice tribuere, si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero* (Princ. Math. I., 1.$^{\circ}$, Def. VIII in fine). Radunato tutto quanto vi è d'incognito nelle unità di misura di una stessa specie, noi diciamo di conoscere la quantità, lorché possiamo assegnare i rapporti colla detta unità assunta originariamente arbitraria. Ora eziandio quando si concepiscono le forze alla maniera più generale di Lagrange, cioè siccome cause che fanno variare quantità talvolta diverse dalle linee, concorrono i dati necessari a poter dire che sappiamo misurarle: si ha tutto ciò che ragionevolmente ci è lecito di pretendere: se pare che ci manchi l'immagine con che rivestirne il concetto, è perché vogliamo colorirla come nel caso particolare delle forze che agiscono lungo le rette: un fondo incognito rimane sempre tanto in questi casi più generali, come in quello sì comune.

Per ajutare questa convinzione facciamo due considerazioni sull'andamento del metodo lagrangiano. In esso si dice: se f, φ, ψ, ec. sono quantità che le forze tendono a far variare, debbono introdursi nell'equazione generale meccanica i termini $\lambda\,\delta f$, $\mu\,\delta\varphi$, $\nu\,\delta\psi$, ec., e i coefficienti λ, μ, ν, ec. significheranno e misureranno quelle forze. Si capisce un cotal poco la ragionevolezza di questa asserzione, giacché supposto che quelle forze non vi fossero, quei termini non comparirebbero, ossia le λ, μ, ν, ec. sarebbero zero: provato adunque che essi termini debbano comparirvi, e a qual modo, s'intravede che quei coefficienti debbono in qualche maniera comprendere l'espressione delle forze (vedi anche il già detto nella prima parte del n. 56 m. p.). Ma la considerazione più atta a persuaderci di ciò è che tali coefficienti λ, μ, $\nu\ldots$ entrano nella equazione generale della Meccanica in dimensione lineare: dal che deriva che possiamo averne i multipli e semimultipli, posta a base dei rapporti una di esse forze arbitrariamente.

Infatti, se si trattasse di una forza che obbliga un punto del corpo a stare sopra una superficie di equazione $L = 0$, sappiamo indipendentemente dal principio discusso in questa Memoria, che nell'equazione generale entra il termine $\lambda\,\delta L$, e che λ è proporzionale ala pressione, la quale in tal caso è una forza che agisce lungo una retta. La λ, entrando linearmente, si raddoppia , si triplica, ec., ovvero diventa la metà, il terzo, ec., se tutti gli altri termini dell'equazione sono moltiplicati per 2, 3, ec., ovvero per $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ec. Ebbene:

smaller, is wishing to recognize but a particular class of forces. Generally speaking, to which point may we push our knowledge about the causes we submit to measure? Maybe so that we understand their intimate nature, and the true way in which they act? Never. Newton wrote: *Caveat lector ne per hujusmodi voces cogitet me speciem vel modum actionis causamve aut rationem physicam alicubi definire, vel centris (quœ sunt puncta mathematica) vires vere et physice tribuere, si forte aut centra trahere, aut vires centrorum esse dixero*(NDT) (Princ. Math. I, 1st, Def. VIII at the end). Once we have collected all what is unknown in the measure units of the same kind, we say we know the quantity when we may assign the ratios with the said unit, which is originally assumed to be arbitrary. Now, even when we conceive forces in Lagrange's most general way, that is, as causes making quantities sometimes different from lines to vary, the necessary data to be able to say that we know how to measure them contribute: we have all what we reasonably may pretend: if it seems that the image by which we dress to the concept is missing, this is because we want to paint it like in the particular case of forces acting along straight lines: an unknown background remains, in these more general cases as well as in the most common one.

To strengthen this persuasion, let us make two considerations on the procedure of the Lagrangian method. In it one says: if f, φ, ψ, and so on are quantities that forces tend to vary, we must introduce in the mechanical general equation the terms $\lambda\,\delta f$, $\mu\,\delta\varphi$, $\nu\,\delta\psi$, and so on, and coefficients λ, μ, ν, and so on will mean and measure those forces. We easily understand the plausibility of this assertion, since if we suppose that those forces were not present, those terms would not appear, that is, λ, μ, ν, and so on would be zero: thus once we have proved that such terms shall be present there, and in which way, we glimpse that those coefficients shall in some way encompass the expression of the forces (see also what we already said in the first part of sect. 56 p. m.). But the more suitable consideration to persuade us of this is that those coefficients λ, μ, $\nu\ldots$ enter the general equation of Mechanics in a linear way: from which derives that we may have their multiples and half-multiples, once we have posed one of those forces arbitrarily as the basis for such ratios.

Indeed, if we dealt with a force compelling a point of the body to lie on a surface with equation $L = 0$, we know, regardless of the principle discussed in this Memoir, that the term $\lambda\,\delta L$ enters the general equation, and that λ is proportional to the pressure, which in that case is a force acting along a straight line. The λ term, entering linearly, is doubled, tripled, and so on, or becomes one half, one third, and so one, if all other terms of the equation are multiplied by 2, 3, and so on, or by $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, and so on. Well:

(NDT)English translation by Andrew Motte, 1729: Wherefore, the reader is not to imagine, that by those words, I anywhere take upon me to define the kind, or the manner of any action, the causes or the physical reason thereof, or that I attribute forces, in a true and physical sense, to certain centres (which are only mathematical points); when at any time I happen to speak of centres as attracting, or as endued with attractive powers.

la cosa procede allo stesso modo anche quando λ è un fattore introdotto in forza del principio esposto nella M. A. al § 1.º, Sez. II. Di qui può spiegarsi in qualche guisa quello che Lagrange ha voluto intendere, allorché nel luogo citato appoggiò il suo nuovo principio col dire che una quantità qualunque può essere rappresentata per una linea: forse così si espresse perché la misura delle forze si ottiene egualmente tanto adottando il senso più ampio di cui si è detto, quanto nell'accettazione comune di una forza che agisce lungo una linea. Del resto il nostro Autore si è provato (art. 5, Sez. IV) a ridurre in ogni caso il concetto di una forza a quello di pressioni lungo rette perpendicolari a superficie: e a sole forze agenti linearmente riescono anche le nostre considerazioni sulle azioni molecolari esposte nel Capo VI m. p., e nel Capo III della Memoria presente. Io però non cesso di reputare bellissime e assai utili le viste che il nostro Autore ci aperse collo stabilire il principio difeso in questa Memoria. Sia pure che restasse qualche cosa a fare per riconoscere quali e quante dovevano essere le funzioni da adoperarsi onde applicare con sicurezza il principio anzidetto: ciò nulla toglie al merito di aver allargate le nostre idee intorno alle forze.

E torna qui opportuno osservare un'analogia coll'andamento che si tiene per la misura di alcune quantità proprie della fisica matematica. Chiamata, per esempio, unità di calore la quantità di quella causa, qualunque essa sia, che produce un fenomeno determinato, qual è la fusione di una nota quantità di ghiaccio: diciamo doppia, tripla, ec., la quantità di calore che produce il fenomeno doppio, o triplo, cioè lo scioglimento di una doppia, tripla quantità di ghiaccio. Ma ci formiamo noi una immagine del modo col quale quella unità di calore produce il fenomeno unitario? Io credo di no: e quantunque tentassimo formarcela, certo non sarebbe l'accorciamento di una retta. Similmente nel caso nostro il fenomeno che raccoglie l'effetto della forza, invece del sopradetto, è il restringersi di un angolo, il costiparsi di una densità, ec.: l'ignoranza sul modo d'agire della causa non toglie il poterla misurare.

31. Qui qualcuno mi obbietterà. — Quand'anche ci adattassimo ad ammettere queste forze che agiscono per far variare quantità che non sono linee, vorremmo almeno che queste quantità sostenessero la rappresentazione di cose conosciute: voi invece ci presentate tali forze come quelle che fanno variare i tre trinomj α, β, γ pei sitemi lineari (equazioni (6) n. 13): i sei trinomj α, ε, ϑ, κ, ς, ω pei sistemi superficiali (equazioni (23) num. 46), e i sei $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$, pei sistemi a tre dimensioni (equazioni (45) n. 25); ora tutti que' trinomj sono quantità puramente analitiche, alle quali non si sa qual significato attribuire: se non abbiamo un'immagine neanche per quelle quantità che subiscono l'effetto delle forze, si fa sempre più bujo il concetto

things go the same way also when λ is a factor introduced by virtue of the principle expounded in the A. M. in § 1^{st}, Sect. II. From here we may somehow explain what Lagrange meant, when in the aforementioned place he founded his new principle by saying that any quantity may be represented by a line: maybe he expressed himself in this way because the measure of forces is equally obtained as by adopting the wider sense we have said, as in the common acceptation of a force acting along a line. Moreover, our Author tried (art. 5, Sect. IV) to reduce in any case the concept of force to that of pressures acting along straight lines perpendicular to surfaces: and also our considerations on molecular actions expounded in Capo VI p. m., and in Capo III of the present Memoir reduce to forces acting only linearly. However, I do not give up considering wonderful and very useful the sights that our Author opened to us by establishing the principle supported in this Memoir. Even if something remained to do to recognize which and how many should be the functions to adopt in order to apply with certainty the above said principle: this does not detract the merit of having widened our ideas about forces.

It is appropriate here to remark an analogy with what one has for measuring some quantities which are relevant to mathematical physics. For instance, if we call unit of heat the amount of that cause, whatever it be, which produces a determined phenomenon, such as the fusion of a known amount of ice: we say double, triple, and so on, the quantity of heat producing the double, or triple, phenomenon, that is, the melting of a double, triple amount of ice. However, do we paint us an image of the way that unit of heat produces the unit phenomenon? I believe not: and, though we tried to do it, for sure it were not the shortening of a straight line. Similarly in our case the phenomenon collecting the effect of the force, instead of the above said, is the shrinking of an angle, the thickening of a density, and so on; the ignorance about the way of acting of a cause does not affect the possibility to measure it.

31. Here someone will object. — Even when we would admit that these forces making quantities that are not straight lines to vary, we would like at least that these quantities supported the representation of known things: on the contrary you introduce us those forces as those that make the three trinomials α, β, γ vary for linear systems (equations (6) sect. 13): the six trinomials α, ε, ϑ, κ, ς, ω for superficial systems (equations (23) sect. 46), and the six [quantities] $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$, for the three-dimensional systems (equations (45) sect. 25); now, all those trinomials are purely analytical quantities, and we do not know which meaning to assign them: if we do not have an image even for those quantities that undergo the effect of forces, the concept

che ci vorreste insinuare. — Rispondo: la domanda è giusta, e a soddisfarvi vale il seguito di questo Capo, ove mostrerò che invece di que' trinomj si possono assumere quantità rivestite di una rappresentazione geometrica e qualche volta anche fisica.

Incominciando dai sistemi lineari, osservo che invece del trinomio

$$\frac{1}{2}\lambda\,\delta\alpha + \frac{1}{2}\mu\,\delta\beta + \frac{1}{2}\nu\,\delta\gamma \quad \text{(equazione (8) n. 7)} \tag{1}$$

possiamo adottare quest'altro

$$p\,\delta f + q\,\delta\varphi + r\,\delta\psi \tag{2}$$

essendo f, φ, ψ tre funzioni delle α, β, γ, e delle loro derivate rispetto ad a di primo e second'ordine, come segue:

$$\begin{aligned} &f = f(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \quad ; \quad \varphi = \varphi(\alpha,\, \beta,\, \gamma, \alpha',\, \beta',\, \gamma') \\ &\psi = \psi(\alpha,\, \beta,\, \gamma, \alpha',\, \beta',\, \gamma', \alpha'',\, \beta'',\, \gamma'')\ . \end{aligned} \tag{3}$$

Infatti il trinomio (2) sviluppato diventa

$$\begin{aligned} & pf'(\alpha)\delta\alpha + pf'(\beta)\delta\beta + pf'(\gamma)\delta\gamma \\ + \ & q\varphi'(\alpha)\delta\alpha + q\varphi'(\beta)\delta\beta + q\varphi'(\gamma)\delta\gamma \\ & + q\varphi'(\alpha')\delta\alpha' + q\varphi'(\beta')\delta\beta' + q\varphi'(\gamma')\delta\gamma' \\ + \ & r\psi'(\alpha)\delta\alpha + r\psi'(\beta)\delta\beta + r\psi'(\gamma)\delta\gamma \\ & + r\psi'(\alpha')\delta\alpha' + r\psi'(\beta')\delta\beta' + r\psi'(\gamma')\delta\gamma' \\ & + r\psi'(\alpha'')\delta\alpha'' + r\psi'(\beta'')\delta\beta'' + r\psi'(\gamma'')\delta\gamma''\ . \end{aligned} \tag{4}$$

Col solito metodo di trasformazione proviamo essere identicamente

$$\begin{aligned} q\varphi'(\alpha')\delta\alpha' + q\varphi'(\beta')\delta\beta' + q\varphi'(\gamma')\delta\gamma' = \ & -[q\varphi'(\alpha')]'\delta\alpha - [q\varphi'(\beta')]'\delta\beta - [q\varphi'(\gamma')]'\delta\gamma \\ & + [q\varphi'(\alpha')\delta\alpha + q\varphi'(\beta')\delta\beta + q\varphi'(\gamma')\delta\gamma]'\ . \end{aligned}$$

e affatto similmente si trasforma anche il trinomio

$$r\psi'(\alpha')\delta\alpha' + r\psi'(\beta')\delta\beta' + r\psi'(\gamma')\delta\gamma'\ .$$

Il trinomio poi

$$r\psi'(\alpha'')\delta\alpha'' + r\psi'(\beta'')\delta\beta'' + r\psi'(\gamma'')\delta\gamma''$$

you would like to suggest us gets always darker. — I answer: the question is right, and the rest of this Capo, where I will show that, in the place of those trinomials, we may assume quantities dressed up with a geometrical, sometimes even physical, representation serves to satisfy it.

Starting from linear systems, I observe that, instead of the trinomial

$$\frac{1}{2}\lambda\,\delta\alpha+\frac{1}{2}\mu\,\delta\beta+\frac{1}{2}\nu\,\delta\gamma \quad \text{(equation (8) sect. 7)} \tag{1}$$

we may adopt this other one

$$p\,\delta f+q\,\delta\varphi+r\,\delta\psi \tag{2}$$

f, φ, ψ being three functions of the α, β, γ, and of their first and second order derivatives with respect to a, as it follows:

$$\begin{aligned} &f=f(\alpha,\,\beta,\,\gamma) \quad ; \quad \varphi=\varphi(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\alpha',\,\beta',\,\gamma') \\ &\psi=\psi(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\alpha',\,\beta',\,\gamma',\alpha'',\,\beta'',\,\gamma'')\ . \end{aligned} \tag{3}$$

Indeed, trinomial (2), once developed, becomes

$$\begin{aligned} & pf'(\alpha)\delta\alpha+pf'(\beta)\delta\beta+pf'(\gamma)\delta\gamma \\ + \ & q\varphi'(\alpha)\delta\alpha+q\varphi'(\beta)\delta\beta+q\varphi'(\gamma)\delta\gamma \\ & +q\varphi'(\alpha')\delta\alpha'+q\varphi'(\beta')\delta\beta'+q\varphi'(\gamma')\delta\gamma' \\ + \ & r\psi'(\alpha)\delta\alpha+r\psi'(\beta)\delta\beta+r\psi'(\gamma)\delta\gamma \\ & +r\psi'(\alpha')\delta\alpha'+r\psi'(\beta')\delta\beta'+r\psi'(\gamma')\delta\gamma' \\ & +r\psi'(\alpha'')\delta\alpha''+r\psi'(\beta'')\delta\beta''+r\psi'(\gamma'')\delta\gamma''\ . \end{aligned} \tag{4}$$

By the usual method of transformation we prove to be identically

$$\begin{aligned} q\varphi'(\alpha')\delta\alpha'+q\varphi'(\beta')\delta\beta'+q\varphi'(\gamma')\delta\gamma' = \ & -[q\varphi'(\alpha')]'\delta\alpha-[q\varphi'(\beta')]'\delta\beta-[q\varphi'(\gamma')]'\delta\gamma \\ & +[q\varphi'(\alpha')\delta\alpha+q\varphi'(\beta')\delta\beta+q\varphi'(\gamma')\delta\gamma]'\ . \end{aligned}$$

and, similarly at all, transforms also the trinomial

$$r\psi'(\alpha')\delta\alpha'+r\psi'(\beta')\delta\beta'+r\psi'(\gamma')\delta\gamma'\ .$$

Then, the trinomial

$$r\psi'(\alpha'')\delta\alpha''+r\psi'(\beta'')\delta\beta''+r\psi'(\gamma'')\delta\gamma''$$

si trova identico colla quantità

$$\begin{aligned}&[r\psi'(\alpha'')]''\delta\alpha+[r\psi'(\beta'')]''\delta\beta+[r\psi'(\gamma'')]''\delta\gamma\\&-\{[r\psi'(\alpha'')]'\delta\alpha+[r\psi'(\beta'')]'\delta\beta+[r\psi'(\gamma'')]'\delta\gamma\}'\\&+r\psi'(\alpha'')\delta\alpha'+r\psi'(\beta'')\delta\beta'+r\psi'(\gamma'')\delta\gamma'\end{aligned}$$

talché ponendo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\lambda&=pf'(\alpha)+q\varphi'(\alpha)+r\psi'(\alpha)-[q\varphi'(\alpha')]'-[r\psi'(\alpha')]'+[r\psi'(\alpha'')]''\\\frac{1}{2}\mu&=pf'(\beta)+q\varphi'(\beta)+r\psi'(\beta)-[q\varphi'(\beta')]'-[r\psi'(\beta')]'+[r\psi'(\beta'')]''\\\frac{1}{2}\nu&=pf'(\gamma)+q\varphi'(\gamma)+r\psi'(\gamma)-[q\varphi'(\gamma')]'-[r\psi'(\gamma')]'+[r\psi'(\gamma'')]''\end{aligned}\tag{5}$$

tutta la quantità (4) si riduce alla forma

$$\frac{1}{2}\lambda\,\delta\alpha+\frac{1}{2}\mu\,\delta\beta+\frac{1}{2}\nu\,\delta\gamma+\Delta'\quad;\tag{6}$$

essendo Δ' una derivata esatta relativamente alla a: è facile assegnare la quantità equivalente alla Δ, ma per le considerazioni attuali non ci fa bisogno.

Introdotta la quantità (6) invece del trinomio (2) nella equazione meccanica sotto il segno integrale, l'ultimo termine Δ' fornisce una parte che si versa ai limiti, ma nulla influisce sulle equazioni generali che si riferiscono a tutti i punti del sistema. Sotto quel segno integrale rimane un trinomio della stessa forma del trinomio (1), ove $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{2}\mu$, $\frac{1}{2}\nu$ hanno i valori (5).

Adunque la sostituzione del trinomio (2) al trinomio (1) può ammettersi, purché le funzioni f, φ, ψ siano fatte come si è esposto nelle (3): allora si ha il vantaggio che le dette funzioni f, φ, ψ possono essere di quelle a cui sappiamo attribuire una rappresentazione geometrica o fisica.

Passiamo a vedere che appunto la proprietà scritta per mezzo delle (3) si verifica nelle tre funzioni f, φ, ψ assunte da Lagrange ed altri autori siccome quelle che sono fatte variare dalle tre forze interne de' sistemi lineari denominate tensione, elasticità e torsione.

Lagrange nella Sez. V della M. A., Parte I, art. 31, introduce la tensione quale forza che tende a diminuire la grandezza s' dell'elemento dell'arco della curva. Ora $s'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\sqrt{\alpha}$; dunque in questo caso attribuendo alla tensione il primo termine del trinomio (2), abbiamo

$$f=\sqrt{\alpha}\;;\tag{7}$$

is found to be identical with this quantity

$$[r\psi'(\alpha'')]''\delta\alpha + [r\psi'(\beta'')]''\delta\beta + [r\psi'(\gamma'')]''\delta\gamma$$
$$-\{[r\psi'(\alpha'')]'\delta\alpha + [r\psi'(\beta'')]'\delta\beta + [r\psi'(\gamma'')]'\delta\gamma\}'$$
$$+r\psi'(\alpha'')\delta\alpha' + r\psi'(\beta'')\delta\beta' + r\psi'(\gamma'')\delta\gamma'$$

so that, posing

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\lambda &= pf'(\alpha) + q\varphi'(\alpha) + r\psi'(\alpha) - [q\varphi'(\alpha')]' - [r\psi'(\alpha')]' + [r\psi'(\alpha'')]'' \\
\frac{1}{2}\mu &= pf'(\beta) + q\varphi'(\beta) + r\psi'(\beta) - [q\varphi'(\beta')]' - [r\psi'(\beta')]' + [r\psi'(\beta'')]'' \\
\frac{1}{2}\nu &= pf'(\gamma) + q\varphi'(\gamma) + r\psi'(\gamma) - [q\varphi'(\gamma')]' - [r\psi'(\gamma')]' + [r\psi'(\gamma'')]''
\end{aligned} \tag{5}$$

the whole quantity (4) reduces to the form

$$\frac{1}{2}\lambda\,\delta\alpha + \frac{1}{2}\mu\,\delta\beta + \frac{1}{2}\nu\,\delta\gamma + \Delta' \quad ; \tag{6}$$

Δ' being an exact derivative with respect to a: it is easy to assign a quantity equivalent to Δ, but for the present considerations we do not need this.

Introduced the quantity (6), instead of the trinomial (2), in the mechanical equation under the integral sign, the last term Δ' provides a part that lives at the limits, but does not affect at all the general equations that refer to all points of the system. Under that integral sign a trinomial remains of the same form of trinomial (1), where $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{2}\mu$, $\frac{1}{2}\nu$ have the values (5).

Thus, the substitution of trinomial (2) into trinomial (1) may be admitted, provided that functions f, φ, ψ are constructed in the way we presented in the (3): then we have the advantage that the said functions f, φ, ψ may be of the [same] kind to which we are able to assign a geometrical or physical representation.

Let us move to see that, indeed, the property written by means of the (3) is verified in the three functions f, φ, ψ assumed by Lagrange and other authors as those which are varied by the three inner forces of linear systems called tension, elasticity, and torsion.

Lagrange in the Sect. V of the A. M., Part I, art. 31, introduces tension as the force tending to diminish the magnitude s' of the arc element of a curve. Now, $s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\alpha}$; thus, in this case, by attributing to the tension the first term of the trinomial (2), we have

$$f = \sqrt{\alpha} \;; \tag{7}$$

ed è questa la forma della funzione $f(\alpha, \beta, \gamma)$ che lasciammo indeterminata nella prima delle (3).

Al n. 46 della Sezione suddetta il nostro Autore introduce la seconda forza interna nominata elasticità, che dice esercitarsi a far variare l'angolo e di contingenza, ossia la funzione

$$e = \frac{1}{s'}\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2} \quad . \tag{8}$$

Ora, secondo le nostre denominazioni, il trinomio $x''^{\,2} + y''^{\,2} + z''^{\,2}$ è la β; ed essendo $s' = \sqrt{\alpha}$, abbiamo derivando, $s'' = \frac{\alpha'}{2\sqrt{\alpha}}$. Pertanto, chiamata φ la precedente funzione esprimente l'angolo di contingenza, essa dopo le sostituzioni assume la forma

$$\varphi = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{4\alpha\beta - \alpha'^2} \quad ; \tag{9}$$

ed è questa la seconda delle (3) presentemente determinata. Più difficile riesce a dimostrare la proprietà caratteristica del ridursi ad una funzione delle α, β, γ e loro derivate, nella terza quantità ψ esprimente l'angolo di torsione che i signori Binet e Bordoni presero per la funzione fatta variare dalla terza delle suddette forze interne. I citati autori trovarono (vedi Tom. XIX degli Atti della Società Italiana pag. 1) che la ψ ha l'espressione

$$\psi = s'\frac{(y'z'' - z'y'')x''' + (z'x'' - x'z'')y''' + (x'y'' - y'x'')z'''}{(x'y'' - y'x'')^2 + +(z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2} \quad ; \tag{10}$$

e sarebbe assai lungo mostrarla composta come è indicato nella terza delle (3), se non avessimo già eseguito al n. 14 un calcolo sulla quantità colà denominata D, del quale possiamo qui approfittare. Osservisi quel valore di D scritto ivi nella equazione (13), e si vedrà a colpo d'occhio che si può anche scrivere senza alterazione

$$D = (y'z'' - z'y'')x''' + (z'x'' - x'z'')y''' + (x'y'' - y'x'')z''' \quad ,$$

ciò non importando che un diverso ordinamento di termini. Sotto tal forma compare eguale al numeratore nel secondo membro della (10): e posto mente che il denominatore nella stessa (10) per nota trasformazione (equazione (30) n. 67 m. p.) eguaglia

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2$$

and this is the form of function $f(\alpha, \beta, \gamma)$ that we left undetermined in the first one of the (3).

In sect. 46 of the above said Section our Author introduces the second inner force, named elasticity, that he says to act so to let the angle e of contingence vary, that is the function

$$e = \frac{1}{s'}\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2} \quad . \tag{8}$$

Now, according to our definitions, the trinomial $x''^2 + y''^2 + z''^2$ is β; and, being $s' = \sqrt{\alpha}$, we have, by computing the derivative, $s'' = \frac{\alpha'}{2\sqrt{\alpha}}$. Therefore, if we call φ the preceding function, expressing the angle of contingence, after the substitutions it assumes the form

$$\varphi = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{4\alpha\beta - \alpha'^2} \quad ; \tag{9}$$

and this is the second of the (3) determined at the present time. It results more difficult to show the characteristic property of reducing to a function of the α, β, γ and of their derivatives, in the third quantity ψ expressing the angle of torsion, that Messrs. Binet and Bordoni took for the function made to be varied by the third of the above said inner forces. The quoted authors found (see Tome XIX of the Atti della Società Italiana p. 1) that ψ has the expression

$$\psi = s'\frac{(y'z'' - z'y'')x''' + (z'x'' - x'z'')y''' + (x'y'' - y'x'')z'''}{(x'y'' - y'x'')^2 + +(z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2} \quad ; \tag{10}$$

and it would be very long to prove it as it is indicated in the third of the (3), had we not already performed in sect. 14 a calculation on the quantity there named D, of which we can take advantage here. Let us consider that value of D written there in equation (13), and we will see at a glance that it may also be written without alteration

$$D = (y'z'' - z'y'')x''' + (z'x'' - x'z'')y''' + (x'y'' - y'x'')z''' \quad ,$$

since it does not imply other than a different ordering of terms. Under such a shape it appears equal to the denominator in the right-hand side of (10): and, keeping in mind that the denominator in the same (10), by a known transformation (equation (30) sect. 67 p. m.), it equals

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2$$

ossia $\alpha\beta - \frac{1}{4}\alpha'^2$: richiamata l'equazione (20) n. 14 troveremo

$$(11) \qquad \psi = \frac{2\sqrt{\alpha}}{4\alpha\beta - \alpha'^2}\sqrt{4\alpha\beta\gamma + \alpha\beta'(\alpha'' - 2\beta) - \alpha\beta'^2 - \beta(\alpha'' - 2\beta)^2 - \gamma\alpha'^2} \quad :$$

espressione ove si vede assegnata l'ultima delle funzioni (3). Il sig. Bordoni ci ha insegnato (vedi luogo succitato) a determinare le tre forze interne dei sistemi lineari qui designate nel trinomio (2) per mezzo delle lettere p, q, r. Colle sue espressioni, con quelle superiormente scritte nelle (7), (9), (11), e col sussidio delle equazioni (5), diventano assegnabili anche le λ, μ, ν. Se poi piacesse avere i trinomj α, β, γ espressi per le tre funzioni f, φ, ψ, la ricerca non sarebbe difficile cercando le inverse delle equazioni (7), (9), (11), e si otterrebbero

$$(12) \qquad \begin{aligned} \alpha &= f^2 \\ \beta &= f^2\varphi^2 + f'^{\,2} \\ \gamma &= f^2\varphi^2\psi^2 + (2\varphi f' + f\varphi')^2 + \left(f' - f\varphi^2\right)^2 \quad . \end{aligned}$$

Noteremo che non sempre si considerano nelle questioni relative ai sistemi lineari tutte e tre le forze interne p, q, r ; per esempio, nella teorica ordinaria delle corde vibranti non si ammette che la prima, sebbene ciò si faccia poco lodevolmente, come spero mostrare a suo luogo. Se manca alcuna delle p, q, r , mancano alcuni termini nei valori (5) delle λ, μ, ν , ma si conserva la forma del trinomio (1); viceversa introducendo alcuna di queste forze dapprima ommessa, viene essa a portare nuovi termini nei valori delle anzidette λ, μ, ν . Aggiungeremo quest'altra osservazione. Invece di dire relativamente alla tensione essere una forza che agisce sull'elemento dell'arco, possiamo dire essere una forza che agisce sulla densità: infatti vedemmo (n. 11 equazione (16) m. p.) che la densità lineare è espressa da $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Potevamo quindi prendere per la prima delle (3), invece della (7), la $f = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Non sempre adunque le quantità che noi immaginiamo subire l'azione delle forze interne sono geometriche: possono ricevere anche una rappresentazione fisica.

32. Mi riuscì più laborioso lo estendere le stesse vedute anche ai sistemi superficiali, il trovare cioè sei quantità rivestite di una rappresentazione geometrica che le sei forze interne tendano a far variare, e che (come dicemmo più sopra pel caso analogo de' sistemi lineari) possano essere sostituite a' sei trinomj α, ε, ϑ, κ, ς, ω, essendo funzioni di essi e delle loro derivate per a o per b. Ciò tanto più in quanto che questa materia è nuova, essendo assai incompleto tutto quello che se ne è detto finora; non è il caso come pe' sistemi

that is $\alpha\beta - \frac{1}{4}\alpha'^2$: once we have recalled equation (20) sect. 14, we will find

$$\psi = \frac{2\sqrt{\alpha}}{4\alpha\beta - \alpha'^2}\sqrt{4\alpha\beta\gamma + \alpha\beta'(\alpha'' - 2\beta) - \alpha\beta'^2 - \beta(\alpha'' - 2\beta)^2 - \gamma\alpha'^2} \quad : \tag{11}$$

expression where we find it has been assigned the last of functions (3). Mr. Bordoni taught us (see the above said quote) how to determine the three inner forces of linear systems, here denoted in the trinomial (2) by means of the letters p, q, r. By his expressions, by those written above in the (7), (9), (11), and by the help of equations (5), also λ, μ, ν become assignable. Then, if we would like to have the trinomials α, β, γ expressed by the three functions f, φ, ψ, the search would not be difficult by looking for the inverse of equations (7), (9), (11), and we would obtain

$$\begin{aligned} \alpha &= f^2 \\ \beta &= f^2\varphi^2 + f'^{\,2} \\ \gamma &= f^2\varphi^2\psi^2 + (2\varphi f' + f\varphi')^2 + \left(f' - f\varphi^2\right)^2 \quad . \end{aligned} \tag{12}$$

We will remark that we not always consider all three inner forces p, q, r in the issues which are relevant to linear systems; for instance, in the ordinary theory of vibrating strings we admit but the first one, although this is done little commendably, as I hope I will show in the proper place. If any of the p, q, r is missing, some of the terms in the values (5) of the λ, μ, ν are missing, but the form of the trinomial (1) is preserved; on the other hand, by introducing any of these forces which are omitted at first, the same comes to bring new terms in the values of the above said λ, μ, ν. We will add this other remark. About tension, instead of saying it to be a force acting on the element of arc, we may say it to be a force acting on density: indeed, we saw (sect. 11 equation (16) p. m.) that linear density is expressed by $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. We could so take for the first of the (3), instead of the (7), $f = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Not always, then, the quantities that we imagine to undergo the action of inner forces are geometrical: they may also get a physical representation.

32. I found it more difficult to extend also to superficial systems the same views, that is, to find six quantities, covered by a geometrical representation, that the six inner forces tend to vary, and that (as we said above for the analogous case of linear systems) may took the place of the six trinomials α, ε, ϑ, κ, ς, ω, being functions of them and of their derivatives with respect to a or b. All the more so as this subject is new, being incomplete all that has been said about it until now; it is not the case as for linear systems,

lineari, pei quali le tre forze di tensione, di elasticità e di torsione erano conosciute, e conosciute insieme le funzioni ch'esse tendono a far variare. Nondimeno, stanti le premesse che ci siamo preparate nel Capo precedente, si può conseguire pienamente l'intento, si possono cioè assegnare le sei quantità geometriche domandate.

Richiamiamo quanto si è detto al n. 23, e delle infinite curve che possiamo intendere tracciate sulla superficie e passanti pel punto (x, y, z), ove vengono a collocarsi nello stato reale le molecole che dapprima erano in tante linee rette, consideriamone due, alle quali corrispondono i coseni ξ_1, η_1 per l'una e ξ_2, η_2 per l'altra: coseni che uno per coppia si ritengono arbitrarii. Vedemmo (n. 24, equazione (24)) che i quadrati degli elementi dei due archi delle curve a partire dal punto (x, y, z) sono

$$\tau_1 = \alpha\xi_1^2 + 2\varepsilon\xi_1\eta_1 + \vartheta\eta_1^2 \ ; \quad \tau_2 = \alpha\xi_2^2 + 2\varepsilon\xi_2\eta_2 + \vartheta\eta_2^2 \tag{13}$$

e che il coseno dell'angolo compreso dalle loro tangenti concorrenti in quel punto comune è (espressione (19) ivi)

$$\tau_3 = \frac{\alpha\xi_1\xi_2 + \varepsilon\,(\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2) + \vartheta\eta_1\eta_2}{\sqrt{\tau_1\tau_2}} \ . \tag{14}$$

Per le tre prime adunque delle sei forze interne possiamo intendere quelle che tendono a far variare gli elementi dei due archi suddetti e l'angolo piano compreso dalle loro tangenti, e invece della parte $\lambda\,\delta\alpha \ + \ \mu\,\delta\vartheta \ + \ \nu\,\delta\varepsilon$ del sestinomio scritto nel secondo membro della (40) n. 18 introdurre il trinomio $p\,\delta\tau_1 \ + \ q\,\delta\tau_2 \ + \ r\,\delta\tau_3$ essendo p, q, r le tre forze che tendono a far variare le tre quantità τ_1, τ_2, τ_3 . Infatti è facile, sostituendo alle variate $\delta\tau_1, \delta\tau_2, \delta\tau_3$ i valori desunti dalle (13), (14), senza toccare le arbitrarie $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$, ridurre il secondo trinomio alla forma del primo, e quindi dal confronto dei coefficienti di $\delta\alpha, \delta\vartheta, \delta\varepsilon$ dedurre le λ, μ, ν date per le p, q, r , e viceversa. Avverto però che sifatti valori di λ, μ, ν acquistano altri termini portati dalle altre tre forze interne, come qui appresso.

Le tre funzioni τ_1, τ_2, τ_3 che queste tre prime forze p, q, r tendono a far variare diventano assai semplici funzioni di $\alpha, \vartheta, \varepsilon$ quando si prendono per le due curve le due particolari di cui si è discorso al principio del Capo precedente, per le quali $\xi_1 = 1, \eta_1 = 0$; $\xi_2 = 0, \eta_2 = 1$: allora infatti abbiamo

$$\tau_1 = \alpha \ ; \quad \tau_2 = \vartheta \ ; \quad \tau_3 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha\vartheta}} \ . \tag{15}$$

Osserveremo poi, analogamente al già detto sul fine del num. precedente, che for which the three inner forces of tension, elasticity, and torsion were known, and together were known the functions that they tend to vary. Nevertheless, given the premises that we got ready for ourselves in the preceding Capo, we can fully pursue the objective, that is, we can assign the required six geometrical quantities.

Let us recall what we said in sect. 23, and, among the innumerable curves that we may imagine drawn over the surface and passing through point (x, y, z), where come to be located in the real state the molecules that before were along many straight lines, let us consider two, to which correspond the cosines ξ_1, η_1 for former, and ξ_2, η_2 for latter: cosines which, one for each couple, we consider arbitrary. We saw (sect. 24, equation (24)) that the squares of the elements of the two arcs of the curves starting from point (x, y, z) are

$$\tau_1 = \alpha\xi_1^2 + 2\varepsilon\xi_1\eta_1 + \vartheta\eta_1^2 \; ; \quad \tau_2 = \alpha\xi_2^2 + 2\varepsilon\xi_2\eta_2 + \vartheta\eta_2^2 \tag{13}$$

and that the cosine of the angle included by their tangents concurring in that common point is (expression (19) there)

$$\tau_3 = \frac{\alpha\xi_1\xi_2 + \varepsilon\,(\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2) + \vartheta\eta_1\eta_2}{\sqrt{\tau_1\tau_2}} \; . \tag{14}$$

Therefore, we may understand the first three of the six inner forces as those tending to vary the elements of the two above said arcs and the plane angle included by their tangents, and, instead of the part $\lambda\,\delta\alpha \;+\; \mu\,\delta\vartheta \;+\; \nu\,\delta\varepsilon$ of the sextinomial written in the right-hand side of the (40) sect. 18, to introduce the trinomial $p\,\delta\tau_1 \;+\; q\,\delta\tau_2 \;+\; r\,\delta\tau_3$, $p,\ q,\ r$ being the three forces tending to vary the three quantities $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3$. Indeed, it is easy, by substituting to the variations $\delta\tau_1,\ \delta\tau_2,\ \delta\tau_3$ the values deduced by the (13), (14), without altering the arbitrary $\xi_1,\ \eta_1,\ \xi_2,\ \eta_2$, to reduce the second trinomial to the form of the first one, and then, by the comparison of the coefficients of $\delta\alpha,\ \delta\vartheta,\ \delta\varepsilon$, to deduce $\lambda,\ \mu,\ \nu$ given by $p,\ q,\ r$, and vice versa. However, I warn that such values of $\lambda,\ \mu,\ \nu$ gain other terms brought by the other three inner forces, as [it will be shown] hereafter.

The three functions $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3$ that these three first forces $p,\ q,\ r$ tend to vary become very simple functions of $\alpha,\ \vartheta,\ \varepsilon$ when we choose the two curves to be the particular ones, of which we discussed at the beginning of the preceding Capo, for which $\xi_1 = 1,\ \eta_1 = 0$; $\xi_2 = 0,\ \eta_2 = 1$: indeed, we have then

$$\tau_1 = \alpha \; ; \quad \tau_2 = \vartheta \; ; \quad \tau_3 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha\vartheta}} \; . \tag{15}$$

We will then remark, analogously to what we already said at the end of the preceding section, that, invece di tre quantità geometriche potevamo per le $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3$ prendere tre quantità di fisico significato, cioè le due densità lineari lungo le linee anzidette relativamente al punto comune, e la densità superficiale per lo stesso punto $(x,\, y,\, z)$: difatti queste tre densità sono rappresentate dalle funzioni

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ ; \quad \frac{1}{\sqrt{\vartheta}}\ ; \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha\vartheta-\varepsilon^2}}$$

(vedi m. p. n. 11, 12, 67).

33. Per le altre tre forze interne (che designeremo per un momento colle lettere $s,\, v,\, u$) intenderemo quelle che tendono a far variare i due raggi dei cerchj osculatori alle due curve tenute ancora sulle generali, come nelle equazioni (13), (14), relativamente al punto comune $(x,\, y,\, z)$, e l'angolo da essi raggi compreso. Fu coll'intendimento di provvedere alla applicazione di cui qui fa bisogno, che preparammo tutta l'analisi del n. 24, ove mostrammo che le tre quantità geometriche anzidette sono fatte unicamente (trattate come costanti le quantità arbitrarie) dei sei trinomj $\alpha,\, \varepsilon,\, \vartheta,\, \kappa,\, \varsigma,\, \omega$, e delle derivate delle prime tre. Vedemmo colà altresì (espressioni (37), (38)) come tali funzioni si compendiano e diventano trattabili quando si parli delle due curve particolari alle quali si riferiscono anche i precedenti valori (15).

Chiamate $\tau_4,\ \tau_5,\ \tau_6$ queste tre nuove quantità geometriche, il sestinomio

$$p\,\delta\tau_1 + q\,\delta\tau_2 + r\,\delta\tau_3 + s\,\delta\tau_4 + v\,\delta\tau_5 + u\,\delta\tau_6$$

può surrogarsi a quello dell'equazione (40) n. 18, e per mezzo delle opportune trasformazioni ridursi alla stessa forma di esso, coll'aggiunta di quantità che essendo derivate esatte o per a o per b non somministrano termini che per i limiti. Allora il confronto dei sei coefficienti di $\delta\alpha,\, \delta\varepsilon,\, \delta\vartheta,\, \delta\kappa,\, \delta\varsigma,\, \delta\omega$ ci porgerà le sei quantità $\lambda,\, \mu,\, \nu,\, \iota,\, \theta,\, \tau$ date per le sei $p,\, q,\, r,\, s,\, v,\, u$, e potremo, volendo, avere anche queste date per quelle. Non mi trattengo a stendere i calcoli alquanto lunghi, tenendo per fermo che il lettore, pratico come ora debb'essere di questi andamenti, non può incontrarvi alcuna vera difficoltà.

Ma la difficoltà si troverà nell'eseguire sulle equazioni meccaniche risultanti un lavoro analogo a quello condotto a termine dal sig. Bordoni (luogo sopra citato) per la determinazione delle tre forze interne dei sistemi lineari: e ciò per assegnare, almeno in certi casi, in funzioni di quantità note alcuna delle sei quantità $\lambda,\, \mu,\, \nu,\, \iota,\, \theta,\, \tau$, e in conseguenza anche alcuna delle sei $p,\, q,\, r,\, s,\, v,\, u$. Abbiamo già detto che incompleto è tutto il fatto fin qui intorno alle superficie elastiche, perché l'argomento non è mai stato veduto sotto quel punto di vista più generale in cui ora si presenta. Veggasi la Memoria di Poisson instead of three geometrical quantities we could take for $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3$ three quantities having a physical meaning, that is, the two linear densities along the above said lines relative to the common point, and the superficial density at the same point $(x,\,y,\,z):$ indeed, these three densities are represented by the functions

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,;\quad \frac{1}{\sqrt{\vartheta}}\,;\quad \frac{1}{\sqrt{\alpha\vartheta-\varepsilon^2}}$$

(see p. m. sects. 11, 12, 67).

33. We mean as the other three inner forces (which we will denote now by the letters $s,\ v,\ u$) those tending to vary the two radii of the osculating circles for the two curves which are still kept as general ones, like in equations (13), (14), relative to the common point $(x,\,y,\,z)$, and the angle included by the radii themselves. It was with the intention of providing the application needed here, that we got all the analysis of sect. 24 ready, where we showed that the three above said geometrical quantities are composed solely (once we considered constants all arbitrary quantities) by the six trinomials $\alpha,\ \varepsilon,\ \vartheta,\ \kappa,\ \varsigma,\ \omega$, and by the derivatives of the first three. We also saw there (expressions (37), (38)) how such functions are summed up and become manageable when we talk of the two particular curves to which also the preceding values (15) refer.

Called $\tau_4,\ \tau_5,\ \tau_6$ these three new geometrical quantities, the sextinomial

$$p\,\delta\tau_1+q\,\delta\tau_2+r\,\delta\tau_3+s\,\delta\tau_4+v\,\delta\tau_5+u\,\delta\tau_6$$

may substitute that of equation (40) sect. 18, and by means of suitable transformations reduce to the same form of it, with the addition of quantities that, being exact derivatives with reference either of a or b, provide terms but at the limits. Thus, the comparison of the six coefficients of $\delta\alpha, \delta\varepsilon, \delta\vartheta, \delta\kappa, \delta\varsigma, \delta\omega$ will provide us the six quantities $\lambda, \mu, \nu, \iota, \theta, \tau$ given by the six p, q, r, s, v, u, and we will be able, if we wish, to express these through those. I do not hold myself to write down the rather long calculations, keeping for granted that the reader, used as it should now be to these calculations, cannot meet any true difficulty there.

However, we will find a difficulty in performing in the resulting mechanical equations a procedure analogous to that carried out by Mr. Bordoni (in the above quoted locus) for determining the three inner forces of linear systems: and that is to assign, at least in certain cases, some of the six quantities $\lambda, \mu, \nu, \iota, \theta, \tau$, and, as a consequence, also some of the six p, q, r, s, v, u as a function of known quantities. We have already said that all what has been performed until now about elastic surfaces is incomplete, because the subject has never been seen under that more general point of view in which we present it now. See the Memoir by Poisson inserita tra quelle dell'Istituto di Francia per l'anno 1812, e si capirà quanto più vasto sia il problema preso in tutta la sua estensione. Le sei forze che abbiamo scoperto esistere in questi moti od equilibri superficiali non hanno per la maggior parte gli opportuni riscontri nelle sperienze, non hanno nemmeno le convenienti denominazioni per distinguere le une dalle altre: il che invece è fatto pel caso de' sistemi lineari. Di qui riferiremo che questa parte di matematica applicata è, si può dire, ancora ai rudimenti. Eppure io penso che tenendo dietro ai veri principj sopra esposti si potranno trovare molte novità: spero potermene occupare un po' più di proposito trattando del suono, e spero altresì che raffrontando i risultati coi tanti fenomeni di acustica dei quali è tuttora incognita la spiegazione, si abbia a poter dire: ecco il caso in cui la teorica ha precorso e guidato le indagini fisiche, giusta quella sentenza di Lagrange: "L'accord des résultats avec l'expérience servira peut-être à detruire les préjugés de ceux qui semblent désespérer que les mathématiques ne puissent jamais porter des vraies lumières dans la Physique (Miscell. Taur., T. 1.$^{\mathrm{er}}$, pag. x, 2.$^{\mathrm{e}}$ Partie)".

34. Pei sistemi a tre dimensioni richiamisi il già detto al n. 29, e si capirà senza difficoltà che per le sei quantità geometriche fatte variare dalle sei forze interne possiamo prendere primieramente i quadrati $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3$ degli elementi dei tre archi di quelle tre curve cui corrispondono in generale i nove coseni $\xi_1,\, \eta_1,\, \zeta_1\ ; \xi_2,\, \eta_2,\, \zeta_2\ ; \xi_3,\, \eta_3,\, \zeta_3$, dei quali sei rimangono arbitrarj: poi i tre coseni $\tau_4,\ \tau_5,\ \tau_6$ degli angoli fatti tra loro dalle tangenti alle tre curve in quel punto comune, cioè sei quantità date dalle equazioni

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= t_1\xi_1^2 + t_2\eta_1^2 + t_3\zeta_1^2 + 2t_4\xi_1\eta_1 + 2t_5\xi_1\zeta_1 + 2t_6\eta_1\zeta_1 \\
\tau_2 &= t_1\xi_2^2 + t_2\eta_2^2 + t_3\zeta_2^2 + 2t_4\xi_2\eta_2 + 2t_5\xi_2\zeta_2 + 2t_6\eta_2\zeta_2 \\
\tau_3 &= t_1\xi_3^2 + t_2\eta_3^2 + t_3\zeta_3^2 + 2t_4\xi_3\eta_3 + 2t_5\xi_3\zeta_3 + 2t_6\eta_3\zeta_3 \\
\tau_4\sqrt{\tau_1\tau_2} &= t_1\xi_1\xi_2 + t_2\eta_1\eta_2 + t_3\zeta_1\zeta_2 \\
&\qquad + t_4\left(\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2\right) + t_5\left(\xi_1\zeta_2 + \zeta_1\xi_2\right) + t_6\left(\eta_1\zeta_2 + \zeta_1\eta_2\right) \\
\tau_5\sqrt{\tau_1\tau_3} &= t_1\xi_1\xi_3 + t_2\eta_1\eta_3 + t_3\zeta_1\zeta_3 \\
&\qquad + t_4\left(\xi_1\eta_3 + \eta_1\xi_3\right) + t_5\left(\xi_1\zeta_3 + \zeta_1\xi_3\right) + t_6\left(\eta_1\zeta_3 + \zeta_1\eta_3\right) \\
\tau_6\sqrt{\tau_2\tau_3} &= t_1\xi_2\xi_3 + t_2\eta_2\eta_3 + t_3\zeta_2\zeta_3 \\
&\qquad + t_4\left(\xi_2\eta_3 + \eta_2\xi_3\right) + t_5\left(\xi_2\zeta_3 + \zeta_2\xi_3\right) + t_6\left(\eta_2\zeta_3 + \zeta_2\eta_3\right)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Pertanto possiamo supporre che sia sottoposto al segno di integrale triplicato nell'equazione generale il sestinomio

$$
L\,\delta\tau_1 + M\,\delta\tau_2 + N\,\delta\tau_3 + V\,\delta\tau_4 + U\,\delta\tau_5 + W\,\delta\tau_6 \tag{17}
$$

inserted among those of the Institut de France for year 1812, and we will understand how wider is the problem, when it is taken in all its depth. The six forces that we found to exist in these superficial motions or equilibria do not have, in the majority of cases, appropriate experimental evidence, do not even have suitable definitions to distinguish the one from the other: which is done, on the contrary, for the case of linear systems. Hence we will say that this part of applied mathematics is, we may say, still in a rudimental stage. Yet I think that keeping up the true principles expounded above we will be able to discover many new findings: I hope to be able to cope with them more properly dealing with sound, and I also hope that by comparing the results with the numerous phenomena of acoustics, of which the explanation is still unknown, we shall be able to say: here is a case where theory has preempted and directed physical investigations, according to that sentence by Lagrange: "L'accord des résultats avec l'expérience servira peut-être à detruire les préjugés de ceux qui semblent désespérer que les mathématiques ne puissent jamais porter des vraies lumières dans la Physique (Miscell. Taur., Tome 1$^{\text{er}}$, p. x, 2$^{\text{e}}$ Partie)"(∗).

34. As for three-dimensional systems, let us recall what we already said in sect. 29, and we will understand without difficulty that we may take, as six geometrical quantities varied by the six inner forces, first the squares $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3$ of the elements of the three arcs of those three curves to which correspond in general the nine cosines $\xi_1,\,\eta_1,\,\zeta_1\ ;\xi_2,\,\eta_2,\,\zeta_2\ ;\xi_3,\,\eta_3,\,\zeta_3$, six of which remain arbitrary: then the three cosines $\tau_4,\ \tau_5,\ \tau_6$ of the angles made between them by the tangents to the three curves in that common point, that is, six quantities given by the equations

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= t_1\xi_1^2 + t_2\eta_1^2 + t_3\zeta_1^2 + 2t_4\xi_1\eta_1 + 2t_5\xi_1\zeta_1 + 2t_6\eta_1\zeta_1\\
\tau_2 &= t_1\xi_2^2 + t_2\eta_2^2 + t_3\zeta_2^2 + 2t_4\xi_2\eta_2 + 2t_5\xi_2\zeta_2 + 2t_6\eta_2\zeta_2\\
\tau_3 &= t_1\xi_3^2 + t_2\eta_3^2 + t_3\zeta_3^2 + 2t_4\xi_3\eta_3 + 2t_5\xi_3\zeta_3 + 2t_6\eta_3\zeta_3\\
\tau_4\sqrt{\tau_1\tau_2} &= t_1\xi_1\xi_2 + t_2\eta_1\eta_2 + t_3\zeta_1\zeta_2\\
&\quad + t_4\left(\xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2\right) + t_5\left(\xi_1\zeta_2 + \zeta_1\xi_2\right) + t_6\left(\eta_1\zeta_2 + \zeta_1\eta_2\right)\\
\tau_5\sqrt{\tau_1\tau_3} &= t_1\xi_1\xi_3 + t_2\eta_1\eta_3 + t_3\zeta_1\zeta_3\\
&\quad + t_4\left(\xi_1\eta_3 + \eta_1\xi_3\right) + t_5\left(\xi_1\zeta_3 + \zeta_1\xi_3\right) + t_6\left(\eta_1\zeta_3 + \zeta_1\eta_3\right)\\
\tau_6\sqrt{\tau_2\tau_3} &= t_1\xi_2\xi_3 + t_2\eta_2\eta_3 + t_3\zeta_2\zeta_3\\
&\quad + t_4\left(\xi_2\eta_3 + \eta_2\xi_3\right) + t_5\left(\xi_2\zeta_3 + \zeta_2\xi_3\right) + t_6\left(\eta_2\zeta_3 + \zeta_2\eta_3\right)
\end{aligned}\tag{16}$$

Therefore, we may suppose subjected to a triple integral sign in the general equation the sextinomial

$$L\,\delta\tau_1 + M\,\delta\tau_2 + N\,\delta\tau_3 + V\,\delta\tau_4 + U\,\delta\tau_5 + W\,\delta\tau_6 \tag{17}$$

(∗)Translation: The agreement between results and experience will perhaps help in wiping out the biases of those who seems to give up hope that Mathematics might bring true light to Physics.

invece del sestinomio

$$A\,\delta t_1 + B\,\delta t_2 + C\,\delta t_3 + D\,\delta t_4 + E\,\delta t_5 + F\,\delta t_6 \tag{18}$$

essendo $L,\ M,\ N,\ V,\ U,\ W$ le forze che tendono a far variare quelle sei quantità geometriche.

Prendendo le variate che si veggono nel sestinomio (17) dovremo sostituire alle $\tau_1,\ \tau_2\ \ldots\ \tau_6$ i loro valori dati dalle (16): il che facendo non toccheremo ai nove coseni $\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ \xi_2,$ ec. che sono quantità arbitrarie; e allora dal confronto dei coefficienti totali delle $\delta t_1,\ \delta t_2,\ \delta t_3,\ \delta t_4,\ \delta t_5,\ \delta t_6$ con quelli del sestinomio (18), caveremo facilmente le $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ date per le $L,\ M,\ N,\ V,\ U,\ W,$ e viceversa. Ommettiamo per brevità queste equazioni generali, e ci limitiamo ad osservare che appunto per essere arbitrarj i nove coseni $\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ \xi_2,$ ec. possiamo dar loro i valori particolari (43) del n. 25, supponendo che le tre curve siano le tre delle quali colà si parlava. Allora le (16) ci forniscono semplicemente

$$\tau_1 = t_1\ ;\ \tau_2 = t_2\ ;\ \tau_3 = t_3\ ;\ \tau_4 = \frac{t_4}{\sqrt{t_1 t_2}}\ ;\ \tau_5 = \frac{t_5}{\sqrt{t_1 t_2}}\ ;\ \tau_6 = \frac{t_6}{\sqrt{t_1 t_2}}\ ; \tag{19}$$

e il confronto dei coefficienti istituito al modo che si è detto sui sestinomj (17), (18) ci porge

$$\begin{aligned} A &= L - V\frac{t_4}{2t_1\sqrt{t_1 t_2}} - U\frac{t_5}{2t_1\sqrt{t_1 t_3}}\ ; \qquad & D &= \frac{V}{\sqrt{t_1 t_2}} \\ B &= M - V\frac{t_4}{2t_2\sqrt{t_1 t_2}} - W\frac{t_6}{2t_2\sqrt{t_2 t_3}}\ ; & E &= \frac{U}{\sqrt{t_1 t_3}} \\ C &= N - V\frac{t_5}{2t_3\sqrt{t_1 t_3}} - W\frac{t_6}{2t_3\sqrt{t_2 t_3}}\ ; & F &= \frac{W}{\sqrt{t_2 t_3}}\ . \end{aligned} \tag{20}$$

Avendo le sei $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ determinate generalmente o particolarmente, come ora si è detto, si vede che per mezzo delle equazioni (14) n. 4 potremo avere date per le sei $L,\ M,\ N,\ V,\ U,\ W$ anche le sei $\Lambda,\ \Xi,\ \Pi,\ \Sigma,\ \Phi,\ \Psi$ che risultano dopo la riduzione delle derivate parziali alle variabili dello stato reale, e figurano nelle equazioni (15) dello stesso n. 4. Qui si presenterebbe una importante ricerca, la quale per questa via c'impegnerebbe in un calcolo assai prolisso, e che quindi non farò che indicare. Avendo le $\Lambda,\ \Xi\ \ldots \Pi$ date per le $L,\ M \ldots W$ e pei nove coseni (di cui sei arbitrarj) $\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ \xi_2,\ \ldots,$ potremo a questi ultimi assegnare i valori (55) n. 27 che fissano le tre linee di massima e minima condensazione. Allora che diverranno quelle sei? forse tre di esse acquisteranno proprietà di massimo e di minimo, e tre si ridurranno a zero, come vedemmo avvenire al n. 57 m. p.? Per verità alcune considerazioni fisiche ci porterebbero a una sifatta conclusione, e un autore è stato corrivo instead of the sextinomial

$$A\,\delta t_1 + B\,\delta t_2 + C\,\delta t_3 + D\,\delta t_4 + E\,\delta t_5 + F\,\delta t_6 \tag{18}$$

$L,\ M,\ N,\ V,\ U,\ W$ being the forces tending to vary those six geometrical quantities.

By taking the variations that we see in sextinomial (17) we shall replace $\tau_1,\ \tau_2\ \ldots\tau_6$ by their values given by the (16): doing that we will not affect the nine cosines $\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ \xi_2,$ and so on, which are arbitrary quantities; and thus, by comparing the total coefficients of $\delta t_1,\ \delta t_2,\ \delta t_3,\ \delta t_4,\ \delta t_5,\ \delta t_6$ with those of the sextinomial (18), we will easily pull out $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ given by $L,\ M,\ N,\ V,\ U,\ W$, and vice versa. We omit for brevity these general equations, and we limit ourselves to remark that, being just arbitrary the nine cosines $\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ \xi_2,$ and so on, we may give them the particular values (43) of sect. 25, supposing that the three curves be the same three of which we talked there. Then the (16) simply provide

$$\tau_1 = t_1\ ;\ \tau_2 = t_2\ ;\ \tau_3 = t_3\ ;\ \tau_4 = \frac{t_4}{\sqrt{t_1 t_2}}\ ;\ \tau_5 = \frac{t_5}{\sqrt{t_1 t_2}}\ ;\ \tau_6 = \frac{t_6}{\sqrt{t_1 t_2}}\ ; \tag{19}$$

and the comparison of the coefficients, performed in the aforementioned way on sextinomials (17), (18), gives us

$$\begin{aligned} A &= L - V\frac{t_4}{2t_1\sqrt{t_1t_2}} - U\frac{t_5}{2t_1\sqrt{t_1t_3}}\ ; &\quad D &= \frac{V}{\sqrt{t_1t_2}} \\ B &= M - V\frac{t_4}{2t_2\sqrt{t_1t_2}} - W\frac{t_6}{2t_2\sqrt{t_2t_3}}\ ; &\quad E &= \frac{U}{\sqrt{t_1t_3}} \\ C &= N - V\frac{t_5}{2t_3\sqrt{t_1t_3}} - W\frac{t_6}{2t_3\sqrt{t_2t_3}}\ ; &\quad F &= \frac{W}{\sqrt{t_2t_3}}\ . \end{aligned} \tag{20}$$

Having determined the six $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$ in general or in particular, as we just said, we see that by means of equations (14) sect. 4 we will be able to express, given in terms of the six $L,\ M,\ N,\ V,\ U,\ W$, also the six $\Lambda,\ \Xi,\ \Pi,\ \Sigma,\ \Phi,\ \Psi$ resulting from the reduction of the partial derivatives to the variables of the real state, and which appear in equations (15) of the same sect. 4. Here an important research would emerge, which would engage us in a very lengthy calculation, and which therefore I will but hint. Having $\Lambda,\ \Xi\ldots\Pi$ given by $L,\ M\ldots W$ and by the nine cosines (six of which are arbitrary) $\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ \xi_2,\ \ldots,$ we will be able to assign to these last the values (55) sect. 27 that establish the three lines of maximum and minimum condensation. What will those six become then? Maybe three of them will acquire properties of maximum and minimum, and three will reduce to zero, as we saw to occur in sect. 57 p. m.? To tell the truth, some physical considerations would lead us to such a conclusion, and an author has been facile nell'ammettere qualche cosa di simile. Non ci è lecito però finora tener per buona una tal conseguenza: l'ortogonalità delle tre direzioni che sussiste, come vedemmo, in ambi i casi, non basta a dedurre ch'esse siano le medesime: e a renderci cauti su questo punto gioverà l'osservazione scritta sul cominciare del n. 23.

35. V'ha un altro modo assai più comodo di dare una rappresentazione alle sei quantità Λ, $\Xi \ldots \Pi$, che, come si è accennato nel numero precedente, entrano a comporre le (15) del n. 4; e ciò facendo uso delle equazioni (16) susseguenti nello stesso n. 4, le quali si verificano alla superficie conterminante il corpo. Già dicemmo al n. 53 m. p. che ci è lecito considerare segregata per entro la massa di un corpo una porzione qualunque circoscritta da una superficie arbitraria di equazione

$$F(x, y, z) = 0 \ , \tag{21}$$

e restringerci a riguardare il moto o l'equilibrio di una porzione sola, astraendola col pensiero dall'equilibrio o dal moto di tutto il resto del corpo, e intendendo supplito l'effetto di tutta la materia circostante per mezzo di pressioni esercitate sulla anzidetta superficie. Questa può essere qualsivoglia, ma nel citato numero abbiamo detto che giova per varie applicazioni prendere per essa quella di un parallelepipedo rettangolo, di cui il punto (x, y, z) sia uno degli angoli, appartenendo così contemporaneamente a tre facce. Quando la superficie è qualsivoglia, facendo

$$l = -\frac{z'}{\sqrt{1 + z'^2 + z_{\prime}^2}} \ ; \quad m = -\frac{z_{\prime}}{\sqrt{1 + z'^2 + z_{\prime}^2}} \ ; \quad n = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2 + z_{\prime}^2}} \tag{22}$$

(dove gli apici alti e bassi indicano le derivate della z per x e per y) le equazioni (16) n. 4, stanti le antecedenti denominazioni (22), possono scriversi in quest'altra maniera

$$\begin{aligned} \lambda(\Gamma) &= l\Lambda + m\Sigma + n\Phi \\ \mu(\Gamma) &= l\Sigma + m\Xi + n\Psi \\ \nu(\Gamma) &= l\Phi + m\Psi + n\Pi \end{aligned} \tag{23}$$

nelle quali λ, μ, ν significano le tre componenti rettangolari secondo i tre assi della pressione sostituita all'effetto della materia circostante, come sopra si è detto, (Γ) è la densità superficiale in quel punto.

Quando la superficie è quella del summentovato parallelepipedo rettangolo, poiché è in nostro arbitrio immaginarlo collocato come più ci piace, lo supporremo colle facce parallele ai piani xy, xz, yz . Per la faccia parallela al piano yz , in admitting something similar. However, we may not, until now, keep this conclusion for good: the orthogonality of the three directions, existing, as we saw, in both cases, is not sufficient to deduce that they be the same: and to make us more cautious on this point, the observation written at the beginning of sect. 23 will help.

35. There is another more convenient way to provide a representation for the six quantities $\Lambda,\ \Xi \ldots \Pi$, which, as we hinted at in the preceding section, come to compose (15) of sect. 4; and this by making use of equations (16) following in the same sect. 4, that are verified at the surface surrounding the body. We already said in sect. 53 p. m. that we may consider confined inside the mass of a body a portion whatever circumscribed by an arbitrary surface of equation

$$F(x, y, z) = 0 \ , \tag{21}$$

and limit ourselves to consider the motion or the equilibrium of such a portion alone, abstracting it by thought from the equilibrium or the motion of the rest of the body, and understanding the effect of all the surrounding matter as provided by means of the pressures exerted on the above said surface. This may be whatsoever, but in the quoted section we have said that it is useful for various applications to take it as that of a rectangular parallelepipedon, whose point $(\, x,\ y,\ z\,)$ be one of the corners, belonging therefore to three faces at the same time. When the surface is whatsoever, by making

$$l = -\frac{z'}{\sqrt{1 + z'^2 + z_{\prime}^2}} \ ; \quad m = -\frac{z_{\prime}}{\sqrt{1 + z'^2 + z_{\prime}^2}} \ ; \quad n = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2 + z_{\prime}^2}} \tag{22}$$

(where superscript and subscript primes stand for the derivatives of z with respect to x and to y) the equations (16) sect. 4, given the preceding definitions (22), may be written in this other way

$$\begin{aligned} \lambda(\Gamma) &= l\Lambda + m\Sigma + n\Phi \\ \mu(\Gamma) &= l\Sigma + m\Xi + n\Psi \\ \nu(\Gamma) &= l\Phi + m\Psi + n\Pi \end{aligned} \tag{23}$$

where $\lambda,\ \mu,\ \nu$ stand for the three rectangular components, according to the three axes, of the pressure replacing the effect of the surrounding matter, as we said above, (Γ) is the superficial density in that point.

When the surface is that of the above mentioned rectangular parallelepipedon, since it is arbitrary for us to imagine it placed where we like most, we will suppose it having the faces parallel to the planes $xy,\ xz,\ yz$. For the face parallel to the plane yz, è manifesto che i coseni $l,\ m,\ n$ diventano $l = 1,\ m = 0,\ n = 0$: quindi le precedenti (23) danno

$$\lambda_1(\Gamma) = \Lambda\ ; \quad \mu_1(\Gamma) = \Sigma\ ; \quad \nu_1(\Gamma) = \Phi\ , \tag{24}$$

avendo marcato coll'indice 1 al piede le λ, μ, ν particolari a questa faccia, e faremo lo stesso cogli indici 2, 3 per le altre due facce. Queste (24) ci dicono che Λ, Σ, Φ sono nel punto (x, y, z) le tre componenti rettangolari di quella pressione, moltiplicate per la densità superficiale spettante a un tal punto, e ci dicono altresì che, generalmente parlando, la pressione è in direzione obbliqua alla faccia, giacché se fosse perpendicolare le μ_1, ν_1 sarebbero zero. Per la faccia parallela al piano xz abbiamo $l = 0, m = 1, n = 0$, e in conseguenza delle (23)

$$\lambda_2(\Gamma) = \Sigma\ ; \quad \mu_2(\Gamma) = \Xi\ ; \quad \nu_2(\Gamma) = \Psi\ ; \tag{25}$$

cioè le Σ, Ξ, Ψ (le quali essendo funzioni di (x, y, z) non mutano mutando la faccia, perché il punto (x, y, z) rimane sempre quello) sono eguali al prodotto della densità superficiale nelle tre componenti rettangolari della pressione obbliqua a quest'altra faccia. Così analogamente otteniamo

$$\lambda_3(\Gamma) = \Phi\ ; \quad \mu_3(\Gamma) = \Psi\ ; \quad \nu_3(\Gamma) = \Pi \tag{26}$$

per la terza faccia.

Ricaviamo dalle (24), (25), (26)

$$\mu_1 = \lambda_2\ ; \quad \nu_1 = \lambda_3\ ; \quad \nu_2 = \mu_3\ ; \tag{27}$$

teorema noto (vedi Cauchy, *Execices de Mathématiques*, T. II, pag. 49).

Nel caso del fluido, siccome sappiamo essere $\Sigma = \Phi = \Psi = 0$, ed anche $\Lambda = \Xi = \Pi$ (vedi m. p., n. 62, equazioni (9), (10)), inferiamo dalle (24), (25), (26) essere zero le $\mu_1, \nu_1, \lambda_2, \nu_2, \lambda_3, \mu_3$, ed eguali fra loro le λ_1, μ_2, ν_3, cioè ciascuna delle pressioni sulle tre facce passanti pel punto (x, y, z) perpendicolare alla superficie stessa, e tutte eguali fra loro. Questo teorema, che è sempre stato tenuto per fondamentale nella teorica dei fluidi, ci risulta qui come corollario, non come principio assunto in origine a modo di definizione, secondo obbiettarono alcuni moderni.

Di questo teorema si può anche dare la dimostrazione generale per una superficie qualsivoglia. Infatti, stante quanto ora si disse delle sei $\Lambda, \Xi, \ldots$ pel caso particolare dei fluidi, le (23) ci danno

$$\lambda(\Gamma) = l\Lambda\ ; \quad \mu(\Gamma) = m\Lambda\ ; \quad \nu(\Gamma) = n\Lambda \tag{28}$$

it is apparent that cosines l, m, n become $l = 1$, $m = 0$, $n = 0$: thus, the preceding (23) provide

$$\lambda_1(\Gamma) = \Lambda \ ; \quad \mu_1(\Gamma) = \Sigma \ ; \quad \nu_1(\Gamma) = \Phi \ , \tag{24}$$

having marked by index 1 at the base the values of λ, μ, ν pertaining to this face, and we will do the same with the indices 2, 3 for the other two faces. These (24) tell us that Λ, Σ, Φ are at point (x, y, z) the three rectangular components of that pressure, multiplied by the superficial density pertaining to such a point, and tell us also that, generally speaking, pressure is in a direction oblique to the face, since if it were perpendicular then μ_1, ν_1 would be zero. For the face parallel to the plane xz we have $l = 0, m = 1, n = 0$, and as a consequence of (23)

$$\lambda_2(\Gamma) = \Sigma \ ; \quad \mu_2(\Gamma) = \Xi \ ; \quad \nu_2(\Gamma) = \Psi \ ; \tag{25}$$

that is, the Σ, Ξ, Ψ (which, being functions of (x, y, z) do not change as the face changes, because point (x, y, z) always remains the same) equal the product of the surface density by the three rectangular components of the pressure which is oblique to this other face. Thus, we analogously obtain

$$\lambda_3(\Gamma) = \Phi \ ; \quad \mu_3(\Gamma) = \Psi \ ; \quad \nu_3(\Gamma) = \Pi \tag{26}$$

for the third face.

We obtain from (24), (25), (26)

$$\mu_1 = \lambda_2 \ ; \quad \nu_1 = \lambda_3 \ ; \quad \nu_2 = \mu_3 \ ; \tag{27}$$

a known theorem (see Cauchy, *Exercices de Mathématiques*, Tome II, p. 49).

In the case of a fluid, since we know it is $\Sigma = \Phi = \Psi = 0$, and also $\Lambda = \Xi = \Pi$ (see p. m., sect. 62, equations (9), (10)), we infer from the (24), (25), (26) the $\mu_1, \nu_1, \lambda_2, \nu_2, \lambda_3, \mu_3$ to be zero, and λ_1, μ_2, ν_3 to be all equal, that is, any one of the pressures on the three faces passing through point (x, y, z) is perpendicular to the same surface, and they are all equal to each other. This theorem, which has always been believed to be fundamental in the theory of fluids, results here as a corollary, not as a principle assumed at the very beginnning as a definition, according to what some moderns claimed.

We can also give a general proof of this theorem for any surface. Indeed, given what we now said about the six $\Lambda, \Xi, \ldots$ for the particular case of fluids, the (23) will give us

$$\lambda(\Gamma) = l\Lambda \ ; \quad \mu(\Gamma) = m\Lambda \ ; \quad \nu(\Gamma) = n\Lambda \tag{28}$$

dalle quali deduciamo subito

$$\Lambda = (\Gamma)\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\,. \tag{29}$$

Essendo λ, μ, ν le tre componenti rettangolari della pressione esercitata sul punto (x, y, z), sappiamo che la sua direzione fa coi tre assi ortogonali angoli di coseni

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}\;; \quad \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}\;; \quad \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}\,.$$

Mettansi in queste espressioni per $\lambda, \mu, \nu, \sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$ i valori risultanti dalle (28), (29), e diventeranno l, m, n: cioè quella direzione è la direzione della normale, e ciò qualunque sia la superficie passante per quel punto, e senza che la pressione muti valore passando da una superficie all'altra, come è palese in forza della (29).

Analoghe considerazioni possono essere fatte sui sistemi superficiali relativamente a linee curve conterminanti una porzione qualunque di essi, servendosi delle equazioni (47) n. 10; ne diremo qualche cosa in appresso parlando appunto di fluidi distesi in veli superficiali.

Intanto possiamo riflettere che la vera pressione sostenuta dalla superficie nel punto (x, y, z) quale effetto delle forze di cui è dotata la materia esterna alla porzione considerata, dobbiamo intendere che sia la Λ dell'equazione (29), cioè la $\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$ moltiplicata nella densità (Γ) superficiale. A persuaderci di ciò converrà richiamare le idee che ci siamo formate fin da principio (m. p. n. 18, 19) della forza di cui λ, μ, ν sono le tre componenti rettangolari. Dicemmo ch'essa esprime un numero rapportato a forza unitaria applicata alla unità di massa, ma estremamente attenuato dal fattore σ^2 il quale sparisce quando si passa dalle somme agli integrali duplicati: e che è da considerarsi una forza applicata ad una sola molecola del sistema superficiale. L'ordinamento della materia ridotta allo stato reale non muta (badisi bene) la pressione che viene dall'esterno: se questa, per esempio, è la pressione atmosferica, si fa sopra un punto della superficie allo stesso modo, siavi radunata materia densa o rara: ben muta la forza con cui queste molecole riunite contrastano quella pressione; e di qui si capisce il perché quella deve equivalere a molte volte la $\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$ propria di una sola molecola, secondo che la densità (Γ) è maggiore o minore: se (Γ) fosse nulla, cioè non fosse ivi alcuna molecola, evidentemente dovrebbe essere nulla anche la Λ come quella che non più apparterrebbe al sistema. Il calcolo ci dà un risultato come se molte molecole dotate della forza $\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$, e in numero espresso da (Γ) fossero costifrom which we immediately deduce

$$\Lambda = (\Gamma)\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}\ . \tag{29}$$

Being λ, μ, ν the three rectangular components of the pressure exerted on point (x, y, z), we know that its direction forms angles with the three orthogonal axes, whose cosines are

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}\ ; \quad \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}\ ; \quad \frac{\nu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}\ .$$

Let us insert in these expressions for λ, μ, ν, $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$ the resulting values of (28), (29), and they will become l, m, n: that is, that direction is the direction of the normal, and this holds for any surface passing through that point, and without the pressure changing its value when passing from a surface to the other, as it is apparent by virtue of (29).

Analogous considerations may be made about superficial systems and relative to curved lines surrounding any of their portions, by using equations (47) sect. 10; we will say something about it afterwards, just talking about fluids laid in superficial films.

For the time being, we may observe that the true pressure supported by the surface at point (x, y, z), because of the effect of forces of which the matter outside the considered portion is equipped, must be intended to be Λ of the equation (29), that is, $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$ multiplied by the superficial density (Γ). To convince us about that, it is convenient to recall the ideas we have had from the beginning (p. m. sects. 18, 19) about the force, of which λ, μ, ν are the three rectangular components. We said that it expresses a number compared to a unit force applied to the unit mass, but extremely diminished by the factor σ^2, which disappears when we pass from sums to double integrals: and which has to be considered as a force applied to a single molecule of the superficial system. The ordering of the matter arranged in the real state does not change (please remark it carefully) the pressure coming from the outside: if this, for instance, is the atmospheric pressure, it is exerted over a point of the surface in the same way, be there collected dense or sparse matter: the force by which these collected molecules contrast that pressure does change; and from here we understand the reason why that [force] must equal many times $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$, relative to a single molecule, according to the density (Γ) being greater or smaller: if (Γ) were nil, that is, if there were no molecule there, it should apparently be nil also Λ as that not belonging to the system any more. The calculation provides a result, as if many molecules endowed with the force $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$, and in number expressed by (Γ), were compacted pate in un solo punto. Questo non è vero a tutto rigore, perchè le molecole non si compenetrano: ma è da riguardarsi qual ripiego analitico da cui non consegue errore sensibile nella stima del fenomeno: la differenza fra l'idea e l'espressione potrà spiegarsi riflettendo a quei termini moltiplicati per σ, σ^2, ec. che ai n.[i] 7, 18, 19, ec. m. p. abbiamo trascurati. Del resto anche le applicazioni fisiche, d'alcuna delle quali faremo in appresso parola, portandoci a credere, per esempio, che sotto una sola molecola d'aria possano essere raccolte moltissime molecole di fluido elettrico a contrastarne la pressione, ci ajuteranno esse pure a conoscere la ragionevolezza del fattore (Γ) introdotto nella (29) e nelle equazioni simili.

CAPO VI.

Introduzione di un principio fisico a meglio spiegare la natura delle forze interne : trasformazione d'integrali multipli : ulteriori considerazioni sui fluidi.

36. Il principio fisico di cui ora vogliamo servirci per modificare varie formole e farci più addentro in alcune ricerche, è quello universalmente ammesso *che l'azione molecolare propriamente detta non si estende intorno a ciascuna molecola se non per un tratto insensibile, al di là del quale può francamente tenersi nulla.* Noi abbiamo avuto cura di farne senza in tutta l'analisi precedente, e notammo questa circostanza al n. 76 m.p. verso il fine : talché l'analisi rimarrà sempre scevra da qualunque difetto potesse insinuarsi per l'introduzione di una ipotesi ben rinfrancata col riscontro d' innumerabili fatti fisici, ma che è pur sempre un'ipotesi. Vedremo ch'essa si serve completamente dei sistemi a tre dimensioni, i quali sono poi i veri corpi della natura : ma che quanto ai sistemi superficiali e lineari rimane alquanto indietro di quelle generalità che furono messe in vista nel Capo precedente ; in tali casi i suoi risultati dovranno ammettersi come approssimazioni, e resta un adito aperto per ulteriori e più sottili indagini.

Richiamiamo l'esposto ai n^i. 72,73, equazione (17) m.p., e ai n^i. 15,18 della Memoria attuale, equazioni (21), (40), e vogliamo che il lettore ponga attenzione come i coefficienti delle variate $\delta t_1, \delta t_2, ...\delta t_6$ pei sistemi a tre dimensioni, quelli delle $\delta\alpha, \delta\vartheta, ...\delta\omega$ pei sistemi superficiali, e quelli delle $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$ pei sistemi lineari, quando si calcolano gli effetti delle forze interne mediante la seconda parte dell'equazione generale della Meccanica (equazione (1) n. 16 m.p.), sono altrettanti integrali definiti. Chiudiamo questi integrali definiti, e trasformiamoli facendo uso dell'esposto principio.

in a single point. This is not rigorously true, because the molecules do not penetrate into each other: but it must be considered as an analytical trick from which no sensible error in the estimate of the phenomenon derives: the difference between the idea and the expression can be explained by thinking about those terms multiplied by σ, σ^2, and so on, which we neglected in sects. 7, 18, 19, p. m., and so on. In any case, even physical applications, to some of which we will afterwards give a talk, and that lead us to believe, for instance, that under a single molecule of air many and many molecules of electric fluid can be collected to support its pressure, they also will help us in understanding the rationale of factor (Γ) introduced in the (29) and in the similar equations.

CAPO VI.

On the introduction of a physical principle aimed at better explaining the nature of internal forces: transformations of multiple integrals: further considerations on fluids.

36. The physical principle which we want to use now for modifying the various formulas and proceeding in some researches is the one which is universally accepted and which states *that the molecular action, strictly speaking, acts in the neighborhood of each molecule only at an insensible distance, beyond which it can be really assumed to vanish.* We carefully avoided to use such an hypothesis in the whole previous analysis, and we remarked this circumstance in the sect. 76 p.m. close to its conclusion: therefore the [present] analysis will remain always free from whatsoever logical weakness which could be a consequence of the introduction of an hypothesis which, although well supported by the evidence relative to many physical phenomena, remains always an hypothesis. We will see that it applies completely to the three-dimensional systems, which are indeed the true natural bodies: however for what concerns superficial and linear systems it remains much behind that generality which was enlightened in the previous Capo; in such cases its results will have to be admitted as approximations and there is a lot of space open to further and deeper investigations.

Let us recall what has been expounded in the sect. 72 and sect. 73 equation (17) p.m. and in the sect. 15 and sect. 18 of the present memoir, [and in particular] equations (21), (40), and we ask the reader to remark how the coefficients of the variations $\delta t_1, \delta t_2, ...\delta t_6$ for the systems having three dimensions, those of the variations $\delta\alpha, \delta\vartheta, ...\delta\omega$ for superficial systems, and those of the variations $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$ for linear systems, when one calculates the effect of internal forces by means of the second part of the general equation of Mechanics (equation (1) sect. 16 p.m.) are all definite integrals. Let us consider such definite integrals and let us transform them by using the expounded principle.

Incominciando dai sistemi a tre dimensioni, rilevasi dalla succitata equazione (17) n. 73 m.p., che i coefficienti delle sei variate $\delta t_1, \delta t_2, \delta t_3, \delta t_4, \delta t_5, \delta t_6$,hanno ordinatamente i valori

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & \int df \int dg \int dk \cdot Tf^{\,2}; \int df \int dg \int dk \cdot Tg^{\,2}; \int df \int dg \int dk \cdot Tk^3; \\
& \int df \int dg \int dk \cdot Tfg; \int df \int dg \int dk \cdot Tfk; \int df \int dg \int dk \cdot Tgk;
\end{aligned}
$$

essendosi sostituita ad evitare un equivoco la lettera T alla Λ , giacchè questa riceve poi un'altra significazione; e che i coefficienti delle susseguenti variate $\delta T_1, \delta T_2$, ec. equivalgono agli altri integrali

$$
(2) \qquad \int df \int dg \int dk \cdot Tf^{\,3}; \quad 2\int df \int dg \int dk \cdot Tf^{\,2}g \quad ; \quad \text{ec.}
$$

dove sotto il segno le f, g, k sono a più alta dimensione della seconda. In tutti la $T = \frac{1}{4}\frac{K}{\rho}$ (equazione (11) n. 72 m.p.) va considerata in generale, come ivi si è detto,

$$
(3) \qquad T\left(x, y, z, \quad x + \frac{dx}{da}f + \text{ec.}, \quad y + \frac{dy}{da}f + \text{ec.}, \quad z + \frac{dz}{da}f + \text{ec.}\right)
$$

funzione delle coordinate x, y, z del punto generico, e di quelle

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
& x + \frac{dx}{da}f + \frac{dx}{db}g + \frac{dx}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{da^2}f^2 + \text{ec.} \\
& y + \frac{dy}{da}f + \frac{dy}{db}g + \frac{dy}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{da^2}f^2 + \text{ec.} \\
& z + \frac{dz}{da}f + \frac{dz}{db}g + \frac{dz}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{da^2}f^2 + \text{ec.}
\end{aligned}
$$

di un altro punto per cui le f, g, k sono variabili, restando le x, y, z costanti ; gli integrali (1), (2) dovrebbero essere, generalmente parlando, estesi fino ai limiti del corpo.

Questa estensione degli integrali fino ai limiti del corpo sarebbe necessaria in più casi, come per esempio se si volesse per questa via calcolare gli effetti dell'attrazione newtoniana, o di quell'altra forza con cui si respingono o si attraggono anche a notabile distanza le molecole del fluido elettrico ; ma per l'attrazione molecolare propriamente detta, e per quell'altra forza che chiamasi pressione, e che proviene dalle forze esterne (come fra poco spiegheremo meglio), è riconosciuto ch'essa si effettua soltanto sulle molecole prossimissime, e cessa appena la distanza si fa sensibile. E ne viene di conseguenza che i limiti degli integrali (1), (2) possono prendersi piccolissimi, tutti eguali, e a due a due di segno contrario : per esempio può rappresentarsi il primo degli integrali (1)

Let us begin from three-dimensional systems, and let us remark that, in the aforementioned equation (17) sect. 73 p.m., the coefficients of the six variations $\delta t_1, \delta t_2, \delta t_3, \delta t_4, \delta t_5, \delta t_6$, have respectively the values

$$\begin{aligned}(1)\qquad &\int df \int dg \int dk \cdot Tf^{\,2}; \int df \int dg \int dk \cdot Tg^{\,2}; \int df \int dg \int dk \cdot Tk^3;\\ &\int df \int dg \int dk \cdot Tfg; \int df \int dg \int dk \cdot Tfk; \int df \int dg \int dk \cdot Tgk;\end{aligned}$$

where, in order to avoid any misunderstanding, letter T replaced letter Λ, as another meaning was subsequently given to this last one; and that the coefficients of the subsequent variations $\delta T_1, \delta T_2$, etc. are equivalent to these other integrals

$$(2)\qquad \int df \int dg \int dk \cdot Tf^{\,3}; \quad 2\int df \int dg \int dk \cdot Tf^{\,2}g \quad ; \text{ etc.}$$

where under the [integral] sign variables f, g, k have a higher dimension in the second one. In all integrals function $T = \frac{1}{4}\frac{K}{\rho}$ (equation (11) sect. 72 p.m.) has to be considered in general, as it was said there,

$$(3)\qquad T\left(x, y, z,\quad x + \frac{dx}{da}f + \text{etc.},\quad y + \frac{dy}{da}f + \text{etc.},\quad z + \frac{dz}{da}f + \text{etc.}\right)$$

a function of the coordinates x, y, z of the generic point and of those coordinates

$$(4)\qquad \begin{aligned} &x + \frac{dx}{da}f + \frac{dx}{db}g + \frac{dx}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{da^2}f^2 + \text{etc.}\\ &y + \frac{dy}{da}f + \frac{dy}{db}g + \frac{dy}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{da^2}f^2 + \text{etc.}\\ &z + \frac{dz}{da}f + \frac{dz}{db}g + \frac{dz}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{da^2}f^2 + \text{etc.}\end{aligned}$$

of another point for which quantities f, g, k are variable, while x, y, z are kept constant; integrals (1), (2) should be, generally speaking, extended up to the boundaries of the body.

This extension of the integrals up to the limits of the body should be necessary in many cases, as for instance if one would like to calculate in this way the effects of the Newtonian attraction, or of another force by which also at a remarkable distance the molecules of the electric fluid interact one with the others; however for that interaction which is precisely called the molecular attraction and for the other force which is called pressure, and which is acted upon by external forces (as we will shortly explain better), it is accepted that it acts only on the closest molecules and is vanishing as soon as the distance is significant. As a consequence the limits of integrals (1), (2) can be chosen to be very small, and all equal, and having pairwise opposite sign: for instance one can represent the first of the integrals (1) come se fosse

$$\int_{-i}^{i} df \int_{-i}^{i} dg \int_{-i}^{i} dk \cdot Tf^{\,2} \tag{5}$$

dove i è una quantità assai piccola. Ad alcuno potrà sembrare che ciò anderebbe bene in una distribuzione regolare di molecole, quale è quella cui noi siamo soliti (e lo dicemmo più volte) far retrocedere idealmente la costituzione dei corpi : ma non nella distribuzione reale che intorno al punto (x, y, z) potrà avere materia più costipata da una parte, più rarefatta dall'altra. Però, sebben si riflette, l'obbiezione si toglie facilmente. L'estensione della quantità piccolissima i sia tale da abbracciare dalla parte ove le molecole sono più condensate anche le ultime a cui arriva l'azione molecolare : prendendo egualmente grande la i dalla parte opposta, veniamo ivi a dare all'integrale un'estensione più in là del bisogno, ma senza alcun danno : infatti avremo aggiunto all'integrale entro i limiti da ritenersi una parte non influente nel valore di esso . È per una simile ragione che i geometri moderni usano negli integrali come il suddetto (5) prendere l'infinito invece della quantità piccolissima i : e manifestamente si può fare, perchè in sostanza la parte dell'integrale che risulta aggiunta da i sino all'infinito in ambi i versi, stante il principio fisico qui adottato, è come non vi fosse.

Noi pure adunque abbracceremo quest'uso, e assumendo per brevità di scrittura il simbolo S invece dell'integrale triplicato, cioè intendendo che sia

$$S. = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} dg \int_{-\infty}^{\infty} dk. \tag{6}$$

scriveremo di nuovo gli integrali (1) coefficienti delle $\delta_1, \delta_2 .... \delta_6$ nelle equazioni (17) n. 73 m.p. sotto la forma

$$S.Tf^{\,2} \;\; ; \;\; S.Tg^2 \;\; ; \;\; S.Tk^2 \;\; ; \;\; 2S.Tfg \;\; ; \;\; 2S.Tfk \;\; ; \;\; 2S.Tgk. \tag{7}$$

Importa però conservare per poco ai mentovati integrali anche la forma (5) all'oggetto di poter dimostrare che tutti gli integrali (2) di numero infinito sono trascurabili relativamente ai precedenti (1) . La dimostrazione si fa col trasformare gl'integrali (5) ponendo

$$f = ip \quad ; \quad g = iq \quad ; \quad k = ir \tag{8}$$

e considerando le tre nuove variabili p, q, r sostituite alle f, g, k. Ognuno de'sei integrali (1) si muta in uno della forma

$$i^5 \int_{-1}^{1} dp \int_{-1}^{1} dq \int_{-1}^{1} dr \cdot Tp^2 \tag{9}$$

as if it was

$$\int_{-i}^{i} df \int_{-i}^{i} dg \int_{-i}^{i} dk \cdot Tf^{2} \tag{5}$$

where i is a very small quantity. It could seem to somebody that this calculation is correct in a regular distribution of molecules, such as the one to which we are accustomed to ideally refer (and we discussed this point several times) the constitution of the bodies: but that it is not correct in the real distribution which may have, in the neighborhood of point (x, y, z), a higher concentration of matter somewhere and a lower concentration somewhere else. However such an objection, if one ponders carefully, may be easily confuted. Let the very small quantity i be such that it includes, on the side where the molecules are more densely packed also those last ones for which the molecular action is effective: by taking equally extended quantity i on the other side, we will give to the integral an extension greater than it is strictly necessary, but this will be without any harm: indeed we will have added to the integral, inside the limits to be considered, a part which does not influence its value. It is for such a reason that the modern geometers use in the integrals of the same kind as the aforementioned one appearing in formula (5) the limit at infinity instead of the very small quantity i : and such a choice is manifestly feasible, as the part of the integral which is added starting from i to infinity on both sides, because of the physical principle which is accepted here, does not affect its final value.

We will also adopt such a notation and by introducing, for the sake of brevity, symbol S instead of the triple integral, that is by using the shortening

$$S. = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} dg \int_{-\infty}^{\infty} dk. \tag{6}$$

we will write again the integrals (1) which are the coefficients of quantities $\delta_1, \delta_2 .... \delta_6$ in the equations (17) sect. 73 p.m. in the form

$$S.Tf^{2} \; ; \; S.Tg^{2} \; ; \; S.Tk^{2} \; ; \; 2S.Tfg \; ; \; 2S.Tfk \; ; \; 2S.Tgk. \tag{7}$$

It is however important to maintain for a while to the aforementioned integrals also the form (5) in order to prove that all infinite integrals in formula (2) are negligible when compared to those previously listed in formula (1) . The demonstration is obtained by transforming integrals (5) by introducing three new variables p, q, r

$$f = ip \quad ; \quad g = iq \quad ; \quad k = ir \tag{8}$$

to substitute the variables f, g, k. Each of the six integrals (1) can be transformed into another one having the form

$$i^5 \int_{-1}^{1} dp \int_{-1}^{1} dq \int_{-1}^{1} dr \cdot Tp^2 \tag{9}$$

quale risulta il primo di essi col coefficiente i^5 ; e ognuno degli integrali (2) prende la forma

$$(10) \qquad i^6 \int_{-1}^{1} dp \int_{-1}^{1} dq \int_{-1}^{1} dr \cdot Tp^3 \quad ; \quad i^6 \int_{-1}^{1} dp \int_{-1}^{1} dq \int_{-1}^{1} dr \cdot Tp^2 q; \qquad \text{ec.}$$

col coefficiente i^6 per lo meno alla sesta potenza, essendo questa sempre più elevata nei seguenti. Per verità può sembrare che anche gli integrali come il (9), avendo il fattore piccolissimo i^5 , siano quantità trascurabili : ma noi non sappiamo qual sia la forma della funzione T , e intravediamo che potrebbe essere tale da distruggere l'effetto d'impiccolimento prodotto dal quel fattore e fornirci valori confrontabili colle quantità finite. Che poi debba essere assolutamente così ne acquistiamo una certezza, conoscendo noi altrimenti che dalle forze interne risultano nelle equazioni meccaniche termini tutt'altro che trascurabili, e osservando sulla equazione (17) n. 73 m.p., che non ne resterebbe più niente se anche i primi sei termini di quella serie si dovessero trascurare. Ma questi conservati, per la ragione ora detta, è anche manifesto che tutti i seguenti integrali (2), ovvero (10), nei quali il coefficiente è una potenza di i più elevata, saranno sì piccoli da potersi ommmettere rimpetto ai precedenti sei : e potremo credere ch'essi si vadano a fondere con quelle altre quantità trascurabili di cui si è detto anche sul fine del Capo precedente, e che ci occorsero fino dal primo impianto delle equazioni generali.

Conseguenza del fin qui detto si è che assumendo il sestinomio

$$(11) \qquad A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6$$

(equazione (19) n. 75 m.p.) per introdurlo nella equazione generale (12) n. 72 m.p., possiamo prendere a dirittura pei coefficienti A, B, C, D, E, F i valori dati dagli integrali (7), facendo

$$(12) \qquad \begin{aligned} A = S.Tf^2 \;;\; B = S.Tg^2 \;;\; C = S.Tk^2 \\ D = 2S.Tg \;;\; E = 2S.Tfk \;;\; F = 2S.Tgk. \end{aligned}$$

Sulle prime potrà sembrare che questo non sia lecito, perchè richiamando il già detto nel far passaggio dall'equazione (18) alla (19) n. 75 m.p., vedemmo i coefficienti delle $\delta t_1, \delta t_2 .... \delta t_6$ complicarsi di altri termini dedotti dai coefficienti delle variate che tengono dietro alle prime sei nell'equazione (17) n. 73 m.p. ; ma se porremo mente che tali termini non compajono più, perchè dedotti da quelli che sopra dicemmo potersi lasciar andare, capiremo che residuano alle $A, B....F$ i valori (12). E da queste considerazioni viene un altro vanso that each of them can be seen to be proportional to i^5 ; and similarly each of the integrals (2) will assume the form

$$(10) \qquad i^6\int_{-1}^{1}dp\int_{-1}^{1}dq\int_{-1}^{1}dr\cdot Tp^3 \quad ; \quad i^6\int_{-1}^{1}dp\int_{-1}^{1}dq\int_{-1}^{1}dr\cdot Tp^2q; \qquad \text{etc.}$$

where coefficient i^6 will appear at least, as only higher powers occur in all subsequent terms. Truly, it could seem that also integrals such as the one given in formula (9), having a very small factor i^5, could be regarded as negligible quantities : but we do not know which may be the form of function T and we imagine that it could balance the reducing effect of such a small factor and therefore to give us finally some quantities comparable with finite ones. Indeed we can persuade ourselves that this is certain: actually we already know that from internal forces we get in the equation of mechanics some terms which cannot be neglected and moreover we can observe how, in equations (17) sect. 73 p.m., one would be left only with vanishing terms if also the first six terms of the series had to be neglected. However, once we are persuaded that these terms must be taken into account, it is also manifest that all the following integrals in formula (2), or also in formula (10), where the coefficient is a higher order power of variable i, will be small enough to be negligible when compared with the other six: and we will believe that they can be included in the list of all other negligible quantities which we have mentioned at the end of the previous Capo and which appeared since the first deduction of these general equations.

As a consequence of what was said up to now we can state that, by considering the sextinomial

$$(11) \qquad A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6$$

(equation (19) sect. 75 p.m.) and introducing it in the general equation (12) sect. 72 p.m., we can finally assume for coefficients A, B, C, D, E, F the values given by the integrals (7), as follows

$$(12) \qquad \begin{aligned} &A = S.Tf^2 \;;\; B = S.Tg^2 \;;\; C = S.Tk^2 \\ &D = 2S.Tg \;;\; E = 2S.Tfk \;;\; F = 2S.Tgk. \end{aligned}$$

At first sight this could seem to be not licit, as, by recalling what has been already said to describe the transformation from equation (18) to equation (19) sect. 75 p.m., we saw the coefficients of variations $\delta t_1, \delta t_2 .... \delta t_6$ to be complicated by the addition of other terms, deduced by the coefficients of variations which follow the first six in the equation (17) sect. 73 p.m.: but if we ponder that such terms are no longer appearing, as they are deduced from those which we have just before seen to be negligible, then we will understand that in quantities $A, B....F$ only values (12) are not negligible. Moreover from these considerations we will get another advantage taggio, quello del comprendersi il perchè il trinomio che termina l'equazione (19) n. 75 m.p. porta nei limiti termini dei quali altrimenti sappiamo che vi sono come se non vi fossero. Ciò avviene perchè quelle quantità $\Lambda, \Theta, \Upsilon$ traggono dalla loro origine la proprietà d'essere costituite in tutti i loro termini con un fattore di i^6 per lo meno alla sesta potenza, e quindi, secondo si disse, non hanno valori influenti in confronto delle quantità finite.

Fissiamo pertanto come verità dimostrata che l'equazione generalissima dei sistemi a tre dimensioni di qualunque sorta è la

$$\int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right. \\ \left. + A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6 \right\} + \Omega = 0 \tag{13}$$

quale risulta dalla (12) n. 72 m.p., ove sostituiscasi all'integrale triplicato sotto le parentesi il valore equivalente dato dalla (19) n. 76 m.p., ommesso il trinomio colle $\Lambda, \Theta, \Upsilon$; ed è la medesima (10) n. 35 m.p. già assegnata pei sistemi rigidi, ed estesa poi ad ogni sorta di sistemi anche per mezzo dei ragionamenti esposti al n. 4 della Memoria attuale. Fissiamo di più che in essa (13) i sei coefficienti $A, B....F$ vengono ad ottenere i valori (12) col simbolo S che ha il significato (6), e colla T, che ha la composizione siccome è indicata nella (3).

37. Ora convien trasformare gli integrali (12), assumendo invece delle variabili f, g, k tre altre ξ, η, ζ date in funzioni di esse colle equazioni

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{dx}{da}f + \frac{dx}{db}g + \frac{dx}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{da^2}f^2 + \text{ec.} \\ \eta &= \frac{dy}{da}f + \frac{dy}{db}g + \frac{dy}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{da^2}f^2 + \text{ec.} \\ \zeta &= \frac{dz}{da}f + \frac{dz}{db}g + \frac{dz}{dc}k + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{da^2}f^2 + \text{ec.}; \end{aligned} \tag{14}$$

talchè la composizione della T già espressa nella (3), si presenta ora sotto la forma

$$T\,(x, y, z)\,, \quad x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta. \tag{15}$$

L'accennata trasformazione degli integrali (12) esige che dalle (14) si ricavino inversamente f, g, k date per ξ, η, ζ. Questa operazione può sembrare laboriosa, trattandosi di ritorni di serie, ma è assai aggevolata da due osservazioni. Primieramente se moltiplichiamo le (14) rispettivamente per l_1, l_2, l_3, poi per m_1, m_2, m_3, poi per n_1, n_2, n_3, essendo queste nove quantità le (27) which consists in understanding why the trinomial which concludes equation (19) sect. 75 p.m. includes some boundary terms which can be neglected. This happens because those quantities $\Lambda, \Theta, \Upsilon$ have, because of their origin, the property to be constituted in all their terms by quantities having as a factor i^6 or higher powers of i, and therefore, following what has been said, they do not have values are comparable with finite quantities.

We fix, therefore, as a demonstrated truth that the most general equation for three-dimensional systems of any kind is the following one:

$$(13) \qquad \int da \int db \int dc \cdot \left\{ \left(X - \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right.$$
$$\left. + A\delta t_1 + B\delta t_2 + C\delta t_3 + D\delta t_4 + E\delta t_5 + F\delta t_6 \right\} + \Omega = 0$$

as it can be calculated from equation (12) sect. 72 p.m., where one substitute to the triple integral inside parentheses the equivalent value given by equation (19) sect. 76 p.m., without the inclusion of the trinomial in which quantities $\Lambda, \Theta, \Upsilon$ occur ; this last equation is the same as equation (10) sect. 35 p.m., already established for the rigid systems and then extended to systems of any kind also by means of the reasoning expounded in sect. 4 of the present Memoir. We add [to the previous results] that in equation (13) the six coefficients $A, B....F$ have the values given in (12) where symbol S has the meaning given by equation (6), and where quantity T, is given by equation (3).

37. It is now convenient to transform the integrals (12), by assuming as integration variables instead of f, g, k the three other ones ξ, η, ζ given by equations

$$(14) \qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{dx}{da} f + \frac{dx}{db} g + \frac{dx}{dc} k + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{da^2} f^2 + \text{etc.} \\ \eta &= \frac{dy}{da} f + \frac{dy}{db} g + \frac{dy}{dc} k + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{da^2} f^2 + \text{etc.} \\ \zeta &= \frac{dz}{da} f + \frac{dz}{db} g + \frac{dz}{dc} k + \frac{1}{2} \frac{d^2z}{da^2} f^2 + \text{etc.}; \end{aligned}$$

so that the composition of quantity T which is already expressed in equation (3), has now the form(*)

$$(15) \qquad T\,(x, y, z, \quad x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta)\,.$$

The mentioned integral transformation (12) requires that by the (14) one could calculate inversely variables f, g, k as functions of ξ, η, ζ. Such an operation may seem laborious, as we are dealing with sums of series, but it is greatly simplified by two observations. First of all by multiplying equations (14) respectively by l_1, l_2, l_3, then by m_1, m_2, m_3, then by n_1, n_2, n_3, being these quantities given by the (27)

(*) The parenthesis has been correctly changed in the english translation.

del n. 14 m.p., e ogni volta le sommiamo, avendo sott'occhio le (20) n. 5 di questa Memoria, ci risultano quest'altre

$$
\begin{aligned}
Hf &= \xi l_1 + \eta l_2 + \zeta l_3 + \text{ec.} \\
Hg &= \xi m_1 + \eta m_2 + \zeta m_3 + \text{ec.} \\
Hk &= \xi n_1 + \eta n_2 + \zeta n_3 + \text{ec.}
\end{aligned} \tag{16}
$$

dove seguirebbero negli eccetera termini con f^2, g^2, fg, ec., che cioè conterrebbero le f, g, k per lo meno a due dimensioni ; termini che possiamo intendere trasformati a contenere $\xi^2, \eta^2, \xi\eta$, ec., cioè le ξ, η, ζ per lo meno a due dimensioni, mediante una continua sostituzione dei valori di f, g, k desunti dalle stesse (16) precedenti. Tali termini poi possono essere ommessi, perchè se si volesse tenerne conto, introdurrebbero negli integrali trasformati termini della stessa natura di quelli (2), (10) che sopra abbiamo trascurati. Infatti risulta dalle (14) che ξ, η, ζ sono quantità dello stesso ordine di grandezza delle f, g, k, e che quindi per la stessa ragione che ci persuase trascurabili gli integrali ove f, g, k sono a più di due dimensioni, dovremo dire altrettanto dei summentovati. Questa confusione può mettersi, se si vuole, anche in maggiore evidenza mediante un ragionamento affatto analogo a quello che si è fatto adottando per brevi momenti in luogo delle f, g, k i valori (8).

Pertanto è lecito ritenere nei secondi membri delle (15) i soli trinomj nei quali le ξ, η, ζ sono a dimensione lineare, e scrivere

$$
\begin{aligned}
f &= \Gamma\left(l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta\right) \\
g &= \Gamma\left(m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta\right) \\
k &= \Gamma\left(n_1\xi + n_2\eta + n_3\zeta\right)
\end{aligned} \tag{17}
$$

dove ho sostituito (Γ) ad $\frac{1}{H}$(equazione (6) n. 9 m.p.).

Ciò premesso, il valore del sestinomio

$$
\frac{dk}{d\zeta}\left(\frac{df}{d\xi}\frac{dg}{d\eta} - \frac{dg}{d\xi}\frac{df}{d\eta}\right) + \frac{dk}{d\eta}\left(\frac{df}{d\zeta}\frac{dg}{d\xi} - \frac{dg}{d\zeta}\frac{df}{d\xi}\right) + \frac{dk}{d\xi}\left(\frac{df}{d\eta}\frac{dg}{d\zeta} - \frac{dg}{d\eta}\frac{df}{d\zeta}\right)
$$

col quale, giusta la nota teorica, conviene moltiplicare sotto il segno triplicato l'integrale da trasformarsi, diventa per le (17)

$$
\Gamma^3\left\{n_3\left(l_1m_2 - m_1l_2\right) + n_2\left(l_3m_1 - m_3l_1\right) + n_1\left(l_2m_3 - m_2l_3\right)\right\}. \tag{18}
$$

in sect. 14 p.m., and every time we sum up them, by considering equations (20) sect. 5 of this Memoir, we get the following ones

$$
(16) \qquad \begin{aligned}
Hf &= \xi l_1 + \eta l_2 + \zeta l_3 + \text{etc.} \\
Hg &= \xi m_1 + \eta m_2 + \zeta m_3 + \text{etc.} \\
Hk &= \xi n_1 + \eta n_2 + \zeta n_3 + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

where in the place of the *et ceteras* one should have the following terms with f^2, g^2, fg, etc., i.e. those terms which would contain powers of variables f, g, k higher or equal to the second one; terms which, once transformed, will contain powers $\xi^2, \eta^2, \xi\eta$, etc., that is the powers of variables ξ, η, ζ higher or equal to the second, by means of a continuous substitution of the values of variables f, g, k as obtained from the previous (16). These terms can be omitted, as if one would take them into account he would introduce in the integrals some transformed terms having the same nature as those in formulas (2), (10) which we have already neglected. Indeed one can easily deduce from equations (14) that variables ξ, η, ζ are quantities of the same order of magnitude as variables f, g, k, and therefore, for the same reason which persuaded us to neglect the integrals where variables f, g, k appear as powers of order higher than the second, we will need to assume the same for the aforementioned integrals. This simplification, if one wants, is further confirmed by means of a reasoning completely analogous to that accepted while replacing here and there variables f, g, k with values (8).

Therefore it is licit to leave in the right-hand side of the (15) only the trinomials where variables ξ, η, ζ appear linearly and write

$$
(17) \qquad \begin{aligned}
f &= \Gamma\left(l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta\right) \\
g &= \Gamma\left(m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta\right) \\
k &= \Gamma\left(n_1\xi + n_2\eta + n_3\zeta\right)
\end{aligned}
$$

where I replaced (Γ) with $\frac{1}{H}$(equation (6) sect. 9 p.m.).

Once accepted this, the value of the sextinomial

$$
\frac{dk}{d\zeta}\left(\frac{df}{d\xi}\frac{dg}{d\eta} - \frac{dg}{d\xi}\frac{df}{d\eta}\right) + \frac{dk}{d\eta}\left(\frac{df}{d\zeta}\frac{dg}{d\xi} - \frac{dg}{d\zeta}\frac{df}{d\xi}\right) + \frac{dk}{d\xi}\left(\frac{df}{d\eta}\frac{dg}{d\zeta} - \frac{dg}{d\eta}\frac{df}{d\zeta}\right)
$$

by which, because of the well-known theory, it is convenient to multiply under the triple sign the integral to be transformed, it becomes, because of the (17), the following expression

$$
(18) \qquad \Gamma^3\left\{n_3\left(l_1m_2 - m_1l_2\right) + n_2\left(l_3m_1 - m_3l_1\right) + n_1\left(l_2m_3 - m_2l_3\right)\right\}.
$$

Presentemente coi valori (27) n. 14 m.p. si verifichi l'identità delle equazioni ;

$$l_2m_3 - m_2l_3 = \frac{dx}{dc}\left(l_1\frac{dx}{da} + m_1\frac{dx}{db} + n_1\frac{dx}{dc}\right)$$
$$l_3m_1 - m_3l_1 = \frac{dy}{dc}\left(l_2\frac{dy}{da} + m_2\frac{dy}{db} + n_2\frac{dy}{dc}\right)$$
$$l_1m_2 - m_1l_2 = \frac{dz}{dc}\left(l_3\frac{dz}{da} + m_3\frac{dz}{db} + n_3\frac{dz}{dc}\right)$$

le quali per la prima, sesta e nona delle (28) n. 14 m.p. diventano

$$l_2m_3 - m_2l_3 = \frac{dx}{dc} \quad ; \quad l_3m_1 - m_3l_1 = \frac{dx}{dc}H \quad ; \quad l_1m_2 - m_1l_2 = \frac{dz}{dc}H.$$

In conseguenza la quantità (18) risulta

$$\Gamma^3 H\left(n_1\frac{dx}{dc} + n_2\frac{dy}{dc} + n_3\frac{dz}{dc}\right),$$

e per l'ultima delle (20) n. 5 di questa Memoria, semplicemente D^3H^2, ossia a motivo del noto valore di Γ in H , ancora più semplicemente la sola Γ , e può estrarsi dal segno integrale perchè non contiene le variabili ξ, η, ζ.

Dopo tutto questo, e fatta riflessione che pei limiti degli integrali colle nuove variabili possono ancora prendersi l'infinito negativo, e il positivo, per le stesse ragioni addotte quando le variabili erano le f, g, k : avendo sott'occhio le (17) troveremo che i valori (12) si mutano nei seguenti

(19)
$$\begin{aligned}
A &= \Gamma^3 S.T\ \ (l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta)^2 \\
B &= \Gamma^3 S.T\ \ (m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta)^2 \\
C &= \Gamma^3 S.T\ \ (n_1\xi + n_2\eta + n_3\zeta)^2 \\
D &= 2\Gamma^3 S.T\ \ (l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta)(m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta) \\
E &= 2\Gamma^3 S.T\ \ (l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta)(n_1\xi + n_2\eta + n_3\zeta) \\
F &= 2\Gamma^3 S.T\ \ (m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta)(n_1\xi + n_2\eta + n_3\zeta)
\end{aligned}$$

dove adesso il simbolo S ha il significato

(20)
$$S. = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta.$$

e la T ha la composizione espressa nella (15).

Se poi poniamo per abbreviare

(21)
$$L = S.T\xi^2 \quad ; \quad M = S.T\eta^2; \quad N = S.T\zeta^2$$
$$O = S.T\xi\eta \quad ; \quad P = S.T\xi\zeta \quad ; \quad Q = S.T\eta\zeta\ ,$$

Now with values (27) sect. 14 p.m. one can verify the validity of equations;

$$l_2 m_3 - m_2 l_3 = \frac{dx}{dc}\left(l_1 \frac{dx}{da} + m_1 \frac{dx}{db} + n_1 \frac{dx}{dc}\right)$$
$$l_3 m_1 - m_3 l_1 = \frac{dy}{dc}\left(l_2 \frac{dy}{da} + m_2 \frac{dy}{db} + n_2 \frac{dy}{dc}\right)$$
$$l_1 m_2 - m_1 l_2 = \frac{dz}{dc}\left(l_3 \frac{dz}{da} + m_3 \frac{dz}{db} + n_3 \frac{dz}{dc}\right)$$

which, because of the first, the sixth and the ninth of the (28) sect. 14 p.m. become:

$$l_2 m_3 - m_2 l_3 = \frac{dx}{dc} \quad ; \quad l_3 m_1 - m_3 l_1 = \frac{dx}{dc} H \quad ; \quad l_1 m_2 - m_1 l_2 = \frac{dz}{dc} H.$$

As a consequence quantity (18) becomes

$$\Gamma^3 H \left(n_1 \frac{dx}{dc} + n_2 \frac{dy}{dc} + n_3 \frac{dz}{dc}\right),$$

which can be transformed, by using the last among the (20) sect. 5 of this Memoir, into the simple expression $D^3 H^2$, or, because of the well-known value of Γ in H, into the even simpler expression Γ, which can be extracted from the integral sign as it does not contain variables ξ, η, ζ.

After all this, and considering that, for what concerns the limits in the integrals with respect to the new variables, one can again consider plus and minus infinity exactly for the same reasons considered when variables f, g, k were the integration variables: when taking into account equations (17) we will find that values (12) will be transformed into the following

(19)
$$\begin{aligned}
A &= \Gamma^3 S.T \ (l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta)^2 \\
B &= \Gamma^3 S.T \ (m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta)^2 \\
C &= \Gamma^3 S.T \ (n_1\xi + n_2\eta + n_3\zeta)^2 \\
D &= 2\Gamma^3 S.T \ (l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta)(m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta) \\
E &= 2\Gamma^3 S.T \ (l_1\xi + l_2\eta + l_3\zeta)(n_1\xi + n_2\eta + n_3\zeta) \\
F &= 2\Gamma^3 S.T \ (m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta)(n_1\xi + n_2\eta + n_3\zeta)
\end{aligned}$$

where now symbol S has the following meaning

(20)
$$S. = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta.$$

and symbol T has the meaning given in (15).

If we the use these abbreviations

(21)
$$\begin{aligned}
L &= S.T\xi^2 \quad ; \quad M = S.T\eta^2; \quad N = S.T\zeta^2 \\
O &= S.T\xi\eta \quad ; \quad P = S.T\xi\zeta \quad ; \quad Q = S.T\eta\zeta \ ,
\end{aligned}$$

eseguendo nelle (19) i quadrati e i prodotti, vedremo che si cambiano in queste altre

$$
(22)\quad
\begin{aligned}
&A = \Gamma^3 \left(l_1^2 L + l_2^2 M + l_3^2 N + 2l_1 l_2 O + 2l_1 l_3 P + 2l_2 l_3 Q\right)\\
&B = \Gamma^3 \left(m_1^2 L + m_2^2 M + m_3^2 N + 2m_1 m_2 O + 2m_1 m_3 P + 2m_2 m_3 Q\right)\\
&C = \Gamma^3 \left(n_1^2 L + n_2^2 M + n_3^2 N + 2n_1 n_2 O + 2n_1 n_3 P + 2n_2 n_3 Q\right)\\
&D = 2\Gamma^3 \,(l_1 m_1 L + l_2 m_2 M + l_3 m_3 N\\
&\quad + (l_1 m_2 + m_1 l_2)\, O + (l_1 m_3 + m_1 l_3)\, P + (l_2 m_3 + m_2 l_3)\, Q)\\
&E = 2\Gamma^3 \,(l_1 n_1 L + l_2 n_2 M + l_3 n_3 N\\
&\quad + (l_1 n_2 + n_1 l_2)\, O + (l_1 n_3 + n_1 l_3)\, P + (l_2 n_3 + n_2 l_3)\, Q)\\
&F = 2\Gamma^3 \,(m_1 n_1 L + m_2 n_2 M + m_3 n_3 N\\
&\quad + (m_1 n_2 + n_1 m_2)\, O + (m_1 n_3 + n_1 m_3)\, P + (m_2 n_3 + n_2 m_3)\, Q)\,.
\end{aligned}
$$

Il confronto di queste equazione colle (23) del n. 5 di questa Memoria ci persuade, anche senza effettuare operazioni, che i valori delle sei quantità

$$
(23)\qquad \Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi
$$

colà scritte debbono essere i medesimi di quelli delle sei quantità

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
&-2\Gamma^2 L \quad ; \quad -2\Gamma^2 M \quad ; \quad -2\Gamma^2 N \quad ;\\
&-2\Gamma^2 O \quad ; \quad -2\Gamma^2 P \quad ; \quad -2\Gamma^2 Q.
\end{aligned}
$$

Infatti, tranne la differenza dell'esservi nelle precedenti (22) le sei quantità (24) invece delle (23), tutto il resto è eguale nei due sistemi di equazioni; quindi le sei quantità trattate nell'uno e nell'altro caso come incognite, avranno, dopo la risoluzione delle sei equazioni lineari, rispettivamente gli stessi valori, ossia saranno rispettivamente eguali fra loro.

Pertanto, richiamato il significato delle denominazioni (21), avremo

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
&\Lambda = -2\Gamma^2 S.T\xi^2 \quad ; \quad \Xi = -2\Gamma^2 S.T\eta^2; \quad \Pi = -2\Gamma^2 S.T\zeta^2\\
&\Sigma = -2\Gamma^2 S.T\xi\eta \quad ; \quad \Phi = -2\Gamma^2 S.T\xi\zeta \quad ; \quad \Psi = -2\Gamma^2 S.T\eta\zeta\ .
\end{aligned}
$$

Così le sei quantità (23) che entrano nelle equazioni generalissime (15), (16) n. 4 di questa Memoria, pei punti interni della massa e per quelli alla superficie, sono date per espressioni che si riferiscono alla stato reale e sono di chiara significazione, giacchè il simbolo S è quello di un integrale triplicato, come nella (20), e T ha la composizione indicata nella (15).

by calculating the squares and the products in the (19) we will see that they become the following ones

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
&A = \Gamma^3\left(l_1^2 L + l_2^2 M + l_3^2 N + 2l_1 l_2 O + 2l_1 l_3 P + 2l_2 l_3 Q\right)\\
&B = \Gamma^3\left(m_1^2 L + m_2^2 M + m_3^2 N + 2m_1 m_2 O + 2m_1 m_3 P + 2m_2 m_3 Q\right)\\
&C = \Gamma^3\left(n_1^2 L + n_2^2 M + n_3^2 N + 2n_1 n_2 O + 2n_1 n_3 P + 2n_2 n_3 Q\right)\\
&D = 2\Gamma^3\left(l_1 m_1 L + l_2 m_2 M + l_3 m_3 N\right.\\
&\quad \left. + (l_1 m_2 + m_1 l_2)\, O + (l_1 m_3 + m_1 l_3)\, P + (l_2 m_3 + m_2 l_3)\, Q\right)\\
&E = 2\Gamma^3\left(l_1 n_1 L + l_2 n_2 M + l_3 n_3 N\right.\\
&\quad \left. + (l_1 n_2 + n_1 l_2)\, O + (l_1 n_3 + n_1 l_3)\, P + (l_2 n_3 + n_2 l_3)\, Q\right)\\
&F = 2\Gamma^3\left(m_1 n_1 L + m_2 n_2 M + m_3 n_3 N\right.\\
&\quad \left. + (m_1 n_2 + n_1 m_2)\, O + (m_1 n_3 + n_1 m_3)\, P + (m_2 n_3 + n_2 m_3)\, Q\right).
\end{aligned}
$$

By comparing these equations with the (23) in the sect. 5 of this Memoir we will be persuaded, also without any further operation, that the values of the six quantities

$$
(23)\qquad \Lambda, \Xi, \Pi, \Sigma, \Phi, \Psi
$$

which were written there, must be equal to those of the six quantities

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
&-2\Gamma^2 L \quad ; \quad -2\Gamma^2 M \quad ; \quad -2\Gamma^2 N \quad ;\\
&-2\Gamma^2 O \quad ; \quad -2\Gamma^2 P \quad ; \quad -2\Gamma^2 Q.
\end{aligned}
$$

Indeed, with the difference that in the previous (22) one can see the six quantities (24) instead of the (23), everything else in the two systems of equations is equal; therefore the six equations treated in one and the other case as unknowns will have, after the solution of the six linear equations, respectively the same values, that is they will be respectively equal to each other.

Therefore, once recalled the meaning of the definitions (21), we will have

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
&\Lambda = -2\Gamma^2 S.T\xi^2 \quad ; \quad \Xi = -2\Gamma^2 S.T\eta^2; \quad \Pi = -2\Gamma^2 S.T\zeta^2\\
&\Sigma = -2\Gamma^2 S.T\xi\eta \quad ; \quad \Phi = -2\Gamma^2 S.T\xi\zeta \quad ; \quad \Psi = -2\Gamma^2 S.T\eta\zeta\ .
\end{aligned}
$$

In this way the six quantities (23), appearing in the most general equations (15), (16) sect. 4 of this Memoir which hold in the internal points of the mass and in those at its surface, are given by means of expressions which refer to the real state and have a clear meaning, since symbol S denotes a triple integral, as in the equation (20), and quantity T is given by the (15).

38. Le trovate equazioni (22), (25) possono servire a molti usi : vediamo qui come per esse vengano riconfermate le più volte discusse equazioni generali relative al movimento de' fluidi: e come inoltre veniamo per esse ad acquistare idee più adequate intorno alla costituzione di tali corpi. La composizione analitica della forza interna T (espressione (15)) per questa sorta di corpi prende una struttura tutta particolare, analoga al concetto che ce ne siamo formati nel Capo V m.p. Dicemmo che nei fluidi non è come nei corpi in generale, pei quali a esprimere l'azione reciproca delle molecole non basta farla soltanto funzione della distanza, pei fluidi basta benissimo, non essendo in giuoco per essi l'azione secondaria dovuta alla figura delle molecole. Prenderemo pertanto la T della forma

$$T\left(x, y, z, \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right) \tag{26}$$

e sarà l'espressione della forza interna fra il punto (x, y, z) e quello di coordinate $x+\xi, y+\eta, z+\zeta$, dei quali la distanza è appunto espressa dal radicale $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$. Veramente la forza interna è la K, ed è $T = \frac{1}{4}\frac{K}{\rho}$ (equazione (11) n. 72 m.p.), come si è detto anche al n. 36 : ma ciò non fa difetto perchè ρ eguaglia il radicale $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, e quindi il denominatore 4ρ può intedersi fuso nella funzione . L'aver poi fatto entrare per maggior generalità nella composizione della T le coordinate x, y, z d'uno dei punti, esplicite al radicale, muove da un ragione che in appresso spiegheremo in diffuso.

Adottata la forma (26), i primi tre integrali

$$S.T\xi^2 \quad ; \quad S.T\eta^2 \quad ; \quad S.T\zeta^2$$

pei quali soli differiscono le Λ, Ξ, Π nelle equazioni (25), giusta i più ovvj principj del calcolo degli integrali definiti, sono necessariamente eguali fra loro perchè le lettere ξ, η, ζ v'entrano solo istrumentalmente e possono scambiarsi. In conseguenza abbiamo

$$\Lambda = \Xi = \Pi \tag{27}$$

Gli altri tre integrali $S.T\xi\eta$, $S.T\xi\zeta$, $S.T\eta\zeta$ conservando il valore ma cambiando di segno quando lo si muta ad alcuna delle ξ, η, ζ, ancora pei primi principj del calcolo degli integrali definiti, sono tutti zero. Quindi le altre tre equazioni (25) ci danno

$$\Sigma = \Phi = \Psi = 0. \tag{28}$$

Le equazioni (27), (28) sono le caratteristiche dei fluidi (equazioni (9), (10),

38. The found equations (22), (25) can have many and different uses: we will see here how, by means of them, it is possible to confirm the general equations relative to the movement of fluids, which were discussed many times: and [we will see] how, moreover, we will acquire more adequate ideas, by means of them, about the constitution of such bodies. The analytical form of the internal force T (expression (15)) for this kind of bodies will have a very peculiar structure, completely analogous to the concept which we have formed in our mind in the Capo V p.m.. We already said that in the fluids [such a force] does not, in general, have the same properties as in all other bodies. For these bodies [i.e. those which are not fluid] in order to express the reciprocal action of the molecules it is not sufficient to assume that the internal force depends only on the distance, as -instead- for fluids this is perfectly sufficient, because indeed, for fluids, the secondary force due to the shape of the molecules does not play any role. We will assume therefore that quantity T has the following form

$$T\left(x, y, z, \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right) \tag{26}$$

and will represent the expression of the internal force between point (x, y, z) and the point having coordinates $x+\xi, y+\eta, z+\zeta$, whose distance is exactly given by the radical $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$. Actually the internal force is given by quantity K, and equality $T=\frac{1}{4}\frac{K}{\rho}$ holds (equation (11) sect. 72 p.m.), as it was said in the sect. 36, too: but this does not cause any problem, since ρ is equal to radical $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, and therefore the denominator 4ρ can be included in the function. We have included, for the sake of greater generality, in the indicated independent variables for the function expressing quantity T the coordinates x, y, z of one point, together with the radical, basing our choice on a reason which we will explain more diffusely in what follows.

Once form (26) has been adopted, the first three integrals

$$S.T\xi^2 \quad ; \quad S.T\eta^2 \quad ; \quad S.T\zeta^2$$

which make quantities Λ, Ξ, Π different in equations (25), are necessarily equal to each other, due to the most obvious principles of the calculus of definite integrals and to the fact that letters ξ, η, ζ appear in them in an interchangeable way. As a consequence we have:

$$\Lambda=\Xi=\Pi \tag{27}$$

The other three integrals $S.T\xi\eta$, $S.T\xi\zeta$, $S.T\eta\zeta$ change their sign when one changes it to one of the variables ξ, η, ζ, and therefore, again because of the basic principles of definite integrals, are all vanishing. Therefore the other three equations (25) will give

$$\Sigma=\Phi=\Psi=0. \tag{28}$$

Equations (27), (28) characterize fluids (equations (9), (10), CapoV m.p.). Esse riducono le equazioni generalissime per tutti i sistemi (le (15) n. 4) alle (11) n. 62 m.p., come colà si è mostrato : ma qui si ha un vantaggio di più che indicherò fra poco. Intanto noterò che questo andamento per la dimostrazione delle equazioni generali spettanti al movimento de' fluidi, andamento nel quale si ammette il principio fisico enunciato al cominciar di questo Capo, insieme all'altro sulla cessazione della forza secondaria di cui tanto si è discorso nel Capo V m.p., non può più andar soggetto ad alcuna di quelle obbiezioni ch'io non ho dissimulate al n. 63 m.p. Alla prima di esse, che è la più forte, io ho colà data una risposta la quale non la scioglie interamente, nè le dubbiezze possono essere del tutto dissipate nemmeno col ragionamento esposto al n. 76 m.p., perchè è verissimo stare la proprietà ivi discussa per quelle A, B, C, D, E, F, ma il tradurla alle sei $\Lambda, \Xi, ...$ incontra un'altra obbiezione suggerita dall'osservare le (27) n. 38 m.p. Non mi trattengo in ulteriori spiegazioni non essendovi ora più bisogno di quel ragionamento a fine di giungere alle equazioni caratteristiche dei fluidi, le (27), (28).

Il già detto de' sei integrali che formano i secondi membri delle (21), si esprime colle equazioni

$$L = M = N; \qquad O = P = Q = 0$$

e queste, insieme colle equazioni identiche (31), (33) n. 67 m.p., riducono le (22) alle seguenti

$$\begin{aligned} &A = L\Gamma^3\left(t_2t_3 - t_6^2\right); \quad B = L\Gamma^3\left(t_1t_3 - t_5^2\right); \quad C = L\Gamma^3\left(t_1t_2 - t_4^2\right) \\ &D = 2L\Gamma^3\left(t_5t_6 - t_3t_4\right); \quad E = 2L\Gamma^3\left(t_4t_6 - t_2t_5\right); \quad F = L\Gamma^3\left(t_4t_5 - t_1t_6\right) \end{aligned} \tag{29}$$

le quali consentono pienamente colle (36) n. 67 m.p., stando qui la L in luogo di $\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{\Gamma^2}$, come si ricava anche dalla prima delle (25), a meno della differenza di segno, che dicemmo in quel luogo pendere dal nostro arbitrio. Abbiamo anche detto al n. 67 m.p. che tali valori (29) delle sei $A, B....F$ dipendenti da una sola indeterminata L, costituiscono la vera differenza fra i sistemi fluidi e quelli qualunque, ma colà furono desunti dietro la maniera speciale usata da Lagrange (sect. 66 p.m.) per l'impianto dell'equazione meccanica spettante ai fluidi, dove che la dimostrazione ora recata li fa discendere da considerazioni affatto diverse. Tali differenti analisi che conducono al medesimo fine e si comprovano a vicenda, inspirano sempre maggior fiducia, e attestano l'eccellenza di questi metodi.

Chi confronterà le cose dette in questi numeri colle già da me avanzate al n. 55, § V della Memoria inserita nel tomo **XXI** di questi Atti, si accorgerà

Capo V p.m.). They produce the particular form of the most general equation valid for all systems (the (15) sect. 4) which is given in the (11) sect. 62 p.m., as it was shown there: but the treatment presented here present an advantage, as I will make explicit soon. In the meanwhile I will remark that this last demonstration method of the general equations which govern the fluid motion, together with the other one dealing with the absence of secondary force which was discussed at length in Capo V p.m., cannot be criticized anymore on the basis of the objections which I did not hide in sect. 63 p.m. To the first of these objections, which is the strongest, I gave there an answer which is not able to solve it completely, and all doubts cannot be completely dissipated even with the reasoning which was presented in sect. 76 p.m., because while it is absolutely true that the property there discussed is enjoyed by quantities called there A, B, C, D, E, F, to transfer it to those six quantities called $\Lambda, \Xi, ...$ will meet another objection which is suggested by the inspection of the (27) sect. 38 p.m. I will refrain from supplying further explanations as it is now no longer necessary to use that reasoning to reach as a final result the equations which are peculiar to the fluids: that is the (27), (28).

What was said about the six integrals which form the right-hand side of equations (21), can be expressed with equations

$$L = M = N; \quad O = P = Q = 0$$

and these equations, together with identities (31), (33) sect. 67 p.m., reduce the equations (22) to the following ones

$$\begin{aligned} &A = L\Gamma^3\left(t_2t_3 - t_6^2\right); \quad B = L\Gamma^3\left(t_1t_3 - t_5^2\right); \quad C = L\Gamma^3\left(t_1t_2 - t_4^2\right) \\ &D = 2L\Gamma^3\left(t_5t_6 - t_3t_4\right); \quad E = 2L\Gamma^3\left(t_4t_6 - t_2t_5\right); \quad F = L\Gamma^3\left(t_4t_5 - t_1t_6\right) \end{aligned} \tag{29}$$

which are in a complete agreement with the (36) sect. 67 p.m., where quantity L replaces here quantity $\frac{1}{2}\frac{\Lambda}{\Gamma^2}$, how we can calculate also from the first among the (25), with a difference consisting in a minus sign, which, as we said there, depends only on our arbitrary choice. We also said in sect. 67 p.m. that such values (29) for the six quantities $A, B....F$ which depend on the indeterminate quantity L alone, constitute the true difference between fluid systems and the most generic ones, but in *loc. cit.* they were deduced by following the special method conceived by Lagrange (sect. 66 p.m.) for the determination of the mechanical equation relative to fluids(NdT), whereas the demonstration now presented here allows for the deduction of the aforementioned values by means of completely different considerations. Such different analyses are producing all the same results and are supporting each other so that they inspire more and more confidence on the obtained results and attest as certain the excellence of these methods.

Those who will compare the results presented in these sections with those which I already expounded in one Memoir inserted in volume XXI of such Atti, will discover

(NdT) The reference is the following: Nuova analisi per tutte le questioni della meccanica molecolare, Memorie della Società Italiana, XXI, pp. 155-322 (1836).

che la sostanza della dimostrazione è ancora la medesima; ma là non abbiamo circoscritta la forma (26) della T ai soli fluidi, come era pur necessario di fare, e facemmo adesso.

39. Dirò ora la ragione per cui nella (27) ho conservate le x, y, z di uno dei punti a comporre la T fuori del radicale. Chiunque si faccia a considerare attentamente le azioni interne che si attuano fra le molecole dei corpi, capirà ch'esse sono di due sorte. Vi sono quelle di attrazione o repulsione che produrrebbero effetto anche quando non fossero applicate le forze esterne X, Y, Z : e vi sono azioni reciproche provenienti appunto dalle forze esterne X, Y, Z applicate ai singoli punti del corpo, che avrebbero luogo ancorchè non vi fossero quelle prime. Per formarsi un'immagine delle seconde può immaginarsi un sistema discreto di corpi legati fra loro con verghe imperniate a cerniera nei luoghi dove si attaccano ai corpi : tali verghe sarebbero veicoli d'azione reciproca dei corpi, detta da Lagrange forza passiva, indipendentemente da ogni attrazione o repulsione fra essi : sono queste forze interne provenienti dalle esterne, che si chiamano propriamente *pressioni* . Siccome in ogni punto la pressione è un risultato delle forze esterne applicate a tutti i punti del sistema : si capisce facilmente che un tal complesso di cause essendo dalle diverse parti in circostanze diverse, per un punto alto o basso, per un punto vicino alla superficie o verso il mezzo del corpo, la pressione varierà e sarà quindi funzione di x, y, z. Ecco il perchè nei liquidi la pressione muta pei varii punti del corpo, quantunque si suppongano costanti la densità e la gravità. Doppio è quindi sotto un certo aspetto l'intervento delle forze esterne X, Y, Z nelle equazioni generali meccaniche : esse vi entrano esplicitamente in termini destinati a riceverne l'espressione, come vedemmo più volte, ma sono una seconda volta contemplate in maniera sottintesa quando si valutano le pressioni che da esse dipendono o che sarebbero nulle se esse non fossero. Esse agiscono lungo le stesse distanze fra molecola e molecola, secondo le quali agiscono anche le forze interne attive, ed è perciò che queste forze interne delle due specie si sommano o si sottraggono. Nei liquidi le pressioni la vincono di molto sulle anzidette forze molecolari, cosicchè non fa di solito un fallo sensibile chi non tien conto che delle pressioni, considerando i liquidi come ammassi di molecole affatto slegate, alla maniera che facevano i geometri nostri maestri : nei solidi invece le azioni molecolari si rendono tanto grandi da bilanciare e vincere le pressioni. Quello poi che importa moltissimo di fissar bene è che le suddette pressioni, provenienti dalle forze esterne applicate hanno, colle azioni molecolari propriamente dette, comune la proprietà di non estendersi se non ad un piccolissimo numero di molecole intorno a ciascuna molecola. Basta pensare un

that the main structure of the demonstration is always the same; but there we did not limit the form (26) of the quantity T to [the one which is valid for] fluids only, as it still was needed and as we actually did now.

39. I will now explain the reason why in the (27) I kept the variables x, y, z of each material particles as independent variables, together with the radical, for the function assigning quantity T. Whoever will decide to ponder carefully the internal actions which are exerted between molecules constituting the bodies will understand that they can be regarded to be of two different kinds. There are internal forces, which can be attractive or repulsive, which produce their effects also when external forces X, Y, Z are not applied: and there are [internal] reciprocal actions which are caused exactly by external actions X, Y, Z when they are exerted to each [material] point of the system and internal forces of these second kind are active even if forces of the first kind are not present. In order to imagine the second kind of internal forces one has to think of a discrete system of bodies mutually constrained by means of bars hinged in the points where they are connected to the bodies: such bars were to be considered as the transducers of the reciprocal action between the bodies, which was called by Lagrange *passive force*, and which is acting independently of any attraction or repulsion between them: these internal forces are caused by the external ones and are appropriately called *pressures*. Since in any point the pressure is caused by the external forces applied to all points of the system, it is easily understood that since such a complex of causes acts in different parts and in different circumstances, then the pressure will vary [if it is measured] in a point placed at the top or at the bottom, close to the surface or in the middle of the body, so that it will result to be a function of variables x, y, z. It is for this reason that in the liquids the pressure varies in the various points of the body, even when one can assume that the density and the gravity are constant. Twofold is therefore, in a certain sense, the role played by external forces X, Y, Z in the general equations of mechanics: they appear in them explicitly in some terms which are necessarily involving them, as we have seen many times, but they must be also taken into account a second time in an implicit way, when one needs to estimate the pressures which depend on them and which would vanish in their absence. They act at the same distance between close molecules as the active internal forces and it is for this reason that these internal forces of the two kinds sum up or are subtracted from each other. In fluids pressures are more significant than the aforementioned molecular forces, so that if one takes into account only pressures he is not introducing a significant error, because he considers the liquids as a mass of not interacting molecules, as the geometers who were our *Maestri* did: in solids, instead, molecular actions become so significant that they balance and prevail on pressures. What is then much more important to understand well is that the aforementioned pressures, [which are] caused by the applied external forces, have in common, with those which we can call, strictly speaking, molecular forces, the property of having an action range which extends only to a very small number of molecules in the neighborhood of each molecule. It is sufficient to think,

momento a quel sistema di corpi congiunti con verghe che ho descritte di sopra per capir subito come ogni molecola non preme all'ingiro che sulle contigue, le quali alla loro volta premono sulle loro contigue, e via via. Per questa comunanza della proprietà fondamentale l'azione delle due sorte di forze interne, passive ed attive, è espressa simultaneamente dalla K o dalla T superiormente adoperata nei calcoli: e ciò tanto pei solidi quanto pei fluidi. Pei fluidi adunque conveniva mantenere nella (26) le x, y, z esplicite al radicale, in contemplazione di quella parte della T, che riferendosi alla pressione, muta secondo i diversi luoghi.

Taluno potrebbe obbiettare che dovendo la forza interna K , ovvero T, essere una funzione simmetrica relativamente alle coordinate dei due punti (n. 72 m.p.), sarebbe stato più giusto adottare pei fluidi invece della (26) la forma

$$\psi\left(x, y, z, \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)+\psi\left(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta, \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right).$$

Senza negare la giustezza dell'osservazione dirò che pel presente caso essa diventa inutile. Difatto, ammessa quest'ultima forma, e svolta la seconda ψ in serie per quelle ξ, η, ζ che sono in somma colle x, y, z, avremo dalle due ψ in complesso, primieramente un termine della forma (26), poi una serie di termini in ciascuno dei quali essendovi per fattore una delle ξ, η, ζ, od anche le loro potenze e prodotti, introdurrebbesi integrali della stessa natura di quelli che al n. 36 dicemmo potersi trascurare.

Se il corpo essendo fluido non ci fossero forze esterne applicate, nemmeno la gravità, ma bensì forze interne di elasticità, si fa chiaro per gli addotti ragionamenti che la T non dovrebbe contenere le x, y, z esplicite al radicale: quindi gli integrali $S.T\,\xi^2$, $S.T\eta^2$, $S.T\zeta^2$ si ridurrebero ad una sola e medesima costante, e la forza interna espressa da Λ , o Ξ, o Π (equazioni (27)) sarebbe (equazioni (25)) proporzionale al quadrato della densità. È questo un teorema di cui, appoggiandosi ai calcoli di Laplace, fece uso il signor Mossotti per aver l'espressione dell'elasticità dell'etere. Veggasi la sua Memoria : *Sur le forces qui réggissent, etc.*, Turin, 1836.

Avvertirò di non prendere equivoco per quei casi nei quali si dovesse tener conto dell'attrazione delle molecole le une sulle altre a distanze finite, come accade quando è questione del fluido elettrico, o si calcola l'attrazione newtoniana. Per verità tali forze possono considerarsi interne, giacchè sono fra molecole e molecole, e anche per esse varrebbe tutta l'analisi del Capo VII m.p. ; per altro, non applicandosi più in tal caso il principio fisico delle azioni molecolari esposto al cominciare di questo Capo, non sarebbe più permesso trascurare i now, of the system of bodies connected by bars which I have described before to understand immediately how each molecule interacts only with the closest ones, which, in their turn, interact with their closest ones and so on. Since that this fundamental property is shared by the two kind of considered internal forces, active and passive, their action is expressed simultaneously by quantity K or quantity T previously used in our calculations: and this will be true for both solids and fluids. For fluids therefore it is convenient to keep in the (26) variables x, y, z explicitly expressed independently of the radical, in order to attract our attention to that part of quantity T, which, being relative to pressure, is varying in different places.

Somebody could object that, as the internal force, i.e. quantity K, or, what is the same, quantity T, has to be a symmetric function relatively to the coordinates of the two points (sect. 72 p.m.), it would have been more correct to adopt for fluids instead of (26) [for the dependence on the variables ξ, η, ζ] the [other] form

$$\psi\left(x, y, z, \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right)+\psi\left(x+\xi,\ y+\eta,\ z+\zeta, \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\right).$$

Without denying the correctness of this observation I will say that in the present case its application does not change the final result. Indeed, starting from this last form and expanding the second ψ in Taylor series with respect to variables ξ, η, ζ, which must be added to variables x, y, z, we will get from the complete expression involving the two ψ, first a term having the form (26), and then a series of terms each of which, by including as a factor one of variables ξ, η, ζ or also one of their powers or products, would introduce integrals of the same nature as those which, in the sect. 36, we said can be neglected.

If the considered fluid body were not subjected to externally applied forces, not even gravity, but instead to internal elastic forces, it is clear from the adduced arguments that quantity T should not contain variables x, y, z explicitly, together with the radical: therefore the integrals $S.T\ \xi^2, S.T\eta^2, S.T\zeta^2$ would reduce to one and the same constant, and the internal force, as expressed by Λ , or Ξ, or Π (equations (27)) would be (equations (25)) proportional to the square of the density. This is a theorem which, on the basis of some calculations by Laplace, was used by Mr. Mossotti to get the expression of the elasticity of ether (see his Memoir : *Sur le forces qui réggissent, etc.*, Turin, 1836).

I will explicitly warn that one should not equivocate for those cases where one should take into account the attraction which molecules exert one on the others at a finite distance, as it happens when we are dealing with an electric fluid or when one calculates the Newtonian attraction. Strictly speaking these forces can indeed be regarded as being internal, as they represent interactions between molecules, and, also for them, all the analysis presented in the Capo VII p.m. holds exactly: on the other hand, as the physical principle of molecular actions presented at the beginning of this Capo is no longer applicable, it could not be allowed anymore to neglect the termini dopo i primi sei nella serie (17) , n. 73 m.p., e quindi non più si sosterrebbe l'analisi che ci condusse alle equazioni (22), (25). Mancata per tal modo la possibilità di calcolarne l'effetto per questa via, si usa introdurre l'espressione di tali forze nelle equazioni generali, come se fossero forze esterne, aggiungendole alle X, Y, Z : del che occorrerà in appresso recar qualche esempio. E ciò è possibile, perchè la funzione K , ovvero T fra le molecole (la quale è incognita e solo determinabile *a posteriori* in virtù delle equazioni stesse, quando si tratta di forze molecolari o di pressioni) è invece di forma nota, sapendosi nei casi sopra ricordati che la forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Anche in tali casi però la pressione fra le molecole contigue non cessa di aver luogo e d'essere calcolabile alla maniera indicata nei numeri precedenti : ma la forza interna attiva non fa più parte di essa, sibbene figura, come si è detto, tra le forze esterne. Di qui il modo di rispondere a chi ci rimproverasse il non calcolare pei fenomeni terrestri, per esempio nel moto de' fluidi, l'attrazione newtoniana a distanza fra le molecole. Se volete considerar questa forza in quanto opera a produrre anch'essa un tantino di pressione, il suo effetto è fuso nella T sopra contemplata : se poi voleste che si tenesse proprio conto anche del suo valore esplicitamente, esso per la ragione già detta dovrebbe comparire unito alle X, Y, Z : ma essendo sommamente piccolo nella valutazione de' fenomeni terrestri in confronto delle altre forze in giuoco, può trascurarsi senza errore sensibile.

40. Passiamo a discorrere de' sistemi superficiali, e prima di applicare anche ad essi la stessa dottrina desunta dal principio fisico che regge le azioni molecolari, vediamo quali sarebbero per essi le equazioni generali del moto de' fluidi incompressibili, trattato alla maniera di Lagrange, a quella stessa maniera che ai n.^{i} 66, 67 m.p. vedemmo dare risultati esatti, perchè confermati da dimostrazioni procurate altrimenti.

Il valore della densità nei sistemi superficiali è

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha\vartheta - \epsilon^2}}; \tag{30}$$

esso risulta dai n.^{i} 12, 67 m.p., e dalle denominazioni (23) n. 16, e l'abbiamo già avvertito anche sul fine del n. 32. Poichè dunque alla maniera lagrangiana qui adottata non abbiamo altra condizione oltre quella di Γ costante, l'unica equazione di condizione da contemplarsi sarà

$$\alpha\vartheta - \epsilon^2 = \text{ cost.}$$

e, giusta il metodo, nell'equazione generalissima (30) n. 9 dovremo mettere sotto il secondo doppio segno integrale l'unico termine $\Lambda\delta\left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right)$

terms after the first six in series (17), sect. 73 p.m., and therefore it could not be accepted the analysis which leads us to equations (22), (25). Lacking in this way the possibility to calculate its effect using the expounded method, one usually introduces the expression for such forces in the general equations, as if they were external forces, by adding them to X, Y, Z: and some examples of this procedure will be shown in what follows. Such a procedure is admissible, because function K, or equivalently function T, among the molecules (which is unknown and can be determined only *a posteriori* by means of the equation themselves, when dealing with molecular forces or pressures) is indeed of a known form, since it is known in such previously mentioned cases that the force is inversely proportional to the square of the distance. Also in these cases, however, pressure between contiguous molecules does not cease to be active and it can be computed in the way shown in the previous sections: but the active internal force is no longer treated as that pressure but, instead, is regarded, as we said, to be an external force. Thus we can find the way to answer to those who would reproach us if we do not calculate, in terrestrial phenomena, for instance in the motion of fluids, the Newtonian attraction acting at a distance between the molecules. If you want to consider this force as one of the causes of a small part of pressure, then its effect is included in the previously considered quantity T: if you would like to take into account explicitly its value, then, for the already said reason, such a value should appear as included in expressions of X, Y, Z: but since it is extremely small, in the estimation of terrestrial phenomena, when compared to the other relevant forces, it can be neglected without any significant error.

40. Let us now begin to discuss superficial systems, and before applying to them, too, the same doctrine deduced from the physical principle which governs the molecular actions, we see which would be for them the general equation of the motion of incompressible fluids, treated *à la Lagrange*, i.e. exactly in that same way which in sect. 66 and sect. 67 p.m. we have seen to provide results to be considered exact, as they are confirmed by demonstrations based on other methods.

The value of density in superficial systems is given by

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha\vartheta - \epsilon^2}}; \tag{30}$$

as discussed in sects. 12 and 67 p.m. and by using the definitions (23) sect. 16, and how we already repeated also at the end of sect. 32. Since, by following the Lagrangian method which we adopt here, we have only the condition stating that Γ is constant, the only equation to be considered will be

$$\alpha\vartheta - \epsilon^2 = \text{ const.}$$

and, as it is prescribed by the method, in the most general equation (30) sect. 9 we will need to write under the second double integral sign only the term $\Lambda\delta\left(\alpha\vartheta - \epsilon^2\right)$

ossia il trinomio

$$\Lambda\vartheta\delta\alpha+\Lambda\alpha\delta\vartheta-2\Lambda\epsilon\delta\epsilon. \tag{31}$$

Avendo pertanto sott'occhio i valori di $\alpha, \vartheta, \epsilon$ testè richiamati, il paragone del trinomio precedente col sestinomio sotto il secondo segno integrale dell'equazione (30) n. 9 ci darà

$$\begin{aligned}&\lambda=2\Lambda\vartheta;\quad \mu=2\Lambda\alpha;\quad \nu=-2\Lambda\epsilon\\ &\rho=\theta=\tau=0.\end{aligned}$$

Quindi dalle (32) di quel n. 9

$$\begin{aligned}L_1&=2\Lambda\left(\vartheta\frac{dx}{da}-\epsilon\frac{dx}{db}\right);\quad M_1=2\Lambda\left(\alpha\frac{dx}{db}-\epsilon\frac{dx}{da}\right)\\ L_2&=2\Lambda\left(\vartheta\frac{dy}{da}-\epsilon\frac{dy}{db}\right);\quad M_2=2\Lambda\left(\alpha\frac{dy}{db}-\epsilon\frac{dy}{da}\right)\\ L_3&=2\Lambda\left(\vartheta\frac{dz}{da}-\epsilon\frac{dz}{db}\right);\quad M_3=2\Lambda\left(\alpha\frac{dz}{db}-\epsilon\frac{dz}{da}\right).\end{aligned}\tag{32}$$

Da quanto sponemmo al n. 10 abbiamo

$$\frac{1}{\omega}=\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}-\frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\tag{33}$$

coll'avvertenza che là gli apici indicavano le derivate qui scritte al modo ordinario. E le (43) di quel numero ci danno

$$\begin{aligned}A&=2\Lambda\omega\left\{\vartheta\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\alpha\left(\frac{dx}{db}\right)^2-2\epsilon\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}\right\}\\ B&=2\Lambda\omega\left\{\vartheta\left(\frac{dy}{da}\right)^2+\alpha\left(\frac{dy}{db}\right)^2-2\epsilon\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}\right\}\\ C&=2\Lambda\omega\left\{\vartheta\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}+\alpha\frac{dx}{db}\frac{dy}{db}-\epsilon\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)\right\}.\end{aligned}\tag{34}$$

Presentemente si osservi che a motivo delle note equazioni identiche

$$\frac{dz}{da}=z'\frac{dx}{da}+z_,\frac{dy}{da};\quad \frac{dz}{db}=z'\frac{dx}{db}+z_,\frac{dy}{db}$$

dove $z', z_,$ sono le derivate della z per x e per y; i valori di $\alpha, \vartheta, \epsilon$ (equazioni (23) n. 16) diventano

$$\begin{aligned}\alpha&=\left(1+z'^2\right)\left(\frac{dx}{da}\right)^2+\left(1+z_,^2\right)\left(\frac{dy}{da}\right)^2+2z'z_,\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}\\ \vartheta&=\left(1+z'^2\right)\left(\frac{dx}{db}\right)^2+\left(1+z_,^2\right)\left(\frac{dy}{db}\right)^2+2z'z_,\frac{dx}{db}\frac{dy}{db}\\ \epsilon&=\left(1+z'^2\right)\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}+\left(1+z_,^2\right)\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}+z'z_,\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}+\frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right);\end{aligned}\tag{35}$$

that is the trinomial

$$\Lambda\vartheta\delta\alpha + \Lambda\alpha\delta\vartheta - 2\Lambda\epsilon\delta\epsilon. \tag{31}$$

Once we use the recalled values of $\alpha, \vartheta, \epsilon$, the comparison of the previous trinomial with the sextinomial under the second integral sign in equation (30) sect. 9 will give us

$$\lambda = 2\Lambda\vartheta; \quad \mu = 2\Lambda\alpha; \quad \nu = -2\Lambda\epsilon$$
$$\rho = \theta = \tau = 0.$$

Therefore from the (32) in the sect. 9

$$\begin{aligned} L_1 &= 2\Lambda\left(\vartheta\frac{dx}{da} - \epsilon\frac{dx}{db}\right); \quad M_1 = 2\Lambda\left(\alpha\frac{dx}{db} - \epsilon\frac{dx}{da}\right) \\ L_2 &= 2\Lambda\left(\vartheta\frac{dy}{da} - \epsilon\frac{dy}{db}\right); \quad M_2 = 2\Lambda\left(\alpha\frac{dy}{db} - \epsilon\frac{dy}{da}\right) \\ L_3 &= 2\Lambda\left(\vartheta\frac{dz}{da} - \epsilon\frac{dz}{db}\right); \quad M_3 = 2\Lambda\left(\alpha\frac{dz}{db} - \epsilon\frac{dz}{da}\right). \end{aligned} \tag{32}$$

What we presented in the sect. 10 implies that

$$\frac{1}{\omega} = \frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dy}{da}\frac{dx}{db} \tag{33}$$

with the warning that in *loc. cit.* the primes denoted the derivatives which are written here in the ordinary way. Moreover the (43) of that section give us

$$\begin{aligned} A &= 2\Lambda\omega\left\{\vartheta\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \alpha\left(\frac{dx}{db}\right)^2 - 2\epsilon\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}\right\} \\ B &= 2\Lambda\omega\left\{\vartheta\left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \alpha\left(\frac{dy}{db}\right)^2 - 2\epsilon\frac{dy}{da}\frac{dy}{db}\right\} \\ C &= 2\Lambda\omega\left\{\vartheta\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} + \alpha\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} - \epsilon\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{34}$$

At present let us observe that, because of the well-known identities,

$$\frac{dz}{da} = z'\frac{dx}{da} + z_{,}\frac{dy}{da}; \quad \frac{dz}{db} = z'\frac{dx}{db} + z_{,}\frac{dy}{db}$$

where $z', z_{,}$ represent the derivatives of function z with respect to variables x and y respectively; the values for $\alpha, \vartheta, \epsilon$ (equations (23) sect. 16) become

$$\begin{aligned} \alpha &= \left(1 + z'^2\right)\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(1 + z_{,}^2\right)\left(\frac{dy}{da}\right)^2 + 2z'z_{,}\frac{dx}{da}\frac{dy}{da} \\ \vartheta &= \left(1 + z'^2\right)\left(\frac{dx}{db}\right)^2 + \left(1 + z_{,}^2\right)\left(\frac{dy}{db}\right)^2 + 2z'z_{,}\frac{dx}{db}\frac{dy}{db} \\ \epsilon &= \left(1 + z'^2\right)\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} + \left(1 + z_{,}^2\right)\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} + z'z_{,}\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right); \end{aligned} \tag{35}$$

in conseguenza dei quali e del quadrato della (33), le (34) ci somministrano dopo facili riduzioni

$$A = \frac{2\Lambda}{\omega}\left(1 + z_,^2\right); \quad B = \frac{2\Lambda}{\omega}\left(1 + z'^2\right); \quad C = -\frac{2\Lambda}{\omega} z' z_, . \tag{36}$$

Poniamo

$$\Pi = \frac{2\Lambda}{\omega}$$

ossia per la (40) del n. 10

$$\Pi = \frac{2\Lambda}{\Gamma R}, \tag{37}$$

essendo R il radicale dello spianamento delle superficie, come fu esposto al numero citato. Si vede subito, avendo sott'occhio i valori (36), che le (44) n. 9 si riducono

$$\begin{aligned}
\Gamma R\left(X - \frac{d^2 x}{dt^2}\right) &= \frac{d.\Pi(1 + z_,^2)}{dx} - \frac{d.\Pi z' z_,}{dy} \\
\Gamma R\left(Y - \frac{d^2 y}{dt^2}\right) &= \frac{d.\Pi(1 + z'^2)}{dy} - \frac{d.\Pi z' z_,}{dx} \\
\Gamma R\left(Z - \frac{d^2 z}{dt^2}\right) &= \frac{d.\Pi z'}{dx} + \frac{d.\Pi z_,}{dy};
\end{aligned} \tag{38}$$

formole notabili che ci verranno utili in qualche applicazione. Si può osservare che appartenendo esse ai sistemi superficiali, sono in certo modo più complicate delle (11) n. 62 m.p. pei sistemi fluidi a tre dimensioni, giacchè si veggono in ognuna binomiali i secondi membri colle derivate parziali, delle quali non entra che una per volta nelle equazioni più generali messe a confronto.

41.Ora veniamo a riassumere la trattazione dei sistemi superficiali applicando il principio fisico di questo Capo : e prima noteremo le modificazioni ch'esso introduce negli integrali definiti duplicati componenti la serie che forma il secondo membro della equazione (25) n. 16 ; ciò in corrispondenza a quanto si è già detto pei sistemi a tre dimensioni.

Se poniamo mente alla precente equazione (22) dello stesso numero (16) ci accorgeremo subito che non abbiamo qui a considerare se non i tre integrali definiti che sono coefficienti di $\delta\alpha, \delta\vartheta, \delta\epsilon$: cioè, sostituita la lettera T alla Λ ,

$$\int df \int dg \cdot Tf^2; \quad \int df \int dg \cdot Tg^2; \quad 2\int df \int dg \cdot Tfg; \tag{39}$$

i coefficienti dei termini seguenti sarebbero gl'integrali

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\int df \int dg \cdot Tf^4; \quad \frac{1}{4}\int df \int dg \cdot Tg^4; \quad \int df \int dg \cdot Tf^2 g^2; \\
&\int df \int dg \cdot Tf^3; \quad 2\int df \int dg \cdot Tf^2 g; \text{ec.}
\end{aligned} \tag{40}$$

as a consequence of the calculated values and of the square of equation (33), equations (34) will give us, after easy simplifications

$$(36)\qquad A = \frac{2\Lambda}{\omega}\left(1 + z_,^2\right);\quad B = \frac{2\Lambda}{\omega}\left(1 + z'^2\right);\quad C = -\frac{2\Lambda}{\omega} z' z_, .$$

Let us denote

$$\Pi = \frac{2\Lambda}{\omega}$$

which, because of equation (40) of sect. 10, becomes

$$(37)\qquad \Pi = \frac{2\Lambda}{\Gamma R},$$

being R the rectifying radical of the surface, as it was expounded in the cited section. One can immediately see, when considering the values (36), that the (44) sect. 9 reduce to

$$(38)\qquad \begin{aligned} \Gamma R\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \frac{d.\Pi(1 + z_,^2)}{dx} - \frac{d.\Pi z' z_,}{dy} \\ \Gamma R\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \frac{d.\Pi(1 + z'^2)}{dy} - \frac{d.\Pi z' z_,}{dx} \\ \Gamma R\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \frac{d.\Pi z'}{dx} + \frac{d.\Pi z_,}{dy}; \end{aligned}$$

which are remarkable formulas to be usefully employed in some application. One can observe that, as they are relative to superficial systems, they are somehow more complicated than the (11) sect. 62 p.m. which are valid for the three-dimensional fluid systems, because in them partial derivatives on the right-hand sides appear to have a binomial form, while these partial derivatives appear one by one in the compared more general equations.

41. We summarize now the study of the superficial systems by applying the physical principle of this Capo: and we will remark first the modifications which it introduces in the double definite integrals constituting the series which forms the right-hand side of equation (25) sect. 16; this will be done in a complete parallel to what has been said for the three-dimensional systems.

If we have in mind the previous equation (22) of the same sect. (16) we will immediately discover that we must consider here only the three definite integrals which are the coefficients of variations $\delta\alpha, \delta\vartheta, \delta\epsilon$: that is, once we have substituted letter T to the letter Λ,

$$(39)\qquad \int df \int dg \cdot Tf^{\,2};\quad \int df \int dg \cdot Tg^2;\quad 2\int df \int dg \cdot Tfg;$$

the coefficients of the following terms would be the integrals

$$(40)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{4}\int df \int dg \cdot Tf^{\,4};\quad \frac{1}{4}\int df \int dg \cdot Tg^4;\quad \int df \int dg \cdot Tf^{\,2}g^2; \\ &\int df \int dg \cdot Tf^{\,3};\quad 2\int df \int dg \cdot Tf^{\,2}g; \text{etc.} \end{aligned}$$

ove le f, g sotto i segni capitano per lo meno con tre dimensioni, e si lasciano andare giusta il già detto, che a momenti ci verrà in acconcio di ricordare.

Anche qui, come nella espressione (3), la T è da riguardarsi funzione delle coordinate di due punti, cioè delle x, y, z di un primo punto, e delle

$$
\begin{aligned}
& x+\frac{dx}{da}f+\frac{dx}{db}g+\frac{1}{2}\frac{d^2x}{da^2}f^{\,2}+\text{ec.} \\
(41) \qquad & y+\frac{dy}{da}f+\frac{dy}{db}g+\frac{1}{2}\frac{d^2y}{da^2}f^{\,2}+\text{ec.} \\
& z+\frac{dz}{da}f+\frac{dz}{db}g+\frac{1}{2}\frac{d^2z}{da^2}f^{\,2}+\text{ec.}
\end{aligned}
$$

di un altro punto, conforme già si disse di quelle segnate (4). Solamente devesi avvertire che qui essendo il sistema superficiale, le x, y, z si considerano funzioni di due sole variabili a, b, e la z dovrà poi essere riguardata quale funzione di x, y secondo la natura della superficie.

Dovendo qui pure gli integrali estendersi per tratti brevissimi delle variabili f, g, ci sarà facile capire, adattando al caso di due variabili i ragionamenti esposti per tre al n. 36, che potremo non tener conto [che] degli integrali (39), trascurando i (40) come insensibili al loro confronto : così che ritenendo, in riscontro della notazione (6), il simbolo

$$
(42) \qquad S. = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} dg.
$$

i coefficienti delle $\delta\alpha, \delta\vartheta, \delta\epsilon$ nella serie (25) n. 16 saranno gli integrali $S.Tf^{\,2}$; $S.Tg^{\,2}$; $2S.Tfg$; e questi soli dovranno anche darsi per valori ai coefficienti delle stesse variate nell'equazione (40) n. 18. Tutti gli altri termini concorrenti a comporre i valori di quei coefficienti λ, μ, ν si lasciano via, perchè provenienti da termini della serie (25) n. 16 aventi per fattori quegli integrali trascurabili; lo stesso deve dirsi anche dei coefficienti delle $\delta\chi, \delta\varsigma, \delta\omega$, e delle quantità Δ, Θ. Per tal modo viene introdotto nella equazione generale (3) del n. 12, sotto il segno integrale duplicato in luogo dell'altro integrale, un trinomio, cui per renderlo confrontabile con quanto si legge nella formola (30) n. 9, daremo la forma

$$
(43) \qquad \frac{\lambda}{2}\delta\alpha+\frac{\mu}{2}\delta\vartheta+\nu\delta\epsilon
$$

essendo

$$
(44) \qquad \lambda = 2S.Tf^{\,2}; \quad \mu = 2S.Tg^{\,2}; \quad \nu = 2S.Tfg.
$$

Qui occorre un'importante osservazione, la quale rende ragione di alcune caute parole messe al principio di questo Capo. Vedemmo che i metodi lagrangiani con due diversi e grandiosi andamenti (Capi II e III) ci persuadono che where variables f, g under the integral signs occur at least at the third power, and can be neglected, following the already presented reasonings, which we will soon need to recall.

Also here, exactly as it occurred in expression (3), function T must be assumed to depend on the coordinates of two points, that is on those x, y, z of a first point and on the coordinates

$$\begin{aligned} &x + \frac{dx}{da}f + \frac{dx}{db}g + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{da^2}f^2 + \text{etc.} \\ (41) \qquad &y + \frac{dy}{da}f + \frac{dy}{db}g + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{da^2}f^2 + \text{etc.} \\ &z + \frac{dz}{da}f + \frac{dz}{db}g + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{da^2}f^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

of another point, paralleling what was already said about those coordinates which were labelled (4). It has only to be warned here, as the system is two-dimensional, that the dependent variables x, y, z must be regarded as being functions of two variables a, b, only and variable z will need to be regarded as a function of variables x, y depending on the nature of the surface.

Since here also the integrals must be extended for very short intervals of variables f, g, it will be easy to understand that, by adapting to the case of two variables the reasonings presented for the case of three variables in the sect. 36, we will be allowed to retain only integrals (39), by neglecting the (40) as they are comparatively negligible: so that, by introducing, in parallel to notation (6), the symbol

$$(42) \qquad S. = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} dg.$$

the coefficients of variations $\delta\alpha, \delta\vartheta, \delta\epsilon$ in the series (25) sect. 16 will be the integrals $S.Tf^2$; $S.Tg^2$; $2S.Tfg$; and these only coefficients will appear in the variations of equation (40), sect. 18. All the other terms which compose the values of coefficients λ, μ, ν can be skipped, as they come from the terms of the series (25) sect. 16 which have as factors the aforementioned negligible integrals; and the same is true also for the coefficients of variations $\delta\chi, \delta\varsigma, \delta\omega$, and for quantities Δ, Θ. In this way, in the general equation (3) of the sect. 12, a trinomial is introduced under the double integral sign instead of the other integral, to which trinomial, in order to make possible its comparison with what is read in formula (30) sect. 9, we will give this form

$$(43) \qquad \frac{\lambda}{2}\delta\alpha + \frac{\mu}{2}\delta\vartheta + \nu\delta\epsilon$$

being

$$(44) \qquad \lambda = 2S.Tf^2; \quad \mu = 2S.Tg^2; \quad \nu = 2S.Tfg.$$

Here an important observation is necessary, which explains the cautious words which were written at the beginning of this Capo. We saw that Lagrangian method, with two different and grandiose procedures (Capo II and Capo III), can persuade us that volendo abbracciare le questioni meccaniche spettanti ai sistemi superficiali in tutta la loro generalità, conviene introdurre sotto il secondo integrale duplicato (equazione (30) n. 9) un sestinomio e non il solo trinomio (43). Ora invece l'applicazione del principio fisico relativo all'azione molecolare limiterebbe la considerazione unicamente al trinomio (43) : il che rialza nel nostro concetto l'analisi del n. 10, che dicemmo ristretta a un caso particolare, ma che intanto avrebbe tutta l'estensione che corrisponde al principio regolatore della moderna fisica molecolare. Io però tengo per fermo che la compiuta analisi del moto e dell'equilibrio de' sistemi superficiali esige il calcolo del sestinomio, e la considerazione delle sei forze, conforme si è detto al n. 32 del Capo precedente. In appoggio della mia opinione vale il riflettere che il principio fisico dell'azione molecolare applicato ai sistemi lineari (come vedremo fra poco) riduce ad una sola le tre forze già riscontrate per tal sorta di sistemi col metodo lagrangiano, e anche qui per doppia strada. Eppure (Capo precedente n. 31) le forze che vengono dalla flessione e dalla torsione delle linee elastiche hanno un riscontro in natura. Qui l'analogia fornisce un forte argomento per credere che avranno un riscontro in natura anche le forze delle quali ci ha messo in avvertenza, parlando delle superficie, la considerazione degli altri tre termini del sestinomio, ossia (come dichiarammo al n. 33) le forze che agiscono sui due raggi di curvatura e sull'angolo da essi compreso. Pertanto l'applicazione del principio fisico adottato in questo Capo, se può abbracciar tutti i casi dei sistemi a tre dimensioni, compare mancante per alcuni casi delle altre due sorte di sistemi: riesce però a rappresentare rigorosamente anche varii casi di questi secondi, tra i quali quelli spettanti alla teorica dei fluidi, come diremo in appresso.

42. Trasformeremo gli integrali (44) tenendo un andamento conforme al praticato per trasformare gli integrali (12): porremo cioè, in riscontro colle equazioni (14),

$$\xi = \frac{dx}{da} f + \frac{dx}{db} g + \frac{1}{2} \frac{d^2 x}{da^2} f^{\,2} + \text{ec.} \tag{45}$$
$$\eta = \frac{dy}{da} f + \frac{dy}{db} g + \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{da^2} g^{\,2} + \text{ec.}$$

talchè la composizione della T sarà in generale qual'è rappresentata dall'espressione

$$T\left(x, y,\ z\left(x, y\right),\ x + \xi,\ y + \eta,\ z\left(x + \xi, y + \eta\right)\right). \tag{46}$$

Nelle (45), prendendo per incognite quelle f, g che nei secondi membri sono a dimensione lineare, potremo cavarne i valori, i quali, rammentata la (33), saranno

$$f = \omega\left(\xi \frac{dy}{db} - \eta \frac{dx}{db}\right) + \text{ec.} \tag{47}$$
$$g = \omega\left(\eta \frac{dx}{da} - \xi \frac{dy}{da}\right) + \text{ec.}$$

if one wants to embrace in all their generality the mechanical problems relative to the superficial systems, it will be convenient to introduce under the second double integral (equation (30) sect. 9) a sextinomial and not only the trinomial (43). Now, instead, the application of the physical principle relative to the molecular action would limit the consideration uniquely to trinomial (43): this application will re-evaluate in our mind the analysis in sect. 10, which we regarded as limited to a particular case, but could seem to have all the extension corresponding to the principle governing the modern molecular physics. I however believe that the complete analysis of motion and equilibrium of superficial systems requires the calculation of the sextinomial and the consideration of the six forces, as it was said in sect. 32 of the previous Capo. To support my opinion it is worth pondering that the physical principle of the molecular action, when applied to the linear systems (as we will see soon), reduces the three forces already introduced for such systems with the Lagrangian method to only one, and also in this case by using two different procedures. And yet (previous Capo, sect. 31) those forces which are caused by the bending and the torsion of Euler *elasticae* are needed to explain natural phenomenological evidence. Here analogy supplies a strong support to believe that the same need will arise also when dealing with those forces whose existence, when talking about superficial systems, was signaled by the consideration of the other three terms of the sextinomial, that is (as we explicitly declared in sect. 33) the forces which act on the two curvature radii and on the angle between them. Therefore the application of the physical principle adopted in this Capo, even if it may embrace all the cases concerning the three-dimensional systems, appears to be faulty for some cases of the two other kinds of systems: it manages, however, in rigorously representing also some various cases for these last kinds of systems, among which those relative to the theory of fluids, as we will say in what follows.

42. We will transform integrals (44) with a procedure which parallels that used to transform integrals (12): in other words we will, similarly to what has been done with equations (14), set

(45)
$$\xi = \frac{dx}{da}f + \frac{dx}{db}g + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{da^2}f^2 + \text{etc.}$$
$$\eta = \frac{dy}{da}f + \frac{dy}{db}g + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{da^2}g^2 + \text{etc.}$$

so that the structure of function T will be represented in general by the expression

(46)
$$T\left(x, y,\ z\left(x, y\right),\ x+\xi,\ y+\eta,\ z\left(x+\xi, y+\eta\right)\right).$$

In the (45), choosing as unknowns in the right-hand sides the first powers of variables f, g, we will be able to calculate the corresponding values, which, once recalled the (33), will be

(47)
$$f = \omega\left(\xi\frac{dy}{db} - \eta\frac{dx}{db}\right) + \text{etc.}$$
$$g = \omega\left(\eta\frac{dx}{da} - \xi\frac{dy}{da}\right) + \text{etc.}$$

dove negli eccetera seguirebbero termini colle f, g a non meno di due dimensioni, termini che mediante la continua sostituzione degli stessi valori (47), si cambierebbero in altri coi quadrati e col prodotto delle ξ, η, e colle potenze più elevate delle medesime.

Volendo trasformare un integrale duplicato preso per le variabili f, g in un altro per le variabili ξ, η, si sa che conviene introdurre sotto il segno, come fattore, il valore del binomio

$$\frac{df}{d\xi}\frac{dg}{d\eta} - \frac{dg}{d\xi}\frac{df}{d\eta};$$

calcolandolo pertanto coll'assumere i valori (47), si trova

$$\omega^2 \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dy}{da}\frac{dx}{db} \right) + \text{ec.} \tag{48}$$

ove l'aggiunta significata dall'eccetera conterrebbe termini nei quali le ξ, η sarebbero per lo meno ad una dimensione, e può lasciarsi andare per la ragione che diremo a momenti. La quantità (48) si riduce poi semplicemente ω in forza della (33), ossia ΓR in forza della (40) n. 10, e può cavarsi fuori dal segno integrale non contenendo le variabili ξ, η .

Dopo ciò, avendo sott'occhio le (47), e la ricordata (40) n. 10, gli integrali (44) risultano

$$\begin{aligned}
\lambda &= 2\Gamma^3 R^3 S.T \left(\xi \frac{dy}{db} - \eta \frac{dx}{db} \right)^2 \\
\mu &= 2\Gamma^3 R^3 S.T \left(\eta \frac{dx}{da} - \xi \frac{dy}{da} \right)^2 \\
\nu &= 2\Gamma^3 R^3 S.T \left(\xi \frac{dy}{db} - \eta \frac{dx}{db} \right) \left(\eta \frac{dx}{da} - \xi \frac{dy}{da} \right)
\end{aligned} \tag{49}$$

dove il simbolo $S.$ ha il significato

$$S. = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta. \tag{50}$$

Ho trascurato nei valori (49) i termini seguenti, i quali avrebbero avuto sotto il segno integrale le ξ, η a più alta dimensione della seconda, e la ragione è la medesima già addotta al n. 41 sul poter trascurare gli integrali (40). Di qui anche il perchè potevasi lasciar via nell'espressione (48) l'aggiunta indicata dall'eccetera : quell'aggiunta non avrebbe dato che termini di quelli che adesso abbiamo trascurati.

Pongasi per abbeviare

$$L = S.T\xi^{^2};\ M = S.T\eta^{^2};\ O = S.T\xi\eta \tag{51}$$

where in the [places held by] *et ceteras* terms where variables f, g appear at least with the second power should follow, terms which, by continuously substituting the same values (47), would be replaced by other ones in which the squares (or higher powers) and the products of variables ξ, η, would appear.

If the intention is to transform a double integral having as integration variables f, g into another one where the integration variables are ξ, η, it is known that one must introduce under the integral sign, as a factor, the binomial

$$\frac{df}{d\xi}\frac{dg}{d\eta} - \frac{dg}{d\xi}\frac{df}{d\eta};$$

once it is calculated, by assuming values (47), one finds

$$\omega^2 \left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} - \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right) + \text{etc.} \tag{48}$$

where what has to be added in the place held by the *et cetera* would contain terms where variables ξ, η should appear at least with the first power, terms which, for the reason which we will say in a moment, can be neglected. Quantity (48) reduces simply to ω because of the (33), i.e. it is equal to ΓR because of the (40) sect. 10, and can be placed outside the integral sign as it does not contain variables ξ, η.

After this, by considering the (47), and the recalled equation (40) sect. 10, the integrals (44) are given by

$$\begin{aligned} \lambda &= 2\Gamma^3 R^3 S.T \left(\xi\frac{dy}{db} - \eta\frac{dx}{db}\right)^2 \\ \mu &= 2\Gamma^3 R^3 S.T \left(\eta\frac{dx}{da} - \xi\frac{dy}{da}\right)^2 \\ \nu &= 2\Gamma^3 R^3 S.T \left(\xi\frac{dy}{db} - \eta\frac{dx}{db}\right)\left(\eta\frac{dx}{da} - \xi\frac{dy}{da}\right) \end{aligned} \tag{49}$$

where symbol $S.$ has the meaning

$$S. = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta. \tag{50}$$

I have neglected in values (49) terms which follow and which would have had under the integral sign, as factors, powers higher than the second of variables ξ, η and the reason is the same already presented in sect. 41 to neglect integrals (40). The same reason allows us to skip in expression (48) the added terms indicated with the *et cetera*: they have the same order of those which we have neglected here.

Let us use the notations

$$L = S.T\xi^2;\ M = S.T\eta^2;\ O = S.T\xi\eta \tag{51}$$

e vedremo facilmente i valori (49) mutarsi in questi altri

$$\begin{aligned}
&\lambda = 2\Gamma^3 R^3 \left\{ L\left(\frac{dy}{db}\right)^2 + M\left(\frac{dx}{db}\right)^2 - 2\Theta \frac{dx}{db}\frac{dy}{db} \right\}\\
(52)\qquad &\mu = 2\Gamma^3 R^3 \left\{ L\left(\frac{dy}{da}\right)^2 + M\left(\frac{dx}{da}\right)^2 - 2\Theta \frac{dx}{da}\frac{dy}{da} \right\}\\
&\nu = 2\Gamma^3 R^3 \left\{ \Theta\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right) - L\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} - M\frac{dx}{da}\frac{dx}{db} \right\}.
\end{aligned}$$

Ottenuti questi, interessa assai aver anche quelli delle A, B, C che entrano a comporre le equazioni meccaniche generali (44) n. 10, ridotte alle variabili dello stato reale. A tale intendimento convien trovar prima quelli delle L_1, M_1, L_2, M_2 (equazioni (41) n. 10) : fatta anche qui l'avvertenza sugli apici come all'occasione della formola (33). Sostituiti i valori (52), e tenendo d'occhio la (33) e la (40) n. 10, troveremo dopo facili riduzioni

$$\begin{aligned}
&L_1 = 2\Gamma^2 R^2 \left(L\frac{dy}{db} - \Theta\frac{dx}{db} \right); \quad M_1 = 2\Gamma^2 R^2 \left(\Theta\frac{dx}{da} - L\frac{dy}{da} \right)\\
&L_2 = 2\Gamma^2 R^2 \left(\Theta\frac{dy}{db} - M\frac{dx}{db} \right); \quad M_2 = 2\Gamma^2 R^2 \left(M\frac{dx}{da} - \Theta\frac{dy}{da} \right).
\end{aligned}$$

Partendo ora da questi per calcolare le A, B, C sulle (43) n. 10, sempre col giuoco della (33), troveremo valori molto semplici, i quali, richiamate le (51), saranno

$$(53)\qquad A = 2\Gamma^2 R^2 S.T\xi^2; \quad B = 2\Gamma^2 R^2 S.T\eta^2; \quad C = 2\Gamma^2 R^2 S.T\xi\eta.$$

Notabile è qui il pregio della semplicità come nei valori (25) n. 37 ai quali servono di riscontro: qui come là possiamo formarci idee ben chiare sulla struttura di tali quantità.

43. Facciamo l'applicazione delle trovate formole al caso del fluido che si muove in una superficie, caso pel quale l'analisi non è certamente soltanto approssimata, ma esatta: essendo qui fuori di dubbio che non hanno luogo le tre ultime specie di elasticità delle quali parlammo alla fine del n. 41.

Come al n. 38, e a riscontro della espressione (26), la T diventa

$$T\left(x, y, z\,(x,y)\,, \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + [z\,(x+\xi,\ y+\eta) - z]^2}\right)$$

e può considerarsi ridotta più semplicemente alla forma

$$(54)\qquad T\left(x, y, z, \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (z'\xi + z,\eta)^2}\right),$$

perché immaginando svolto il radicale, e quindi anche la T per gli altri termini and we will easily see values (49) to be changed into the following others

$$\begin{aligned}
&\lambda = 2\Gamma^3 R^3 \left\{ L\left(\frac{dy}{db}\right)^2 + M\left(\frac{dx}{db}\right)^2 - 2\Theta\frac{dx}{db}\frac{dy}{db}\right\}\\
(52)\qquad &\mu = 2\Gamma^3 R^3 \left\{ L\left(\frac{dy}{da}\right)^2 + M\left(\frac{dx}{da}\right)^2 - 2\Theta\frac{dx}{da}\frac{dy}{da}\right\}\\
&\nu = 2\Gamma^3 R^3 \left\{ \Theta\left(\frac{dx}{da}\frac{dy}{db} + \frac{dy}{da}\frac{dx}{db}\right) - L\frac{dy}{da}\frac{dy}{db} - M\frac{dx}{da}\frac{dx}{db}\right\}.
\end{aligned}$$

Once we have obtained these it is really interesting to have also those of variables A, B, C which appear in the general mechanical equations (44) sect. 10, when expressed in terms of variables corresponding to the real state. To this aim it is convenient to find first the values of quantities L_1, M_1, L_2, M_2 (equations (41), sect. 10): it is required to recall the meaning of the primes as it was given when formula (33) was introduced. Once we replace values (52), and take into account formula (33) and the (40) sect. 10, we will find after some easy simplifications

$$\begin{aligned}
L_1 &= 2\Gamma^2 R^2 \left(L\frac{dy}{db} - \Theta\frac{dx}{db}\right); \quad M_1 = 2\Gamma^2 R^2 \left(\Theta\frac{dx}{da} - L\frac{dy}{da}\right)\\
L_2 &= 2\Gamma^2 R^2 \left(\Theta\frac{dy}{db} - M\frac{dx}{db}\right); \quad M_2 = 2\Gamma^2 R^2 \left(M\frac{dx}{da} - \Theta\frac{dy}{da}\right).
\end{aligned}$$

Starting now from these last results to calculate quantities A, B, C in the (43) sect. 10, always using formula (33), we will find very simple values, which, once recalled equations (51), will be

$$(53)\qquad A = 2\Gamma^2 R^2 S.T\xi^2; \quad B = 2\Gamma^2 R^2 S.T\eta^2; \quad C = 2\Gamma^2 R^2 S.T\xi\eta.$$

It is remarkable here the simplicity of these expressions, which is similar to the simplicity of values (25) sect. 37, to which we can compare them: here and there we can form in our mind very clear ideas about the structure of such quantities.

43. Let us apply the formulas which we found to the case of a fluid which moves along a surface, case for which the presented analysis is certainly not only approximated, but indeed exact, as it is here without question that the three kinds of elasticities of which we spoke at the end of the sect. 41 are vanishing.

Exactly as it occurred in sect. 38, and similarly to expression (26), quantity T becomes the function

$$T\left(x, y, z(x,y), \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + [z(x+\xi,\ y+\eta) - z]^2}\right)$$

which can be reduced more simply to the form

$$(54)\qquad T\left(x, y, z, \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (z'\xi + z,\eta)^2}\right),$$

because if we imagine that the radical is expanded, and consequently also function T, introducing also the other [neglected] terms dello sviluppo di $z(x+\xi, y+\eta)$ oltre i due primi che si conservano, ci verrebbero di quegli integrali che dicemmo potersi trascurare.

Conviene adunque per conseguire i valori di L, M, O colle (51) calcolare quei tre integrali colla forma di T scritta nella espressione (54). Osserviamo essere identicamente

$$\xi^2+\eta^2+(z'\xi+z,\eta)^{^2}=\left(\frac{R}{\sqrt{1+z_{,}^{2}}}\xi\right)^{^2}+\left(\frac{z'z,\xi+\left(1+z_{,}^{2}\right)\eta}{\sqrt{1+z_{,}^{2}}}\right)^{^2}. \tag{55}$$

Quindi ponendo

$$p=\frac{R}{\sqrt{1+z_{,}^{2}}}\xi;\quad q=\frac{z'z,\xi+\left(1+z_{,}^{2}\right)\eta}{\sqrt{1+z_{,}^{2}}}; \tag{56}$$

le cui inverse sono

$$\xi=\frac{1+z_{,}^{2}}{R\sqrt{1+z_{,}^{2}}}p;\quad \eta=\frac{Rq-z'z,p}{R\sqrt{1+z_{,}^{2}}}; \tag{57}$$

trasformeremo i tre integrali duplicati (51) prendendoli per le nuove variabili p, q. Non ci occupiamo dei limiti, giacchè questi sono sempre i due infiniti : ma dobbiamo calcolare il valore del solito fattor binomiale

$$\frac{d\xi}{dp}\frac{d\eta}{dq}-\frac{d\eta}{dp}\frac{d\xi}{dq}$$

da introdursi sotto il segno integrale : esso, per effetto dei valori (57), si riduce $\frac{1}{R}$.

Avremo pertanto, in forza delle equazioni (55), (56), (57) :

$$L=\frac{1+z_{,}^{2}}{R^3}S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)p^2$$
$$M=\frac{1+z_{,}^{2}}{\left(1+z_{,}^{2}\right)R^3}S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)\left(Rq-z'z,p\right)^2$$
$$O=\frac{1}{R^3}S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)p\left(Rq-z'z,p\right)^2$$

nelle quali il simbolo $S.$ ha il significato

$$S.=\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}dq.$$

E facendo per abbreviare

$$Q=S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)p^2;\quad V=S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)q^2$$

$$U=S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)pq; \tag{58}$$

of the expansion of $z(x+\xi,y+\eta)$ beyond the first two which we take into account, we would get some of those integrals which we already established can be neglected.

It is therefore convenient, in order to obtain the values of quantities L, M, O by means of formula (51), to calculate those three integrals with the form of T as written in expression (54). We observe that the following identity holds

$$\xi^2+\eta^2+\left(z'\xi+z,\eta\right)^2=\left(\frac{R}{\sqrt{1+z_,^2}}\xi\right)^2+\left(\frac{z'z,\xi+\left(1+z_,^2\right)\eta}{\sqrt{1+z_,^2}}\right)^2. \tag{55}$$

Therefore by denoting

$$p=\frac{R}{\sqrt{1+z_,^2}}\xi;\quad q=\frac{z'z,\xi+\left(1+z_,^2\right)\eta}{\sqrt{1+z_,^2}}; \tag{56}$$

whose inverse equalities are

$$\xi=\frac{1+z_,^2}{R\sqrt{1+z_,^2}}p;\quad \eta=\frac{Rq-z'z,p}{R\sqrt{1+z_,^2}}; \tag{57}$$

we will transform the three double integrals (51) using the new variables p, q. We will not be bored by the integration limits, as they are always two infinities: however we must calculate, as usual, the value of the binomial factor

$$\frac{d\xi}{dp}\frac{d\eta}{dq}-\frac{d\eta}{dp}\frac{d\xi}{dq}$$

to be introduced under the integral sign: it can be reduced, because of the values given in formula (57), to $\frac{1}{R}$.

Therefore we will have, because of equations (55), (56), (57) :

$$L=\frac{1+z_,^2}{R^3}S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)p^2$$

$$M=\frac{1+z_,^2}{\left(1+z_,^2\right)R^3}S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)\left(Rq-z'z,p\right)^2$$

$$O=\frac{1}{R^3}S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)p\left(Rq-z'z,p\right)^2$$

where symbol $S.$ has the meaning

$$S.=\int_{-\infty}^{\infty}dp\int_{-\infty}^{\infty}dq.$$

Once introducing the abbreviations

$$Q=S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)p^2;\quad V=S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)q^2$$

$$U=S.T\left(x,y,z\sqrt{p^2+q^2}\right)pq; \tag{58}$$

vedremo facilmente come i precedenti valori diventino

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1+z_{,}^{2}}{R^3}Q \\
M &= \frac{1}{R\left(1+z_{,}^{2}\right)}V - \frac{2z'z_{,}}{R^2\left(1+z_{,}^{2}\right)}U + \frac{z'^3 z_{,}^3}{R^3\left(1+z_{,}^{2}\right)}Q \\
O &= \frac{1}{R^2}U - \frac{z'z_{,}}{R^3}Q.
\end{aligned}
$$

Presentemente un ragionamento desunto dalla teorica degli integrali definiti, che è quel medesimo già usato al n. 38 per giungere alle equazioni (27), (28), ci fa conoscere, osservando le (58), essere Q,V fra di loro eguali, e la U zero. Pertanto gli ultimi valori di L, M, O si riducono

$$
L = \frac{1+z_{,}^{2}}{R^3}Q; \quad M = \frac{1+z'^{2}}{R^3}Q; \quad O = -\frac{z'z_{,}}{R^3}Q. \tag{59}
$$

Qui s'immaginino sostituiti nei primi membri gli integrali equivalenti scritti nelle (51), e allora, assunta per maggior comodo la denominazione

$$
\Pi = \frac{2\Gamma^2}{R}Q, \tag{60}
$$

dedurremo subito dalle (53)

$$
A = \Pi\left(1+z_{,}^{2}\right); \quad B = \Pi\left(1+z'^{2}\right); \quad C = -\Pi\, z'z_{,}. \tag{61}
$$

Questi valori combinano perfettamente coi (36) del n. 40, e sostituiti nelle (44) n. 9, ci restituiscono dimostrate in generale per qualunque fluido le equazioni (38). Diremo dunque qui, come al n. 66 m.p., che la maniera lagrangiana, per mettere in equazione il moto de' fluidi da noi adottata nel n. 40, era esatta, giacchè conduce a risultati provati altrimenti veri. E quantunque paresse ristretta al solo caso dei liquidi, era possibile, come già toccammo sulla fine del n. 66 m.p. , estenderla anche ai fluidi elastici : il che tralasciamo di dichiarare più ampiamente sembrandoci superfluo. Coll'andamento attuale, oltre aver conseguita la dimostrazione generale, veniamo a guadagnare qualche cognizione di più sulla natura della forza interna, e passiamo a vederlo.

44. Volendo procurare una rappresentazione alla quantità Π, che entra a comporre le equazioni generali (38), come già facemmo per la Λ verso il fine del n. 35, conviene richiamare le equazioni (47) del n. 10, le quali si verificano ai limiti. Immaginiamo qui pure, con artifizio simile al già usato in quel n. 35, segregata per entro alla massa del sistema superficiale una porzione qualunque limitata da una curva a doppia curvatura arbitraria, per la quale risulti fra le x, y una equazione

$$
f(x, y) = 0;
$$

we will see how the previous values will become

$$L = \frac{1+z_{,}^{2}}{R^3}Q$$
$$M = \frac{1}{R\left(1+z_{,}^{2}\right)}V - \frac{2z'z_{,}}{R^2\left(1+z_{,}^{2}\right)}U + \frac{z'^3 z_{,}^3}{R^3\left(1+z_{,}^{2}\right)}Q$$
$$O = \frac{1}{R^2}U - \frac{z'z_{,}}{R^3}Q.$$

Now a reasoning taken from the theory of definite integrals, which is the same already used in sect. 38 to get equations (27), (28), lets us understand that, by inspecting equations (58), quantities Q,V are equal one to the other and quantity U is equal to zero. Therefore the last values of L, M, O are seen to simplify to

$$L = \frac{1+z_{,}^{2}}{R^3}Q; \quad M = \frac{1+z'^2}{R^3}Q; \quad O = -\frac{z'z_{,}}{R^3}Q. \tag{59}$$

Here one has to imagine of having substituted in the left-hand side the equivalent integrals written in the (51), and then, of having introduced for more convenience the notation,

$$\Pi = \frac{2\Gamma^2}{R}Q, \tag{60}$$

we will immediately deduce from (53) the following relations

$$A = \Pi\left(1+z_{,}^{2}\right); \quad B = \Pi\left(1+z'^2\right); \quad C = -\Pi\ z'z_{,}. \tag{61}$$

These values are in complete agreement with formulas (36) in sect. 40, and once substituted in equations (44), sect. 9, will produce a general demonstration for a generic fluid of equations (38). We will therefore state here, as in sect. 66 p.m., that the Lagrangian method for finding the equations governing the motion of fluids adopted in sect. 40 was indeed correct, as it leads to results which are proven also by means of other methods. And, although it seemed to be restricted only to the case of liquids, it was possible, as we already discussed at the end of sect. 66 p.m., to extend such method also to elastic fluids: and we do not state with greater detail this result because such an overstatement seems to us indeed superfluous. With the procedure we have adopted here we have obtained not only a general demonstration, but we are able to gain a better understanding of the nature of internal forces: and we will see how in the following.

44. As we would like to obtain a representation of quantity Π, which appears in the general equation (38), as we have already done for quantity Λ in the final part of sect. 35, it is convenient to recall equations (47) of sect. 10, which are verified at the boundaries. We imagine also here, with a [logical] artifice similar to the one already used in the mentioned sect. 35, to have segregated inside the mass of the superficial system a portion whatsoever limited by a curve having a double arbitrary curvature, for which it is established between the variables x, y such an equation

$$f\,(x, y) = 0;$$

il punto (x, y, z) sia sopra questa curva di contorno : le equazioni meccaniche siano intese limitate al moto e all'equilibrio di questa sola porzione del sistema, restando supplito l'effetto di tutta la materia circostante da pressioni esercitate sull'anzidetta linea di contorno.

Quelle equazioni (47) n. 10 ci danno, visti i valori (61),

$$
\begin{aligned}
(\lambda)\, V\,(\Gamma) - \Pi\left[z' z_, + \left(1 + z_,^2\right) y'\right] &= 0 \\
(\mu)\, V\,(\Gamma) + \Pi\left[z' z_, y' + 1 + z'^{\,2}\right] &= 0 \\
(\nu)\, V\,(\Gamma) - \Pi\left[z' z_, + \left(1 + z_,^2\right) y'\right] z' + \Pi\left[z' z_, y' + 1 + z'^{\,2}\right] z_, &= 0
\end{aligned}
\tag{62}
$$

essendo

$$
V = \sqrt{1 + y'^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}
$$

dove

$$
\frac{dz}{dx} = z' + z_, y',
$$

cioè $\frac{dz}{dx}$ significa la derivata totale della z per la x, z' la sola derivata parziale della $z(x, y(x))$ per la x che è esplicita alla y : y' è la derivata della y per la x. Rammentesi poi che nel luogo citato si è detto essere (Γ) la densità lineare pel punto (x, y, z) di quella curva, $(\lambda), (\mu), (\nu)$ le tre componenti rettangolari della pressione esercitata su detto punto.

Le (62), dopo facili riduzioni possono scriversi

$$
\begin{aligned}
&(\lambda)(\Gamma) = \Pi R \cdot \frac{y' + z_, \frac{dz}{dx}}{RV}; \quad (\mu)(\Gamma) = -\Pi R \cdot \frac{1 + z' \frac{dz}{dx}}{RV}; \\
&(\nu)(\Gamma) = \Pi R \cdot \frac{z' y' - z_,}{RV}.
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Queste ci dicono due verità importanti. La prima che le tre $(\lambda)(\Gamma), (\mu)(\Gamma), (\nu)(\Gamma)$ sono le componenti rettangolari secondo i tre assi di un'unica forza ΠR, la cui direzione fa coi tre assi medesimi angoli di coseni

$$
\frac{y' + z_, \frac{dz}{dx}}{RV}; \quad -\frac{1 + z' \frac{dz}{dx}}{RV}; \quad \frac{z' y' - z_,}{RV};
\tag{64}
$$

è perpendicolare (come a momenti dimostreremo) alla tangente della curva di contorno nel punto (x, y, z), e giace nel piano ivi tangente alla superficie. Ecco la quantità ΠR rivestita della rappresentazione dell'anzidetta forza. La seconda verità è che questa pressione ΠR, in conseguenza della (60), è espressa anche da $2\Gamma^2 Q$; cioè, quando Q (rivedi la prima delle (58)) non è funzione delle x, y, z, perchè queste non entrano nella T esplicitamente al radicale (caso dei fluidi elastici non gravi, come si è detto anche al n. 39), si verifica qui pure il teorema di Mossotti e di Laplace della proporzionalità let point (x, y, z) belong to such a contour curve: let us consider the mechanical equations as limited to the motion and the equilibrium of such a portion of the system, while the effect of all the surrounding matter remains replaced by pressures exerted on the aforementioned contour line.

The equations written in formula (47) sect. 10 will give us, once values (61) are taken into account,

$$
\begin{aligned}
&(\lambda)\, V\,(\Gamma) - \Pi\left[z' z_{,} + \left(1 + z_{,}^{2}\right) y'\right] = 0\\
(62)\qquad &(\mu)\, V\,(\Gamma) + \Pi\left[z' z_{,} y' + 1 + z'^{\,2}\right] = 0\\
&(\nu)\, V\,(\Gamma) - \Pi\left[z' z_{,} + \left(1 + z_{,}^{2}\right) y'\right] z' + \Pi\left[z' z_{,} y' + 1 + z'^{\,2}\right] z_{,} = 0
\end{aligned}
$$

being

$$V = \sqrt{1 + y'^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

and where

$$\frac{dz}{dx} = z' + z_{,} y',$$

which means that symbol $\frac{dz}{dx}$ denotes the total derivative of the variable z with respect to the variable x, while the symbol z' denotes the partial derivative of function $z(x, y(x))$ with respect the variable x which is obtained by fixing variable y: and y' is the derivative of variable y with respect to x. It has to be kept in mind then, that in the aforementioned section symbol (Γ) was introduced to denote the linear density of that curve at point (x, y, z), while symbols $(\lambda), (\mu), (\nu)$ were used for the three rectangular components of the pressure exerted in that point.

The (62), after simple reductions, can be written as follows

$$
(63)\qquad
\begin{aligned}
&(\lambda)(\Gamma) = \Pi R \cdot \frac{y' + z_{,} \frac{dz}{dx}}{RV}; \quad (\mu)(\Gamma) = -\Pi R \cdot \frac{1 + z' \frac{dz}{dx}}{RV};\\
&(\nu)(\Gamma) = \Pi R \cdot \frac{z' y' - z_{,}}{RV}.
\end{aligned}
$$

These last equations tell us two important truths. The first one states that the three quantities $(\lambda)(\Gamma), (\mu)(\Gamma), (\nu)(\Gamma)$ are the three rectangular components along the three chosen axes of a unique force ΠR, whose direction forms with the same axes some angles having cosines

$$
(64)\qquad \frac{y' + z_{,} \frac{dz}{dx}}{RV}; \quad -\frac{1 + z' \frac{dz}{dx}}{RV}; \quad \frac{z' y' - z_{,}}{RV};
$$

[this direction] is perpendicular (as we will show soon) to the tangent to the contour curve at point (x, y, z), and lies in the plane which is tangent in the same point to the surface. We can attribute therefore to quantity ΠR the role of representing the aforementioned force. The second truth is that such pressure ΠR, as a consequence of equation (60), is expressed also by product $2\Gamma^2 Q$; this, when Q (one has to go back to the first of the (58)) is not a function of variables (x, y, z), because these do not appear explicitly in the field T independently of the radical (the case of elastic fluids in absence of gravity, as it was said also in the sect. 39), it is verified also here the theorem by Mossotti and Laplace which states the proportionality della pressione al quadrato della densità. Che poi le tre componenti rettangolari della pressione debbano essere in quel punto le $(\lambda), (\mu), (\nu)$ moltiplicate per la densità lineare (Γ), si troverà convenientissimo dopo aver ricordati i ragionamenti addotti sul fine del n. 35. Vorrei che questi moltiplicati esempi servissero a persuadere che la chiarezza delle idee risulta soltanto dal complesso di tutte le parti della questione esaminata nell'insieme delle varie equazioni per l'interno dei sistemi e per i limiti: equazioni che emergono spontaneamente dai nostri metodi.

45. Metto la dimostrazione del teorema geometrico enunciato riguardo alle frazioni (64). Che la somma dei loro quadrati eguaglia l'unità, condizione indispensabile affinchè esse esprimano i valori dei coseni dei tre angoli fatti da una retta coi tre assi ortogonali, è proprietà facilmente verificabile dopo ricordati i valori di R e di V: ma l'andamento regolare è il seguente.

Siano

$$\frac{l-x}{\alpha} = \frac{m-y}{\beta} = \frac{n-z}{\gamma} \tag{a}$$

le equazioni di una retta che passa pel punto (x, y, z) : α, β, γ sono i tre coseni degli angoli ch'essa fa coi tre assi ortogonali. Tal retta deve essere perpendicolare alla tangente nel punto (x, y, z) della curva a doppia curvatura, tangente le di cui equazioni sono

$$\xi - x = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{dx}}.$$

Dunque l'angolo fatto da queste due rette deve essere retto, e quindi per teorema notissimo fra i coseni degli angoli da esse fatte coi tre assi

$$\alpha + \beta y' + \gamma \frac{dz}{dx} = 0. \tag{b}$$

Di qui la nostra retta deve giacere sul piano tangente alla superficie nel punto (x, y, z), piano la cui equazione è

$$(p-x)z' + (q-y)\, z, = r - z;$$

i valori pertanto di l, m, n cavati dalle (a) debbono soddisfare a quest'ultima equazione ove mettansi per p, q, r : di qui l'altra

$$\alpha z' + \beta z, - \gamma = 0. \tag{c}$$

Aggiungiamo l'equazione

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{d}$$

of pressure to the square of density. It is then really reasonable having found that the three rectangular components of pressure must be, in that point, obtained by multiplying quantities $(\lambda), (\mu), (\nu)$ by the linear density (Γ), after recalling the reasonings presented at the end of the sect. 35. I would expect that all these many examples would persuade [the reader] that the clarity of the ideas can be obtained only by the complex of all parts of the problem which we are dealing with, once it is examined to include the set of all equations which is valid in the interior of the system and at its boundaries: equations which are all together obtained naturally by the application of our methods.

45. I present here the demonstration of the geometrical theorem which was announced before regarding fractions (64). [The property which we are talking about] states that the sum of their squares is equal to unit, which is an indispensable condition to assure that they express the values of the cosines of the three angles formed by a straight line with the three orthogonal axes, and such a property can be easily verified after recalling the values of quantities R and V: a plain demonstration of this verification is given in what follows.

Let

(a) $$\frac{l-x}{\alpha} = \frac{m-y}{\beta} = \frac{n-z}{\gamma}$$

be the equations of a straight line which is passing through point (x, y, z): and α, β, γ be the three cosines of the angles which this line forms with the three orthogonal axes. This straight line must be perpendicular to the tangent at point (x, y, z) of the curve with double curvature, and this tangent line has the following equations:

$$\xi - x = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{\frac{dz}{dx}}.$$

Therefore the angle formed by these two straight lines must be a right angle and therefore, for a well-known theorem which relates the cosines of the angles formed by these two lines with the orthogonal axes, we have

(b) $$\alpha + \beta y' + \gamma \frac{dz}{dx} = 0.$$

This implies that our straight line must be included in the tangent plane to the surface at point (x, y, z), and this plane has the following equation

$$(p-x)z' + (q-y)\, z, = r - z;$$

therefore the values of quantities l, m, n as obtained from equations (a) must verify this last equation, when replaced with p, q, r: this implies the following other equality

(c) $$\alpha z' + \beta z, - \gamma = 0.$$

Let us add now also this equality

(d) $$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

portata dalla condizione più sopra ricordata. La risoluzione delle tre equazioni (b), (c), (d), che si presenta facile e lascio alla perizia del lettore, darà per α, β, γ i valori (64).

46. Finalmente tratteremo presso a poco allo stesso modo anche i sistemi lineari.

Qui pure, come al n. 40, faremo precedere l'analisi del moto di un liquido alla maniera di Lagrange, giusta la quale si contempla la sola condizione della densità costante. Essendo (n. 11, 67, m.p., ed equazione (6) n. 13 dell'attuale)

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

nella supposizione della densità costante avremo

$$\alpha = \text{cost.};$$

epperò il termine da aggiungere sotto il secondo integrale nell'equazione generalissima (8) del n. 7, sarà unicamente $\frac{1}{2}\lambda\delta\alpha$. Il caso attuale combina con quello degli altri due coefficienti μ, ν resi nulli, già trattato nel n. 7 anzidetto: sono pertanto qui applicabili le equazioni colà segnate (14), che riducono le (12) ivi precedenti alle

$$\begin{aligned} \Gamma V\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \left(\frac{\lambda}{\Gamma V}\right)' \\ \Gamma V\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \left(\frac{\lambda y'}{\Gamma V}\right)' \\ \Gamma V\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \left(\frac{\lambda z'}{\Gamma V}\right)' \end{aligned} \tag{65}$$

essendo

$$V = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2};$$

qui gli apici indicano le derivate di y, z relativamente alla x. Da queste si cava il valore di $\frac{\lambda}{\Gamma}$, come nella (15) del citato numero, che è bene d'immaginare ripetuta in questo luogo.

Viste poi le equazioni (9), (11) del n. 7, e ricordato quanto si è detto nei luoghi analoghi pei sistemi a tre e due dimensioni (n. 51 m.p., e n. 10 e 44 dell'attuale) : si capirà che a ciascuno dei punti all'estremità del sistema lineare deve verificarsi un'equazione

$$(\lambda)\,\delta x + (\mu)\,\delta y + (\nu)\,\delta z + \frac{\lambda}{\Gamma V}\,(\delta x + y'\delta y + z'\delta z) = 0,$$

la quale si rompe nelle tre

$$(\lambda) = \frac{\lambda}{\Gamma V}; \quad (\mu) = \frac{\lambda y'}{\Gamma V}; \quad (\nu) = \frac{\lambda z'}{\Gamma V}, \tag{66}$$

which is implied by the previously recalled condition. The solution of the three equations (b), (c), (d), which is easy and which I leave to the expertise of the reader, will give for α, β, γ the values in equation (64).

46. Finally we will treat nearly in the same way the linear systems, too.

Also here, as in sect. 40, we will start with the analysis of the motion of a liquid following the ideas of Lagrange, who considered only the case of constant density. Being (sects. 11 and 67 p.m. and equation (6) sect. 13 of the present one)

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

under the assumption of constant density we will have:

$$\alpha = \text{const.};$$

and therefore the term to be added under the second integral in the most general equation (8) of sect. 7, will be only $\frac{1}{2}\lambda\delta\alpha$. The present case will reduce to the one where the two coefficients μ, ν are vanishing and which was already treated in the aforementioned sect. 7: therefore equations which were labelled there as (14) are applicable here, and they reduce the (12) to the following ones:

$$(65) \qquad \begin{aligned} \Gamma V\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right) &= \left(\frac{\lambda}{\Gamma V}\right)' \\ \Gamma V\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right) &= \left(\frac{\lambda y'}{\Gamma V}\right)' \\ \Gamma V\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right) &= \left(\frac{\lambda z'}{\Gamma V}\right)' \end{aligned}$$

being

$$V = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2};$$

where the primes indicate the derivatives of variables y, z with reference to variable x. These last equations allow the calculation of quantity $\frac{\lambda}{\Gamma}$, as it has been done in the (15) of the cited section, equation which is suitable to rewrite here.

Considering then equations (9), (11) of sect. 7, and recalling what was found in the similar reasonings for two-dimensional and three-dimensional systems (sect. 51 p.m. and sect. 10 and sect. 44 of the present memoir): it will be understood that at each of the points lying at the extremity of linear system an equation having the following structure must be verified

$$(\lambda)\,\delta x + (\mu)\,\delta y + (\nu)\,\delta z + \frac{\lambda}{\Gamma V}\,(\delta x + y'\delta y + z'\delta z) = 0,$$

which implies the following three

$$(66) \qquad (\lambda) = \frac{\lambda}{\Gamma V}; \quad (\mu) = \frac{\lambda y'}{\Gamma V}; \quad (\nu) = \frac{\lambda z'}{\Gamma V},$$

essendo $(\lambda), (\mu), (\nu)$ le tre componenti rettangolari secondo i tre assi di una forza applicata singolarmente a quel punto estremo.

E adesso vediamo a che vien ridotta la questione dei sistemi lineari dal principio adottato in questo Capo.

Considerate le equazioni (5), (8) del n. 12 capiremo che nella serie (8) basterà tener conto del solo primo termine (1) $\delta\alpha$, essendo $(1) = \int df \cdot Tf^2$ e T della forma

$$T(x, y, z, x+\xi, y(x+\xi), z(x+\xi)) \tag{67}$$

gli altri coefficienti nella serie sarebbero integrali dove sotto il segno la T verrebbe ad essere moltiplicata per f^3, f^4, ec., e si proverebbero trascurabili con ragionamento analogo al già fatto per gli altri due sistemi. Abbiamo poi

$$\xi = \frac{dx}{da} f + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{da^2} f^2 + \text{ec.} \tag{68}$$

e ne deduciamo inversamente

$$f = \frac{\xi}{\frac{dx}{da}} + \text{ec.}$$

dove nell'eccetera seguirebbero termini colla ξ al quadrato, al cubo, ec. Quest'ultima può anche scriversi (vedi equazione (13) n. 7)

$$f = \Gamma V \xi + \text{ec.} \tag{69}$$

e con tal valore di f trasformato il precedente integrale risulta

$$(1) = \Gamma^3 V^3 \int d\xi \cdot T\xi^2;$$

giacchè si trascurano per la solita ragione gli integrali seguenti nei quali la ξ sotto il segno fosse a più alta dimensione della seconda.

Ecco il coefficiente di $\delta\alpha$ quello stesso che più sopra abbiamo designato con $\frac{\lambda}{2}$; quindi

$$\lambda = 2\Gamma^3 V^3 \int d\xi \cdot T\xi^2. \tag{70}$$

Pel caso del fluido la forma della T è giusta il detto più volte

$$T\left(x, y, z, \sqrt{\xi^2 + (y'\xi + \text{ec.})^2 + (z'\xi + \text{ec.})^2}\right)$$

e può ritenersi semplicemente

$$T\left(x, y, z, \xi\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\right) \tag{71}$$

where symbols $(\lambda), (\mu), (\nu)$ denote the three rectangular components with respect to three chosen axes of a force applied exactly at that extremity point.

Now we see how the application of the principle assumed in this Capo reduces the theory for linear systems.

Once we have considered equations (5), (8) in sect. 12 we will understand that in the series (8) it will be sufficient to take into account only the first term (1) $\delta\alpha$, where $(1) = \int df \cdot Tf^{2}$, since, being T of this form

$$T(x, y, z, x+\xi, y(x+\xi), z(x+\xi)), \tag{67}$$

the other coefficients in the series would be integrals where, under the sign, quantity T would be multiplied by f^3, f^4, etc., and therefore they would be proven to be negligible with a reasoning analogous to the similar one applied to the other two kinds of systems. Since we have

$$\xi = \frac{dx}{da}f + \frac{1}{2}\frac{d^{2}x}{da^{2}}f^2 + \text{etc.} \tag{68}$$

it is possible to deduce, by inverting it, that

$$f = \frac{\xi}{\frac{dx}{da}} + \text{etc.}$$

where in the *et cetera* some terms would follow where variable ξ is squared, or raised to a cubic or higher power. This last equation can also be written (see equation (13) sect. 7)

$$f = \Gamma V \xi + \text{etc.} \tag{69}$$

and, with the value of f consequently transformed, the previous integral becomes

$$(1) = \Gamma^3 V^3 \int d\xi \cdot T\xi^{2};$$

as it is possible to neglect, for the usual reason, the following integrals, in which variable ξ under the integral sign would appear with powers higher than the second degree.

We therefore obtain the coefficient of $\delta\alpha$, the same coefficient which we have denoted before with $\frac{\lambda}{2}$; hence

$$\lambda = 2\Gamma^3 V^3 \int d\xi \cdot T\xi^{2}. \tag{70}$$

As it was said many times, in the case of fluids the form of variable T is given by

$$T\left(x, y, z, \sqrt{\xi^{2} + (y'\xi + \text{etc.})^{2} + (z'\xi + \text{etc.})^{2}}\right)$$

and one can simply assume

$$T\left(x, y, z, \xi\sqrt{1 + y'^{2} + z'^{2}}\right) \tag{71}$$

lasciando andare sotto il radicale gli ulteriori termini con potenze più elevate di ξ, e ciò per la stessa ragione già addotta parlando della formola (54).

Laonde nel caso attuale la (70) diventa

$$\lambda = 2\Gamma^3 V^3 \int d\xi \cdot T\,(x, y, z, \xi V)\,\xi^2. \tag{72}$$

Trasformiamo l'integrale ponendo

$$\xi V = p \qquad \text{nuova variabile}$$

e ci verrà

$$\frac{\lambda}{\Gamma} = 2\Gamma^2 \int dp \cdot T\,(x, y, z, p)\,p^2; \tag{73}$$

i limiti di questo integrale possono ritenersi al solito l'infinito negativo e il positivo.

La quantità $\frac{\lambda}{\Gamma}$ prende una rappresentazione mediante un artifitio simile al già usato al n. 44, quello cioè di considerare separatamente il moto di un arco di grandezza arbitraria, qual porzione del nostro fluido lineare, di cui il punto (x, y, z) sia ad una delle estremità : essendo supplito l'effetto di tutta la materia che precede o segue un tal arco per mezzo di pressioni ai suoi due corpi [terminali].

Le equazioni (66) provano che $(\lambda), (\mu), (\nu)$ sono le tre componenti rettangolari di un'unica forza $\frac{\lambda}{\Gamma}$ diretta secondo la tangente della curva nel punto (x, y, z). Adunque la $\frac{\lambda}{\Gamma}$ è la pressione nel punto (x, y, z) proveniente dalla materia che precede : e il suo valore (73) ci fa vedere che quando la forza interna T non è funzione di x, y, z, detta pressione è proporzionale al quadrato della densità : terzo ritorno del teorema di Mossotti e di Laplace.

NOTA AL CAPO IV.

Le sei quantità geometriche, i valori delle quali sono trovati dall'Autore, composti colle sole sei quantità $\alpha, \epsilon, \vartheta$.... e loro derivate, sono : le derivate delle lunghezze degli archi di due linee tracciate sul sistema superficiale; il coseno dell'angolo compreso dalle tangenti ad esse linee nel loro punto di intersezione; i raggi di curvatura delle linee medesime in quel punto, ed il coseno dell'angolo compreso da questi raggi.

Ora si presentano due domande. Non vi saranno altre quantità geometriche oltre le sei suddette, i valori delle quali sieno rappresentabili da quelle sei quantità? E nel caso si potesse dimostrare che ne sussistono altre, saranno ancora le sei superiori le più opportune ad introdursi nell'equazione della dinamica come quantità che vengono fatte variare dalle forze interne?

neglecting in this way under the radical the further terms where higher powers of variable ξ appear, and this because of the same reason already discussed when talking about formula (54).

Therefore in the present case equation (70) becomes

$$\lambda = 2\Gamma^3 V^3 \int d\xi \cdot T\,(x, y, z, \xi V)\,\xi^2 . \tag{72}$$

Let us transform the integral assuming

$$\xi V = p \qquad \text{as a new variable}$$

so that we get

$$\frac{\lambda}{\Gamma} = 2\Gamma^2 \int dp \cdot T\,(x, y, z, p)\,p^2 ; \tag{73}$$

the limits of this integral will be, as usual, plus and minus infinity.

Quantity $\frac{\lambda}{\Gamma}$ can be represented then by means of an artifice similar to that already used in the sect. 44, which consists in considering separately the motion of a curve segment of arbitrary length as a portion of our linear fluid, [segment] of which point (x, y, z) is one of the extremities: the effect of all matter which precedes or follows such curve segment being replaced by pressures exerted at its extremities.

Equations (66) prove that quantities $(\lambda), (\mu), (\nu)$ are the three rectangular components of a unique force $\frac{\lambda}{\Gamma}$ having the same direction as the tangent to the curve at point (x, y, z). Therefore quantity $\frac{\lambda}{\Gamma}$ is the pressure at point (x, y, z) which is exerted by the preceding matter : and its value (73) shows us that, when the internal force T is not a function of variables x, y, z, the aforementioned pressure is proportional to the square of the density: and this is the third recurrence of the theorem by Mossotti and Laplace.

ADDENDUM TO CAPO IV.

The six geometrical quantities, whose values are found by the Author to depend only on the six quantities $\alpha, \epsilon, \vartheta$.... and their derivatives, are: the derivatives of the lengths of the curve segments of two lines drawn on the superficial system; the cosine of the angle between the tangents at these last lines in their intersection point; the radii of curvature of the same lines in the same point and the cosine of the angle between these radii.

Now two questions arise. Are there other geometrical quantities, beyond the aforementioned ones, whose values can be represented by those six quantities? In the case where one could prove that there indeed exist other such quantities, can still those first six quantities be considered as the most suitable to be introduced in the equation of dynamics as the quantities whose variation is induced by internal forces?

Che le sei superiori non sieno le sole quantità geometriche rappresentabili mediante le $\alpha, \epsilon, \vartheta ....$ e loro derivate, lo si prova ponendo

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x_, & y_, & z_, \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x_, & y_, & z_, \\ x'_, & y'_, & z'_, \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x_, & y_, & z_, \\ x_{,,} & y_{,,} & z_{,,} \end{vmatrix}$$

giacchè si hanno le

$$D^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon & \frac{1}{2}\alpha' \\ \epsilon & \vartheta & \epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_, \\ \frac{1}{2}\alpha' & \epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_, & \chi \end{vmatrix}, \quad D_1^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon & \frac{1}{2}\alpha' \\ \epsilon & \vartheta & \frac{1}{2}\theta' \\ \frac{1}{2}\alpha_, & \frac{1}{2}\theta' & \omega \end{vmatrix}$$

$$D_2^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon & \epsilon_, - \frac{1}{2}\theta' \\ \epsilon & \vartheta & \frac{1}{2}\theta_, \\ \epsilon_, - \frac{1}{2}\theta' & \frac{1}{2}\theta_, & \vartheta \end{vmatrix}$$

e quindi tanto il valore del prodotto dei raggi di massima e minima curvatura corrispondenti ad un punto del sistema superficiale, quanto quello della loro somma, sono dipendenti da quelle sei quantità e loro derivate. Ciò posto, rimane dubbio se debbano essere assolutamente quelle sei le quantità geometriche le quali debbono introdursi nell'equazioni della dinamica; e ciò anche considerando che fra le quantità medesime non ve n'è alcuna che dipenda essenzialmente dalla natura geometrica del sistema superficiale. Crediamo quindi più opportuno il ritenere quali quantità fatte variare dalle forze interne le stesse sei qualità $\alpha, \epsilon, \vartheta ....$ come fece l'Autore al Capo II.

BRIOSCHI.

Now it can be proven that the abovementioned six quantities are not the only ones which can be represented by means of variables $\alpha, \epsilon, \vartheta$.... and their derivatives, by denoting

$$D = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x_, & y_, & z_, \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x_, & y_, & z_, \\ x'_, & y'_, & z'_, \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x_, & y_, & z_, \\ x_{,,} & y_{,,} & z_{,,} \end{vmatrix}$$

so that one can get

$$D^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon & \frac{1}{2}\alpha' \\ \epsilon & \vartheta & \epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_, \\ \frac{1}{2}\alpha' & \epsilon' - \frac{1}{2}\alpha_, & \chi \end{vmatrix}, \quad D_1^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon & \frac{1}{2}\alpha' \\ \epsilon & \vartheta & \frac{1}{2}\theta' \\ \frac{1}{2}\alpha_, & \frac{1}{2}\theta' & \omega \end{vmatrix}$$

$$D_2^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \epsilon & \epsilon_, - \frac{1}{2}\theta' \\ \epsilon & \vartheta & \frac{1}{2}\theta_, \\ \epsilon_, - \frac{1}{2}\theta' & \frac{1}{2}\theta_, & \vartheta \end{vmatrix}$$

and therefore both the value of the product of the radii of maximum and minimum curvature corresponding to a point of the superficial system and the value of their sum are dependent on those six quantities and their derivatives. Having ascertained this statement, one can doubt if the correct six geometrical quantities to be introduced in the equations of dynamics must absolutely be those [chosen by the Author]; and this also when considering that among those same quantities one cannot find any one which essentially depends on the geometrical nature of the superficial system. We believe hence that it is more suitable to accept as those quantities which are varied by the internal forces the same six quantities $\alpha, \epsilon, \vartheta$.... as the Author did in Capo II.

BRIOSCHI.